CARRÉS MAGIQUES Nouveaux horizons

Un plaisir mathématique

Claude Bégin
avec la collaboration de
Claude St-Hilaire

Cette page est laissée vide intentionnellement

Carrés magiques
Nouveaux horizons

Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2021
Bibliothèque nationale du Canada
ISBN 1-123-12345-0

Carrés magiques
Nouveaux horizons
Un plaisir mathématique

Claude Bégin

avec la collaboration de

Claude St-Hilaire

Première Édition
2020

Boucherville, Québec,
Canada

Ouvrage conçu et réalisé de 1998 à 2021
par **Claude Bégin**
en collaboration avec Claude St-Hilaire
pour les programmes dans MAPLE
avec la contribution technique
de Paul Patenaude pour l'édition en format PDF
et pour la mise en ligne sur le site web carres-magiques.com

Tous les éléments de l'ouvrage avec ses annexes et tous
les programmes sont disponibles sur le site web
carres-magiques.com

Auteur

Claude Bégin a été professeur de mathématiques de 1966 à 1999. Après le baccalauréat, il termine sa scolarité de maîtrise en mathématiques à l'UQAM. Avec l'Agence canadienne de Développement International (ACDI), de 1977 à 1981, il est professeur de mathématiques au Centre Pédagogique Régional (CPR) de Rabat, Maroc où il s'occupe principalement de la formation des homologues Marocains (complément de formation mathématique, didactique, séminaires). Puis il propose la mise en place d'un Concours Mathématique à l'échelle du Maroc, lequel a eu lieu. Il est aussi l'auteur de publications mathématiques : *Cours de mathématiques de Secondaire 5* pour le Ministère de l'Éducation, *Quelques sous-corps algébriquement clos du corps des nombres complexes* (Maroc), *Théorie des Graphes* (Maroc), *Équivalences et Ordres* (Permama), *Théorie des équations* (Permama), *Résolution des équations du troisième et du quatrième degré* (Permama), *Du Triangle de Pascal vers π*, *Problèmes de mathématiques* (Maroc), *Les droites dans le plan et dans l'espace*, *Polygones réguliers rationnellement inscriptibles dans un cercle*, quelques problèmes dans Mathematics Magazine et dans The College Mathematics Journal, *Nouveau procédé de construction de carrés magiques*…
L'Analyse, l'Algèbre, la Théorie des Nombres et la Résolution de Problèmes sont ses principaux centres d'intérêts sans oublier les Carrés Magiques et les Carrés Multiplicatifs et enfin, la Minéralogie.
Il a aussi participé à des Congrès sur l'Enseignement des Mathématiques (Bordeaux, France; Tunis, Tunisie; St-Jacques de Compostelle, Espagne) et fut membre de l'équipe Permama pendant quatre ans (1973 à 1977).

Collaborateur

Claude St-Hilaire a été professeur de mathématiques pendant 35 ans. Il a obtenu son baccalauréat en mathématiques de l'Université Laval. La Résolution de Problèmes a été un de ses principaux centres d'intérêts en plus de militer dans le syndicalisme pendant 20 ans. Il a construit de très beaux programmes avec MAPLE dont celui qui fournit les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Enfin, les carrés magiques ont été un autre de ses centres d'intérêts.

Remerciements

- À nos épouses, Danièle Roméo et Ginette Tremblay pour leur support incessant pendant une bonne dizaine d'années.
- À Ginette Bégin pour ses fichiers EXCEL qui permettent la construction de carrés magiques d'ordres 3 jusqu'à 32.
- À Claude Laflèche pour son aide technique dans les fichiers EXCEL.
- À Jean-Luc Gélinas de la firme InServio Inc. pour la création du site « carres-magiques.com ».
- À Paul Patenaude pour la mise en ligne de tous nos documents sur notre site web et pour la révision éditoriale complète de la version PDF de l'ouvrage.

Mise en garde

Cet ouvrage a été construit en trois parties, soit

- la **Partie 1** qui présente les principales notions sur les carrés magiques ainsi que leurs principales propriétés.
  Cette partie comporte sa propre table des matières, un développement important, un glossaire des termes importants, des propositions de problèmes et les solutions de ces problèmes.
  La Partie 1 comporte sa propre pagination.

- La **Partie 2** propose de nouveaux procédés de construction de carrés magiques notamment pour les carrés d'ordre 4, 5, 6 et 8. On y propose aussi un glossaire et environ 400 problèmes.
  Cette partie comporte aussi sa propre table des matières.
  La Partie 2 comporte sa propre pagination.

- La **Partie 3** est formée de compléments d'informations sous la forme de 34 annexes, dont le lisage des programmes pour les applications MATHEMATICA et MAPLE.
  Cette partie comporte aussi sa propre table des matières.
  Chaque annexe comporte sa propre pagination.

Remarque : L'ouvrage en entier, peu importe sa version, est l'ensemble des trois Parties décrites ci-dessus.

Cette page est laissée vide intentionnellement

Avant propos

Les carrés magiques existent déjà depuis plusieurs siècles et de nombreuses façons de les construire ont été découvertes tout au long de ces siècles. Un des plus spectaculaires est un carré magique d'ordre 4 trouvé par Dürer au seizième siècle. Il est formé des nombres entiers de 1 à 16 et sa somme magique est 34 (car 34 est la somme obtenue dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale). Aujourd'hui, nous savons que nous pouvons atteindre cette somme 34, de 86 façons différentes en faisant la somme des nombres situés dans quatre cases distinctes. Dürer le savait-il? Vous pouvez trouver, sur Internet, une grande quantité d'informations historiques ainsi que les procédés de construction de carrés magiques qui existent déjà depuis très longtemps. C'est pourquoi nous allons passer rapidement à l'étude des carrés magiques et à la présentation d'un tout nouveau procédé pour les construire.

L'approche utilisée ici est plutôt algébrique tout en ne négligeant pas l'aspect géométrique des carrés magiques. Le premier but a été la construction de nombreux et nouveaux carrés magiques d'ordre 4.

> Tout ça parce qu'un samedi soir, un magicien monte sur scène avec un carré 4 x 4 à remplir. Il demande à un spectateur de lui fournir un nombre entier entre 50 et 100. Cette fois, ce fut 82. Rapidement, le magicien remplit les seize cases du carré qui devient un carré magique de somme 82. La somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est 82, appelée **somme magique**. La somme des quatre coins, des quatre cases centrales donne aussi 82. Le magicien nous montre ainsi vingt façons différentes de choisir quatre cases qui totalisent l'entier 82.

Mais comment fait-il? Cet objet mathématique est tout simplement extraordinaire!!! En fait, nous verrons que le magicien construisait un carré magique appelé un Dürer, caractérisé par 24 façons différentes d'arriver à la somme 82 (et non 20 façons). De plus, certains Dürer nous permettent de trouver la somme magique jusqu'à 86 façons différentes en faisant la somme des nombres entiers situés dans quatre cases distinctes.

> Je ne comprends pas ce qui se passe et je laisse tout cela de côté en me disant que j'allais y revenir plus tard. Mais voilà qu'un ami mentaliste m'invite à un souper-spectacle pendant lequel il nous refait le coup du carré magique! Encore vingt façons d'arriver à la somme donnée au hasard par un spectateur.
>
> Revenu à la maison, la commande est énorme!!! Je me dis qu'il est temps de réagir et de trouver une explication à tout cela. La grande aventure « Carrés Magiques » commence ce jour-là.

La Partie 1 de l'ouvrage présenté ici portera sur la construction de carrés magiques d'ordre 4 qui auront le plus grand nombre de figures magiques, une **figure magique** étant un groupe de quatre cases distinctes dont la somme des nombres qui s'y trouvent est la somme magique. Voilà un de nos objectifs. Pour ce faire, nous avons trouvé un carré magique général M d'ordre 4 qui permet de construire que des carrés magiques d'ordre 4 et de les construire tous. Puis en imposant des figures magiques à M, nous avons construit des classes (espaces vectoriels sur les nombres réels) de carrés magiques qui possèdent tous les mêmes figures magiques caractéristiques.

Ces classes ont été nommées : sous-espace des Dürer, des super-Dürer, des super-Dürer-alpha, des super-Dürer-bêta, des A-Dürer, des diaboliques et des diaboliques-alpha. Le célèbre carré magique d'Albert Dürer étant un diabolique-alpha. Nous avons choisi ces noms en l'honneur de Dürer.

Vous pourriez fabriquer d'autres classes (sous-espaces) de carrés magiques en imposant la ou les figures magiques que vous désirez. Nous verrons cela au chapitre 5 de la Partie 2 de l'ouvrage.

Puis la tentation devient trop forte, nous devons aller voir les carrés magiques 3×3, les 5×5 et pourquoi s'arrêter là? Il y a de très beaux 6×6 et 8×8. Finalement, nous décidons de considérer les carrés magiques $n \times n$ où n est un entier plus grand ou égal à un. La grande aventure « Carrés Magiques » devient encore plus grande!!!

Dans nos carrés magiques, nous acceptons de placer dans ceux-ci, tout ce qui s'additionne. Pourquoi pas des nombres réels, des nombres complexes, des polynômes, des fonctions quelconques et même des carrés magiques. Mais avant tout, notre premier objectif est de construire des carrés magiques formés d'entiers positifs (> 0) tous différents, que nous appelons **carrés magiques presque normaux**. Notre deuxième objectif est de construire des carrés magiques formés d'entiers consécutifs à partir de 1, appelés **carrés magiques normaux**. Puis notre troisième objectif est de construire des carrés magiques dans lesquels nous trouvons le plus grand nombre possible de figures magiques.

L'ouvrage que nous présentons ici est en **trois parties**. **La Partie 1** s'adresse à tous et n'exige à peu près pas de connaissances mathématiques. Vous y trouverez les notions de base ainsi qu'une galerie de carrés magiques lesquels présentent des propriétés étonnantes. Également, un procédé pour construire un carré magique de toutes les tailles.

Vous voulez construire un carré magique 8×8 qui sera normal, très facile!!! Vous voulez un presque normal 35×35, très facile mais aussi, il faudra compter quelques heures!!! Ce dernier carré magique, une fois construit, sera un objet mathématique extraordinaire!!!

La Partie 2 demande une certaine formation mathématique : connaissance des espaces vectoriels, de la notion de dimension, de l'algèbre linéaire en général. Nous présentons certains théorèmes avec la démonstration complète mais aussi d'autres avec seulement les idées de base pour que vous puissiez compléter la preuve.

La **Partie 3** propose un grand nombre de programmes qui permettent la construction de carrés magiques ayant des propriétés spéciales. On y trouve 34 annexes qui sont des compléments d'informations. Par exemple, l'annexe 18 vous présente des carrés magiques d'ordre 3 formés de 9 nombres premiers consécutifs. Quant aux programmes, par exemple, vous trouverez un programme qui permet de construire tous les carrés magiques normaux d'ordre 4; il y en a 7040. On peut télécharger ces programmes sur le site Web carres-magiques.com. On propose aussi des fichiers qui permettent la construction de carrés magiques pour les ordres 3 à 24 (MATHEMATICA), 3 à 32 (EXCEL) et des programmes pour les ordres 3 à 28 (MAPLE). Dans tous les cas, la construction est très simple et fait appel à seulement trois variables. Il vous suffit d'attribuer une valeur entière à chaque variable et le carré magique est aussitôt construit. Nous disons valeur entière, car nous préférons des carrés formés d'entiers!!!

Dans la **Partie 2**, nous avons un chapitre sur les **carrés multiplicatifs** dans lesquels nous faisons le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale. Si ce produit est le même, appelé **produit magique**, nous disons que notre carré est **multiplicatif**.

Chaque fois que nous construisons une nouvelle classe de carrés magiques, nous allons toujours nous demander s'il est possible d'en obtenir qui soient au moins presque normaux et même qui soient normaux et dans ce cas, combien il y en a.

Par exemple, nous avons fabriqué la classe (sous-espace) des super-Dürer-alpha qui sont des carrés magiques d'ordre 4 caractérisés par 68 figures magiques. Cela signifie que tous ces carrés possèdent les mêmes 68 figures magiques. De plus, nous avons montré qu'il n'existe que **huit** super-Dürer-alpha normaux. Ils sont dans le chapitre 5 de la Partie 2.

De même pour les carrés multiplicatifs; peuvent-ils n'être formés que d'entiers tous différents et ≥ 1 ? Nous montrerons que oui.

À la fin de chaque chapitre se trouvent des problèmes qui permettent un approfondissement des sujets traités.

Nous vous présenterons un certain nombre de conjectures et nous souhaitons que celles-ci deviennent des théorèmes dans un avenir rapproché!!! Pour établir ces conjectures, nous avons tenu compte d'un grand nombre de cas particuliers (très souvent quelques centaines) et de notre intuition et ce, avec un degré de confiance très élevé.

Suggestions :

> Pour l'étude des carrés magiques d'ordre 4, gardez près de vous le carré (*) de 5.1, chapitre 5 de la Partie 2.
> Dans la section 4.3.1 du chapitre 4 de la Partie 2, gardez près de vous les notations utilisées pour les rotations des carrés.

Revenons aux fichiers « Ordre 3 », « Ordre 4 »… Ceux-ci sont construits à partir de trois algorithmes appelés ALG-1, ALG-2 et ALG-3 (voir Partie 2, chapitre 11).

ALG-1 nous permet de construire des carrés magiques d'ordres impairs. Pour chaque ordre impair $n \geq 3$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques (voir le glossaire de la Partie 1) d'ordre $n = 2k + 1$. En suivant une toute petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins un qui sera normal. Pour construire tous ces carrés magiques d'ordre n, nous n'avons besoin que de trois variables a, r et t. Vous donnez à chacune de ces variables une valeur et il en résultera un carré magique arithmétique qui de plus, sera associatif (voir 12 du glossaire de la Partie 1). Mais à partir de cette structure générale, nous n'obtenons pas tous les carrés arithmétiques. D'en obtenir une infinité n'est déjà pas si mal!!!

Il en sera de même avec ALG-2 qui nous permet de construire des carrés magiques d'ordres pairs multiples de 4. Pour chaque ordre pair multiple de 4 à partir de $n = 4$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques d'ordre $n = 4k$. En suivant la même petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins un qui est normal. De plus, ces carrés sont tous associatifs.

Enfin, ALG-3 nous permet de construire des carrés magiques d'ordres pairs non multiples de 4. Pour chaque ordre pair non multiple de 4 à partir de $n = 6$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques d'ordre $n = 4k + 2$. En suivant la même petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins deux qui sont normaux. En général, ils ne sont pas associatifs.

La structure générale des carrés magiques d'ordre 3, par exemple, est un carré magique dans lequel nous trouvons des expressions algébriques dans chacune de ses neuf cases. Nous pourrions avoir dans une case l'expression a. Nous pouvons alors attribuer à a la valeur que nous voulons. Dans chacune des autres cases, nous devons attribuer la même valeur à a dans l'expression qui s'y trouve. Si nous avons posé a = 4, alors dans l'expression S – a – b , nous devons remplacer a par 4, b par sa valeur et S par la sienne. Voyons cette structure générale :

$$
\begin{pmatrix}
a & b & S-a-b \\
\frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\
a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a
\end{pmatrix}
\quad (*)
$$

Ce carré d'ordre 3 est magique, car la somme obtenue dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est toujours la même soit S. Nous y voyons trois variables qui sont, a, b et S. Une des cases renferme l'expression S – a – b, par exemple. Donnons aux trois variables les valeurs a = 4, b = 9 et S = 15. Nous obtenons alors le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

ou

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Le premier carré à gauche est sous forme matricielle tandis que celui de droite est sous forme standard. Dans l'ouvrage, nous utiliserons les deux formes. Ici, la somme magique est 15.

Le carré magique (*) est **la structure générale** des carrés magiques d'ordre 3. Cela signifie que (*) ne génère que des carrés magiques d'ordre 3 et les génère tous. Cette structure générale n'est cependant pas unique. Si nous avions une autre structure générale (**), alors celle-ci, semblable à (*), nous donnerait également tous les carrés magiques d'ordre 3. Nous dirions alors que les structures (*) et (**) sont équivalentes.

Donc quand nous disons « voici **la** structure générale des carrés magiques d'ordre 12 », cela ne doit pas laisser sous-entendre qu'elle est unique. Nous pourrions aussi dire « voici **une** structure générale…», ce qui laisse sous-entendre qu'il y en a d'autres. Mais les autres sont équivalentes!

Vous trouverez, sur le CD, les fichiers « Ordre 3 », « Ordre 4 » jusqu'à « Ordre 24 » dans MATHEMATICA, jusqu'à « Ordre 32 » dans EXCEL et au moins jusqu'à « Ordre 28 » dans MAPLE. Ces fichiers vous permettent de construire, pour tous ces ordres, un carré magique normal et une infinité de carrés magiques presque normaux. Tous les carrés magiques ainsi construits sont des carrés arithmétiques; de plus, ils sont associatifs pour les carrés d'ordres impairs et pour ceux d'ordres pairs multiples de 4. Pour construire un carré magique normal d'ordre n, il suffit d'attribuer aux variables a, r et t les valeurs suivantes : a = 1, r = 1 et t = n ou a = 1, r = n et t = 1. Pour avoir un presque normal, il suffit d'attribuer à a, une valeur entière > 0, une valeur entière > 0 à r et une valeur entière > 0 à t avec t > (n – 1) r. Par exemple, pour n = 8, nous pouvons prendre a = 5, r = 3 et t = 22 ou tout entier > 21. Nous voyons qu'alors, il existe une infinité de carrés arithmétiques presque normaux. Notons ici que l'ordre d'un carré magique nous indique sa taille. Le petit carré ci-haut est d'ordre 3. Nous disons aussi que c'est un 3 × 3.

Chaque triplet (*a* ; *r* ; *t*) détermine donc un carré magique. Et oui, trois nombres suffisent!!!

Dans chaque fichier, vous trouverez la structure générale qui vous permettra de construire une infinité de carrés magiques presque normaux et au moins un carré normal. Ceux-ci sont tous arithmétiques (voir chapitre 11). Cependant, cette structure ne vous donne pas tous les carrés arithmétiques. C'est le cas avec MATHEMATICA.

Avec EXCEL, vous trouverez les trois carrés de base avec lesquels nous obtenons la structure générale, illustrée dans MATHEMATICA mais non dans EXCEL. Vous pouvez voir aussi les trois carrés de base dans MATHEMATICA.

Avec MAPLE, nous avons un premier programme qui vous permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres impairs à partir de n = 3. Cependant, pour imprimer ces carrés, il ne faut pas que l'ordre soit trop grand. Pour les voir à l'écran, sans problème, nous allons jusqu'à n = 53. Nous pourrons choisir un plus grand n si nous avons un plus grand écran!!! Ce programme se nomme **CM-arith-2k + 1.**

Notre deuxième programme, **CM-arith-4k**, permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres pairs multiples de 4 à partir de n = 4. Notre écran nous permet d'aller jusqu'à l'ordre n = 44.

Notre troisième programme, **CM-arith-4k + 2**, permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres pairs non multiples de 4 à partir de n = 6. Notre écran nous permet d'aller jusqu'à l'ordre n = 46.

Dans chacun de ces trois programmes, il vous faut préciser la valeur de n, l'ordre du carré normal que vous voulez construire. Pour les presque normaux, il vous faudra préciser la valeur de n, a, r et t, tout en respectant $t > (n - 1)\,r$ ou $r > (n - 1)\,t$, condition suffisante pour avoir un presque normal sachant que déjà, a, r et t prennent des valeurs entières > 0.

Dans la mesure du possible, nous chercherons toujours le nombre de figures magiques que possède un carré magique c'est-à-dire sa fréquence que nous notons f(S) où S est sa somme magique.

Nous verrons que parmi les carrés magiques, certains sont remarquables :

Les ultra-magiques et les hyper-magiques.
Certains carrés d'ordre 4, les super-Dürer-alpha par exemple (il n'y a que 8 normaux).
Carrés magiques formés exclusivement de nombres premiers.
Carrés magiques formés exclusivement de nombres composés.
Carrés magiques formés exclusivement de fonctions.
Carrés k-multi-magiques.
Carrés doublement magiques.
Carré magique d'ordre 8 qui renferme un seul nombre premier, par exemple.
Et ainsi de suite…

Puis les carrés multiplicatifs dans lesquels la multiplication remplace l'addition. Nous savons qu'à chaque carré magique correspond un carré multiplicatif et qu'à chaque carré multiplicatif correspond un carré magique.

Nous verrons aussi quelques cubes magiques parfaits.

On nous demande souvent à quoi servent les carrés magiques.

1 Au plaisir qu'ils nous donnent. Ils sont des objets mathématiques extraordinaires d'une grande beauté!!! Il nous est facile d'admirer certains carrés magiques ou cubes magiques ou carrés multiplicatifs de la même façon que nous pouvons admirer « La Ronde de nuit » de Rembrandt ou les symphonies de Mahler!!!
2 Ils nous permettent de résoudre plus simplement certains problèmes de mathématique.
3 Ils servent dans l'industrie du tissage.
4 Certains magiciens les utilisent.
5 On les utilise en biologie.

Dans notre ouvrage, l'expression « carré magique » reviendra très souvent puisque c'est le sujet de l'ouvrage. Par contre, quand le contexte le permettra, nous pourrons simplement utiliser le mot « carré ».

Vous trouverez les notations et symboles à la fin du glossaire 2 de la Partie 2.

Dans la Partie 1 de l'ouvrage, vous trouverez un grand nombre de carrés magiques numérotés. Par exemple, nous ferons référence au carré 20, au carré 28, au carré 34…

Toujours dans la Partie 1, nous parlerons de sections au lieu de chapitres. Il y en a 13 en tout. Nous ferons aussi référence à certains problèmes. Par exemple, le problème 59 de 5.18. Vous le trouverez dans le chapitre 5, section 5.18 dans la Partie 2.

Vue d'ensemble de l'ouvrage

Partie 1 – Introduction aux carrés magiques

Partie 2 – Les carrés magiques et les carrés multiplicatifs

Note : chaque chapitre de la Partie 2 comporte sa propre pagination

Partie 3 – Les annexes et les programmes

La Partie 3 de cet ouvrage propose 34 annexes qui sont des compléments d'informations. Par exemple, dans l'annexe 18, vous trouverez 10 carrés premiers parfaits d'ordre 3 (formés de 9 nombres premiers consécutifs) trouvés par Harry L. Nelson en 1988. Avant 1988, aucun carré premier parfait d'ordre 3 n'était connu.

Puis, vous trouverez des fichiers et programmes EXCEL (annexe 21), MATHEMATICA (annexe 22) et MAPLE (annexe 23). Ces annexes vous donnent le nom des fichiers et programmes ainsi qu'une brève description de chacun. Avant d'avoir accès à ceux-ci, nous vous suggérons fortement de consulter les annexes 21, 22 et 23.

Quant à l'annexe 23, vous y trouverez les programmes dans MAPLE construits par Claude St-Hilaire, lesquels ont apporté au texte un bon nombre de données nouvelles. Par exemple, nous savons qu'il existe 3456 Dürer parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Les deux programmes pour construire les m-ultra-magiques d'ordre 5 et les m-hyper-magiques d'ordre 6 méritent, comme aux échecs, un prix de beauté!!!

Annexe 1 : **Quelques structures générales**
Cette annexe présente les principales structures générales qui permettent la construction de nombreux carrés magiques et carrés multiplicatifs.

Annexe 2 : **Quelques conjectures et observations**
Les conjectures présentées ici peuvent être vues comme autant de projets de recherches.

Annexe 3 : **Carrés magiques emboités appelés r-tours**
Dans une r-tour, chaque carré magique M devient un autre carré magique si nous ajoutons une bordure autour de M. Vous verrez comment construire une r-tour. Par exemple, dans une 8-tour impaire, vous trouverez 8 carrés magiques d'ordres impairs.

Annexe 4 : **Réflexion sur les inverses**
L'inverse par rapport à quelle multiplication?

Annexe 5 : **Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus**
Ce sont des carrés magiques exceptionnels. Dans chaque colonne (rangée), tous les entiers se terminent par le même chiffre, différent d'une colonne (rangée) à l'autre.

Annexe 6 : **Lemme sur les diagonales brisées**
Nous montre comment les diagonales, grandes et brisées, se rencontrent à l'intérieur et à l'extérieur du carré. Il sert à démontrer l'algorithme ALG-1.

Annexe 7 : **Excursion dans les nombres premiers**
Cette annexe explore les nombres premiers et les n-uplets de nombres premiers.

Annexe 8 : **Suite de 16 nombres premiers consécutifs**
Nous construisons des carrés premiers parfaits d'ordre 4.

Annexe 9 : **Carré à la fois magique et multiplicatif**
Nous connaissons des carrés presque normaux qui sont à la fois magiques et multiplicatifs; ils sont d'ordres 7, 8 et 9 (voir chapitre 13 de la Partie 2). La présente annexe montre qu'il n'existe pas de tels carrés pour les ordres 3 et 4.

Annexe 10 : **Diviseurs universels**
Carré semi-magique d'ordre *n* qui divise tous les carrés magiques et semi-magiques d'ordre *n*.

Annexe 11 : **Carrés magiques avec k nombres premiers**
Vous voulez construire un carré magique d'ordre 6 qui contient exactement 5 nombres premiers, c'est très simple!!!

Annexe 12 : **5040 permutations, 5040 carrés magiques d'ordre 5**
Nous permutons les chiffres de tous les entiers d'un carré magique pour obtenir un nouveau carré magique de même somme!!!

Annexe 13 : **Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15**
Ces théorèmes montrent qu'il existe une infinité de carrés composés presque normaux et une infinité de carrés presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

Annexe 14 : **Preuve du théorème 14.9**
On donne ici la dimension de l'espace vectoriel des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale.

Annexe 15 : **Polynômes rationnels à valeurs entières**
On indique ici quand un polynôme à coefficients rationnels prend des valeurs entières lorsque la variable est un entier.

Annexe 16 : **Structure générale des hyper-magiques d'ordre 10**
Cette annexe nous permet de construire des hyper-magiques d'ordre 10. L'annexe 16 en présente un presque normal.

Annexe 17 : **Réflexion sur les rotations d'un carré**
On propose ici une façon de noter ces rotations.

Annexe 18 : **Carrés magiques d'ordre 3 avec 9 nombres premiers consécutifs**
Nous donne les 27 carrés premiers parfaits connus d'ordre 3.

L'annexe 18.1, présente 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 trouvés à l'aide de 3 p-générateurs. Nous en avons maintenant 50 en date du 26 juillet 2020.

Annexe 19 : **Comment j'ai trouvé ALG-1**
Montre le cheminement qui conduit à l'algorithme ALG-1 lequel nous permet de construire des carrés arithmétiques associatifs d'ordres impairs.

Annexe 20 : **Applications de carrés magiques**
Cette annexe présente quelques applications des carrés magiques.

Annexe 21 : **Les fichiers EXCEL**
Le fichier proposé permet de construire une infinité de carrés magiques d'ordres 3 à 32.
Ce chiffrier a été construit par Ginette Bégin.

Annexe 22 : **Les fichiers MATHEMATICA**
Ces fichiers (programmes) vous permettent de construire des carrés magiques d'ordres 3 à 24. D'autres vous donnent, pour un carré magique, le nombre de figures magiques, ses 8 équivalents, etc.

Pour utiliser ces programmes, vous devez disposer de l'application MATHEMATICA.

Annexe 23 : **Les programmes MAPLE**
Cette annexe vous présente un grand nombre de programmes dans MAPLE dont CM-arith-2k+1 qui vous permet de construire des carrés magiques (arithmétiques) d'ordres impairs. Un autre nous donne les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4 et les 880 primitifs, etc.

Pour utiliser ces programmes, vous devez d'abord disposer de l'application MAPLE. Téléchargez le dossier « Programme-MAPLE » comprenant les programmes et décompressez-le sur le bureau de votre ordinateur. Pour ouvrir un programme, chargez d'abord le programme Maple et allez choisir votre programme dans le dossier « Programmes-Maple » sur le bureau de l'ordinateur.
Note : ne pas essayer d'ouvrir un programme en double-cliquant dessus avant de charger le programme Maple.
Ouvrez ensuite l'application MAPLE, choisissez « Bureau » comme dossier des programmes à ouvrir, puis choisissez le programme à utiliser.

Annexe 24 : **Le procédé ± r ± t et ± t ± r pour construire les équivalents**
Une autre approche pour construire les équivalents d'un carré magique.

Annexe 25 : **Suites arithmétiques dans un carré magique**
On montre comment construire un carré magique dont les n² nombres forment une suite arithmétique.

Annexe 26 : **L'espace vectoriel des m-Dürer (MD*)**
On montre que nous sommes bien en présence d'un espace vectoriel sur R. Aussi, nous montre comment nous trouvons la structure générale des m-Dürer à partir de la structure générale des Dürer.

Annexe 27 : **Carrés magiques vers carrés multiplicatifs**
On y verra comment construire une structure générale de carrés multiplicatifs à partir d'une structure générale de carrés magiques.

Annexe 28 : **Une autre structure générale pour les Dürer**
Celle-ci est plus simple que la première!!!

Annexe 29 : **Problèmes supplémentaires**
Vous pouvez proposer un nouveau problème (avec solution) sur les carrés magiques ou multiplicatifs que nous ajouterons à l'annexe 29 en indiquant l'auteur de chaque problème.
L'annexe 29.1 présente des solutions aux problèmes de l'annexe 29.

Annexe 30 : **Les carrés géométriques**
Semblables aux carrés arithmétiques (chapitre 11), les carrés géométriques sont des carrés multiplicatifs tels que les nombres de ceux-ci forment un tableau géométrique (voir page 2 de l'annexe 30).