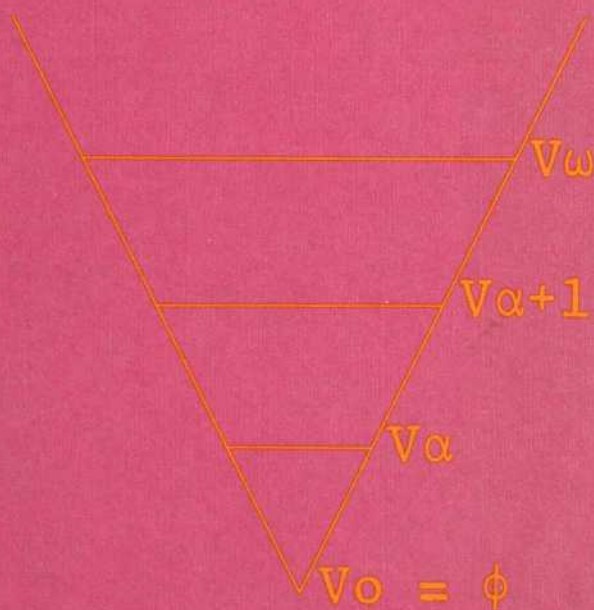


FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

YVON GAUTHIER

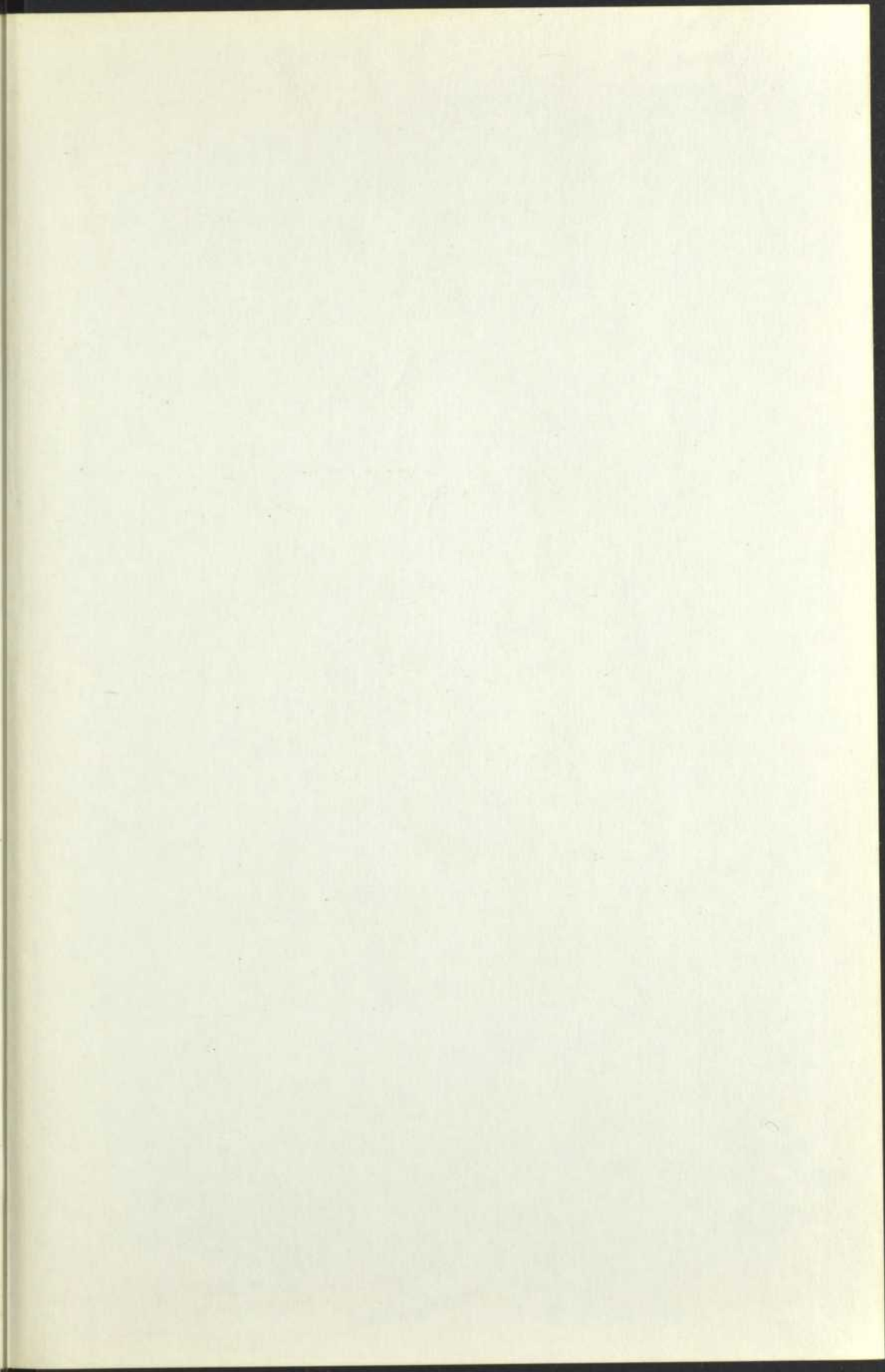
LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTREAL

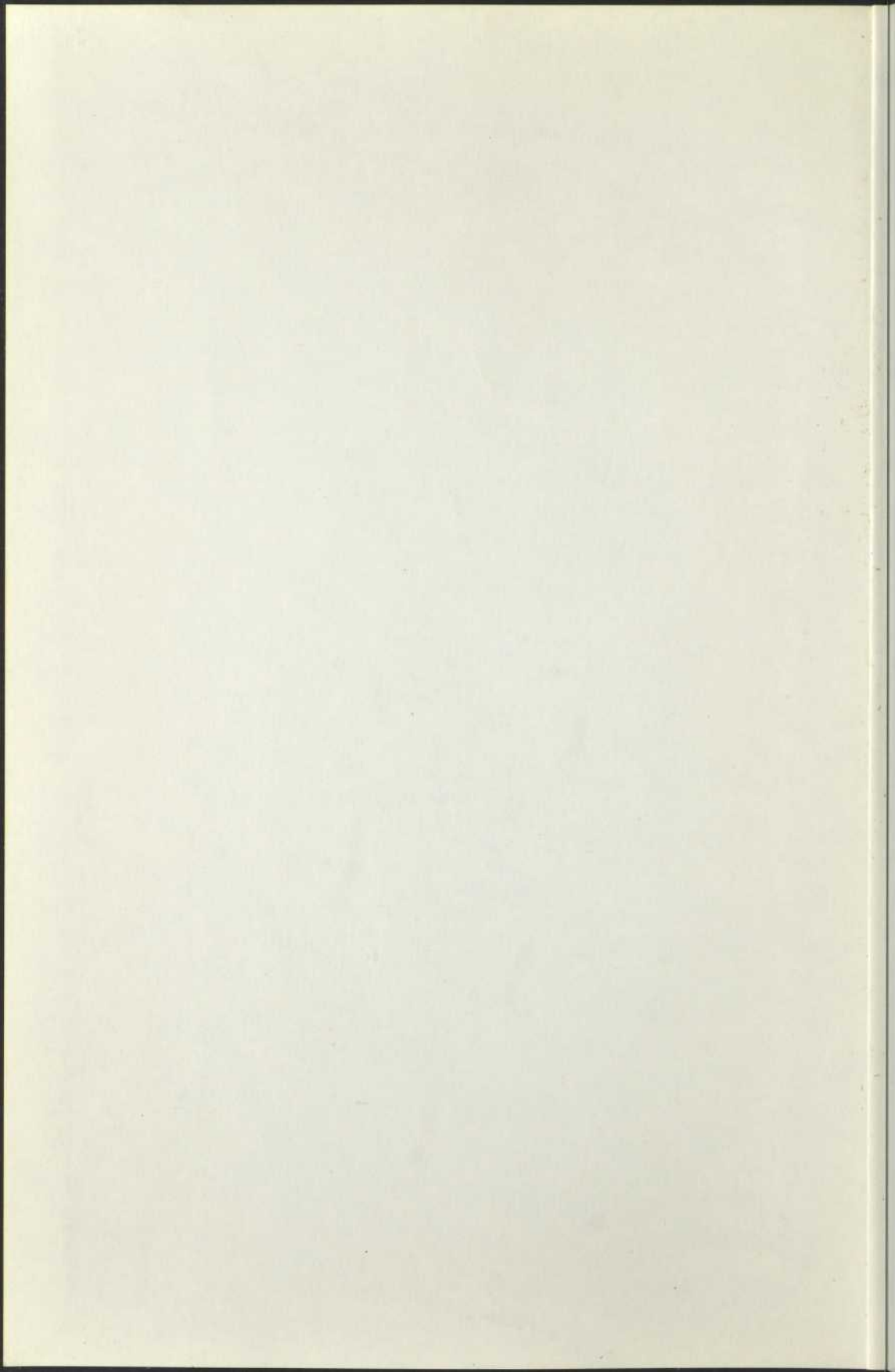


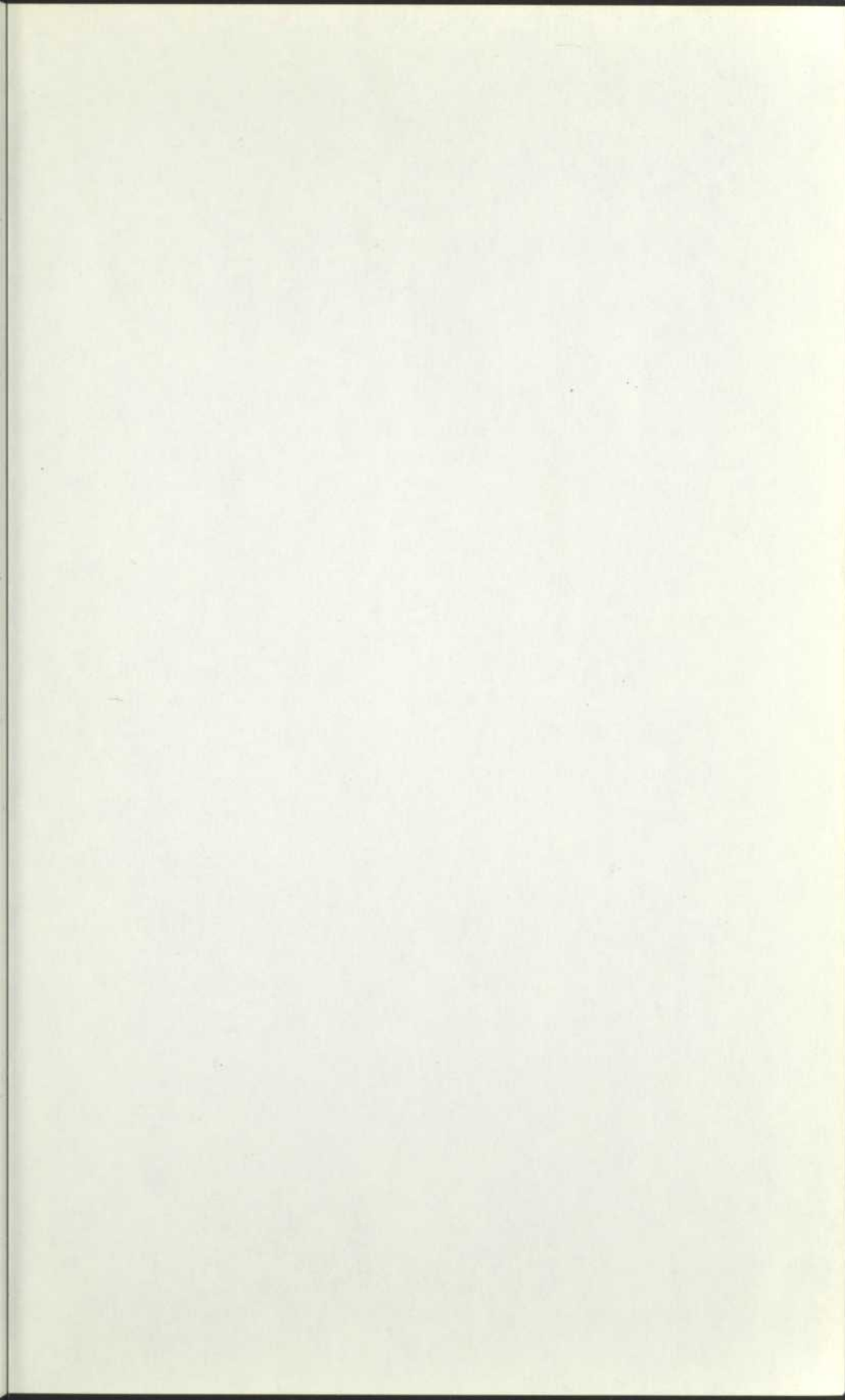
$(P(\beta)) \subset$

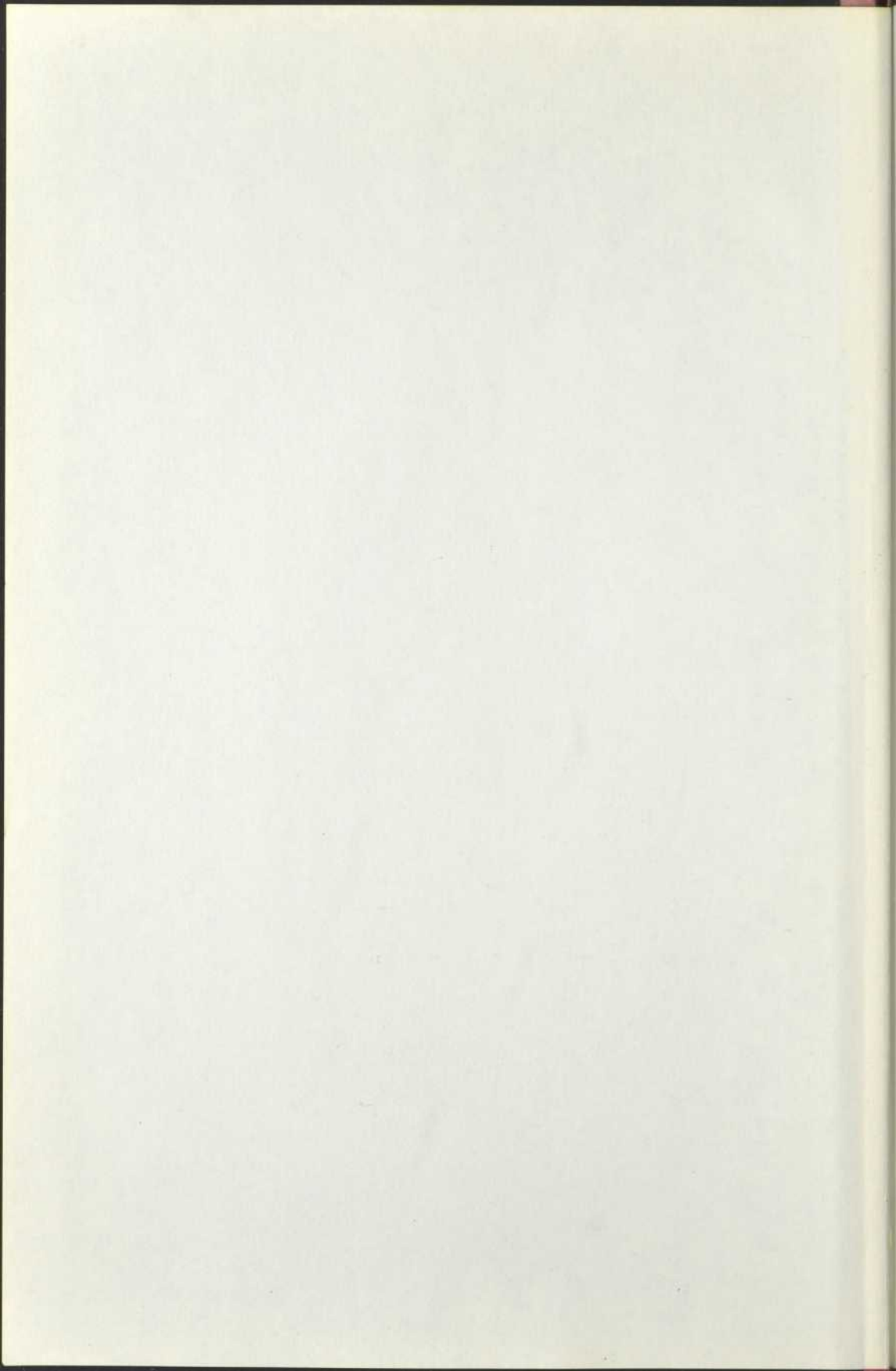


Bibliothèque Nationale du Québec



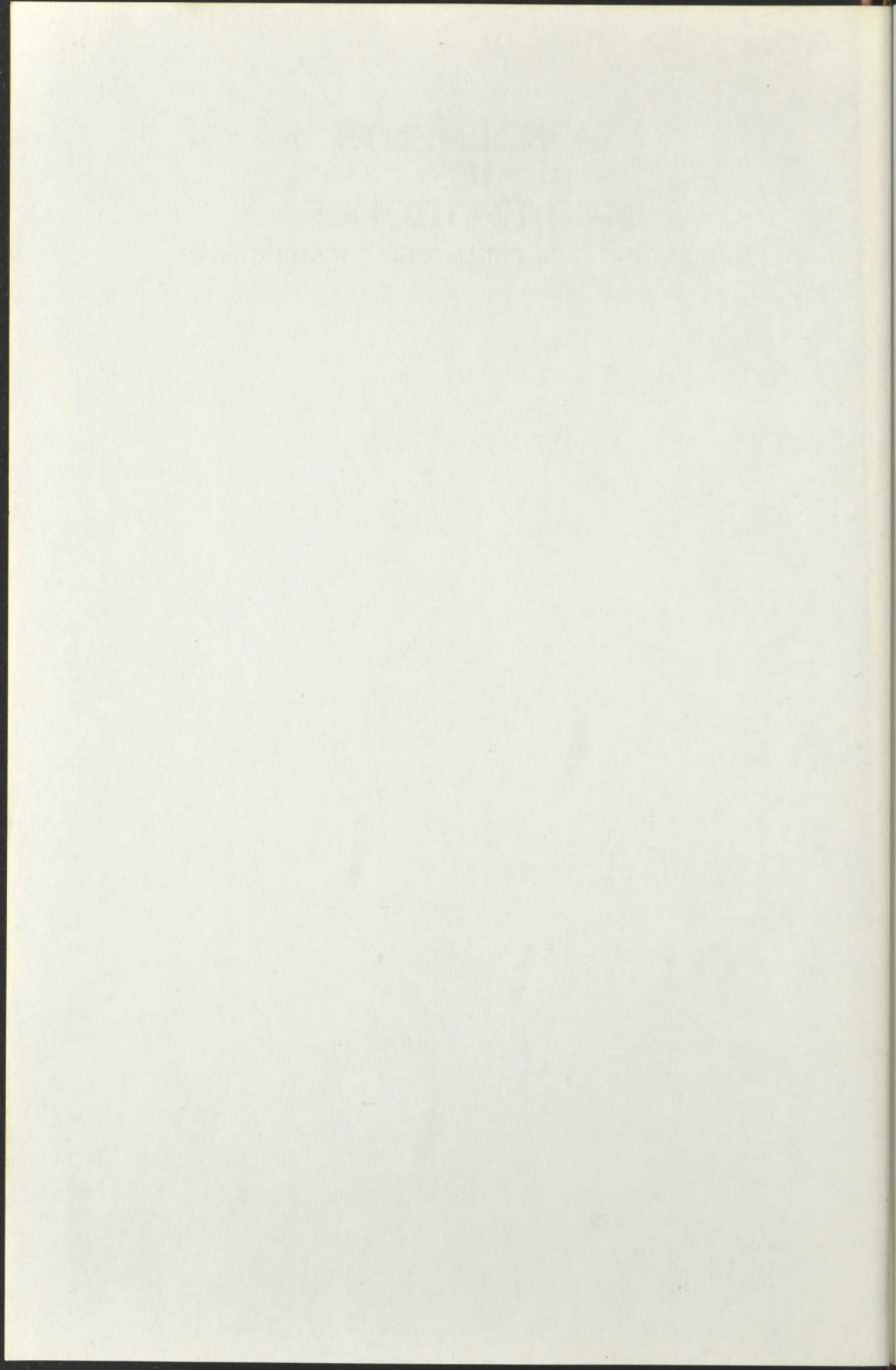






**FONDEMENTS
DES
MATHÉMATIQUES**

INTRODUCTION À UNE PHILOSOPHIE CONSTRUCTIVISTE



FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION À UNE PHILOSOPHIE CONSTRUCTIVISTE

YVON GAUTHIER

1976

Les Presses de l'Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. « A », Montréal, Qué., Canada H3C 3J7



CET OUVRAGE A ÉTÉ PUBLIÉ GRÂCE À UNE SUBVENTION DU CONSEIL
CANADIEN DE RECHERCHES SUR LES HUMANITÉS DONT LES FONDS
PROVIENNENT DU CONSEIL DES ARTS DU CANADA

ISBN 0 8405 0348 2

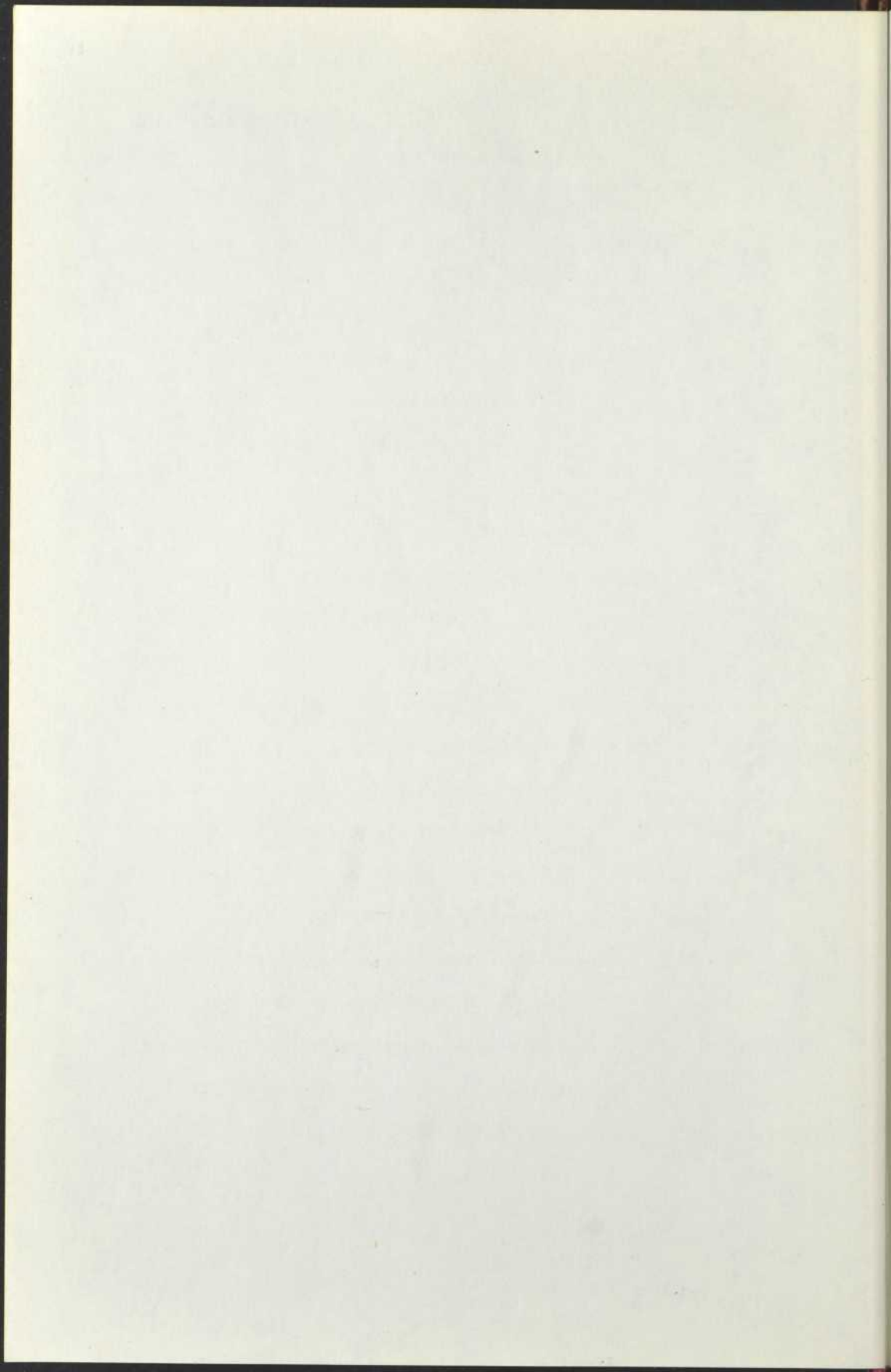
Dépôt légal, 4^e trimestre 1976 – Bibliothèque nationale du Québec
Tous droits de reproduction, d'adaptation ou de traduction réservés
© Les Presses de l'Université de Montréal, 1976



D7601906

QA
8.4
G3
15

à mes parents



Avant-propos

"Für Philosophen, welche der Entwicklung der Mathematik bis in die neueste Zeit gefolgt, und für Mathematiker, die mit den wichtigsten Älteren und neueren Erscheinungen der Philosophie vertraut sind" Georg Cantor, Préface à *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig: 1883)

Ce livre n'est ni un manuel, ni un traité. Dans un espace relativement restreint, nous avons voulu, dans un premier temps, décrire l'aire des fondements des mathématiques, puis, dans un deuxième temps, réfléchir critique-ment sur la signification philosophique et la portée "métathéorétique" des résultats de l'enquête fondationnelle.

C'est un tour d'horizon critique, donc, que nous proposons dans un style mi-formel, mi-informel; nous nous adressons aux philosophes désireux d'explorer le champ fondationnel aussi bien qu'aux logiciens et aux mathématiciens inquiets de leur savoir et soucieux de prendre un recul philosophique par rapport aux seules données techniques de la problématique.

Prendre la mesure philosophique des fondements des mathématiques n'est pas chose facile. Bien des philosophes penseront que la philosophie n'y trouve pas son compte; mais la

théorisation philosophique n'est plus possible sans ces ascèses nouvelles que lui impose le savoir contemporain. La métaphysique elle-même, comme fondement ultime, n'est plus concevable comme théorie de l'être; la synthèse théorique doit emprunter la voie plus indirecte des divers savoirs, s'engager dans les détours de l'inquiétude et de l'impatience d'une quête théorétique qui court constamment le risque de la dispersion. C'est à ce prix que la métathéorétique, comme possibilité contemporaine des fondements de l'expérience du savoir, pourra retrouver l'unité perdue. La quête du sens passe par l'enquête sur les sens disséminés (il s'agit bien entendu ici d'une entreprise constructiviste qui ne pense l'unité que comme unification et le sens que comme "sensi-fication" ou construction de sens).

Si le projet paraît ambitieux, le genre cependant n'est pas nouveau. Léon Brunschvicg avait voulu en son temps refaire les étapes de la philosophie mathématique. O. Becker, en Allemagne, avait dressé un panorama rapide de la philosophie des mathématiques et de l'état des questions fondationnelles dans son livre *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Freiburg U. Munchen: 1954), mais son panorama visait surtout la problématique connue dans les années trente. Plus près de nous, Cavailles, Ladrière, Desanti, pour nous limiter à la tradition française récente, ont tenté de circonscrire le champ logico-mathématique et d'en tirer des leçons

pour la philosophie. L'originalité de nos "leçons" tiendra peut-être à la rareté des leçons que l'on a pu proposer jusqu'à maintenant.

La première partie du texte sur la théorie des ensembles et l'intuitionnisme a essentiellement le caractère d'un exposé, suivi de remarques critiques. Cet exposé reprend, en plus bref, un cours gradué sur les fondements des mathématiques que nous avons donné à l'Université de Toronto pendant l'année académique 1972-1973 et que nous avons partiellement repris dans un cours similaire à l'Université de Montréal pendant l'année académique 1973-1974. Mais c'est d'abord à l'Université de Sudbury qu'il avait vu le jour (en 1971-1972).

Pour cette première partie, nous avons surtout puisé dans les travaux originaux de Gödel [1] et de Cohen [2], et dans les exposés de Jensen [3], Krivine [4] et Shoenfield [5] pour la théorie axiomatique des ensembles. En ce qui touche l'intuitionnisme, nous avons suivi le plus souvent Troelstra [6] et à un moindre degré Heyting [7].

Nous avons supposé chez notre lecteur des connaissances logiques qui correspondent, en gros, au traité de Mendelson [8], et en certains endroits la connaissance de traités plus avancés comme celui de Shoenfield, cité plus haut, ou celui de Kreisel et Krivine [9]; pour les prérequis mathématiques, ils se réduisent aux notions fondamentales de la théorie (naïve)

des ensembles, de l'algèbre, de l'analyse et de la topologie. Les concepts non élémentaires sont expliqués dans le texte.

Notre exposé pourra sembler trop concis. Nous avons voulu dégager la structure conceptuelle des théories, leur contenu intuitif plutôt que reproduire au long les preuves des théorèmes. Nous ne donnons le plus souvent que la trame conceptuelle d'une preuve, sans nous engager dans les détails techniques. Cette méthode, qui comporte des inconvénients certains, n'en a pas moins l'avantage de mieux faire apparaître les notions centrales à l'oeuvre dans la démarche fondationnelle.

D'autre part, à cause même des raccourcis que nous prenons, certaines parties de notre ouvrage ne s'avéreront utiles qu'à ceux qui ont déjà une certaine familiarité avec le sujet. Notre but étant de faire émerger le plus directement possible les fondements de la logique et des mathématiques, nous avons voulu emprunter le moins de détours possible pour en arriver à l'analyse conceptuelle et à la critique épistémologique. L'espace restreint dans lequel nous avons voulu inscrire notre projet exigeait cette entrée de plain-pied dans la problématique. Le lecteur non initié trouvera peut-être notre exposé trop formel alors que le spécialiste se plaindra de certains courts-circuits techniques: à l'un nous répondrons qu'il eût été fastidieux de faire autrement et à l'autre que

notre survol fondationnel eût nécessité trois fois plus d'espace pour faire place à la présentation détaillée de la problématique (on n'a qu'à en juger par les travaux existants). La voie médiane que nous avons empruntée peut comporter bien des écueils, elle fait au moins apparaître la diversité et la fécondité de notre sujet.

Les ouvrages qui traitent des fondements des mathématiques ne sont pas nombreux. Celui de Wilder [10] est d'un niveau élémentaire; celui de Hatcher [11] est une introduction historique à la problématique contemporaine et il expose d'une façon détaillée les systèmes de Frege, Russell et Whitehead, les théories des ensembles de Zermelo-Fraenkel, Bernays-Gödel-von Neumann, Morse-Kelley et les idées de Quine; il comporte aussi un chapitre sur la théorie des catégories. L'ouvrage classique de Fraenkel et Bar-Hillel [12] contient des renseignements généraux sur la théorie des ensembles et la problématique philosophique. Celui de Mostowski [13] couvre plus de matière encore dans un format plus succinct. Quant à l'ouvrage de Combès [14] sur "Les fondements des mathématiques", il s'agit plutôt d'une introduction à la philosophie des mathématiques, telle qu'elle s'est développée jusqu'à 1930 environ [15].

La deuxième partie du travail comprend des textes qui ont été écrits dans les quatre dernières années et qui portent sur divers aspects des fondements des mathématiques. Il

va sans dire que ces textes, qui se recourent parfois, ne sont pas sans répétitions. Nous n'avons pas voulu les éliminer toutes, indicatrices qu'elles sont des leitmotifs de notre recherche. Nous remercions la direction des revues *Dialogue*, *Philosophiques*, le *Bulletin Canadien de Mathématiques*, *Notre-Dame Journal of Formal Logic* et *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* qui nous ont autorisé à reproduire ces textes ici.

Certaines discussions avec nos amis logiciens et mathématiciens trouvent ici leur écho: à Toronto, Bas van Fraassen, à Montréal, Gonzalo Reyes, André Joyal, André Boileau, Roch Ouellet et Aubert Daigneault. Nous espérons que leur amitié ne sera pas blessée de se voir ici citée. Nos étudiants à Sudbury, Toronto et Montréal sont eux aussi en partie responsables de la parution de ce livre; peut-être y retrouveront-ils un peu de l'enthousiasme qui en a fait naître le projet. Enfin, des séjours de recherche à l'Université de la Californie à Berkeley et à l'Université Stanford en 1970 et 1973 ont été déterminants pour notre orientation "fondationnelle"; le Conseil des Arts du Canada a rendu le dernier de ces séjours possible.

En dernier lieu, je tiens à remercier sincèrement Madame Yolande Lemyre-Landry, secrétaire au département de philosophie de l'Université de Montréal, qui s'est acquittée admirablement de la tâche difficile de la dactylographie.

NOTES DE L'AVANT-PROPOS

- [1] K. Gödel *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, 7th printing, (Princeton, N. J.: 1966).
- [2] P. J. Cohen *Set theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin (New York et Amsterdam: 1966).
- [3] R. B. Jensen *Modelle der Mengenlehre*, Lecture Notes in Mathematics no 37, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1967). Voir aussi du même auteur "Concrete Models of Set Theory" in *Sets, Models and Recursion Theory*, ed. by J. N. Crossley, North-Holland (Amsterdam: 1967), p. 44-74.
- [4] J. L. Krivine *Théorie axiomatique des ensembles*, 2e ed. revue et augmentée, P.U.F. (Paris: 1972).
- [5] J. R. Shoenfield *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (New York: 1967).
- [6] A. S. Troelstra *Principles of Intuitionism*, Lecture Notes in Mathematics, no 95, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1969).
- [7] A. Heyting *Intuitionism. An Introduction*, 3rd revised edition, North-Holland (Amsterdam: 1971). Nous nous référons aussi parfois à l'ouvrage de Kleene et Vesley *Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland (Amsterdam: 1965).
- [8] E. Mendelson *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand (New York: 1964).
- [9] G. Kreisel et J. L. Krivine *Eléments de logique mathématique*, Dunod (Paris: 1967). On consultera aussi la seconde édition en anglais du même volume, parue chez North-Holland (Amsterdam: 1971).

- [10] F. Wilder *Introduction to the Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons (New York: 1965).
- [11] W. S. Hatcher *Foundations of Mathematics*, Saunders (Philadelphia-London-Toronto: 1968).
- [12] *Foundations of Set Theory*, North-Holland (Amsterdam: 1958). L'ouvrage a été remis à jour (seconde édition: 1973) avec l'aide de A. Levy et la collaboration de D. van Dalen. On y trouvera un exposé général des résultats récents (chapitre II) et une bibliographie assez complète.
- [13] A. Mostowski *Thirty years of foundational studies*, Blackwell (Oxford: 1966).
- [14] J. Combès *Fondements des Mathématiques* Coll. Sup., P.U.F. (Paris: 1971).
- [15] L'ouvrage de F. P. Ramsey *The Foundations of Mathematics*, Routledge and Kegan Paul (London: 1950) est un recueil d'articles, dont certains importants, en particulier "On a Problem of Formal Logic" mais il est d'intérêt philosophique mince, malgré que Ramsey se fut intéressé vers la fin de sa vie - il est mort à vingt-six ans - à l'intuitionnisme de Brouwer. Les ouvrages de Russell *Introduction to Mathematical Philosophy* Allemand Unwin (London: 1919) et Carnap *Foundations of Logic and Mathematics* University of Chicago Press (Chicago: 1939), relèvent d'une problématique philosophique - logiciste et positiviste - qui a perdu de sa pertinence dans la recherche fondationnelle.

Introduction
**LA PROBLÉMATIQUE
DES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES**

Historiquement, le problème des fondements a deux sources: ce que l'on est convenu d'appeler la "crise" des fondements, provoquée par la découverte des paradoxes (Russell et autres) de la théorie des ensembles (de Frege), auxquels il a bien fallu remédier, et le problème de la consistance de l'analyse classique apparu dans le contexte du programme axiomatique de Hilbert. Sans vouloir minimiser ces points de départ historiques, il faut reconnaître que la problématique des fondements a pris un nouveau tournant avec les travaux de Georg Kreisel.

Kreisel a mis l'accent sur ce que l'on pourrait appeler la vocation "perennielle" des fondements: l'analyse critique des concepts et des principes mathématiques. Cette analyse conceptuelle n'est plus exclusivement hantée par la paradoxologie ou par la non-contradiction de l'analyse classique même si

elle vise ultimement l'idéal hilbertien (et brouwerien) de la certitude ou certification (Sicherung) des mathématiques ou encore l'idéal post-hilbertien de l'objectivité des mathématiques.

Aujourd'hui, les fondements constituent une discipline à part, discipline de synthèse qui combine les approches logique, mathématique et philosophique dans un effort d'analyse de "la" mathématique. La philosophie des mathématiques, rendue plus ou moins anachronique par l'émergence des méthodes logico-mathématiques, a perdu son "efficace" comme arbitre dans les débats sur les fondements: une position philosophique ne s'appuie plus sur des arguments (ou des dogmes) purement philosophiques, il lui faut un appareil logico-mathématique qui précise les données du problème et de sa solution espérée. On peut même penser que les fondements sont intra-mathématiques, dans la mesure où ce sont les mathématiciens (ou logiciens-mathématiciens) qui s'en occupent presque exclusivement. Mais on ne peut pousser trop loin cette perspective. Les fondements ont aussi pour fonction de situer les mathématiques dans le panorama des activités théorétiques. C'est ici que la philosophie reprend une partie de ses droits: on ne saurait expliquer, élucider les mathématiques en utilisant des concepts mathématiques, d'où la nécessité d'une réduction fondationnelle qui mette en évidence des concepts, notions et principes infra - ou

méta - mathématiques. En tant que théorie fondationnelle dernière, la philosophie a son mot à dire dans les fondements des mathématiques. Mais elle ne peut le dire de la même façon que par le passé, en tirant de la tradition philosophique des idées toutes nues qu'elle voudrait impudiquement accoupler aux mathématiques. L'habillage nécessaire est ici la logique mathématique.

La logique mathématique, depuis Frege, s'est diversifiée, enrichie, à tel point qu'elle en oublie parfois ses origines. Théorie de la démonstration, théorie des modèles, théorie de la récursion (et leurs sous-produits) sont devenues des disciplines logico-mathématiques qu'il est difficile de ne pas identifier à la problématique fondationnelle: le plus simple, et la pratique va dans ce sens, est de confondre recherches fondationnelles et logique mathématique. Mais la logique mathématique elle-même a besoin de fondements propres: on peut s'interroger, par exemple, sur la notion de preuve, comme en théorie générale des démonstrations (comme le font Kreisel et Prawitz), on peut soulever le problème de la relativité de la théorie des modèles, mettre en question son réalisme inhérent, la notion de récursivité peut faire l'objet d'une critique intensionnelle (*e.g.* notion de fonction récursive versus notion de fonction constructive). L'analyse conceptuelle, pour utiliser des moyens logiques et mathématiques, conserve son statut

proprement philosophique.

La logique mathématique est cependant l'outil privilégié de la recherche fondationnelle. Il n'est plus possible aujourd'hui d'aborder le problème des fondements en faisant l'économie des moyens logico-mathématiques; une entreprise qui les négligerait se verrait réduite à une discussion philosophique dépassée. Le style fondationnel contemporain est inextricablement logique, mathématique et philosophique.

Du côté mathématique, on peut distinguer essentiellement trois théories fondationnelles: théorie des ensembles, intuitionnisme et théorie des catégories (prolongée dans la théorie des "topoi", issue du mariage de la théorie des catégories et de la géométrie algébrique).

Pour la théorie des ensembles, c'est la version Zermelo-Fraenkel qui fait l'objet le plus souvent des investigations fondationnelles. La théorie des types de Russell relève davantage des recherches historiques et la théorie ou les théories des ensembles de Quine ne font plus l'objet que de travaux plus ou moins marginaux à la périphérie de la recherche [1]. Quant à la théorie des classes de Bernays-Gödel-von Neumann ou de Morse-Kelley, qui constitue un élargissement de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, ses problèmes fondationnels se ramènent essentiellement à Z-F. Le grand problème ouvert reste celui de la consistance de Z-F. Mais les résultats de

Gödel sur la consistance relative de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix et de Cohen sur leur indépendance sont les plus marquants de la théorie axiomatique des ensembles contemporaine. Les axiomes forts d'infinité sur l'existence des cardinaux inaccessibles et des cardinaux mesurables représentent les derniers efforts pour tenter de démontrer la vérité ou la fausseté de l'hypothèse du continu qui n'est pas affectée par la preuve d'indépendance. Une autre voie, encore largement inexplorée, la théorie des ensembles du second ordre (et d'ordre supérieur) semble constituer le contexte naturel pour la formulation de l'hypothèse du continu, mais nous savons encore trop peu de choses sur une telle théorie pour nous permettre de décider de la vérité ou de la fausseté de l'hypothèse du continu.

L'intuitionnisme s'est aussi éloigné de ses origines. Les idées de Brouwer ne font plus loi unique. L'intuitionnisme contemporain qu'il faut bien appeler maintenant post-brouwerien n'échappe plus à la formalisation et les sujets qui retiennent l'attention sont la théorie des suites irrégulières ("lawless sequences") travaillée par Kreisel, la théorie des suites de choix (Troelstra) et la théorie axiomatique du sujet créateur (Kreisel). Ici aussi les théories du second ordre commencent à être étudiées.

La formalisation de la logique intuitionniste par

Heyting (1930) a donné lieu à des développements considérables, dont le dernier état (Kleene et Vesley, Kreisel et Troelstra, Myhill) montre bien la fécondité de l'approche formelle.

Si l'intuitionnisme n'a pas eu jusqu'à maintenant l'éclat et l'importance qu'on attribue à la théorie des ensembles, c'est qu'il est associé d'abord aux fondements constructivistes qui, dans l'opinion de la majorité des logiciens et des mathématiciens, sacrifient une trop grande partie des mathématiques classiques. Bien entendu, les fondements constructivistes ne sont pas réductibles à l'intuitionnisme, mais on peut affirmer que l'intuitionnisme constitue la tendance constructiviste la plus importante depuis la faillite du finitisme hilbertien, auquel la preuve d'incomplétude (la première) de Gödel a porté un coup mortel. On sait que Hilbert, sur le modèle de l'arithmétique, voulait asseoir les mathématiques sur des fondements combinatoires finis, quitte à admettre des éléments idéaux (ideale Elemente) qui permettent de faire des détours là où la route combinatoire n'était plus praticable. Mais le théorème de Gödel a ébranlé fortement le programme de Hilbert en montrant justement que l'arithmétique n'était pas complètement formalisable, c'est-à-dire traduisible dans un système formel où seuls les moyens finis ou finitaires sont permis, et qu'en plus (second théorème de Gödel sur les preuves de consistance), la preuve de consistance d'un tel système en-

globant l'arithmétique devait nécessairement sortir du cadre finitaire. Gentzen a donné une preuve de la consistance de l'arithmétique, mais en utilisant l'induction transfinie jusqu'au premier ordinal ε_0 plus grand que la hiérarchie des ω . Gödel [2] a réussi à obtenir une preuve en utilisant des moyens élargis dans un style intuitionniste, c'est-à-dire en introduisant des objets abstraits (fonctions et fonctionnelles) qui débordent le champ des objets concrets de la combinatoire finitaire. Spector, Kreisel et plus récemment Luckhardt [3] et d'autres ont étendu cette approche intuitionniste à l'analyse.

On voit donc que le problème de la consistance de l'analyse classique (ou de ses sous-systèmes) est central aussi bien pour l'intuitionnisme que pour la théorie des ensembles, mais les moyens (les méthodes de preuve) de l'un ne sont pas les moyens de l'autre. Les options philosophiques se traduisent ici concrètement, mais souvent les moyens sont mieux définis que la fin qu'ils servent. Ce sont ces moyens qu'il faut d'abord étudier avant de porter un jugement sur la fin qu'ils visent. Il n'est d'ailleurs pas exclu que l'une et l'autre voie d'approche soit radicalisée et que les options fondationnelles se concrétisent davantage. C'est la fonction des fondements critiques que d'indiquer les avenues possibles de telles démarches.

Avec la théorie des catégories, on perd un peu de vue

ces problèmes. La théorie des catégories est plus résolument intramathématique et, par là, sa vocation fondationnelle est moins apparente. Issue de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique, la théorie des catégories est apparue tout de suite comme une théorie "structurelle" destinée à généraliser les principaux concepts mathématiques. Eilerberg et MacLane n'avaient pas à l'origine d'autres visées. Par après, MacLane, Grothendieck, Lawvere et d'autres, invoquant le fait que la théorie des ensembles de Z-F ne semblait pas capable d'intégrer les "totalités" que constituaient les catégories, ont proposé différents schèmes fondationnels. Les univers de Grothendieck, la catégorie de toutes les catégories de Lawvere n'avaient de fondationnel que leur aptitude à embrasser ces vastes "totalités". Le langage des catégories apparaissait comme le langage universel des mathématiques qui devait envahir l'ensemble des disciplines mathématiques. MacLane a admis récemment [4] que la théorie des catégories pouvait trouver une formulation adéquate dans la structure cumulative des rangs de la théorie Z-F limitée par un ordinal suffisamment grand (inaccessible, par exemple).

Plus récemment, la conjonction de la théorie des catégories et de la géométrie algébrique a donné naissance à la théorie des topoi (ou topos). Pour Grothendieck, un des créateurs de la nouvelle géométrie algébrique, la théorie des topoi

est une généralisation de la topologie, alors que pour Lawvere, Tierney, Freyd et de nombreux autres, c'est une théorie fondationnelle appelée à opérer la synthèse entre la logique et la géométrie. Lawvere et Tierney affirment que la logique interne des topoi est la logique intuitionniste: d'autres, comme Reyes, veulent voir là la preuve que la logique est géométrique, c'est-à-dire que les structures géométriques obéissent à un principe de construction plus fondamental que le principe de construction ou de génération des structures linguistiques (*i.e.* syntaxiques). Il s'agit donc ici, en partie du moins, d'un débat sur la nature de la logique. Quant aux ressources fondationnelles de la théorie des topoi, elles sont du même ordre que celles de la théorie des catégories: langage universel, contexte "naturel" pour l'ensemble des mathématiques, y compris la logique.

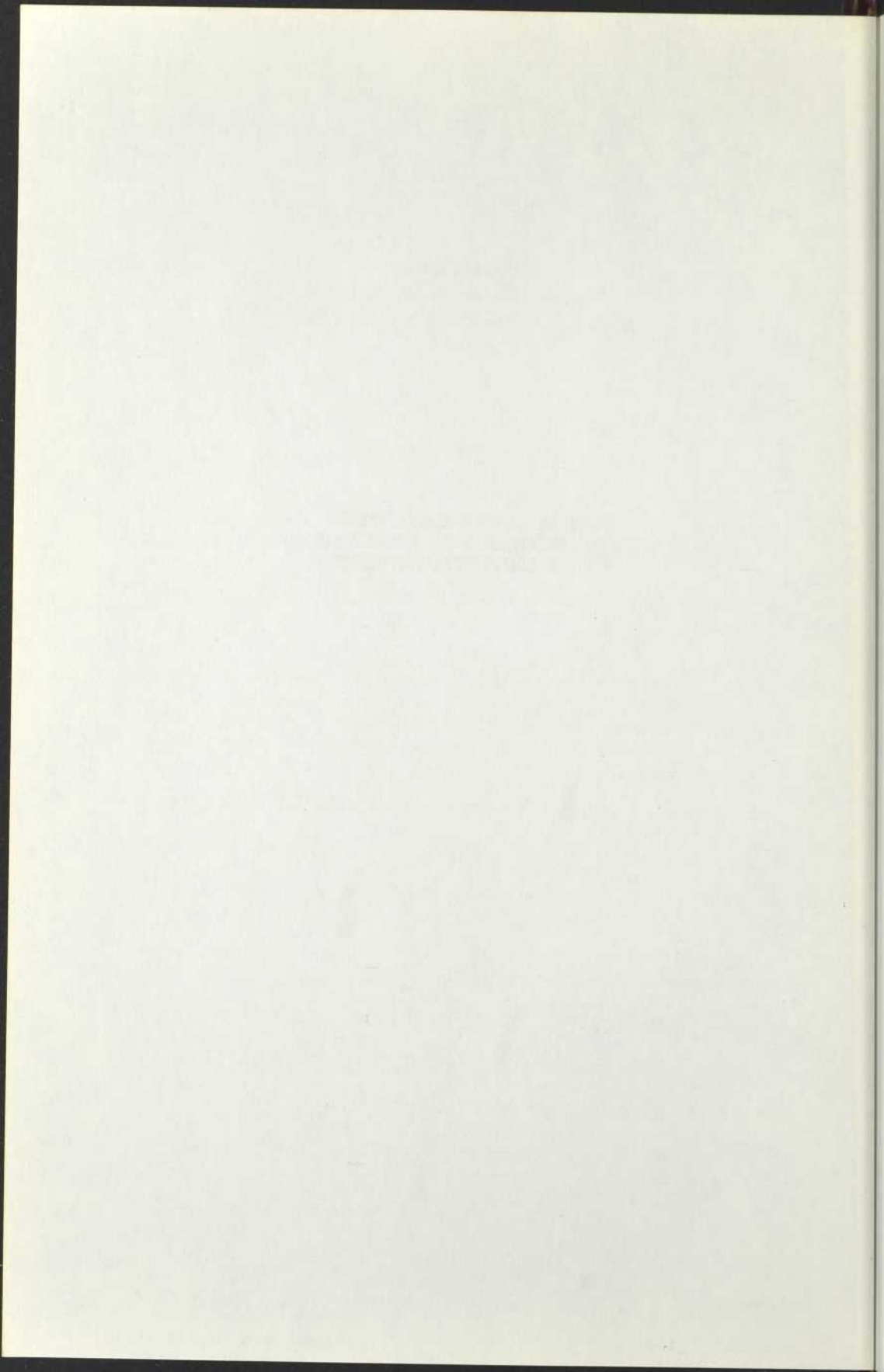
Si, donc, la théorie des catégories et la théorie des topoi ne peuvent se situer au même plan que la théorie des ensembles et l'intuitionnisme en tant que théories fondationnelles, elles soulèvent des questions proprement fondationnelles qui sont susceptibles d'apporter de nouvelles lumières dans la problématique des fondements, ne fût-ce que dans l'optique des fondements structurels [5].

NOTES DE L'INTRODUCTION

- [1] On trouvera dans le livre de W. S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, Saunders (Philadelphia-London-Toronto: 1968), un exposé détaillé de la théorie des types (simple et ramifiée) de Russell et des systèmes de Quine.
- [2] Cf. K. Gödel, Ueber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* 12 (1958), p. 280-287.
- [3] Cf. C. Luckhardt, *Extensional Gödel Dialectica Interpretation in Lecture Notes in Mathematics*, no 306, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1972).
- [4] S. MacLane, *Categorical Algebra and Set-theoretic Foundations Axiomatic Set Theory*, Proceedings of the 1967 U.C.L.A. Conference, American Mathematical Society (Providence, R.I.: 1971), p. 235. Voir aussi du même auteur *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (New York-Heidelberg-Berlin: 1971), p. 21-24.
- [5] Voir le chapitre VI pour une discussion des fondements "structurels".

Première partie

**FONDEMENTS CRITIQUES
DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES
ET DE L'INTUITIONNISME**



Chapitre I

FONDEMENTS CRITIQUES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

1. LA NOTION D'ENSEMBLE

Cantor définit la notion d'ensemble de la façon suivante:

"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objecten von unserer Anschauung oder unseres Denken (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen
 $M = \{m\}$ " [1]

"Par ensemble, nous entendons tout rassemblement M d'objets définis et bien distincts de notre intuition ou de notre esprit (appelés "éléments" de M) que nous formons en un tout

$$M = \{M\} "$$

Nous retenons de cette définition l'idée d'un procès de rassemblement d'objets définis, bien distincts, de notre intuition ou de notre pensée dont nous formons un "tout". On verra que cette idée de totalité est centrale.

Kreisel [2] pense qu'il y a trois concepts distincts

d'ensemble:

- a) vague extension de la notion de collection finie
- b) sous-collections arbitraires d'une collection donnée
- c) une notion abstraite dérivée de la notion de propriété.

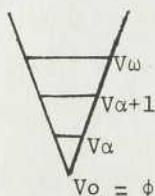
Selon Kreisel, la première de ces notions serait la moins précise, la deuxième la plus usuelle et la troisième la plus fondamentale, mais mal connue. C'est la deuxième notion (celle d'ensemble de "quelque chose") [3], attribuée à Zermelo, qui est à la base de ce que l'on appelle maintenant la structure cumulative des rangs.

$$V_0 = \phi \text{ l'ensemble nul}$$

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha) \text{ pour tout ordinal}$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \text{ pour tout ordinal limite}$$

La structure est donc engendrée par l'itération de l'ensemble des parties dans l'univers V limité par un ordinal limite donné. On peut donner la représentation suivante:



2. LA THEORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES

De cette structure découlent "naturellement" les axiomes de Z-F.

1. Axiome d'extensionnalité:

$$\forall x \forall y \{ \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \}$$

"Si deux ensembles ont les mêmes éléments, alors ils sont égaux."

On pourrait ajouter ici un axiome pour l'ensemble nul

$$\phi \in V$$

qui dit que l'ensemble nul appartient à l'univers ou à la classe universelle en définissant

$$V =_{df} \{x \mid x = x\}; \quad \phi =_{df} \{x \mid x \neq x\}$$

2. Axiome de la paire:

$$\forall x \forall y \exists z \forall t \{ t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y) \}$$

"Pour deux ensembles x et y , il y a un ensemble z qui a x et y pour seuls éléments."

$\{\{a, b\}$ pour $a \neq b$ est appelé une paire

$\{a\}$ est appelé "singleton" et

$\{a, b\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ une paire ordonnée.

3. Axiome de la somme ou de la réunion:

$$\forall x \exists y \forall z \{ z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t) \}$$

"Pour tout ensemble x , il y a un ensemble y dont les éléments sont les éléments des éléments de x ."

La réunion des éléments de x est notée $\bigcup_{a \in x} a$.

4. Axiome de l'ensemble des parties (ou sous-ensembles):

$$\forall x \exists y \forall z \{ z \in y \leftrightarrow z \subset x \}$$

"Pour tout ensemble x , il y a un ensemble y dont les éléments sont les sous-ensembles de x ."

Il y a un seul ensemble qui a cette propriété, l'en-

semble des sous-ensembles d'un ensemble donné et il est noté $y = P(x)$.

Nous nous limiterons par la suite au vocabulaire minimal suivant: nous définissons une fonction ou une relation fonctionnelle

$$\text{Rel}(R) \leftrightarrow_{\text{df}} R \equiv \{xy \mid Rxy\} \quad , \quad R \text{ de } a \text{ à } y$$

$$R \smallfrown t =_{\text{df}} \{y \mid \exists x (Ryx \wedge x \in t)\} \quad , \quad \text{la } R\text{-image de } t$$

$$R \upharpoonright t =_{\text{df}} \{xy \mid Rxy \wedge y \in t\} \quad , \quad R \text{ limité à } t$$

$$R^{-1} =_{\text{df}} \{xy \mid Ryx\} \quad , \quad \text{l'inverse de } R$$

$$D(R) =_{\text{df}} R^{-1} \smallfrown V \quad , \quad \text{le domaine de } R$$

$$C(R) =_{\text{df}} R \smallfrown V \quad , \quad \text{le champ ou codomaine de } R \quad .$$

Nous supposerons connues les définitions de la logique*, de la théorie naïve des ensembles, de l'algèbre de Boole et des concepts mathématiques élémentaires.

Les axiomes que nous avons vus jusqu'à maintenant ne sont pas vraiment problématiques: ceux qui suivent le sont davantage.

5. Axiome de substitution ou de remplacement:

$$\{\forall X \forall w \{(\forall x \in w) \exists ! y X(x, y)\} \} \rightarrow$$

$$\exists z \forall u \{u \in z \leftrightarrow \exists t \{t \in w \wedge X(t, u)\} \}$$

"Il y a un ensemble z dont les éléments sont exactement les images par la relation fonctionnelle des éléments de z qui sont dans le domaine de la relation fonctionnelle."

*Là-dessus, nous renvoyons à notre ouvrage *Méthodes et concepts de la logique formelle* à paraître.

Plus succinctement

$$\text{Fonc } (F) \rightarrow F''x \in V$$

où

$$\text{Fonc } (F) \leftrightarrow \text{df Rel } (F) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z (Fxz \wedge Fyz \rightarrow x = y)$$

Nous avons exprimé cet axiome au second ordre en introduisant une variable X du second ordre qui joue le rôle d'un sous-ensemble de l'ensemble des nombres naturels. Le schéma d'axiome de substitution du premier ordre est dérivé, en fait, de l'axiome du second ordre:

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \dots \forall x_k \{ \forall x \forall y \forall y' \{ E(x, y, x_1, \dots, x_k) \wedge \\ & E(x, y', x_1, \dots, x_k) \rightarrow y = y' \} \rightarrow \\ & \forall t \exists w \forall v \{ v \in w \leftrightarrow \exists u \{ u \in t \wedge \\ & E(u, v, x_1, \dots, x_k) \} \} \} \end{aligned}$$

où $E(x, y, x_1, \dots, x_k)$ est toute formule sans paramètres - sans symboles extra-logiques - qui a au moins deux variables libres x et y . Le schéma d'axiome de compréhension s'ensuit directement ici

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \dots \forall x_k \forall x \exists y \forall z \{ z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \\ & A(z, x, x_1, \dots, x_k) \} \end{aligned}$$

où $A(x, x_1, \dots, x_k)$ est toute formule sans paramètres qui a au moins une variable libre x .

L'axiome de compréhension s'énonce au second ordre:

$$\forall X \forall x \exists y \forall z \{ z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge X(z)) \}$$

"Pour tout ensemble x , il y a un ensemble y dont les éléments sont ceux des éléments de x qui ont la propriété X (du second ordre)."

Par rapport à l'axiome de l'ensemble des parties, l'axiome de compréhension n'affirme pas l'existence d'un tel ensemble, mais plutôt sa possibilité de "comprendre" des ensembles définis par certaines propriétés. L'axiome de compréhension, qui est absent chez Zermelo, est similaire cependant à l'axiome de séparation (Aussonderung) que l'on trouve chez Zermelo et qui s'exprime

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$$

6. Axiome du choix (AC):

$$\begin{aligned} & \forall t \{ \{ \forall x (x \in t \rightarrow x \neq \phi) \wedge \forall x \forall y (x \in t \wedge y \in t \rightarrow \\ & x = y \vee x \cap y = \phi) \} \rightarrow \exists u \forall x \exists v (x \in t \rightarrow \\ & u \cap x = \{v\}) \} \end{aligned}$$

"Pour tout ensemble t , dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble dont l'intersection avec chaque élément de t est un ensemble à un seul élément."

Il existe plusieurs énoncés équivalents à l'axiome du choix: le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide, le lemme de Zorn "Etant donné un ensemble ordonné u dont tout sous-ensemble bien ordonné a une borne supérieure, alors u a un élément maximal" (qui n'est pas contenu dans aucun autre élément de u) ou encore le théorème de Zermelo "Sur tout ensemble, il existe un bon ordre" (un bon ordre pour

un ensemble est un ordre total sur tous ses sous-ensembles qui ont chacun un premier élément). Il y a encore d'autres énoncés équivalents à l'axiome du choix: on a une longue discussion de l'axiome dans le livre de Fraenkel-Bar-Hillel-Levy [4]. Une formulation simple de l'axiome du choix est la suivante

$$(\forall x \in A) (\exists \varphi) \varphi \frac{a, b}{x, y}$$

où a, b sont des paramètres ou variables libres. Si A est dénombrable, nous avons là l'axiome du choix dénombrable.

7. Axiome de l'infini:

$$\exists x \{ \exists y \{ y \in x \wedge \forall z (z \notin y) \} \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall w (w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w = y))) \} \}$$

ou plus simplement

$$\exists x \{ \phi \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x) \}$$

"Il y a un ensemble tel qu'il contient l'ensemble nul et s'il contient y , il contient aussi son successeur."

On peut énoncer l'axiome de l'infini sous une forme plus simple encore: "Il existe un ordinal limite", un ordinal limite étant un ordinal qui n'a pas de prédécesseur immédiat. L'axiome de l'infini revient donc à affirmer l'existence de ω , le premier ordinal non fini, ou de l'ensemble de tous les ensembles finis.

8. Axiome de fondation ou de régularité:

$$\forall x (x \neq \phi \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \phi))$$

"Tout ensemble non vide possède un élément qui n'a

aucun élément commun avec cet ensemble."

ou au second ordre

$$\forall X \forall x [X(x) \rightarrow \exists y \forall z \{X(y) \wedge [X(z) \rightarrow z \notin y]\}]$$

"Pour tout ensemble qui a des sous-ensembles communs avec un autre ensemble quelconque existe un ensemble minimal qui partage ces sous-ensembles avec l'ensemble initial."

L'axiome est la base de la structure cumulative des rangs puisqu'il "étage" les ensembles selon des niveaux ordinaux et il interdit toute suite infinie $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ ou encore que $x \in x$. Mais son importance est limitée à la théorie des ensembles, c'est le principe hiérarchisant ou itération transfinitive, et n'a pas de rôle dans les autres branches des mathématiques.

Les axiomes 1 - 2 - 3 - 4, compréhension ou séparation et 7 sont de Zermelo, les autres de Fraenkel. Disons ici quelques mots de la théorie des classes de von Neumann-Bernays-Gödel. Dans la théorie des classes N-B-G, les ensembles sont des classes qui appartiennent à d'autres classes alors que les classes qui n'appartiennent pas à aucune autre classe sont des classes propres $\forall X (X \notin V \leftrightarrow X \approx V)$ [les ensembles étant définis par $\forall X (X \in V \leftrightarrow X \not\approx V)$]. N-B-G est essentiellement comparable à Z-F, sauf que l'axiome de compréhension prédicative

$$\exists Y \forall X (X \in Y \leftrightarrow P(X))$$

où $P(X)$ ne contient que des quantificateurs sur les ensembles - qui, remarquons-le, devient un axiome dans N-B-G - peut être remplacé par un nombre fini de ses instances. Ainsi a-t-on des axiomes pour la négation, le quantificateur existentiel entre autres (Gödel s'en servira essentiellement dans sa preuve de la consistance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu); cette particularité entraîne l'axiomatisabilité finie pour N-B-G, mais Z-F et N-B-G sont essentiellement intertraductibles, ont la même force "ensembliste", *i.e.* ne sont pas plus fortes, démonstrativement parlant, si l'on se limite à parler d'ensembles. Par exemple, l'axiome d'extensionnalité s'exprime simplement

$$\forall X(X \in A \leftrightarrow X \in B) \rightarrow A = B$$

Nous avons vu que certains axiomes comme ceux de substitution, choix, infini ont une forte dose de non-constructivité: ils supposent une totalité infinie close, un infini actuel plein. Mais la théorie des ensembles ne s'arrête pas là. Avant de passer au principe de réflexion et aux axiomes forts d'infinité (et à leur critique), nous avons besoin de certaines informations sur les ordinaux et les cardinaux.

Un ordinal est un ensemble α qui est bien ordonné par \in et qui est transitif, *i.e.*

$$y \in x, z \in y \rightarrow z \in x$$

Un ordinal est l'ensemble de tous les ordinaux qui le précèdent

e.g. ω . Deux ordinaux α et β ont la même puissance, si $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Un cardinal est un ordinal tel que $\beta < \alpha \leftrightarrow \bar{\beta} < \bar{\alpha}$.

Un cardinal $\bar{\alpha}$ est donc le plus petit ordinal de la même puissance que α . Le théorème de Cantor-Bernstein énonce que pour que deux ensembles soient équipotents (aient la même puissance), il doit y avoir une injection de chacun dans l'autre, donc une bijection

$$\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \wedge \bar{\beta} \leq \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha} = \bar{\beta}$$

et le théorème de Cantor nous dit que

$$\forall \alpha (\bar{\alpha} < \overline{P(\alpha)})$$

"Pour tout ensemble, le cardinal de cet ensemble est plus petit que le cardinal de l'ensemble de ses parties."

On dit que B est un segment initial de S si

$\forall x \in B (y < x \rightarrow y \in B)$; un ordinal α est fini si

$$\forall \beta (\beta \leq \alpha \wedge \beta \neq \phi \rightarrow \exists y (\beta = y \cup \{y\}))$$

i.e. s'il a un prédécesseur.

La différence essentielle entre ensembles finis et ensembles infinis tient dans cette définition de Dedekind [5] (qui s'accorde avec celle de Cantor).

"Tout ensemble fini est constitué de telle façon qu'il n'est pas équipotent à l'un de ses sous-ensembles"

et

"Tout ensemble infini est constitué de telle façon qu'il a des sous-ensembles qui lui sont équipotents"

ou en symboles

$$\alpha \text{ est infini} \equiv \exists b \subset a, b \neq \alpha \wedge b \sim \alpha$$

Il est évident que la collection de tous les ordinaux Ω et la collection de tous les cardinaux ne sont pas des ensembles (Cantor appelle ces collections des "multiplicités absolument infinies ou inconsistantes" - absolut unendliche oder inkonsistente Vielheiten) [6]. Mais les ordinaux comme les cardinaux constituent une hiérarchie illimitée, dont le premier étage transfini est constitué par les ω pour les ordinaux et par les \aleph' pour les cardinaux. L'hypothèse du continu s'énonce simplement

$$2^{\aleph'_0} = \aleph'_1$$

C'est-à-dire, il y a sur $P(\omega)$ un bon ordre dont tous les segments initiaux stricts (différents de $P(\omega)$) sont dénombrables: \aleph'_1 est donc le premier cardinal non dénombrable.

L'hypothèse généralisée du continu (HGC):

$$\forall \alpha (2^{\aleph'_\alpha} = \aleph'_{\alpha+1})$$

s'ensuit naturellement. Nous verrons plus loin pourquoi, en dépit des résultats de Gödel et de Cohen, l'hypothèse du continu demeure toujours une question ouverte.

3. LE PRINCIPE DE REFLEXION ET LES AXIOMES FORTS D'INFINITE; CARDINAUX INACCESSIBLES ET MESURABLES

Le principe de réflexion joue un rôle important dans la théorie axiomatique des ensembles contemporaine. Parmi les

multiples formulations du principe, on peut ne retenir que les plus significatives. La forme la plus faible du principe s'écrit

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \{A \rightarrow \exists \alpha (x_1 \in V_\alpha \dots x_n \in V_\alpha \wedge A_\alpha)\}$$

pour une formule A arbitraire avec les variables libres

$x_1 \dots x_n$ et un ordinal α ; V_α dénote le segment de la hiérarchie limité par α et A_α est obtenue à partir de A en restreignant tous les quantificateurs à V_α . A l'opposé, la forme la plus forte du schéma de réflexion (totale) pourrait s'écrire

$$\forall \alpha \exists \text{ ordinal-limite } \beta > \alpha \forall x_1 \in V_\beta \dots$$

$$\forall x_n \in V_\beta \{ \phi \leftrightarrow \phi^{V_\beta} \}$$

pour une formule arbitraire ϕ . La justification que donne Kreisel [7] pour la forme faible se résume ainsi: puisque je ne peux atteindre la hiérarchie totale, l'univers entier V , la seule façon de m'assurer de la validité de l'assertion A consiste à atteindre un échelon V_α de la hiérarchie pour lequel A est valide. En d'autres termes, si je connais une assertion valide pour l'univers V , elle doit être valide quelque part, elle doit être en quelque sorte "localisable"; la forme forte affirme en plus que l'assertion "localisée" est équivalente à l'assertion "globalisée". Ce principe, dans sa forme forte, a été utilisé, en particulier par Levy [8], dans la génération d'axiomes forts d'infinité. Remarquons que le

schéma de réflexion est équivalent au schéma de substitution plus l'axiome de l'infini. De nombreux axiomes forts d'infini-té ont été proposés depuis Mahlo (axiome de singularité) jus-qu'à Tarski (axiome d'inaccessibilité), Levy et autres. Nous nous limiterons ici à un bref examen des axiomes d'inaccessibi-lité et de mesurabilité.

On dit qu'un cardinal σ est (fortement) inaccessible si

- i) $\sigma > \omega$
- ii) $\forall t (t < \sigma \rightarrow 2^t < \sigma)$
- iii) $\forall x \subset \sigma (\bar{x} < \sigma \rightarrow \cup x < \sigma)^*$

"Un cardinal est inaccessible, s'il est plus grand que ω , n'est pas accessible par l'ensemble des parties (ou leur union) d'un cardinal plus petit."

La cofinalité d'un cardinal est définie comme suit $cf(\sigma) =$ le plus petit cardinal t tel que

$$\exists x (x \subset \sigma \wedge \cup x = \sigma \wedge \bar{x} = t)$$

Un cardinal est dit régulier si $cf(\sigma) = \sigma$ et singulier $cf(\sigma) < \sigma$.

Un ensemble x est mesurable s'il est plus grand que ω et si un idéal mesurable peut y être défini: un "idéal de mesure" sur x est un sous-ensemble y de $P(x)$ tel que:

*Nous devrions écrire $\bigcup_{i \in I} x_i$ pour I un ensemble d'indices pour la famille de sous-ensembles x_i de σ (ici), mais nous omettrons toujours l'indice.

- 1) $\forall z \subset y (\bar{z} < \bar{x} \rightarrow Uz \in y)$
- 2) $\forall z \subset x (z \in y \vee x-z \in y)$
- 3) $Uy = x$
- 4) $x \not\subset y$

Et on dit qu'un ensemble est mesurable au sens de Lebesgue*, si c'est un ensemble borné R (avec borne supérieure et borne inférieure) de nombres réels avec

$$\mu E = \mu(R \cap E) + \mu(R' \cap E)$$

pour tout ensemble borné E ; ici μ est la mesure extérieure et R' le complément de R . Une mesure μ est additive ou finiment additive si pour $x \cap y = 0$, ou a

$$\mu(x \cup y) = \mu(x) + \mu(y)$$

et dénombrablement additive si pour $x_i \cap x_j = 0$ ($i \neq j$), on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n)$$

et elle est régulière, si pour trois sous-ensembles $x \subset y \subset z$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\mu(z) - \epsilon \leq \mu(y) \leq \mu(x) + \epsilon$$

(pour x fermé et z ouvert); on a alors une fonction μ sur un ensemble x de $P(x)$ à $[0, 1]$ (intervalle clos des réels) pour laquelle

- 1) $\mu(x) = 1$
- 2) si $y = \bigcup_{n < \omega} x_n$ est une union d'éléments disjoints et que $y \subset x$, alors $\mu(y) = \sum_{n < \omega} \mu(x_n)$

*Cf. plus bas note 9.

(on dit alors que μ est σ -additive). La notion de cardinal compact a aussi été introduite pour "agrandir" encore l'univers cardinal. C'est une notion tirée de la logique: on dit qu'un ensemble Σ d'énoncés d'une théorie du premier ordre T (qui correspond à un langage $L_{\omega, \omega}$) a un modèle si tout sous-ensemble fini de Σ en a un. Pour les langages infinitaires, par exemple $L_{\kappa, \kappa}$ pour $\kappa > \omega$, on dira que κ est faiblement compact, si $L_{\kappa, \kappa}$ est (κ, κ) compact, *i.e.* si Σ est un ensemble d'énoncés de $L_{\kappa, \kappa}$ avec $\overline{\Sigma} \leq \kappa$ de sorte que tout sous-ensemble de cardinalité $< \kappa$ ait un modèle, alors Σ a un modèle; pour un cardinal fortement compact, on dit que $L_{\kappa, \kappa}$ est (L, κ) compact pour $h \geq \kappa$; enfin pour la notion de supercompacité, on a besoin d'une mesure μ sur $P_{\kappa}(h)$ appelée mesure normale et qu'on définit de la façon suivante: une mesure μ est dite normale si elle est κ -additive, régulière et telle que si $f(x) \in x$ pour tous les $x \in P_{\kappa}(h)$, alors pour $\alpha < h$

$$\mu(\{x \in P_{\kappa}(h) \mid f(x) = \alpha\}) = 1$$

(f est appelée fonction régressive) un cardinal supercompact κ est un cardinal tel que $\kappa > \omega$, $h \geq \kappa$ et tel qu'il y a une mesure normale sur $P_{\kappa}(h)$.

Ces différentes notions de mesure sur les réels constituent une approche du continu qui, bien qu'elle n'ait pas d'impact direct sur l'hypothèse du continu, montre tout de même

que l'introduction de cardinaux extrêmement grands, comme les cardinaux inaccessibles et mesurables, n'entraîne pas de contradiction dans Z-F [9]. D. Scott [10] a démontré que l'axiome de mesurabilité entraîne la négation de l'axiome de constructibilité. C'est sur ce dernier axiome que Gödel a bâti sa preuve de la consistance relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu (consistance relative à la consistance de Z-F).

4. CONSISTANCE RELATIVE ET INDEPENDANCE DE L'AXIOME DU CHOIX ET DE L'HYPOTHESE DU CONTINU

A. Le modèle constructible de Gödel

La preuve de Gödel repose essentiellement sur la notion de constructibilité, elle-même ancrée dans la structure cumulative des rangs; si on désigne par L la hiérarchie constructible, on a

$$L_0 = \phi$$

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$$

ou encore

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \pi(L'_\beta)$$

où $\pi(L'_\beta)$ signifie l'ensemble des sous-ensembles définissables de L_β . La classe des ensembles constructibles est donc définie

$$L(x): \exists \alpha \{On(\alpha) \wedge x \in L_\alpha\}$$

et l'axiome de constructibilité s'énonce

$$\forall x \exists \alpha \{O_n(\alpha) \wedge x \in L_\alpha\}$$

La hiérarchie constructible est donc engendrée par l'itération des définitions prédicatives (sous-ensembles définissables) jusqu'à un ordinal quelconque: la génération des ensembles constructibles est par là isomorphe à la génération des ordinaux. Pour obtenir un modèle, il faut vérifier que la classe L des ensembles constructibles satisfait les axiomes de Z-F plus l'axiome de fondation. Cela n'est pas difficile: pour l'axiome de l'ensemble des parties, par exemple, si $P(x) \cap M$ est un ensemble pour $x \in M$, alors il existe dans M un y tel $P^M(x) \leq y$. Le modèle constructible de Gödel (qu'il appelait modèle Δ) est un modèle intérieur (en fait, le plus petit modèle intérieur), transitif et standard: un modèle naturel ou concret d'un langage du premier ordre (selon Jensen) est simplement la donnée d'un univers non vide U et d'une fonction Ω définie sur les constantes et les prédicats non logiques $M = \langle U, \Omega \rangle$. Un modèle intérieur est un modèle (du premier ordre) qui a pour univers U' un sous-univers de l'univers U ; un modèle ou son univers est transitif quand

$$\exists x \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in y \rightarrow z \in x)$$

et il est standard quand la relation d'appartenance \in est la relation ensembliste usuelle.

Le passage de M à un sous-modèle N (i.e. $N \subset M$) se fait à l'aide d'une méthode centrale de Gödel: la relativ-

sation des formules absolues de Z-F, leur transfert dans un modèle. On peut exprimer la relativisation de la façon suivante:

$$\vdash_n \exists x A(x, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \exists x \in V_\beta A(x, t_1, \dots, t_n)$$

pour les termes t, \dots, t_n (\vdash signifie "vrai"). Une formule $A(x_1, \dots, x_n)$ définit une relation absolue si pour toutes les définitions transitives $B(x)$ - qui signifie $x \in L$ et si on a $B(x) \wedge y \in x$, alors on a aussi $B(y)$ -, on obtient

$$B(x_1) \wedge \dots \wedge B(x_n) \wedge A_B(x_1, \dots, x_n) \rightarrow A(x_1, \dots, x_n)$$

En d'autres mots, une relation est absolue si son champ reste le même, relativisé ou pas (il y a une analogie assez frappante avec le principe de réflexion - nous reviendrons là-dessus).

Par exemple, la formule "x est un ordinal" et la relation d'ordre sont absolues. En particulier, les opérations de Gödel J_1 - J_8 - J_3 est $J(x, y) = Xxy$ et J_4 est $J(x, y)$ est $\text{dom}(X)$ - qui font office de schéma de compréhension sont absolues. Par exemple, la formule "x est un ordinal" et la relation d'ordre sont absolues. Toutes les opérations essentielles sont absolues et il s'agit là de la méthode centrale inventée par Gödel dans sa preuve de consistance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu. Gödel a pu montrer à l'aide des formules absolues que le modèle constructible L satisfaisait l'axiome de constructibilité

$$V = L$$

ou plus précisément que tous les ensembles d'entiers naturels étaient constructibles. Il a aussi montré que $V = L \rightarrow AC \wedge HGC$ [11]. On démontre que $V = L$ implique l'axiome du choix en montrant qu'il y a une fonction f définissable dans M de On à L de sorte que l'on a $F(a) = x$ pour $a \in On$ et $x \in L$ comme relation absolue et cette fonction définit un bon ordre sur L .

Pour démontrer que l'hypothèse généralisée du continu est vraie dans le modèle constructible, il faut se donner le théorème de Löwenheim-Skolem pour garantir l'existence d'un modèle dénombrable. Le théorème de Löwenheim-Skolem est un élément essentiel dans les preuves de Gödel et de Cohen; rappelons que le modèle constructible (et le modèle générique que nous verrons plus loin) sont des modèles d'un langage du premier ordre: le théorème de Löwenheim-Skolem énonce qu'il existe pour un modèle quelconque $M = \langle U, \Omega \rangle$ un sous-modèle dénombrable $M_0 = \langle U_0, \Omega \rangle$ avec $U_0 \subset U$ (disons ici que le théorème n'est pas vrai pour un langage du second ordre).

Il s'agit, pour la preuve de Gödel, de montrer d'abord que les cardinaux constructibles sont simplement les cardinaux dans L

$$\bar{L}_\alpha = \bar{\alpha}$$

ou encore

$$\overline{L_{\aleph_{\nu+1}}} = \aleph_{\nu+1}$$

Il suffit de montrer que

$$P(\mathcal{L}'_\nu) \subset L_{\mathcal{L}'_{\nu+1}} \quad \forall \nu \in \text{On}_L$$

Il s'agit de trouver un sous-ensemble a de $P(\mathcal{L}'_\nu)$ tel qu'il existe un β de sorte que $a \in L_\beta$ et $\bar{\beta} = \alpha$ dans L .

Par le principe de réflexion

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow M \vDash \phi(x_1, \dots, x_n)$$

on obtient facilement que

$$M \vDash (\beta \text{ est un ordinal et } a \in L_\beta)$$

Pour montrer que $\beta = \alpha$, on utilise l'isomorphisme entre M et T , un ensemble transitif unique (d'après le théorème de Mostowski qui dit que tout ensemble qui satisfait à l'axiome d'extensionnalité est isomorphe à un ensemble transitif unique et que cet isomorphisme est unique)

$$\sigma: M \cong T$$

pour obtenir $\sigma(\beta) = \alpha$ dans T . Or $\alpha < \mathcal{L}'_{\nu+1}$ puisque T a la même cardinalité que M , donc $T \vDash a \in L_\alpha$ et par absoluté, $a \in L_\alpha$ et par conséquent $a \in L_{\mathcal{L}'_{\nu+1}}$, d'où $P(\mathcal{L}'_\nu) \subset L_{\mathcal{L}'_{\nu+1}}$.

Une approche différente [12] peut être résumée dans le théorème

$$\exists \alpha \geq \omega(x \in L_\alpha \wedge y \subseteq x \rightarrow \exists \beta (\bar{\beta} = \bar{\alpha} \wedge y \in L_\beta))$$

La compression de α à β s'effectue à l'aide du théorème de Löwenheim-Skolem.

Une approche encore plus directe est celle de C. Karp [13] qui a utilisé les formules Σ_1^{ZF} introduites par Levy, pour simplifier la preuve de Gödel. Une formule Σ_0 , pour Levy, est une formule de Z-F qui n'a que des quantificateurs restreints, une formule Σ_0^{ZF} , une formule qui correspond dans Z-F à une formule Σ_0 , une formule Σ_1 est une formule de la forme $\exists xA$, où A est une formule Σ_0 et enfin une formule Σ_1^{ZF} est une formule qui correspond dans Z-F à une formule Σ_1 . Les formules restreintes sont déjà relativisées, peut-on dire, puisqu'elles ont le même sens dans toutes les classes transitives pour des variables a_1, \dots, a_n ; autrement dit

$$\vdash_{Z-F} \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq n} M(a_j) \right) \rightarrow (A \leftrightarrow A^{(M)})$$

pour A une formule de Z-F avec les variables libres a_1, \dots, a_n et $M(a_j)$ la conjonction des classes transitives.

Ceci termine notre exposé du modèle constructible de Gödel. Notons que Gödel a donné sa preuve dans la théorie des classes de Bernays-Gödel-von Neumann (G-B pour faire court), mais la traduction de G-B dans Z-F se fait aisément. Il n'est pas encore temps de tirer des leçons philosophiques de notre exposé. Après avoir esquissé la preuve de la non-contradiction de l'hypothèse généralisée du continu, il faut maintenant passer à la preuve d'indépendance qu'a obtenue Cohen.

B. Le modèle générique de Cohen

Le modèle constructible de Gödel est un modèle intérieur standard. Or, il existe un modèle minimal M dénombrable isomorphe à tout modèle standard N et pour lequel $V = L$. Donc, si on veut démontrer, comme Cohen l'a fait, que

$$Z-F + HGC \text{ n'entraînent pas } V = L$$

et que

$$Z-F + AC \text{ n'entraînent pas HGC}$$

il n'est pas possible de descendre à l'intérieur comme Gödel l'avait fait; il faut plutôt monter et sortir du modèle M par en haut, c'est-à-dire en ayant $M \subset N$: le modèle N sera construit à partir de M en injectant de nouveaux ensembles $a \subseteq \omega$ tels que $a \in N$, mais $\neg(a \in M)$. Ces nouveaux ensembles seront appelés génériques puisqu'ils ne pourront être définis que dans leur genre ou leur espèce et non individuellement. Puisque a n'est pas dans M ($M =$ modèle minimal où $V = L$), il s'ensuit que a n'est pas constructible. L'injection des ensembles génériques est contrôlée par des contraintes (forcing conditions) qui constituent la nouvelle information (finie) nécessaire pour l'introduction des ensembles génériques.

Le modèle N sera la clôture ou la fermeture constructible de $\langle U_M, a \rangle$ pour les ensembles génériques a . Il est construit à partir des conditions de contrainte dont nous indiquons ici les plus significatives (\Vdash signifie "con-

traint"): [14]

- 1) $C \Vdash (A \wedge B) \leftrightarrow_{df} C \Vdash A \wedge C \Vdash B$
- 2) $C \Vdash (A \vee B) \leftrightarrow_{df} C \Vdash A \vee C \Vdash B$
- 3) $C \Vdash \neg A \leftrightarrow_{df} \forall C \supset C(\neg C \Vdash A)$
- 4) $C \Vdash \forall x a \leftrightarrow_{df} \forall x(C \Vdash A(x))$
(pour la constante x)
- 5) $C \Vdash A \rightarrow B \leftrightarrow_{df} C \Vdash B \vee C \Vdash \neg A$

Il est significatif que

$$6) C \Vdash \neg \neg A \leftrightarrow C \Vdash A$$

Nous avons les stipulations générales suivantes pour la relation de contrainte:

- 1) $\neg(C \Vdash A \wedge C \Vdash \neg A)$
- 2) $C \Vdash A \wedge C' \supset C \rightarrow C' \Vdash A$
- 3) $C \Vdash A \vee \exists C' \supset C(C' \Vdash \neg A)$
- 4) $C \Vdash A \leftrightarrow \forall C' \supset C(\neg C' \Vdash \neg A)$

Il est intéressant de noter ici que les lois qui régissent la relation de contrainte sont identiques aux lois de la logique intuitionniste (cf. chapitre II).

Encore plus frappante est la similitude avec les énoncés extensionnellement définis qu'avait introduits Kreisel dans son article "Set-theoretic problems suggested by the notion of potential totality" [15]. Par exemple, l'interprétation du quantificateur universel est énoncée de la façon suivante:

$\alpha, M, X \Vdash (\forall \phi) B(\phi, \alpha)$ signifie

$(\beta) (M_1) \{M_1 \subseteq M \rightarrow \beta, \alpha, M_1, X \Vdash B(b, a)\}$

où M veut dire modèle, M_1 sous-modèle de M , α, β, ϕ sont des éléments de M , X un ensemble d'énoncés et \Vdash une relation de satisfaction extensionnellement définie. La réinterprétation intuitionniste des constantes logiques a une fonction explicite chez Kreisel comme chez Cohen: pour Kreisel, il s'agit de voir quel usage (ensembliste) on peut faire de la notion de totalité finie ou potentielle, alors que pour Cohen il s'agit de déterminer d'une façon finie l'information qui "force" la vérité des énoncés. On peut donc penser qu'il y a ici identité principielle, mais divergence d'applications. Revenons au modèle N .

Pour démontrer que N est bien un modèle pour Z-F, on procède essentiellement à la manière de Gödel. Pour le montrer, donnons un exemple: l'axiome de l'ensemble des parties est satisfait dans N comme dans M (ou L).

1) Dans L : supposons que $x \in L$. $P(x)$ sera l'ensemble des parties de x et $P_L(x)$ l'ensemble des parties *constructibles* de x . Pour chacun des membres y de $P(x)$, on peut définir une application ϕ de domaine $P_L(x)$, $\phi(y) =$ le plus petit α tel que $y \in L_\alpha$. Par le schéma d'axiome de substitution, il y a un ordinal β qui est le supremum des ordinaux dans le champ de ϕ . Donc $y \in P_L(x) \rightarrow y \in L_\beta$.

L'ensemble des éléments y de L_α qui sont des parties de x est défini par la formule $\forall z(z \in y \rightarrow z \in x)$ et cet ensemble équivalant à $P_L(x)$ est dans $L_{\beta+1}$: il est donc constructible.

2) Dans N : ici, bien que l'on sorte de M (modèle minimal), on ne veut rien utiliser qui ne soit déjà contenu dans M - c'est le rôle des conditions de contrainte. Les conditions de contrainte sont évidemment dans L (ou M) puisque la relation de contrainte est définissable dans Z-F et est, en fait, une relation absolue; on se donne un ensemble $X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$ qui contienne tous les éléments x "contraints" par les conditions de contrainte; l'ensemble des parties de X dans N est dans $L_{\alpha+1}$; l'axiome de l'ensemble des parties est donc satisfait dans N .

Une fois que l'on a montré que N est bien un modèle pour les axiomes de Z-F (c'est le schéma d'axiome de substitution qui pose le plus de problèmes, puisqu'il requiert le théorème de Löwenheim-Skolem ou l'équivalent), il ne reste plus qu'à faire la preuve de l'indépendance de l'axiome du choix et l'hypothèse du continu dans N .

Pour cela, il faut montrer que bien que l'univers de M soit un sous-univers de N

$$U_M \subset U_N$$

les ordinaux et les cardinaux de N sont les mêmes que les or-

dinaux et les cardinaux de M , soit

$$On_M = On_N$$

et $(\aleph_\nu)_M = (\aleph_\nu)_N$ pour $\forall \nu \in On_M$

et $2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$,

(seulement pour $\nu < \gamma$ dans N)

mais que $2^{\aleph_\gamma} \geq \aleph_\gamma$, dans N

Il n'est pas nécessaire de s'étendre sur la démonstration des équivalences mentionnées (qui repose sur la manipulation des conditions de contrainte); pour que l'hypothèse du continu soit fausse dans N , il suffit d'injecter dans N une suite γ de sous-ensembles a_ν - les ensembles génériques - de \aleph_γ (avec $\nu < \gamma$). Si l'on suppose l'axiome du choix, on n'a qu'à montrer qu'il y a une bijection entre la suite γ des a_ν et un sous-ensemble de $P_N(\aleph_\gamma)$. S'il n'y avait pas une telle bijection, on pourrait avoir

$$\nu < \nu' < \aleph_{\gamma+1}$$

et $a_\nu = a_{\nu+1}$ (contradiction).

Puisque l'ensemble P^C des conditions de contrainte est bien ordonné, nous avons

$$C < C', C' \parallel (a_\nu \neq a_{\nu+1})$$

Ce qui montre que nous avons bien une bijection et que dans N

$$\overline{P(\omega)} \geq \bar{\gamma}$$

et puisque $\bar{\gamma} > \aleph_1$

l'hypothèse du continu

$$P(\omega) = \overline{\mathcal{R}}_1$$

n'est pas vraie.

En fait, la cardinalité du continu est arbitraire dans le modèle générique, d'après un résultat de Solovay.

Il resterait à montrer que l'axiome du choix est à son tour indépendant des autres axiomes de Z-F. Dans son livre, Gödel n'avait pas eu de peine à démontrer que AC était consistant avec les autres axiomes de ZF (ou de GB) - en admettant $V = L$. L'axiome du choix découlait directement d'une relation As

$$\text{Dfn } \langle y, x \rangle \in \text{As.} \equiv : y \in x. (z) \{ \text{Od } z < \text{Od } y. \supset$$

$$. \sim z \in x \}. \text{ Rel (As) .}$$

qui isolait ou désignait l'élément d'ordre minimal dans tout ensemble constructible non vide. Il suffisait de généraliser à une fonction d'ordre sur tous les ordinaux (constructibles par $V = L$) pour obtenir un bon ordre sur V (et par là sur L).

Nous ne ferons qu'esquisser ici la preuve de Cohen pour l'indépendance de l'axiome du choix. Il faut montrer que dans un modèle donné, une extension générique N d'un modèle de Z-F, M, qui contient le groupe d'automorphismes de l'algèbre booléenne des conditions de contrainte définie plus haut, il y a un sous-ensemble (ou partie) de $P(\omega) = C$ qui est à la fois infini et "fini au sens de Dedekind" (*i.e.* il n'y a pas de bijection entre cet ensemble et un de ses sous-ensembles pro-

pres). Remarquons ici que les ensembles génériques jouent un rôle similaire aux "atomes" des modèles de Fraenkel-Mostowski, en ce sens qu'ils sont comme eux "indistincts". Nous obtenons de cette façon la négation de l'énoncé: "Tout ensemble fini au sens de Dedekind est fini" qui est équivalent à l'axiome du choix. On raisonne de nouveau sur l'ensemble des conditions de contrainte P , constituées de toutes les fonctions finies de $\omega \times \omega$ à valeurs dans $\{0,1\}$; puisqu'il y a une infinité d'éléments génériques a_n , il ne peut y avoir de bijection entre l'ensemble des éléments génériques et un cardinal fini; donc cet ensemble est infini. D'autre part, il est fini au sens de Dedekind, puisqu'il n'y a pas de bijection entre cet ensemble et un de ses sous-ensembles propres dénombrables; en d'autres mots, l'ensemble $\{x_n : n \in \omega\}$ est fini au sens de Dedekind dans N mais la bijection $n \leftrightarrow x_n$ n'est pas dans N . La technique utilisée ici est celle des permutations qui permet de permuter deux éléments en laissant les autres inchangés et on obtient ainsi un groupe G d'automorphismes $g(C) = \text{df } g \sim C$ sur les conditions de contrainte. Ce groupe d'automorphismes détermine des propriétés de symétrie pour l'ensemble des éléments génériques, mais les conditions de contrainte finies "chambardent" ou permutent deux sous-ensembles dénombrables quelconques de ω ou deux éléments génériques, ce qui rend la bijection impossible. Pour deux entiers différents $i \neq j$,

il n'y a pas de condition P qui puisse contraindre $a_i = a_j$; par ailleurs A , l'ensemble des éléments génériques a_n est infini, puisque $A \subset P(\omega)$; cependant A est fini au sens de Dedekind, puisqu'il est facile de déterminer à l'aide des conditions de contrainte une permutation π telle que $\pi(n) \neq n$, de sorte que l'on obtienne par exemple $f(k) = a_s$ et $f(k) = a_t$, ce qui est interdit comme on vient de le voir.

Ceci termine notre exposé du modèle générique.

D. Scott [16] a donné une preuve simplifiée de l'indépendance de l'hypothèse du continu en substituant aux ensembles génériques des réels stochastiques ou probabilitaires (random reals) et en définissant l'algèbre booléenne de leurs fonctions de probabilité. Scott et Solovay ont donné une version en modèles booléens de la preuve de Cohen: nous en donnons quelques linéaments d'après Jensen.

On peut considérer les conditions de contrainte comme équivalent à la définition booléenne de la vérité, *i.e.* à des valuations sur une algèbre de Boole; on a

$\| A \|$ est la valeur de vérité de l'énoncé A

$\| A \wedge B \| = \| A \| \wedge \| B \|$

$\| \neg A \| = \neg \| A \|$

$\| \forall x A \| = \bigwedge_x \| A(x) \|$

$\| \|$ est un homomorphisme de l'ensemble des énoncés dans une algèbre de Boole à deux éléments $\{0,1\}$.

Un modèle à valeurs booléennes est un modèle dont les valuations sont booléennes; par exemple, parallèlement à la notion de contrainte, nous avons

$$\| A \| =_{df} \{C \mid C \Vdash A\}$$

Depuis 1963, au moment où Cohen publiait sa preuve, bien d'autres résultats ont été obtenus en théorie axiomatique des ensembles, tous plus ou moins reliés à la méthode du "forcing" (ceux de Solovay, Silver, Rowbottom, Martin pour n'en nommer que quelques-uns). La théorie descriptive des ensembles, de son côté, n'a pas connu de développements aussi spectaculaires - la théorie descriptive des ensembles est la théorie qui traite des hiérarchies arithmétique, analytique et hyperarithmétique dont nous dirons un mot plus loin; c'est le pendant syntaxique de la sémantique ensembliste.

Nous avons vu que le modèle constructible et le modèle générique sont des modèles d'un langage du premier ordre. Malgré notre insistance sur la théorie des ensembles au second ordre comme cadre descriptif exhaustif, les logiciens en général veulent réduire la théorie des ensembles au premier ordre pour deux raisons assez simples: on n'a pas de notion précise de sous-ensemble arbitraire d'un ensemble infini et seules les théories du premier ordre possèdent des propriétés logiques bien circonscrites, comme on le verra plus loin. Même là, les preuves de consistance relative et d'indépendance ne viennent

qu'accentuer le caractère ouvert de la théorie des ensembles fondée sur la structure cumulative des rangs, qui repose elle-même sur l'itération transfinie de la notion fondamentale d'ensemble de quelque chose ("set of something"). Il nous reste à formuler nos critiques de la théorie des ensembles.

5. CRITIQUE DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

La notion itérative d'ensemble ne pose aucun problème pour les ensembles finis: un ensemble fini est simplement la totalité finie de ses éléments. Mais peut-on concevoir une totalité infinie, un *ensemble*, un tout, un rassemblement d'objets qui soient en nombre infini? Gödel [17] ne semble faire aucune distinction entre ensemble d'objets finis et ensemble d'objets infinis. Shoenfield [18] parle librement de génération d'étages ou de paliers successifs qui hiérarchisent des totalités infinies en utilisant ce que nous avons appelé ailleurs (chap. VII) la dialectique douteuse du procès *transarithmétique* ou encore l'identification des principes-limites avec des principes-origines, *i.e.* la limite est identiquement l'origine. Si l'on accorde qu'il peut y avoir des multiplicités ("Mannigfaltigkeiten" dont Cantor avait parlé avant d'en venir à ses "Menge") non finies, s'ensuit-il que l'on puisse les totaliser ou les unifier dans des ensembles, des *contenants* ayant un *contenu* bien déterminé?

Le tout, la totalité, l'univers ne sont que des uni-

fications idéales de l'esprit (ou du langage): ils n'ont pas de référent. Il n'y a pas de contenant qui contienne tout ce qui est. Dans ce sens, Cantor a très bien vu qu'il ne saurait y avoir un ensemble de tous les ordinaux ou un ensemble de tous les cardinaux. Une totalité non finie n'est qu'une totalisation idéale. Mais comment quantifier sur tous les entiers naturels, par exemple, sans faire un ensemble de tous les entiers naturels? Le passage de "tous" à tout ou à "totalité" est un saut naturel de l'esprit: *tous* les entiers naturels constituent un *tout*, un ensemble, de même pour tous les nombres rationnels, tous les réels, toutes les fonctions sur les réels, etc. Il est possible d'imaginer une quantification (que nous appelons "effinie") qui n'enferme pas "tous" dans un "tout"; cette quantification effinie aurait pour champ un ensemble arbitrairement grand, mais fini, et au-delà, une extension effinie (hors du fini) de ce champ, qui devrait obéir aux mêmes lois ou opérations que le champ fini. Puisqu'on ne peut connaître le lointain que par approche *i.e.* approximation qualitative ou intensionnelle, seules les opérations intensionnellement finies, c'est-à-dire définissables finitairement, ont une application effinie. Les concepts d'infini ou de transfini (dénombrable et non dénombrable) sont pour nous transarithmétiques (nous nous expliquons là-dessus à différents endroits dans la seconde partie). La notion imprédicative d'ensemble

(le contenant préexiste à son contenu) ne résiste pas à l'examen, selon nous. Même la notion prédicative d'ensemble (il n'y a d'ensemble que pour des éléments déjà définis) ne peut être étendue par-delà le fini. Les ensembles, dans la définition cantorienne, sont le résultat d'un procès rassembleur, d'une collecte "Zusammenfassung". Comment colliger un nombre infini d'éléments, si ce n'est idéalement? (Il faut penser ici que cette idéalité n'est pas bien constituée, elle n'est pas justifiée comme idéalité).

Le procès d'"ensembler" s'effectue au moyen de la relation d'appartenance ϵ . Peut-on imaginer que même sans connaître l'extension de deux totalités, l'un soit englobée par l'autre? Notre expérience de la réalité physique peut nous aider ici. Supposons que le nombre de choses existantes ne soit pas fini (c'est-à-dire qu'il soit infini, ou effini comme nous préférons dire). Y aurait-il du sens alors à parler de la totalité des atomes ou encore de la totalité des particules élémentaires comme englobant la totalité des choses matérielles? Il semble bien que le problème se situe au niveau de la définition des constituants de la réalité physique. Si on dit qu'un corps matériel est un assemblage ou un ensemblage d'éléments, comment ne pas penser que ces éléments eux-mêmes sont constitués d'éléments à leur tour et ainsi de suite *ad effinitum*. Pourra-t-on déterminer la cardinalité de ces diverses totalités

imbriquées l'une dans l'autre? Et ne voit-on pas que ces totalités ne forment pas d'ensembles, que ce sont des totalités "détotalisées"? Seule notre expérience finie avec des objets finis nous permet de faire jouer librement la relation d'appartenance et lorsqu'il s'agit d'étendre le champ de cette expérience, il n'est le plus souvent possible de le faire que qualitativement, en employant des notions intensionnelles. L'expérience finie elle-même est essentiellement déterminée qualitativement ou à l'aide des propriétés qui la constituent. Par exemple, nous n'avons aucune idée de l'extension des choses blanches, mais nous savons que c'est un sous-ensemble de l'ensemble des choses dont nous faisons l'expérience. Les distinctions intensionnelles suffisent, à notre point de vue, à déterminer l'univers mathématique. Les opérations de construction des nombres naturels, rationnels et irrationnels en définissent les propriétés sans qu'il soit nécessaire de former des ensembles, des contenants dont l'idéalité même (la justification conceptuelle) est précaire. Si l'existence, la vérité, des êtres mathématiques est uniquement définitionnelle, encore faut-il que ceux-ci soient bien définis.

L'intuitionnisme se limite plus volontiers aux aspects intensionnels des mathématiques, nous le verrons plus loin. L. Pozsgay [19] a pensé réconcilier intuitionnisme et théorie des ensembles dans ce qu'il a appelé un intuitionnisme

libéral et dont il donne les caractéristiques principales:

1° l'aspect intuitionniste: un ensemble est une construction mentale qui découle de l'opération intellectuelle de concevoir une collection d'objets qui ont été d'abord construits ou découverts, opération qui a pour résultat la formation (dans la pensée) d'un objet unique, l'ensemble des objets donnés.

2° l'aspect libéral: toute opération intellectuelle bien définie, reconnue clairement comme non contradictoire et non ambiguë et qui permette de construire des ensembles, peut passer pour achevée sans égard aux difficultés pratiques qui pourraient en empêcher la réalisation.

Le deuxième principe semble bien une pétition de principe, puisqu'on ne donne pas de critère pour "bien définie": la non contradiction n'assure pas l'existence et on a vu que la conception cantorienne des ensembles n'était pas sans ambiguïtés. Le premier principe correspond à la prédicativité, le second à une dose variable d'imprédicativité.

Il faut aller plus loin que ce cartésianisme des idées claires et distinctes (qui va jusqu'à démontrer l'existence de Dieu ... peut-être Poszgay pense-t-il que les ensembles infinis ont le même degré d'évidence que le Dieu de Des-

cartes!) Seul un constructivisme radical a des chances de ne pas se perdre dans la dialectique du probable ou du comme si [20].

La théorie des ensembles a d'autres faiblesses, comme celle de se prêter facilement à un traitement sémantique. La théorie des modèles ou la sémantique est d'ailleurs ensembliste, c'est-à-dire que toute théorie mathématique se laisse interpréter dans la théorie des ensembles. La théorie des modèles du premier ordre, avec son caractère nettement référentiel, est suffisamment indéterminée pour accueillir sans difficulté des théorèmes de détermination comme les théorèmes de complétude, de compacité, de Löwenheim-Skolem. Au second ordre et aux ordres supérieurs, ces déterminations disparaissent. Mais cela ne signifie-t-il pas que la théorie des ensembles du second ordre est encore plus indéterminée, peut-être indéterminable? Ces questions reviendront plus loin, mais on peut tout de suite en tirer un élément de critique. L'approche sémantique suppose une interprétation réaliste de l'existence des êtres mathématiques. Le plongement ou l'immersion d'une théorie dans l'univers sémantique signifie un baptême réaliste; comment se départir ensuite de cette religion du réel (mathématique)? D'autre part, il n'est pas nécessaire d'insister ici sur les justifications métaphysiques et théologiques que Cantor donne à sa théorie des ensembles et qui supposent toutes l'existence d'un in-

fini en acte à trois niveaux: un absolu (Dieu), un "transfinitum", l'infini en acte dans la nature, et enfin des nombres transfinis (cf. *Gesammelte Abhandlungen*, ouvr. cit., p. 372).

Le réalisme inhérent de la théorie des ensembles et de sa théorie des modèles n'est pas tempéré par les principes de relativisation et de réflexion. On a vu que le principe de relativisation permettait, une fois passé de la théorie au modèle standard, de passer du modèle standard M à un modèle intérieur L ou à un modèle supérieur N en se limitant aux formules absolues. Le principe de réflexion joue le même rôle à l'intérieur de l'univers même: selon la formulation de Takeuti [21]: "Il y a une approximation arbitrairement grande de l'univers" ou celle de Montague [22]: "Si α est valide dans l'univers ensembliste, alors α est valide aussi dans un ensemble quelconque α_ϕ ", le principe de réflexion permet de monter ou de descendre dans l'univers, une fois qu'on a atteint un palier, un étage suffisamment élevé dans la hiérarchie cumulative des rangs. En réalité, c'est un principe épistémologique qui est énoncé ici, que nous appellerons principe de l'horizon constructible: l'horizon est la limite du champ de vision et ce qui est au-delà, défini par l'uniformité de l'en-deçà, doit se conformer à ce que je vois: la mer est infinie pour qui reste sur le rivage. Loin donc de cautionner une interprétation réaliste, ces nouvelles techniques de montée et de

descente infinie ou effinie indiquent plutôt que la conception des ensembles obéit à des principes de construction qui nous instruisent davantage sur nous-mêmes (nos capacités constructives) que sur une "prétendue" réalité. Au "tout est dans tout" réaliste s'oppose le "rien n'est dans rien" constructiviste. La relation d'appartenance, tout comme la relation de participation platonicienne qui en est proche parente, est une relation construite.

Gödel, qui a plus ou moins incité les chercheurs ensemblistes à formuler les axiomes forts d'infinité, semble aussi légitimer le principe de réflexion qu'on peut considérer à juste titre comme l'axiome le plus fort de la théorie des ensembles, puisqu'il est équivalent aux axiomes de remplacement et d'infini pris ensemble. W. N. Reinhardt dans un article récent "Remarks on Reflection Principles, Large Cardinals and Elementary Embeddings" [23] fait état d'une idée de Gödel selon laquelle "toute propriété structurelle du *concept* d'ensemble est reflétée par un ensemble (quelconque)". Comme la notion d'ensemble de quelque chose, celle de propriété structurelle du concept d'ensemble apparaît suffisamment générale pour donner libre cours à la surenchère ensembliste. Reinhardt s'autorise de ce point de vue, pour formuler un principe de réflexion sur Ω l'ensemble des ordinaux. Or, s'il reconnaît que Cantor considérait cette pluralité "Vielheit" Ω comme absolument infi-

nie, il oublie que pour Cantor, cette "pluralité" était aussi inconsistante (la supposition que tous les éléments d'une telle pluralité pouvaient être "ensemblés", leur "être ensemble" ("Zusammensein") [24] entraînait une contradiction). Réfléchir sur Ω ne peut donc avoir de justification, même cantorienne. Pas plus que la totalité du pensable ("Inbegriff alles Denkbaaren") ou la totalité de ce qui existe, comme le voudrait Reinhardt, la totalité des ordinaux ne constitue un ensemble - qui doit être, dans les termes de Cantor, une "pluralité" consistante. Le schéma de réflexion de Reinhardt qu'on peut formuler de la façon suivante

$$\forall x \forall y \in V_{\Omega} [\phi^{V_{\Omega}}(x, y) \leftrightarrow \phi(x, y)]$$

peut bien servir à suggérer l'existence de cardinaux extensibles et mesurables, mais l'argument n'a rien de plausible: l'extension d'une théorie est opérée par un plongement

$$A \models \phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow B \models \phi(jx_1, \dots, jx_n)$$

où j est une fonction de domaine A et de codomaine B (le plongement est élémentaire si $A < B$, *i.e.* A est un sous-modèle élémentaire de B). Cette notion de la théorie des modèles permet d'obtenir une notion de cardinal extensible et par là de cardinal supercompact que l'on obtient de façon équivalente par le concept de mesure normale défini plus haut. Que l'on ait un plongement élémentaire propre de l'univers des ensembles en lui-même (que l'univers "se réfléchisse"), signifie

simplement que l'on a produit une *extension* induite du concept d'ensemble ou des procès d'ensembles - nous avons "joué" avec ce rêve leibnizien plus loin.

L'idée que l'on puisse itérer indéfiniment la structure "ensemble de" n'est possible que si on définit d'abord certains procès, *e.g.* union et ensemble des parties, qu'on ferme ou clôt ou "stoppe" ensuite; la fermeture ou clôture des opérations ou des propriétés suppose que l'on a d'abord un ensemble pour lequel ces opérations ou propriétés sont définies ou plutôt qu'elles servent à définir, *e.g.* structures algébriques. Mais lorsqu'on suppose que les ensembles définis par des opérations arithmétiques sont fermés sous ces opérations, c'est là qu'on "comprime" des procès effinis pour leur faire atteindre leur limite et ainsi aller au-delà: itération sur les ordinaux finis, ensuite sur les ordinaux dénombrables, ensuite sur les ordinaux transfinis, etc. Les "propriétés structurelles" de la notion d'ensemble sont à chercher du côté des procès de génération ou d'ensembles qui sont arithmétiques - puisqu'il s'agit essentiellement en théorie des ensembles de la génération des ordinaux; les autres opérations, algébriques ou autres, ne seraient donc pas en principe applicables et seuls les procès finis et effinis seraient en dernière analyse justifiables dans une théorie de la construction des ordinaux (et des cardinaux).

Une autre idée chère aux réalistes "ensemblistes" ou "classiques", c'est celle de la décidabilité de toute assertion mathématique, ce que Bishop appelle le principe d'omniscience "ou bien tous les éléments d'un ensemble A ont la propriété P , ou bien il y a un élément de A qui a la propriété non P ". En symboles

$$\forall x \in A P(x) \vee \exists x \in A \sim P(x)$$

ou dans sa forme limitée

$$\exists n \exists k (n_k = 0) \vee \exists n \forall k (n_k \neq 0)$$

pour n_k une suite d'entiers.

C'est dans cet esprit que Gödel a suggéré que l'hypothèse du continu avait une valeur de vérité, *i.e.* était décidable - on voit les limites d'une telle conception. Pour croire en la décidabilité de toute assertion mathématique, il faudrait s'assurer que toute assertion mathématique est bien fondée et la critique que l'on adresse aux mathématiques classiques vise précisément leur légitimité. D'ailleurs les résultats d'indépendance montrent au moins une chose: que l'assertion dont on a démontré l'indépendance n'est pas située dans le bon contexte ou que le problème n'est pas bien posé, *e.g.* hypothèse du continu, axiome du choix, etc.

En tout cas, la décidabilité ou la solvabilité de toute question mathématique signifierait que nous avons les moyens (constructivistes) de trouver une solution (constructi-

viste) à toutes les questions posées ou du moins à des questions formulées constructivement et on sait que ce n'est pas le cas pour les mathématiques classiques.

Finalement en ce qui touche la consistance de Z-F, on peut adopter la position inverse du formalisme à la Bourbaki qui consiste essentiellement à penser qu'il n'est pas vraisemblable qu'une contradiction apparaisse dans Z-F (ou dans les mathématiques classiques) - puisque l'expérience n'en a pas encore fait surgir: il n'est pas plus vraisemblable qu'on puisse démontrer un jour la consistance de Z-F ou des mathématiques classiques. Les preuves d'incomplétude et surtout les moyens non constructifs mis en oeuvre semblent interdire qu'une telle démonstration soit possible. Il faut se rappeler que dans la perspective métamathématique de Hilbert, la consistance ne comportait que des moyens finis. Si l'on veut espérer une preuve de consistance qui soit constructive (en faisant intervenir des objets abstraits tels que les fonctionnelles primitives récursives) tout en allant plus loin que les moyens finitaires, il faudrait pouvoir séparer les éléments idéaux et les méthodes transcendantales (*i.e.* non constructives) du noyau constructif de Z-F et des mathématiques classiques. Ce qui est loin d'être accompli.

Si le problème fondationnel majeur des mathématiques est celui de leur objectivité, du fondement objectif de leur

certitude, c'est du côté de la valeur objective de nos constructions (mentales ou linguistiques, ce qui est la même chose pour nous) qu'il faut chercher. La saturation ontologique du langage réaliste des mathématiques a pour pendant un seuil critique extrêmement bas. Comment déterminer la mesure de certitude des énoncés mathématiques, s'il suffit de définir les êtres mathématiques pour qu'ils *soient* (Aristote avait déjà vu que l'essence d'une chose se confondait avec sa définition)? L'écart entre "il y a des mathématiques" et "il y a des êtres mathématiques" s'accroît, si on analyse, mieux que ne le fait le réalisme ensembliste, les constructions et les structures linguistiques qu'engendre l'activité mathématique. On ne se pose pas le problème de l'objectivité ou de la vérité du langage, mais toujours d'un certain langage; la langue française est certainement un objet et pourtant elle est le résultat de constructions subjectives. Ce modèle linguistique ou métalinguistique devra nous guider dans l'examen de l'intuitionnisme, qui, au-delà des constructions combinatoires ou concrètes, admet des constructions linguistiques abstraites comme fondements des mathématiques. Nous limiterons notre étude à l'intuitionnisme, la branche principale du constructivisme contemporain.

NOTES DU CHAPITRE I

- [1] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. v. E. Zermelo, Olms (Hildesheim: 1966), p. 282. On sait que c'est à partir de la représentabilité unique d'une fonction de variables réelles par une série trigonométrique que Cantor a formulé sa problématique ensembliste, *i.e.* la notion d'ensemble de points dérivés indéfiniment itérable jusqu'à un ordinal α et transfinitement jusqu'à $\omega, \omega+1, \dots, \omega^2 \dots$. Cette genèse a été retracée par Jean Cavailles dans ses "Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles" in *Philosophie mathématique*, Hermann (Paris: 1962).
- [2] G. Kreisel et J. L. Krivine, *Éléments de logique mathématique. Théorie des modèles*, Dunod (Paris: 1967), p. 165.
- [3] Voir aussi K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem" in *Selected Readings in the Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf et H. Putnam, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N. J.: 1964), p. 258-273.
- [4] A. Fraenkel et Y. Bar-Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, North-Holland (Amsterdam: 1973), chap. II, par. 4. Remarquons que le théorème sur les idéaux premiers booléens est indépendant de l'axiome du choix (Levy et Halpern) et que l'axiome de déterminité ("determinateness", Mycielski et Steinhaus) - qui affirme que dans une joute infinie où il s'agit pour deux joueurs de choisir des nombres dans l'ensemble des nombres naturels, il y en a un qui choisira toujours ses nombres dans un sous-ensemble déterminé - contredit l'axiome du choix.
- [5] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 7e éd., Vieweg u. Sohn (Braunschweig: 1965).
- [6] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, ouvr. cit., p. 443.

- [7] G. Kreisel, "A survey of Proof Theory II" in *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Colloquium*, North-Holland (Amsterdam: 1971), p. 147. Kreisel accepte en fait une forme beaucoup plus forte du principe de réflexion
- $$\forall x(A \vee \neg A) \rightarrow \forall \beta(\exists \alpha > \beta) (\forall x \in A) (A \leftrightarrow A_\alpha)$$
- qu'on trouve à la fin de son article "Which number-theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π_1^1 - Paths through 0?" *Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, no 2 (June 1972), note 8, p. 334.
- [8] A. Levy, "Axiom Schemata of Strong Infinity in Axiomatic Set Theory" in *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 10 (1960), p. 223-238.
- [9] Un des résultats les plus importants dans cette voie est celui de R. Solovay "A Model of Set Theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Annals of Mathematics*, 92 (1970), p. 1-56. Une mesure est une fonction qui associe un nombre réel non négatif à chaque ensemble d'une collection d'ensembles donnée (elle peut-être finiment additive ou dénombrablement additive); la mesure extérieure est la plus petite borne supérieure de la somme des mesures des intervalles d'un ensemble S d'intervalles; les ensembles mesurables enfin sont les sous-ensembles d'un ensemble X appelé espace mesurable sur lequel est définie une σ - algèbre, *i.e.* une collection de sous-ensembles qui contient en plus du complément de chacun de ses membres et de l'union de deux quelconques de ses membres l'union de toute séquence de ses membres. D'autres résultats sur les cardinaux compacts, supercompacts et extensibles, indescriptibles, ineffables, etc., aident à formuler des axiomes d'infinité encore plus forts. Mais ces constructions sont plutôt fragiles (d'un point de vue constructif, s'entend) et ne semblent pas

- donner de résultats "forts", en raison des principes de construction que l'on met en oeuvre. Pour tous ces résultats, on pourra consulter l'ouvrage de F. R. Drake *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*. North-Holland (Amsterdam: 1973). Pour les définitions de la théorie de la mesure que nous avons données, voir W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill (New York: 1964), chap. 10.
- [10] D. Scott, "Measurable cardinals and constructible sets" in *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences*, vol. 9 (1961), p. 521-524.
- [11] K. Gödel, *The Consistency...*, ouvr. cit. Voir aussi J. L. Krivine, *La théorie axiomatique des ensembles*, ouvr. cit., chap. VIII.
- [12] Voir P. J. Cohen, *Set theory and the Independence of the Continuum Hypothesis*, ouvr. cit., p. 95.
- [13] C. Karp, "A proof of the relative consistency of the continuum hypothesis" in *Sets, Models and Recursion Theory*, North-Holland (Amsterdam: 1967).
- [14] Il s'agit ici de la relation "forte" de contrainte qu'on distingue de la relation faible définie par $C \Vdash A \leftrightarrow C \Vdash A$.
- [15] In *Infinitistic Methods* (Varsovie: 1961), p. 103-140.
- [16] D. Scott, "A proof of the independence of the Continuum Hypothesis" in *Mathematical Systems Theory*, vol. I (1966), p. 89-111.
- [17] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem", art. cit., p. 262.
- [18] R. Schoenfield, *Mathematical Logic*, ouvr. cit., p. 239.
- [19] L. Pozsgay, "Liberal Intuitionism as a Basis for Set Theory" in *Axiomatic Set Theory*, vol. I of the Proceedings of the UCLA Conference, American Mathematical Society (Provi-

dence, R. I.: 1971), p. 321-330.

- [20] H. Putnam, *Philosophy of Logic*, Harper & Row (New York: 1971).
- [21] G. Takeuti, "Hypotheses on Power Set" in *Axiomatic Set Theory*, ouvr. cit., p. 439. Voir aussi T. J. Jech *Lectures in Set Theory*, Lectures Notes in Mathematics no 217, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York), p. 28-29. Le livre de Jech expose dans un langage clair un nombre important de résultats récents auxquels nous avons fait allusion dans ce chapitre.
- [22] Voir note 3 de l'appendice I du chapitre V.
- [23] *Axiomatic Set Theory*, vol. XIII, part 2 of the Proceedings of the UCLA Conference, American Mathematical Society (Providence, R. I.: 1974), p. 189-205.
- [24] Voir G. Cantor *Gesammelte Abhandlungen*, ouvr. cit., p. 443 et s (lettre de Cantor à Dedekind du 28 juillet 1899). Voir aussi p. 204 où Cantor revient sur la définition de la notion d'ensemble qu'il compare à l' $\epsilon\tilde{\iota}\delta\omicron\varsigma$ platonicien. Il ne nous a pas paru nécessaire d'insister sur les justifications d'ordre métaphysique et théologique que Cantor a voulu donner à sa théorie du transfini. Soulignons simplement qu'il y a cinq notions d'infini chez Cantor 1° l'infini potentiel ∞ considéré comme infini impropre par Cantor 2° l'infini actuel dénombrable \aleph_0 3° le transfini proprement dit, *i.e.* $\aleph_1, \aleph_2, \dots$ 4° l'absolument infini Ω , l'ensemble de tous les nombres et enfin 5° Dieu qu'il nomme l'absolu ou encore l'absolu-infini. C'est d'ailleurs sur l'infinitude du Dieu créateur (l'expression "natura naturans" qu'il reprend de Spinoza) qu'il fonde l'existence d'une nature créée (natura naturata) infinie ou transfinie. Notons enfin qu'il rejette l'existence des infinitésimaux. Il y a dans cet arrière-

plan philosophique et théologique - Cantor a même correspondu avec des théologiens et cardinaux catholiques pour confirmer ses thèses sur la théologie médiévale qui seule possédait le vrai concept d'infini actuel, à ses yeux de riches leçons pour la recherche fondationnelle.

Chapitre II

FONDEMENTS CRITIQUES DE L'INTUITIONNISME

Notre approche de l'intuitionnisme est post-brouwerienne. Les idées de Brouwer, pour une bonne part, appartiennent à une philosophie des mathématiques dépassée. Sa conception du divorce de la pensée et du langage peut être rejetée sans que cela entraîne de modification profonde dans sa critique des mathématiques classiques (*i.e.* analyse et théorie des ensembles surtout, mais aussi algèbre, topologie, etc. [1]). Cette critique, sans être la plus radicale qu'on puisse concevoir, est bien fondée, selon nous. Nous ne voulons exposer que les éléments fondamentaux de cette critique qui repose essentiellement sur les notions de procès constructeur, espèces, déploiements, suites de choix et suites irrégulières, sujet créateur et sur le rejet de certains principes classiques, parmi lesquels, en particulier, le principe du tiers exclu, pierre angulaire de la logique classique bivalente.

1. LA LOGIQUE INTUITIONNISTE ET LA NOTION DE SUITE

Le rejet du tiers exclu commande la logique de l'intuitionnisme. L'interprétation intuitionniste des connecteurs et des quantificateurs n'est pas conciliable avec le tiers exclu: $A \vee B$ s'interprète intuitionnistiquement comme "la donnée d'une preuve de $A \vee B$ se réduit à la donnée d'une preuve de A ou à celle d'une preuve de B ".

$A \wedge B$ "la donnée d'une preuve de $A \wedge B$ est la donnée d'une preuve de A et la donnée d'une preuve de B ".

$A \rightarrow B$ "la donnée d'une preuve de $A \rightarrow B$ est effectuée par une construction qui transforme la donnée d'une preuve de A en la donnée d'une preuve de B et qui s'accompagne en plus de la donnée d'une preuve de ce fait (de cette transformation)".

A se démontre par la donnée d'une preuve comme $A \rightarrow 1 = 0$ (absurde).

On a $\neg A$, s'il est absurde d'avoir A .

$\forall x A x$ [2] se démontre en produisant une construction c et une preuve d qui donne la preuve de $A c$.

$\wedge x A x$ se démontre en produisant une construction - ou un schéma de construction - qui donne une preuve de $A x_0$ pour toute instance spécifique x_0 et qui s'accompagne de la donnée d'une preuve de ce fait. Le quantificateur universel a pour champ d'application des totalités déjà constituées ou construites.

Heyting [3] a formulé les axiomes suivants pour la

logique propositionnelle:

- I) $\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$
- II) $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$
- III) $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$
- IV) $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- V) $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$
- VI) $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
- VII) $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$
- VIII) $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
- IX) $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
- X) $\vdash p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- XI) $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$

Pour être plus explicite, on pourrait ajouter ici le symbole \perp pour la fausseté ou la contradiction (ou encore l'absurdité

$$\vdash \perp \rightarrow p$$

Par ailleurs Clifford Spector* a formulé en 1962 les axiomes et règles d'inférence suivants

- 1) $P \rightarrow P$
- 2) $P, P \rightarrow Q \rightarrow Q$
- 3) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \rightarrow (P \rightarrow R)$
- 4) $P \wedge Q \rightarrow P, (P \wedge Q \rightarrow Q), (P \rightarrow P \vee Q), (Q \rightarrow P \vee Q)$
- 5) $(P \rightarrow R, Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R)$

*Cf. *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, p. 3-4, (voir note 17).

- 6) $(P \rightarrow Q, P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge R)$
 7) $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
 8) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \wedge Q \rightarrow R)$
 9) $\perp \rightarrow P$
 10) $(Q \rightarrow Px) \rightarrow (Q \rightarrow \forall xPx)$
 11) $\forall xPx \rightarrow Pt$
 12) $Pt \rightarrow \exists xAx$
 13) $(Px \rightarrow Q) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow Q)$

(en 10 et 13, Q ne doit pas contenir x libre).

Dans l'interprétation intuitionniste des connecteurs, le principe du tiers exclu $p \vee \neg p$ n'est plus valide; pas plus que le principe de double négation $\neg \neg p \rightarrow p$, bien que $p \rightarrow \neg \neg p$ soit valide. Ainsi la formule

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

n'est pas vraie en logique intuitionniste, puisque

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

n'est pas vraie, bien que l'on ait

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Pour les quantificateurs, on a les formules

- I) $\vdash \lambda x p(x) \rightarrow \neg \forall x \neg p(x)$
 II) $\vdash \forall x p(x) \rightarrow \neg \lambda x \neg p(x)$

dont les inverses ne sont pas valides. La formule suivante

$$\neg \lambda x p(x) \rightarrow \forall x \neg p(x)$$

n'est pas valide, bien que l'on ait

$$\vdash \forall x \neg p(x) \rightarrow \neg \lambda x p(x)$$

Heyting donne quelques exemples d'assertions classiques dont on peut donner des contre-exemples intuitionnistes, *e.g.* "pour tout nombre, il y a une expression rationnelle équivalente ou il n'y en a pas" ou "tout nombre peut être représenté par une expression décimale".

Kreisel [4] a donné une version de la logique intuitionniste en termes d'une théorie des constructions. Nous avons des constructions (dont les preuves font partie) et des notions, qui sont des propriétés décidables des constructions, *e.g.*

$$\pi_a c = 0 \quad , \quad \text{ssi } c \text{ est une preuve de } A \quad .$$

π_A est la notion associée à l'assertion A . Une notion de "notion" plus générale s'énonce

$$\pi(c, \lambda d. \alpha d = 0 \quad , \quad \text{ssi } c \text{ est une preuve avec la variable libre } d \text{ de } \alpha d = 0$$

où λ est l'opérateur lambda habituel. L'opérateur lambda ou abstraction fonctionnelle opère sur des fonctions et des variables, *e.g.* $\lambda x M$ signifie que M est fonction de la variable libre x et λd signifie "le d tel que...". Dans ce contexte, la négation se traduit par la fonction de prédécesseur ($1^{\cdot}\pi$)

$$\pi_A(c) = 0 \quad \text{ssi} \quad \pi(c, \lambda d. (1^{\cdot}\pi_A d = 0)) = 0$$

où $1^{\cdot}\pi_A$ est équivalent à A . La théorie des constructions ainsi constituée pourrait aider à mieux fixer le sens des opérations logiques. N. Goodman [5] a élaboré cette approche en

introduisant des niveaux de construction. Par ailleurs, on sait que si on peut démontrer facilement la complétude de la logique proportionnelle intuitionniste, il n'en est pas de même pour la logique des prédicats. Les modèles de Kripke ne donnent qu'une preuve classique (où intervient le tiers exclu) pour la logique des prédicats intuitionnistes *e.g.* la négation est définie de la façon suivante

$$\alpha \Vdash A, \text{ ssi } \forall \beta \leq \alpha \beta \nVdash A$$

ou α et β sont des éléments d'un ensemble non vide partiellement ordonné et \Vdash signifie "vrai" et \nVdash signifie "faux". Les modèles de Kripke, comme ceux de Beth ou comme l'interprétation topologique sont des modèles classiques dans le sens où les preuves de complétude sont similaires aux preuves de complétude pour la logique classique, *i.e.* déductibilité \leftrightarrow validité (ou vérité). Kreisel a obtenu un résultat de non-énumérabilité (réursive) pour les énoncés valides de la logique des prédicats intuitionniste (en supposant la thèse de Church), donc cette logique serait incomplète - remarquons que la logique des prédicats classique, si elle est complète n'est pas décidable, puisque tout en possédant un ensemble de théorèmes récursivement énumérable, l'ensemble de ses formules qui ne sont pas des théorèmes n'est pas récursivement énumérable.*

*Voir pour cette question Dick van Dalen "Lectures on Intuitionism" in *Cambridge Summer School in Mathematical Logic*, vol 337, Lecture Notes in Mathematics Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1973), p. 1-94, en particulier p. 75 et s.

La preuve de Kreisel (cf. "Church's Thesis: a kind of reducibility axiom for constructive mathematics" in *Proof Theory and Intuitionism*, ouvr. cit., p. 133-134) fait intervenir des notions de la théorie des fonctions récursives (voir chapitre III, section 2), mais elle peut se résumer brièvement de la façon suivante: soit un arbre binaire récursif primitif (voir plus loin la représentation graphique d'un arbre), *i.e.* un prédicat récursif primitif T_n tel que $T_0 \wedge T(n \neq m) \rightarrow T_n$ et qui ne comporte que des suites de 0 et de 1. Un "sentier" constructif dans l'arbre T_e (e est l'index de l'ensemble T) est une suite constructive α ; on a l'équivalence suivante

chaque sentier constructif dans T_e est fini \leftrightarrow

$$\text{Val}_c (F_{T_e})$$

ou

$$\bigwedge \alpha \bigvee n A(n, \alpha) \leftrightarrow \text{Val}_c (F_{T_e})$$

où Val_c est la validité constructive et F_{T_e} est une formule de la forme $U \rightarrow H$ où U est une formule universelle et H une formule existentielle. Mais un théorème de la théorie de la récursion affirme qu'il existe une paire disjointe d'ensembles récursivement énumérables qui sont effectivement et, par là, récursivement inséparables, *i.e.* pour deux ensembles récursivement énumérables W_1 et W_2 , on a

$$A \subset W_1 \wedge B \subset W_2 \wedge W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

Ainsi l'ensemble des arbres récursifs primitifs dont tous les

sentiers récursifs sont finis et l'ensemble des arbres récursifs primitifs qui contiennent un sentier récursif primitif infini sont récursivement inséparables. Il s'agit alors d'appliquer ce résultat (application qui est due à Mostowski) à l'ensemble des formules qui sont vraies dans tous les modèles récursivement énumérables et à l'ensemble de celles qui sont fausses dans un modèle récursif primitif; pour le premier ensemble, tous les sentiers récursifs sont finis dans T_e (pour W_e , un ensemble récursivement énumérable par l'index e) et le second contient un sentier récursif primitif infini. Si l'on suppose vraie la thèse de Church on a l'équivalence intuitionniste suivante:

chaque sentier récursif à travers T_e n'est pas infini $\leftrightarrow \text{Val}_c (\neg\neg F_{T_e})$

ou encore

$$\bigwedge \alpha \neg\neg \bigvee n A(n, \alpha) \leftrightarrow \text{Val}_c (\neg\neg F_{T_e})$$

par la traduction de Gödel (voir note 19)

Supposons maintenant que l'espèce des énoncés constructivement valides est récursivement énumérable: on a alors $W_{(t)}$ (t quelconque) et une fonction récursive $p(t)$. Le théorème d'inséparabilité s'applique par le résultat de Mostowski et on obtient facilement une contradiction (toujours par la traduction de Gödel)

- i) $\neg \neg p(t) \in W_t \leftrightarrow$ chaque sentier récursif de $T_{p(t)}$
n'est pas infini
- ii) $\neg p(t) \in W_t \leftrightarrow$ chaque sentier récursif de $T_{p(t)}$
n'est pas infini, (à cause du théorème d'inséparabilité).

Donc, la logique des prédicats intuitionniste est incomplète, si l'on admet la thèse de Church selon laquelle toutes les suites régulières (constructives) sont récursives (*a fortiori* récursivement énumérables). Il faut souligner le caractère intuitionniste de cette preuve: les arbres récursifs primitifs correspondent (pour les suites constructives) au théorème de l'éventail (voir plus loin) de Brouwer qui énonce une propriété de finitude pour les suites de choix. La notion de suite (ou fonction) constructive est problématique (voir chapitre V) et celle de validité constructive ne l'est pas moins, mais la thèse de Church (qui n'est ni démontrée, ni réfutée et dont la plausibilité semble être question de goût pour certains, de principe, pour d'autres), n'est pas affectée directement par les notions constructives utilisées dans la preuve qu'on vient de donner. Quoi qu'il en soit, on mesure encore une fois ici la distance qui sépare la logique (et les mathématiques) intuitionniste de la logique (et des mathématiques) classique. Et la différence n'est sans doute pas radicalisée davantage qu'entre fonction humainement computable et fonction

mécaniquement computable, distinction qu'a introduite Kreisel. On peut bien rejeter cette distinction, mais ne peut refuser qu'entrent dans les mathématiques des notions intensionnelles et celle de fonction constructive ou de fonction humainement computable semblent bien en faire partie. La notion de fonction constructive (voir chapitre V) fait intervenir la capacité de reconnaître le caractère intensionnel d'une preuve, une "instruction" à laquelle ne saurait réagir un ordinateur. D'autre part, la thèse de Church peut être considérée comme trivialement vraie dans un sens, *i.e.* toutes les fonctions récursives sont effectivement calculables, mais dans l'autre sens il faut bien admettre que la notion "effectivement calculable" est loin d'être univoque: effectif n'est pas équivalent à mécanique, puisque on peut avoir, semble-t-il, des procédés effectifs qui ne sont pas mécaniques. Le seul recours aux notions abstraites interdit de réduire les procès effectuables ou effectivement réalisables aux procédés mécaniques. En plus, le fait que des fonctions arithmétiques (constructives) ne soient pas récursives indique déjà l'écart entre procès mathématiques et opérations "machinales".

Avant de passer à la théorie des suites, il faut dire quelques mots de la notion d'espèce. La notion d'espèce est une notion analogue à celle d'ensemble, mais avec une forte connotation de propriété. On dira qu'une espèce définit une ou

plusieurs propriétés; l'égalité intensionnelle se lit alors pour deux espèces X et Y

$$X \equiv Y$$

et leur égalité extensionnelle

$$X = Y \leftrightarrow_{df.} \forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$$

Une espèce X est habitée ou garantie si $\forall x(x \in X)$ et une espèce Y est détachable dans X si

$$\forall x \in X(x \in Y \vee x \notin Y)$$

On définit aussi une relation $\#$ de séparation pour une espèce X de la façon suivante:

- a) $\neg x \# y \leftrightarrow x = y$
- b) $x \# y \rightarrow y \# x$
- c) $x \# y \rightarrow x \# z \vee z \# y$

Les espèces seront donc des totalités ouvertes de propriétés bien définies et la notion de suite consiste justement en un procès qui associe à tout nombre naturel un objet mathématique qui appartient à une espèce X quelconque. Une suite est donc une application qui fait correspondre à tout nombre naturel un objet dont les propriétés sont les éléments d'une espèce donnée. Une application injective ϕ est définie comme suit:

$$\forall x \in X \forall x' \in X(\phi x = \phi x' \rightarrow x = x')$$

Les principes non constructifs de la théorie des ensembles, axiomes du choix et de compréhension ont une version intuition-

niste qui limite leur champ d'application aux espèces décidables; pour l'axiome du choix

$$\forall x \in X \forall y \in Y A(x,y) \rightarrow \forall \phi \in X(Y) \wedge x A(x, \phi x)$$

où X et Y sont des espèces décidables, ϕ une fonction de choix et $\phi \in (X)Y$ signifie $\phi: X \rightarrow Y$; pour l'axiome de compréhension

$$\forall Y \wedge x \in X (Yx \leftrightarrow F(x))$$

où Y est une variable de second ordre (pour les sous-espèces de x), la prédictivité ou l'imprédictivité dépend de la décidabilité des espèces concernées. Ici il y a place pour des versions plus ou moins constructives de ces principes non constructifs.

Il y a diverses notions de suites: suites régulières (lawlike), suites irrégulières (lawless), suites de choix (choice sequences).

Une suite régulière est simplement une suite dont le développement est déterminé par une loi ou une règle (un algorithme), *e.g.* les fonctions récursives primitives - par exemple, la fonction de successeur. Une suite irrégulière est le pôle négatif d'une suite régulière; elle est définie par un développement sans loi, c'est-à-dire qu'à une étape donnée du développement, nous ne connaissons que les valeurs obtenues jusqu'à ce moment et rien du développement futur, *e.g.* une suite de coup de dés (cet exemple n'est pas tout à fait juste, puis-

qu'on ne peut en général identifier suite aléatoire et suite irrégulière). La définition d'une suite de choix est un peu plus complexe: on peut dire, en bref, que c'est une notion intermédiaire entre suite régulière et suite irrégulière. Une suite de choix α est une suite de valeurs librement choisies x_0, x_1, \dots qu'on peut déterminer en introduisant une nouvelle suite de choix α_0 en définissant

$$\alpha = \Gamma_0 \alpha_0$$

pour laquelle Γ_0 est un opérateur continu; on peut déterminer α encore en définissant après un certain temps

$$\alpha_0 = \Gamma_1 \alpha_1$$

et ainsi de suite.

Pour l'analyse fondée sur les suites régulières, on introduit les nombres réels à l'aide des suites fondamentales ou des suites de Cauchy de nombres rationnels: une suite de rationnels $\langle r_n \rangle_n$ est un générateur de nombre réel si

$$\forall k \forall n \exists m (|r_n - r_{m+n}| < 2^{-k})$$

où $|r_n - r_{m+n}|$ exprime la différence ou la distance entre deux nombres rationnels, distance qui doit être inférieure à $\frac{1}{2^k}$, pour k un nombre naturel donné. Une suite régulière de réels $\langle x_n \rangle_n$ engendrée par une suite de rationnels $\langle r_n \rangle_n$ est une suite de Cauchy si

$$\forall k \forall n \exists m (|x_{n+m} - x_n| < 2^{-k})$$

et convergente si

$$\bigwedge k \forall n \bigwedge m (|x - x_{n+m}| < 2^{-k})$$

avec x pour limite; on obtient alors le théorème classique:

"Toute suite de Cauchy est convergente". On définit la continuité et la continuité uniforme d'une manière analogue aux définitions classiques: une fonction à variables réelles est continue si

$$\bigwedge k \bigwedge m \forall x \bigwedge y (|x-y| < 2^{-m} \rightarrow |f_x - f_y| < 2^{-k})$$

et symétriquement pour la continuité uniforme

$$\bigwedge k \forall m \bigwedge x \bigwedge y (|x-y| < 2^{-m} \rightarrow |f_x - f_y| < 2^{-k})$$

[à comparer avec la définition classique pour des réels non-négatifs δ et ϵ

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \forall y (|x-y| < \delta \rightarrow |f_x - f_y| < \epsilon)] \quad [6]$$

On peut déjà produire des contre-exemples intuitionnistes pour des théorèmes classiques: *e.g.* on ne peut avoir pour les réels x

$$\bigwedge x (x = 0 \vee x \neq 0)$$

Prenons l'expansion décimale de π (qui est régulière). $\pi_m(n)$ signifie que n est le nombre de la dernière décimale de la m ème suite de dix chiffres [7] consécutifs dans l'expansion décimale de π . On sait que

$$\forall n \pi_1^n \vee \neg \forall n \pi_1^n$$

est encore indécidable puisqu'on n'a pas encore produit une seule suite de dix 7 consécutifs. Définissons un générateur de nombre réel $\langle r_m \rangle_m$ par

$$\neg \forall n \leq m (\pi_1 n) \rightarrow r_m = 0$$

$$\pi_1 n \wedge n \leq m \rightarrow r_m = 2^{-n}$$

$\langle r_m \rangle_m$ est un générateur de nombre réel régulier qui définit le nombre réel x_0 : il n'est pas possible de décider

$$x_0 = 0 \vee x_0 \neq 0 \quad \text{puisque}$$

$$x_0 = 0 \rightarrow \neg \forall n (\pi_1 n)$$

d'où

$$(x_0 = 0 \vee x_0 \neq 0) \leftrightarrow (\forall n \pi_1 n \vee \neg \forall n \pi_1 n). \quad [7]$$

De la même façon, on ne peut affirmer que toute fonction uniformément continue sur l'intervalle $[0,1]$ possède un élément maximal. Ces contre-exemples découlent directement du rejet du tiers exclu et de l'accent mis sur la décidabilité et la solvabilité (constructive) des assertions mathématiques. Mais les théories des suites irrégulières et des suites de choix nous permettent d'aller plus loin dans la critique et la reconstruction intuitionniste des mathématiques classiques.

2. SUITES IRREGULIERES (OU ABSOLUMENT LIBRES)

Les suites irrégulières ont été étudiées surtout par Kreisel [8]. Un premier principe pour les suites irrégulières peut s'énoncer

$$1^{\circ) \quad \bigwedge n \forall \alpha (\alpha \in n)$$

pour α une suite irrégulière et n un segment initial [un segment initial est une séquence finie de valeurs $\alpha_0, \dots, \alpha_{j_1 n - 1}$ où $j_1 n$ indique la longueur du segment initial]. Ce

premier principe affirme qu'il existe des suites irrégulières avec des segments initiaux arbitraires.

Un second principe donne l'égalité intensionnelle

$$2^{\circ} \quad \bigwedge \alpha \bigwedge \beta (\alpha = \beta \vee \neg \alpha = \beta)$$

Le principe suivant est plus riche

$$3^{\circ} \quad \bigwedge \alpha \bigwedge \alpha_1 \dots \bigwedge \alpha_p \bigwedge X [\neq(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \wedge \\ X(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \rightarrow \forall n (\alpha \in n \wedge \\ \bigwedge \beta \in n (\neq(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \rightarrow X(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_p)))]$$

où $\neq(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ signifie que toutes les valeurs de α sont différentes de $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Le principe signifie qu'un prédicat ou une propriété X attribuée à une suite irrégulière α ne peut être attribuée à une autre suite irrégulière β que si cette dernière possède le même segment initial de valeurs. Un théorème facile à dériver de ce principe est le suivant

$$\vdash \bigwedge \alpha \bigwedge \beta [\alpha = \beta \leftrightarrow \bigwedge x (\alpha x = \beta x)]$$

On peut maintenant définir des fonctionnelles (ou des métasuites) sur les suites irrégulières, qui, en vertu de l'égalité intensionnelle que nous avons définie plus haut, doivent être continues

$$\Gamma \alpha = x \leftrightarrow \forall n (\alpha \in n \wedge \bigwedge \beta \in n (\Gamma \beta = x))$$

Le quatrième principe énonce plus fortement la propriété de continuité pour les fonctionnelles sur les suites irrégulières

$$4^{\circ} \quad \begin{aligned} & \Lambda X \Lambda \alpha \Lambda \alpha_1, \dots, \Lambda \alpha_p (\neq (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \rightarrow \forall x X \\ & (x, \alpha_1, \dots, \alpha_p)) \rightarrow \forall e \in K \Lambda \alpha_1 \dots \Lambda \alpha_p (\neq (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \rightarrow \\ & X(e(\nu_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p)), \alpha_1, \dots, \alpha_p)) \end{aligned}$$

où K désigne la classe des fonctionnelles (constructives) continues et ν_p une énumération de $\langle \alpha_1 \dots \alpha_p \rangle$. Comme cas spécial de ce principe, on a

$$\Lambda X [\Lambda \alpha \forall x X(\alpha, x) \rightarrow \forall e \Lambda \alpha X(\alpha, e(\alpha))]$$

On peut dégager la signification de ce principe en disant que si on peut trouver un objet x qui a les mêmes propriétés X que α pour les valeurs $\alpha_1 \dots \alpha_p$, on peut trouver une fonctionnelle constructive qui énumère les valeurs $\alpha_1 \dots \alpha_p$ ayant les mêmes propriétés.

Finalement, un théorème général dû à Brouwer permet de formuler un principe d'induction pour les suites irrégulières finies analogue au principe d'induction pour les nombres naturels: c'est le théorème de la barre (bar-theorem)

$$\begin{aligned} & \Lambda \alpha \forall x X(\bar{\alpha}x) \wedge \Lambda n (Xn \rightarrow Yn) \wedge \Lambda n \Lambda m (Xn \rightarrow \\ & X(n * m)) \wedge \Lambda n (\Lambda x Y(n * \hat{x}) \rightarrow Yn) \rightarrow \Lambda n Yn \end{aligned}$$

où $\bar{\alpha}$ signifie le segment initial de α et $*$ l'opération de concaténation (\hat{x} est $\langle x \rangle$). En mots, le théorème signifie que "si une propriété est vraie pour toute suite habitée (par des valeurs initiales) et est vraie de α , si elle est vraie de $\alpha * \langle n \rangle$ pour tout n , alors elle est vraie pour toute suite dans S (le déploiement universel) (voir plus loin pour la

définition de "déploiement"). On voit donc la proche parenté de ce théorème avec le postulat d'induction (classique) de Peano - la preuve elle-même repose essentiellement sur l'induction.

Il semble y avoir deux fonctions principales pour les suites irrégulières: en premier lieu, elles servent à définir une classe de fonctions constructives qui n'apparaît pas réductible à la classe des fonctions récursives, ce qui met en question la thèse de Church [9] qui affirme que les fonctions mécaniquement computables correspondent exactement aux fonctions récursives; elles servent aussi à réfuter certains principes de la logique classique, dont ceux-ci

- 1) $\vdash \neg \Lambda \alpha \forall x (\alpha x = 0)$
- 2) $\vdash \Lambda \alpha \neg \neg \forall x (\alpha x = 0)$
- 3) $\vdash \neg \Lambda \alpha (\forall x (\alpha x = 0) \vee \neg \forall x (\alpha x = 0))$
- 4) $\vdash \neg (\Lambda \alpha \neg \neg \forall x (\alpha x = 0) \rightarrow \neg \neg \Lambda \alpha \forall x (\alpha x = 0))$
- 5) $\vdash \neg \Lambda \alpha (\neg \neg \forall x (\alpha x = 0) \rightarrow \forall x (\alpha x = 0))$

Le théorème 2 réfute le principe du tiers exclu: supposons que nous ayons $\neg \forall x (\alpha x = 0)$. En vertu des principes déjà énoncés (les trois premiers principes pour les suites régulières), on a

$$\neg \forall x (\alpha x = 0) \leftrightarrow \forall n (\alpha \in n \wedge \Lambda \beta \in n \neg \forall x (\beta x = 0))$$

où n est, comme auparavant, un segment initial; puisqu'il est

toujours possible de trouver un $\beta \in n$ tel que $\beta x = 0$, on doit donc affirmer

$$\neg \neg \forall x (\alpha x = 0)$$

Le théorème 5 réfute le principe de Markov qui permet de passer de la double négation à l'affirmation (à strictement parler, le principe de Markov ne s'applique qu'aux fonctions régulières, mais il est intéressant de voir que ce ne peut être un principe universel).

Il nous reste maintenant à examiner la théorie des suites de choix [10].

3. SUITES DE CHOIX

Pour les suites de choix, que nous avons déjà définies, elles sont engendrées, comme nous l'avons vu, par des choix successifs de valeurs, choix étagés par des opérations ou fonctionnelles continues qui peuvent opérer sur tout un réseau de choix antérieurs pour donner naissance à une floraison de suites de choix.

Un premier principe valide pour les suites de choix est celui de la continuité intensionnelle qu'on exprime de la façon suivante

$$1^0 \quad X\alpha \leftrightarrow \forall \Gamma (\forall \beta (\alpha = \Gamma \beta) \wedge \bigwedge x (\Gamma x))$$

i.e. si une suite de choix possède un prédicat extensionnel ou appartient à une espèce donnée, alors il est toujours possible de trouver une fonctionnelle continue opérant sur une autre

suite de choix et qui correspond à cette première suite de choix, parce qu'elle possède le même prédicat extensionnel ou appartient à la même espèce (en vertu des mêmes segments initiaux).

On peut aussi définir une continuité extensionnelle (ou le principe de Brouwer pour les nombres [11])

$$2^{\circ} \quad \bigwedge \alpha \bigvee x X(\alpha, x) \rightarrow \bigwedge \alpha \bigvee x \bigvee y \beta (\bar{\alpha}x = \bar{\beta}x \rightarrow X(\beta, y))$$

ou encore

$$\bigwedge \alpha \bigvee x X(\alpha, x) \rightarrow \bigvee \Gamma \bigwedge \alpha X(\alpha, \Gamma \alpha)$$

ce qui signifie que si l'on a pour une suite de choix arbitraire α une procédure qui permette de déterminer un nombre naturel x , alors pour toutes les autres suites de choix ayant les mêmes segments initiaux, on peut avoir la même procédure qui permette de déterminer un nombre naturel y , ou, en d'autres termes, l'existence d'une valeur numérique déterminée pour une suite de choix implique qu'il y a une fonctionnelle régulière continue qui puisse déterminer une telle valeur.

Une des conséquences importantes de ces principes est le théorème de l'éventail de Brouwer. Pour le discuter utilement, il faut introduire la notion de déploiement ou radiation (néerlandais "spreiding", anglais "spread"). La notion de déploiement est définie par deux lois: une loi de déploiement, qui est représentée par une fonction régulière a obéissant aux stipulations suivantes:

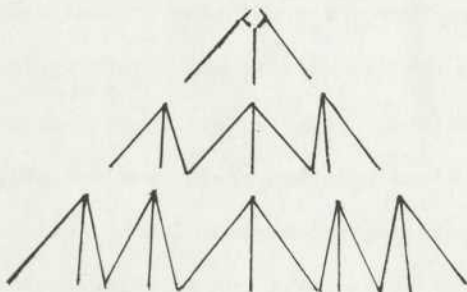
- 1) $a \neq 0$
- 2) $\bigwedge n \bigwedge m (a(n * m) \neq 0 \rightarrow a_n \neq 0)$
- 3) $\bigwedge n \bigvee x (a_n \neq 0 \rightarrow a(n * \hat{x}) \neq 0)$

Une quatrième stipulation de finitude

- 4) $\bigwedge n \bigvee z \bigwedge x (a(n * \hat{x}) \neq 0 \rightarrow x \leq z)$

définit une loi de déploiement finitaire ou une loi d'éventail.

Ici $*$ désigne encore l'opération de concaténation et \hat{x} une suite contenant un seul élément. On peut se représenter une loi d'éventail comme un arbre dont le faite est la suite vide



L'autre loi qui définit un déploiement est une application complémentaire ξ d'une loi de déploiement (ou d'un arbre) qui fait correspondre les objets d'une espèce donnée S aux nombres naturels positifs. Un déploiement peut être "habillé" ou "nu", selon que l'application ξ est dans une espèce ou non et une suite est élément d'un déploiement si elle suit immédiatement dans l'arbre une suite qui l'est. Le théorème de l'éventail s'énonce comme suit:

$$\begin{aligned} & \Lambda \alpha \forall x X(\Gamma_a \alpha, x, \alpha_0, \dots) \rightarrow \forall y \Lambda \alpha \forall x \Lambda \beta \\ & (\Gamma_a \alpha y = \Gamma_a \beta y \rightarrow X(\Gamma_a \beta, x, \alpha_0, \dots)) \end{aligned}$$

Le théorème de l'éventail est une sorte de théorème de finitude pour les suites de choix (à rapprocher du lemme de Koenig). En mots, "si à chaque élément α d'un éventail est associé un nombre naturel x , un nombre naturel y peut être spécifié tel que x soit déterminé par les y premiers choix qui engendrent α par la loi d'éventail a ".

Le théorème de l'éventail a été utilisé par Brouwer pour démontrer son important théorème en analyse "Toute fonction à variables réelles définie sur l'intervalle $[-1,1]$ est uniformément continue" [12]. Intuitivement, on voit que toute fonction $\phi(x)$ d'une variable réelle partout définie ne peut l'être que de proche en proche (par les n premiers choix de valeurs pour $\phi(x)$) de sorte que la différence entre deux fonctions $f(p)$ et $f(q)$ pour deux points p et q soit toujours inférieure à un nombre donné arbitrairement petit 2^{-n} , d'où la continuité uniforme.

Troelstra [13] a élaboré un système formel CS pour les suites de choix dans le langage des prédicats du premier ordre avec égalité et quatre espèces de variables (numériques, variables pour les fonctions constructives sur N , pour des fonctions constructives d'une classe K définies inductivement - les fonctions constructives sont des fonctions détermi-

nées "à l'avance" par une loi de génération - et variables pour les suites de choix) en plus des axiomes usuels: les axiomes pour les suites de choix sont exprimés ainsi

- 1) $F\alpha \rightarrow \forall e [\forall \beta (e|\beta = \alpha) \wedge \wedge \gamma F(e|\gamma)]$
- 2) $\wedge \alpha \forall a F(\alpha, a) \rightarrow \forall e \wedge n (en \neq 0 \rightarrow \forall b \wedge \alpha \in n F(\alpha, b))$
- 3) $\wedge \alpha \forall \beta F(\alpha, \beta) \rightarrow \forall e \wedge \alpha F(\alpha, e|\alpha)$
- 4) $\wedge x \forall a F(x, a) \rightarrow \forall b \wedge x F(x, \lambda y. b\{x, y\})$

Le quatrième axiome est l'axiome du choix où b est une fonction (constructive) de choix. Le premier axiome stipule que si on a le prédicat F pour une suite de choix α , alors on a une fonction constructive $e \in K$ qui limitée à β ($e|\beta$), pour β une autre suite de choix, équivaut à α et, donc, le prédicat est attribuable à toute fonction constructive limitée à une suite de choix arbitraire γ . Dans la monographie de Kreisel et Troelstra* ce principe est appelé "principe des données analytiques".

Le deuxième axiome peut être justifié en disant que si un prédicat F est attribuable à toute suite de choix α à l'aide d'une fonction constructive (sur N) déterminée, alors il existe une fonction constructive $e \in K$ non nulle qui définit une fonction constructive b , pour toute suite de choix α possédant le prédicat F . Le troisième axiome reprend le deuxième, mais pour le cas d'une suite de choix déterminée β

*Voir plus loin note 17.



où la fonction constructive $e \in K$ est limitée à α [la sous-classe P des fonctions constructives a est définie par les deux conditions suivantes:

1° Elle contient toutes les fonctions constantes non nulles $\forall x(\alpha = \lambda'n.x + 1) \rightarrow Pa$

2° $a0 = 0 \wedge \forall yP(\lambda'n.a(\hat{y}*n)) \rightarrow Pa$

ou λ' est l'opérateur d'abstraction pour les fonctions constructives.]

On voit que les axiomes se justifient tous par recours à un procès constructif sur lequel peut venir se greffer un algorithme une fois construit, mais qui est toujours libre dans son développement ou sa genèse active. C'est essentiellement cette notion de procès constructif que veut généraliser la théorie du sujet créateur.

4. LE SUJET CREATEUR

Il nous faut examiner maintenant cette notion de sujet créateur introduite par Brouwer [14]. Cette notion nous apparaît centrale, non seulement pour l'intuitionnisme, mais pour les mathématiques en général. En effet, si les mathématiques sont une activité, leur description doit comporter aussi la description de l'agent ou de l'acteur, du moins dans la mesure où il agit comme créateur d'activités ou de procès mathématiques.

Kreisel [15] a formulé les axiomes suivants pour le



sujet créateur

$$1) (\Sigma \vdash_m A) \vee \neg(\Sigma \vdash_m A)$$

i.e., le sujet mathématicien Σ affirme l'assertion mathématique A au moment m (ou la suppose ou la prouve, etc.) ou il ne l'affirme pas - la relation $(\Sigma \vdash_m)$ est décidable,

$$2) A \rightarrow \bigwedge \Sigma (\neg \vdash_m (\Sigma \vdash_m A))$$

i.e., s'il y a une assertion mathématique, il serait absurde de penser qu'à aucun moment les sujets mathématiciens ne puissent l'affirmer (ou la démontrer),

$$3) \forall \Sigma \forall m (\Sigma \vdash_m A) \leftrightarrow A$$

i.e., l'affirmation ou la démonstration d'une assertion mathématique par un mathématicien à un moment donné équivaut à sa validité universelle (pour tous à tous les moments). Ce dernier axiome correspond à peu près à l'axiome husserlien: "La subjectivité transcendantale est l'intersubjectivité transcendantale". Autrement dit, le problème du solipsisme ne se pose absolument pas. L'axiome 3 est évidemment plus fort que l'axiome 2. Nous avons introduit plus loin (chap. IV) la notion d'horizon constructif sous la forme

$$\bigwedge D \bigwedge \Sigma \bigwedge A \bigvee H \vdash_D A \subset H$$

qui pourrait venir s'ajouter ici comme axiome pour le sujet créateur.

On peut dériver ce qu'on appelle le schème de Kripke de l'axiome 2

$$\forall \chi [(\forall x(\chi x = 0) \leftrightarrow A) \vee (\forall x(\chi x \neq 0) \rightarrow A)]$$

ou de l'axiome 3

$$\forall \chi (\forall x(\chi x \neq 0) \leftrightarrow A)$$

si on définit la suite régulière ou suite de choix χ de la façon suivante

$$\neg(\Sigma \vdash_m A) \rightarrow \chi x = 0$$

$$(\Sigma \vdash_m A) \rightarrow \chi x = 1$$

Si nous avons maintenant

$$A\chi' =_{df} \forall x \forall y (y \geq x \rightarrow \chi' y = 0)$$

alors

$$\begin{aligned} \Lambda \chi' \forall \chi \{ & [\forall x(\chi x = 0) \leftrightarrow \neg A\chi'] \wedge \\ & [\forall x(\chi x \neq 0) \rightarrow A\chi'] \} \end{aligned}$$

Cette objection, soulevée par Myhill, vise à montrer que les axiomes du sujet créateur violeraient le principe de continuité pour les suites régulières ou suites de choix en vertu de la discontinuité inscrite dans l'activité du sujet mathématicien - dans sa production d'énoncés ou de preuves. Mais on peut se demander si une telle suite χ' définie à partir de χ est encore une suite au sens propre (le mode de génération des suites semble interdire de faire dépendre χ de χ' de façon à en briser la continuité; d'ailleurs, la définition de χ' n'implique-t-elle pas un point singulier x lorsqu'on a

$$\forall x \forall y (y \geq x \rightarrow \chi' y = 0) ?$$

Il est possible de réfuter la thèse de Church en uti-

lisant les axiomes du sujet créateur ou le schème de Kripke (la thèse de Church affirme

$$\bigwedge a \bigvee z \bigwedge x (ax = \{z\}x)$$

qui signifie que pour toute suite régulière a , il y a une fonction récursive z qui énumère ses valeurs).

Mais Myhill [16], qui désigne les suites où apparaît l'activité du sujet mathématicien (comme dans le schème de Kripke) sous le nom de suites empiriques pour les distinguer des suites mathématiques, comme les fonctions récursives primitives, préfère parler d'un résultat de non-énumérabilité plutôt que d'une réfutation de la thèse de Church qui ne s'applique qu'aux suites mathématiques strictes (mécaniquement computables) ou absolument régulières.

Quoi qu'il en soit, la théorie du sujet créateur est prometteuse. On ne fait que commencer à l'explorer et déjà on peut entrevoir sa profondeur (cf. chapitre VI). Il nous semble que toute description globale de l'activité mathématique doit tenir compte du sujet mathématicien; c'est dans ce sens qu'une analyse fondationnelle de l'activité mathématique a une chance de faire des progrès importants (voir notre critique à la fin de ce chapitre).

Il y a d'autres sujets de l'intuitionnisme que nous ne pouvons aborder ici, en particulier, la formalisation de l'intuitionnisme. On trouvera le dernier état de la question

dans la monographie de Kreisel et Troelstra et dans l'ouvrage édité par Troelstra [17].

La conception intuitionniste du continu est étudiée en détail dans le livre de Kleene et Vesley. On peut définir les notions brouweriennes d'ordre virtuel et de pseudo-ordre de la façon suivante: on commence par définir un ordre partiel par quatre clauses

$$1) x < y \rightarrow x \not\downarrow y \wedge x \neq y$$

$$2) x = y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

$$3) x < y \wedge y = z \rightarrow x < z$$

$$4) x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

on a un ordre, si l'on ajoute

$$5) x = y \vee x < y \vee x > y$$

et un ordre virtuel noté $\dot{<}$, si aux quatre clauses de l'ordre partiel, on ajoute les deux suivantes

$$6) x \not\downarrow y \wedge x \not\uparrow y \rightarrow x = y$$

$$7) x \not\downarrow y \wedge x \neq y \rightarrow x > y$$

et finalement on obtient un pseudo-ordre, noté $<\circ$, en substituant à la clause 7 la clause suivante

$$8) x < y \rightarrow z(x < z \vee z < y)$$

Notons que $x < y$ signifie $x \not\downarrow y \wedge x \neq y$, # que nous avons vu plus haut est la contrepartie positive de \neq (i.e. \neg

$x \# y \leftrightarrow x = y$) et que la relation de coïncidence $=$ est l'équivalent intuitionniste de $=$: un contre-exemple "Il est

contradictoire de supposer que l'équation $ax + \beta = 0$, où $a \neq 0$ et $\beta \neq 0$, a toujours une solution."

Enfin, le théorème de Bolzano-Weierstrass, dans sa forme "Toute espèce (ou ensemble) bornée de nombres réels sans point d'accumulation est numériquement bornée" n'est pas non plus démontrable. Brouwer raisonne par réduction à un problème non résolu (ou indécidable ou insoluble). Supposons que j'aie p un énoncé non vérifié. Pour une suite $\{b_n\}$ de nombres rationnels, je choisis $b_n = 2^{-n}$ aussi longtemps que l'énoncé n'a pas été vérifié; si p est vérifié entre b_m et b_{m+1} , je prends $b_{m+r} = 2^{-m}$ pour tous les r . Supposons maintenant que c soit un point d'accumulation, *i.e.* la limite de la suite $\{b_n\}$, c n'est certainement pas plus petit que 0 et n'est pas non plus plus grand que 0 , puisque alors l'ensemble des membres de la séquence devrait être fini. Donc $c = 0$, mais cela suppose que l'énoncé p ne pourra jamais être vérifié, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. La suite ne peut donc avoir de point d'accumulation et si elle était bornée numériquement, cela signifierait qu'on peut définir un nombre naturel m tel que p puisse être vérifié avant le choix de b_{m+1} , ce qui n'est évidemment pas le cas (à cause de $b_{m+r} = 2^{-m}$) . Ce n'est là qu'un des nombreux contre-exemples que Brouwer a donné de théorèmes de l'arithmétique et de l'analyse classiques.

Ceci termine notre bref traitement des fondements de l'intuitionnisme. Nous passons maintenant à la critique.

5. CRITIQUE DE L'INTUITIONNISME

L'objet de l'intuitionnisme, c'est la pensée mathématique constructiviste, l'étude des constructions mentales qui constituent l'essence des mathématiques. Que penser alors ou que dire des mathématiques non constructives? En un sens, les mathématiques non constructives ne sont que de mauvaises constructions ou structures, qu'il faut tenter de "constructiviser", c'est-à-dire de réduire à des principes constructifs. Mais le domaine des principes constructifs n'est pas parfaitement délimité et on peut dire qu'il y a une hiérarchie de constructivismes, du finitisme (plus ou moins strict) de Hilbert au constructivisme large de Gentzen ou à celui de l'interprétation "Dialectica" de Gödel [19]. La variété des constructivismes, du constructivisme computationnel, (fonctions mécaniquement computables, fonctions récursives) au constructivisme abstrait et élargi de l'intuitionnisme, montre bien que le domaine du constructif est mal circonscrit. Une notion cependant est commune à tous les constructivismes qui mériterait une longue analyse, celle de *procès*. Nous introduisons ici quelques notions qui pourront aider à mieux cerner cette notion de *procès*: nous définissons les notions de *stase*, *procès*, *fini* et *effini*.

D1) Une *stase* est un acte qui détermine une construction ou une

structure (σ) dans un champ idéal C - au sens d'abs-trait - indéfini.

- D2) Les stases sont liées entre elles par un procès, soit com-binatoire, soit séquentiel; un procès est combinatoire quand il est effectuable sans l'itération d'une opération ou d'un acte défini sur une stase, séquentiel autrement.
- D3) Un procès est fini quand il comporte des bornes pré-posi-tionnelles et post-positionnelles dans un champ stasique défini.
- D4) Un procès est effini quand il est indéterminé post-posi-tionnellement.

La logique que nous utilisons est intuitionniste; (*i.e.* le système de Spector) nous avons en plus des variables individuelles (σ) pour les stases, des variables fonctionnel-les P, P^F, P^E pour les opérations de procès. Nous donnons maintenant quelques axiomes pour les notions définies

$$A1) \bigwedge_{\sigma} (P(\sigma)) \rightarrow \bigvee P^F(\sigma) \vee \bigvee P^E(\sigma)$$

$$A2) \bigwedge_{\sigma} (P^E(\sigma)) \rightarrow \bigvee P^F(\bar{\sigma})$$

où $\bar{\sigma}$ signifie un segment initial de σ

$$A3) \bigwedge_{\sigma} \bigwedge_{\sigma_1} \dots \bigwedge_{\sigma_n} [(P^F(\sigma_1 \dots \sigma_n) \rightarrow \neg \bigvee P^F(\sigma)) \rightarrow \bigvee P^E(\sigma)]$$

On pourrait ajouter ici notre axiome de l'horizon constructif sous la forme

$$A4) \bigwedge P \bigwedge_{\sigma} \bigvee H \vdash P, \sigma \in H$$

où H pourrait être l'univers (expansif) des constructions

(stases et procès). La notion d'effini que nous avons déjà introduite pourrait correspondre à la quantification effinie \exists du chapitre premier ne portant que sur les opérations (concrètes ou abstraites) et leur résultat intensionnel - il va sans dire que pour les opérations finies sur les stases, on peut obtenir des résultats extensionnels ou computationnels, mais l'important est que ces résultats sont obtenus à partir d'opérations *intensionnelles*. Notre point de vue est directement opposé à celui d'E. Bishop [20] qui veut identifier constructivisme et mathématiques numériques ou computationnelles. Il est vrai que les mathématiques numériques font partie des mathématiques constructives, mais représentent-elles l'essentiel des mathématiques? Bishop a réussi à reconstruire une grande partie de l'analyse classique, mais au prix de principes qui ne sont plus numériques (*e.g.* ensembles complétés).

Quoi qu'il en soit, c'est à l'intuitionnisme que nous nous intéressons d'abord. Nous avons essayé de donner un traitement plus précis de la notion de procès, centrale dans l'intuitionnisme (nous avons axiomatisé ailleurs la notion d'horizon constructif). Les diverses notions de suite, celle de sujet créateur, sont toutes fondées sur celle de procès. Brouwer a cru trouver une justification de la notion de procès ou celle de suite procédant infiniment dans l'intuition temporelle de la biunité ou de l'unité qui engendre la dualité (le nombre deux)

et tous les autres nombres par duplication ou scissiparité (comme le multiple est engendré par l'Un dans le *Parménide* de Platon). Bien que l'intuition du temps (le sens interne qui médiatise toutes les perceptions spatiales et temporelles, selon Kant) soit primordiale, elle n'est pas immédiate elle-même: elle a pour médium la conscience qui est fondée à son tour sur le langage. Comme nous l'avons vu, certains procès séquentiels comme les opérations du second ordre ou d'ordre supérieur, ou les procès combinatoires ne sont pas nécessairement temporels. On doit donc admettre une notion de procès multidimensionnel - le temps n'étant qu'une dimension. L'idée d'un ordre temporel linéaire est trop restrictive pour justifier la notion de procès: on peut penser, par exemple, à l'ouverture spatiale d'un champ multilinéaire ou même non linéaire d'actes constructeurs (eu égard aux problèmes que soulève l'ordination linéaire des actes constructeurs dont Troelstra fait état*. On verra plus loin (chapitres IV et VIII) qu'une interprétation spatiale du constructivisme ou de l'intuitionnisme est possible.

Ce point de vue s'accorde en bonne partie avec une phénoménologie de la constitution des idéalités mathématiques. Cependant, le champ idéal dont nous parlons est fondamentalement un champ linguistique: on peut penser la mathématique comme un texte constitué (l'histoire de telle ou telle disci-

*Voir *Principles of Intuitionism*, ouvr. cit., chap. 16.

plaine mathématique) qui serait ouvert dans plusieurs directions. La création mathématique serait la lecture du texte mathématique selon une direction inédite, mais virtuellement ancrée dans le texte de la mathématique qui recouvre lui-même partiellement le texte de l'expérience intellectuelle ou linguistique globale - nous prenons linguistique au sens de langages et non au sens de langues.

Dans une telle perspective, où le langage englobe la conscience et l'expérience intellectuelle, la doctrine brouwerienne sur le divorce de la pensée et du langage perd tout son sens. On voit mal d'ailleurs comment une pensée pure pourrait opérer, puisque les concepts ou notions que nous avons sont des êtres linguistiques. La formalisation n'est qu'une forme linguistique *particulière* qui peut être adaptée à différents contextes et la formalisation de l'intuitionnisme a contribué à clarifier un grand nombre de notions, même si elle n'est pas une source constante d'idées nouvelles.

Le fait que les concepts fondamentaux de l'intuitionnisme soient plus complexes que ceux de la théorie des ensembles, par exemple, signifie seulement qu'ils sont probablement plus riches, plus féconds, plus analysables. La pauvreté conceptuelle de la notion d'ensemble n'est pas une garantie de sa survie. Il est vrai que la manipulation des concepts simples explique une bonne part de l'activité mathématique, mais la

complexification des mathématiques exclut tout absolutisme des notions simples. Les recherches fondationnelles, d'un autre côté, s'intéressent davantage aux notions fécondes, susceptibles d'une analyse en profondeur.

Les concepts fondamentaux de l'intuitionnisme, suites, déploiements ou radiations, sujet créateur sont tous éminemment féconds, mais nous n'avons pas encore une analyse satisfaisante de la notion de construction. Nous dirons qu'une construction (mathématique) est un acte producteur (linguistique plutôt que mental pour nous) finiment effectuable, dans un contexte défini de structures mathématiques dont le résultat est clairement (intuitivement) relié aux principes de *l'activité productrice*. Cette notion de construction n'exclut pas ce que nous appelons les structures effinies, puisque la construction de telles structures ne requiert qu'un acte définitionnel fini et l'itération indéfinie de son résultat; évidemment les structures infinies ne sont qu'idéales, dans le sens précis qu'elles ne renvoient pas à des constructions effectives, mais uniquement à leur complétion imaginaire ou idéale (c'est le sens hilbertien de l'idéalité).

Les constructions concrètes ne sont alors qu'un cas particulier de la notion de construction ainsi définie. Les constructions abstraites sont sans doute les plus significatives et aussi les plus complexes. L'intuitionnisme, qui admet

les constructions et les notions abstraites, est donc un constructivisme global qui, en raison même de son extension, risque de ne pas être suffisamment radical. Notre constructivisme, celui de la théorie des stases et de la quantification éfinie, est plus radical que l'intuitionnisme et plus large, plus englobant que le constructivisme finitiste de Hilbert. D'une part, nous n'avons pas besoin d'accepter, à la manière intuitionniste, la suite des nombres naturels comme un donné (notre quantificateur universel est plus prédictif que l'intuitionniste); d'autre part, nous n'excluons pas, à la manière finitiste, les concepts abstraits, mais nous fondons plutôt les concepts combinatoires sur les concepts abstraits.

Un tel appareil fondationnel est-il capable d'englober l'ensemble des mathématiques? Nous le pensons. On ne doit pas croire pour autant que le constructivisme ou le concept de constructivité vont de soi. C'est la valeur intrinsèque des fondements constructivistes qui doit nous intéresser d'abord avant leur utilisation comme schéma réducteur (ou englobant) pour l'ensemble des mathématiques. On ne peut nier la fécondité d'une telle réduction, pas plus qu'on ne peut nier la fécondité de schèmes réducteurs en général, dans la mesure où ils "concentrent" la problématique fondationnelle.

L'intuitionnisme ou le constructivisme radical (effinitiste) que nous défendons semble philosophiquement plus ac-

ceptable - moins hypothétique - que la théorie des ensembles, qui, à notre point de vue, n'est pas suffisamment critique quant aux principes qu'elle admet. S'il faut dégager le sens de l'activité mathématique et des mathématiques, c'est en examinant de près les principes et les lois qui les régissent et en pesant leur poids de certitude (équivalent subjectif de leur vérité objective) qu'il faut le faire. C'est aussi dans la mesure où une théorie fondationnelle des mathématiques s'intègre harmonieusement dans une synthèse philosophique globale qu'elle a des chances de bien situer les mathématiques dans l'horizon théorétique de l'expérience intellectuelle. C'est dans ce sens que Brouwer insistait sur les effets révélateurs et libérateurs de la recherche dans les fondements des mathématiques, qui, comme il le disait, peut avoir des répercussions dans d'autres domaines de la pensée.

On verra dans les chapitres ultérieurs si le constructivisme que nous élaborons peut être fertile non seulement dans les fondements des mathématiques, mais aussi dans d'autres champs théoriques et pratiques.

NOTES DU CHAPITRE II

- [1] Voir là-dessus A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, ouvr. cit., chap. IV, V, VI, et A. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, ouvr. cit., chap. 12.
- [2] Nous utiliserons pour tout ce chapitre les symboles \bigwedge pour le quantificateur universel et \bigvee pour le quantificateur existentiel, afin de les distinguer des quantificateurs classiques.
- [3] Y. A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, ouvr. cit., p. 105 et s.
- [4] G. Kreisel, "Mathematical Logic" in *Lectures on Modern Mathematics*, vol. 3, ed. T. L. Saatty (New York: 1965), p. 95-195. Voir aussi G. Kreisel, "Foundations of intuitionistic logic" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, ed. by E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, Stanford University Press (Stanford: 1960), p. 198-210.
- [5] N. Goodman, "A theory of constructions equivalent to arithmetic" in *Proof theory and intuitionism*, ed. by J. Myhill, A. Kino, R. E. Vesley, North-Holland (Amsterdam: 1970), p. 101-121.
- [6] Voir, par exemple, W. Rudin, *Principles of Mathematic Analysis*, ouvr. cit., p. 74-78.
- [7] Voir A. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, ouvr. cit., p. 23-24.
- [8] G. Kreisel, "Lawless sequences of natural numbers", *Compositio Math* (20), p. 222-248. Remarquons que ces suites étaient appelées à l'origine "suites absolument libres".
- [9] Voir l'article cité dans la note précédente, p. 233.
- [10] Voir A. S. Troelstra, "The Theory of Choice Sequences" in *Proc. 3rd Int. Congress for Logic, Methodology and Philo-*

- sophy of Science*, ed. by B. van Rootselaar and S. F. Staal (Amsterdam: 1968), p. 201-223. Voir aussi A. S. Troelstra, "Informal Theory of Choice Sequences" in *Studia Logica*, XXV (1969), p. 31-52.
- [11] Cf. S. C. Kleene and R. E. Vesley, *Foundations of Intuitionistic Mathematics*, ouvr. cit., p. 69 et s.
- [12] Voir A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, ouvr. cit., p. 47.
- [13] Voir note 10.
- [14] Voir L. E. J. Brouwer, "Consciousness, philosophy and mathematics", *Proc. Xth International Congress of Philosophy* (Amsterdam: 1948), p. 1235-1249 et aussi les articles antérieurs et subséquents de Brouwer, en particulier "Ueber Definitionsbereiche von Funktionen" (1927) traduit dans *From Frege to Gödel*, ouvr. cit., p. 446-463 avec une longue introduction de C. Parsons, et plus récemment "Historical background, principles and methods of Intuitionism" *South African Journal of Science*, 49 (1952), p. 139-146.
- [15] G. Kreisel, "Informal Rigour and Completeness Proof" in *Problems in the Philosophy of Mathematics*, ed. by I. Lakatos (Amsterdam: 1967), p. 138-186, en particulier p. 159-160.
- [16] J. Myhill, "Notes towards a formalization of Intuitionistic Analysis", *Logique et Analyse*, (35), p. 280-297. Voir aussi "Formal Systems of Intuitionistic Analysis I" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, ouvr. cit., p. 161-178.
- [17] G. Kreisel and A. S. Troelstra, "Formal Systems for some branches of Intuitionistic Analysis", *Ann. Math. Logic* 1 (1970), p. 229-387 et *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis* édité par A. S.

Troelstra *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 344, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1973). La formalisation de l'intuitionnisme n'a pas encore donné de résultats spectaculaires: on s'est attaché surtout aux notions de calculabilité, réalisabilité (Kleene), définitions inductives généralisées, théorèmes de normalisation, d'extension conservative pour arithmétique et analyse intuitionniste (ou sous-systèmes de l'analyse classique), théorèmes d'éliminabilité des variables de choix pour la théorie des suites de choix, etc. On peut penser, sans adopter l'attitude négative de Brouwer, que ce n'est pas de ce côté que se situe l'originalité de l'intuitionnisme.

- [18] R. E. Vesley, "The Structure of the Continuum", chap. III de S. C. Kleene et R. E. Vesley, *Foundations of Intuitionistic Mathematics*, ouvr. cit.
- [19] On sait que Gödel a pu obtenir une preuve de consistance de l'arithmétique intuitionniste et classique en n'employant que l'induction et la substitution sur tous les types finis. Spector a étendu cette approche (à l'aide des fonctionnelles récursives) pour obtenir une preuve de consistance de l'analyse classique [Gentzen avait, pour sa part, utilisé l'induction transfinie jusqu'à l'ordinal ε_0 (limite de la hiérarchie des ω)]. D'autres comme Kreisel, Howard, Tait et plus récemment Luckhardt, *Extensional Gödel Dialectica Interpretation*, Lectures Notes in Mathematics, no 305, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1972) et Scarpellini, "On bar induction of higher types for decidable predicates", *Ann. Math. Logic*, vol. 5 (1973), p. 77-163, ont utilisé, entre autres, l'induction et la récursion barrées (découlant essentiellement du théorème de la barre de Brouwer) sur les suites de type arbitraire pour obtenir des résultats comparables. L'in-

duction et la récursion barrées sont essentiellement l'induction et la récursion sur les segments initiaux de suites définies. Gödel avait obtenu en 1933 un résultat important auquel on réfère sous le nom de "traduction négative" de l'arithmétique classique à l'arithmétique intuitionniste

$$a) P^- = \neg\neg P \quad (P \text{ atomique})$$

$$b) (P \rightarrow Q)^- = P^- \rightarrow Q^-$$

$$c) (P \wedge Q)^- = P^- \wedge Q^-$$

$$d) (\neg P)^- = \neg P^-$$

$$e) (P \vee Q)^- = \neg(\neg P^- \wedge \neg Q^-)$$

$$f) (\bigwedge x P x)^- = \bigwedge x P^- x$$

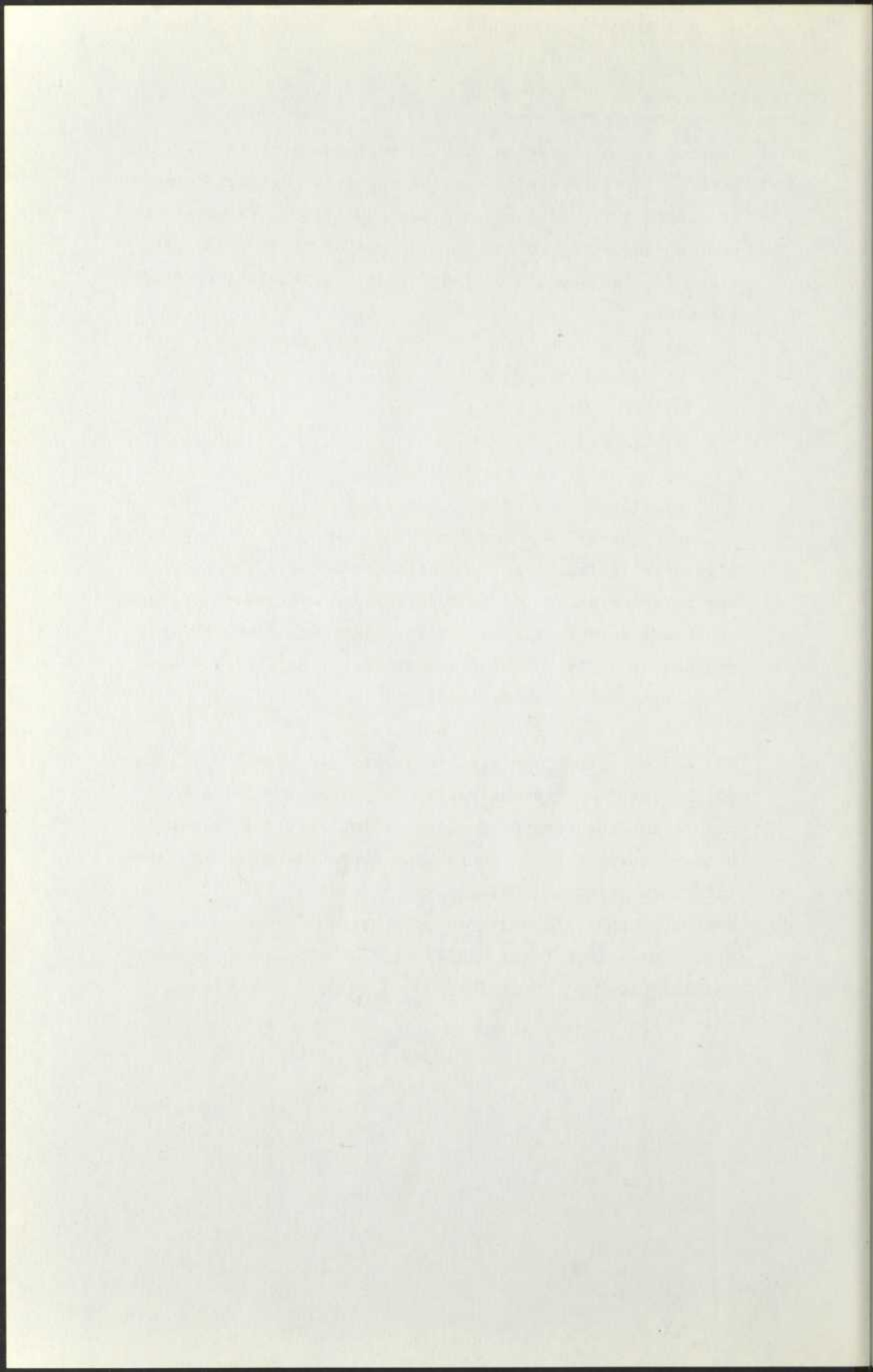
$$g) (\bigvee x P x)^- = \neg \bigwedge x \neg P^- x$$

L'interprétation et la traduction Dialectica consiste en une interprétation (ou traduction) des opérations logiques en termes de formules sans quantificateurs d'une théorie des objets de type fini (de tous les types finis). La traduction est formulée ainsi

$$A^D = s \ t \ A_D(s, t)$$

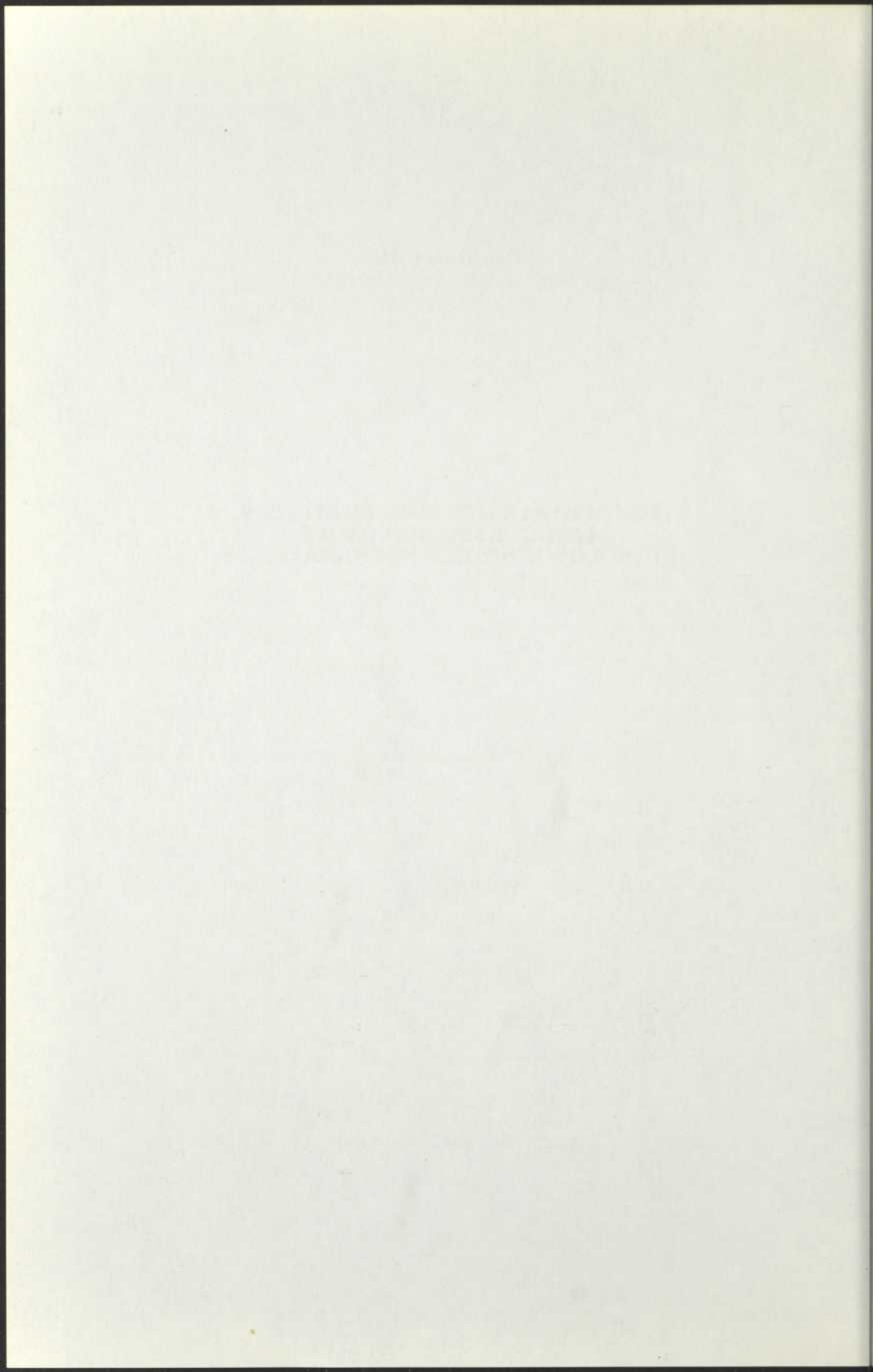
où A_D est sans quantificateurs et s, t des opérations régulières (*i.e.* récursives). On parvient ainsi à éliminer la logique (en particulier, l'implication) au profit d'une interprétation "forte" des connecteurs et des quantificateurs intuitionnistes.

- [20] Voir E. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill (New York: 1967) et "Mathematics as a numerical language" in *Proof Theory and Intuitionism*, *ouvr. cit.*, p. 53-71.



Deuxième partie

**FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES,
LOGIQUE MATHÉMATIQUE
ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES**



Chapitre III

LA SIGNIFICATION FONDATIONNELLE DE LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Bien qu'on ne puisse identifier, comme on l'a vu, logique mathématique et fondements des mathématiques - la logique mathématique n'ayant pas de vocation critique comme telle - il est évident que les concepts et les méthodes de la théorie des modèles, de la théorie de la récursion et de la théorie des démonstrations ont envahi la problématique fondationnelle à tel point qu'on peut dire qu'elles font corps avec elle. On peut définir, sommairement, la logique mathématique comme la syntaxe et la sémantique du discours mathématique (la logique symbolique élémentaire étant la syntaxe et la sémantique du discours ordinaire). Nous voulons examiner ici quelques-uns de ces concepts et méthodes syntaxiques et sémantiques [1].

1. LA THEORIE DES MODELES

Dès sa création, qu'on peut attribuer en grande partie à Tarski, la théorie des modèles s'est identifiée à une

théorie de la vérité au sens de la vérité des énoncés logiques - vérité qui semblait échapper à la théorie des systèmes formels, puisque le théorème de Tarski sur la représentabilité de la vérité dans un système formel affirmait la contrepartie sémantique du résultat (syntaxique) de Gödel sur l'incomplétude (le deuxième théorème d'incomplétude).

"La vérité dans le système (formel) ne peut être représentée dans le système [2]."

La sémantique de la vérité a toujours eu une forte teneur en réalisme, puisqu'on supposait à l'origine un univers et des membres ou individus qui "satisfassent" les énoncés d'une théorie logique ou mathématique donnée. Revoyons quelques-unes des notions principales de la théorie des modèles.

Une structure A pour un langage L du premier ordre se compose de

- 1) un ensemble non nul $|A|$ appelé l'univers ou le domaine de A .
- 2) à chaque symbole de fonction f de L correspond une fonction f_A de $|A|$ à $|A|$ (à chaque constante c de L correspond un membre c_A de $|A|$).
- 3) à chaque symbole de prédicat p de L , autre que l'égalité $=$, correspond un prédicat p_A dans $|A|$.

Un modèle d'une théorie T est une structure pour le langage L de T dans laquelle tous les axiomes non logiques de T sont valides. Un modèle est donc la donnée d'un triplet

$\langle A, f_A, p_A \rangle$, dans lequel les énoncés d'un langage L pour une théorie T sont tous vrais.

Plusieurs résultats fondamentaux ont été obtenus pour les théories du premier ordre:

- 1) le théorème de complétude
- 2) le théorème de finitude ou de compacité
- 3) le théorème de Löwenheim-Skolem

Ces résultats ne sont pas extensibles à la logique du second ordre [3] où l'on quantifie non plus seulement sur les individus ou les membres d'un univers A , mais aussi sur les prédicats P_A et les fonctions F_A de l'univers $(P_1^n, P_2^n, \dots$ pour des variables de prédicats n -aires et F_1^n, F_2^n, \dots pour des variables de fonctions n -aires). En particulier, la validité au premier ordre n'est pas extensible au second ordre. Mais si on laisse libre d'interprétation l'univers des prédicats par exemple - qui, dans un langage du second ordre, est l'ensemble des sous-ensembles de l'univers des individus, puisqu'un prédicat est une relation - alors on obtient des structures générales qui réduisent la logique du second ordre à une logique du premier ordre à plusieurs sortes de variables. C'est là la technique employée par Henkin pour étendre sa preuve de complétude à la logique du second ordre (modèles généraux dénombrables).

Les modèles où l'univers des prédicats est fixé par

l'ensemble des sous-ensembles de l'univers U sont appelés standard ou principaux, les autres non standard ou non principaux. Les modèles généraux peuvent être non absolus (l'univers des ensembles définissables est plus restreint que l'ensemble des sous-ensembles de l'univers des individus) ou non standard (s'ils contiennent par exemple des infinitésimaux). La logique du second ordre absolue ou pleine permet de formuler adéquatement l'arithmétique de Peano avec le postulat d'induction du second ordre

$$\forall X(X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow XSy) \rightarrow \forall yXy)$$

ou la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome de compréhension du second ordre

$$\forall a \forall X \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow (y \in a \wedge X(y))]$$

Le modèle standard pour l'arithmétique de Peano, est le modèle N , où l'univers est l'ensemble des nombres naturels non négatifs et dont les symboles non logiques sont $0, S$ (pour successeur), $+, \cdot$, et $=$. Les symboles non logiques obéissent dans le modèle standard aux postulats de Peano (avec le postulat d'induction). Un modèle non standard est un modèle qui n'est pas isomorphe au modèle standard; par exemple [4], on peut avoir une extension élémentaire propre R_* de l'ensemble des réels R_0 qui contient un élément différent de tous les éléments de R_0 . On dit alors que R_* est un corps ordonné non archimédien, *i.e.*, n'a pas la propriété selon laquelle pour

deux nombres positifs arbitraires a et b , il y a un entier positif tel que $a < nb$ ou $na > b$ (un corps est un ensemble de nombres positifs avec addition et multiplication commutative, il est ordonné si l'addition et la multiplication donnent toujours un nombre positif et si pour un membre x du corps on a x est positif, ou $x = 0$, ou $-x$ est positif).

Les infinitésimaux ou les entiers positifs infiniment petits (ou infiniment grands) sont des nombres non standard, *e.g.* $a < r$ pour tous les nombres réels positifs r . L'analyse infinitésimale ainsi fondée sur des modèles non standard constitue une analyse parallèle à l'analyse classique, *e.g.*, théorie non standard des fonctions d'une variable réelle, de plusieurs variables réelles, etc. On peut avoir paradoxalement une preuve non standard au moyen des infinitésimaux (ici, infinitésimaux infiniment proches l'un de l'autre) de la convergence des suites de Cauchy, qui avait, avec Weierstrass, voulu éliminer les infinitésimaux de l'analyse.

Une suite standard $\{S_n\}$ converge, si et seulement

si $S_\lambda \approx S_\mu$ pour tous les entiers positifs infinis

λ et μ

ou encore une version non standard du théorème de Bolzano-Weierstrass. Pour donner un exemple simple, prenons le théorème classique "Si $f'(b)$ - la dérivée de f - existe, alors f est continue en b ". Pour un infinitésimal différent de zéro

dx , nous avons

$$\frac{*f(b + dx) - f(b)}{dx} \approx f'(b)$$

ou $*f$ est une fonction non standard. Multipliant le côté droit par l'infinitésimal dx , nous obtenons successivement

$$*f(b + dx) - f(b) \approx f'(b)$$

et

$$*f(b + dx) \approx f(b) .$$

L'analyse non standard est évidemment non constructive: son intérêt réside dans l'extension des méthodes de la théorie des modèles.

Une autre extension, la logique infinitaire, utilise les modèles ω (modèles où l'univers est l'ensemble des nombres naturels avec 0 et S). Les modèles de formules infinies pour la logique infinitaire fondée sur les conjonctions et disjonctions infinies (langages $L_{\omega_1 \omega}$) - ont donné naissance à une extension importante de la théorie des modèles. L'idée de généraliser la logique ordinaire à une logique infinitaire n'est pas si radicalement nouvelle qu'on pourrait le croire; $L_{\omega \omega}$ est déjà le langage de la logique du premier ordre ordinaire (avec variables, constantes, etc. en nombre infini dénombrable), $L_{\omega_1 \omega}$ y ajoute des conjonctions et disjonctions dénombrables et $L_{\omega_1 \omega_1}$ admet en plus la quantification "généralisée" Qx sur un nombre infini (dénombrable) de variables [5].

La logique algébrique (algèbres polyadiques de Halmos et algèbres cylindriques de Tarski) est elle aussi issue de la théorie des modèles; les algèbres cylindriques ont connu, en particulier, un développement autonome important. Par ailleurs les concepts et les méthodes algébriques, comme les idéaux, produits, ultraproducts et ultrapuissances jouent un rôle important, non seulement en théorie des modèles, mais aussi en théorie de la récursion. C'est sans doute ici que la théorie des modèles est la plus fidèle à sa vocation structurelle (au sens où nous l'entendons) et réaliste.

2. LA THEORIE DE LA RECURSION

La théorie des fonctions récursives, qui a fait son apparition en logique avec la preuve d'incomplétude de Gödel, est essentiellement la théorie des systèmes formels. Un système formel est la donnée d'un alphabet avec lequel on forme des expressions (bien formées), où l'on retrouve des axiomes, et que régissent certaines règles d'inférence, en particulier "modus ponens". Le problème central de la théorie des systèmes formels est celui de la décision (avec la consistance et la complétude évidemment): il consiste à déterminer s'il existe pour un système formel donné une méthode qui permette en un nombre fini d'étapes de décider si telle ou telle formule du système est un théorème ou non. Cette méthode doit être mécanique ou algorithmique: un algorithme est un ensemble fini

d'instructions qui peuvent être effectuées par une machine ou encore une procédure effective pour le calcul numérique d'une fonction. Un exemple d'une telle méthode mécanique est fourni par une machine de Turing: c'est un ensemble de règles qui détermine le comportement d'un appareil mécanique comportant un ruban infini perforé et une tête lectrice qui peut accomplir quatre opérations fondamentales: 1) elle peut perforer le ruban là où il ne l'est pas, 2) elle peut effacer des "trous", 3) elle peut aller à gauche ou 4) à droite. On a donc un quadruple <état interne initial de l'appareil, ruban, opérations, état interne terminal de l'appareil>. Il y a plusieurs caractérisations de la notion d'algorithme à part celle de Turing, les caractérisations de Kleene, Post, Church, Markov, mais elles sont toutes équivalentes: elles correspondent toutes aux fonctions récursives (partielles), d'où la thèse de Church qui dit, rappelons-le, que les fonctions calculables ou computables sont exactement les fonctions récursives. Voyons brièvement ce qu'il en est des fonctions récursives

Les fonctions récursives primitives sont:

- 1) les fonctions constantes $\forall x(Zx = x)$
- 2) la fonction de successeur $\forall x(Sx = x + 1)$
- 3) les fonctions d'identité

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (U_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j)$$

- 4) les fonctions définies par substitution

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \\ h_m(x_1, \dots, x_n))$$

obtenues des fonctions

$$g(y_1, \dots, y_m), \\ h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)$$

5) les fonctions définies par récursion

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, \\ f(x_1, \dots, x_n, y)) \quad .$$

La classe des fonctions récursives générales comprend en outre l'opérateur μ qui est défini

$$\mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \text{le plus petit entier } y \text{ tel que...}$$

Les fonctions récursives partielles sont simplement des fonctions récursives $F: A \rightarrow B$, dont le domaine est un sous-ensemble de $A, E \subset A$ (on peut aussi définir des fonctionnelles récursives partielles comme fonctions partielles de fonctions). Le théorème d'énumération énonce qu'il existe un z tel que

$$\forall x \forall y [\psi_z(x, y) = \psi_x(y)]$$

si $\psi_x(y)$ est définie, autrement $\psi_z(x, y)$ est indéfinie. Le théorème s-m-n énonce que "pour tout $m, n \geq 1$, il existe une fonction récursive s_{nm} à $m + 1$ variables telle que

$$\forall x, \forall y_1 \dots \forall y_m \{ \lambda z_1 \dots \lambda z_n [\psi_x^{(m+n)}(y_1, \dots, y_m) \\ z_1, \dots, z_n] = \psi_{s_{nm}}^{(n)}(x, y_1, \dots, y_m) \} \quad .$$

où λ est l'opérateur lambda. Le théorème d'énumération mon-

tre qu'il y a une fonction partielle universelle à deux variables pour des fonctions récursives partielles à une variable ou à $k + 1$ variables pour des fonctions récursives partielles à k variables et le théorème s-m-n énonce la propriété d'itération pour les index ou nombres de Gödel des fonctions récursives partielles.

Dans ce cadre plusieurs problèmes peuvent être posés, *e.g.* le problème de l'arrêt: y a-t-il une procédure effective qui, pour tout x et pour tout y , peut déterminer si oui ou non $\psi_x(y)$ est définie, *i.e.*, si oui ou non un ensemble de procédures P_x appliquées à une entrée y (input) donne une sortie (output)? En d'autres termes, y a-t-il une fonction récursive g telle que $g(x,y) = 1$, si $\psi_x(y)$ est convergente (ou a une limite) et $g(x,y) = 0$, autrement? La réponse est négative et on le démontre par un simple procédé de diagonalisation.

Il y a d'autres exemples plus intéressants, comme le problème des mots pour les groupes [7] ou le dixième problème de Hilbert qu'on formule de la façon suivante: étant donné une équation diophantaine de la forme $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, où P est un polynôme, à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients dans les entiers rationnels, peut-on trouver un algorithme qui permette de décider si oui ou non, l'équation a une solution dans les entiers rationnels, c'est-à-dire un ensemble

de racines diophantines, *e.g.* $\langle r_1, \dots, r_k \rangle$ est un ensemble de racines simultanées pour $P(x_1, \dots, x_k)$ si $P(r_1, \dots, r_k) = 0$? Matijasevič [8] a répondu par la négative en 1970 en montrant que toute relation récursivement énumérable est diophantine de la forme

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y_1 \dots y_k [P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 0]$$

donc, par la non-réversibilité de certains ensembles récursivement énumérables, démontrait l'insolubilité récursive du dixième problème de Hilbert. Matijasevič a, en fait, trouvé une relation diophantine de croissance exponentielle *i.e.* la suite des nombres de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... qui est récursivement énumérable. Un des théorèmes les plus importants, la théorie des fonctions récursives énonce en effet qu'il existe des ensembles récursivement énumérables, mais non récursifs. Un ensemble est récursif, si sa fonction caractéristique est récursive; en d'autres termes un ensemble A est récursif, si et seulement s'il existe une fonction récursive f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ssi } \forall x (x \in A) \\ 0 & , \text{ssi } \forall x (x \in \bar{A}) \end{cases}$$

où \bar{A} est le complément de A ; un ensemble est récursivement énumérable, s'il est vide ou si c'est le champ (codomaine) d'une fonction récursive. Un ensemble est donc récursif s'il est récursivement énumérable et son complément l'est aussi, c'est-à-dire si on peut dresser la liste de tous leurs éléments respectifs. Il y a des ensembles récursivement énumérables dont

les compléments ne sont pas récursivement énumérables. Un tel ensemble peut être un ensemble qui correspond au domaine d'une fonction récursive partielle; c'est donc un ensemble récursivement énumérable, mais son complément ne peut être récursivement énumérable, puisque l'ensemble et son complément ne peuvent avoir le même domaine. Ce théorème est à la base d'un grand nombre de résultats en théorie de la récursion.

Un problème qui est lié aux ensembles récursivement énumérables [9] est le problème de Post: y a-t-il des ensembles récursivement énumérables qui ne sont ni récursifs, ni complets (un ensemble A est complet, si et seulement s'il est récursivement énumérable et $\forall B [B \text{ est r.é.} \rightarrow B \text{ est réductible à } A]$). Friedberg et Muchnik [10] ont montré qu'il existe des ensembles récursivement énumérables qui sont incomparables quant à la relation de réductibilité de Turing, *i.e.* l'un n'est pas récursif dans l'autre. Réductibilité signifie ici même degré de complexité algorithmique. Une théorie des degrés de complexité algorithmique ou d'insolubilité (pour les problèmes algorithmiquement inaccessibles) a été développée récemment.

Un autre sujet important de la théorie de la récursion qui opère la jonction avec la théorie des ensembles est la théorie des hiérarchies (ou classes de relations) arithmétique, analytique et hyperarithmétique.

Une relation P [11] est arithmétique si elle est

définie explicitement de la façon suivante

$$P(A) \leftrightarrow Qx_1 \dots Qx_n R(A, x_1, \dots, x_n)$$

où R est une relation récursive, Qx_j est le quantificateur existentiel ou le quantificateur universel et x_1, \dots, x_n des variables numériques; une relation P est analytique, si sa définition est

$$P(A) \leftrightarrow Q_1, \dots, Q_k R(A, B)$$

où R est toujours une relation récursive, mais où les quantificateurs Q_j portent sur des variables fonctionnelles dans B . Une relation arithmétique a la notation Σ_n^0 (pour quantificateur existentiel initial) et Π_n^0 (pour quantificateur universel initial) Σ_n^1 ou Π_n^1 pour une relation analytique et Δ_n^0, Δ_n^1 respectivement quand une relation a les deux sortes de quantificateurs. La hiérarchie hyperarithmétique (notée Δ_1^1) est une extension de la hiérarchie arithmétique où l'on part des relations récursivement énumérables pour les prolonger en opérant sur les compléments et les unions dénombrables - on a ici l'analogie avec les ensembles boréliens sur la droite réelle (F_σ) ou l'espace de Baire, puisque ce sont les unions dénombrables d'ensembles fermés, la hiérarchie analytique correspondant à son tour à la hiérarchie des ensembles projectifs sur un espace de dimension supérieure, alors que la hiérarchie arithmétique devrait correspondre plus ou moins aux ensembles finis, ce qui compléterait l'analogie entre la théorie des hiérarchies

et la théorie descriptive des ensembles.

Une foule d'autres résultats pourraient être cités, en particulier le théorème de récursion ou du point fixe qui affirme que pour toute fonction récursive, il y a un n tel que

$$\psi_n = \psi_f(n)$$

Mais la recherche actuelle va vers les extensions de la théorie de la récursion, la théorie des notations ordinales, la théorie de la métarécursion de Kreisel et Sacks, les théories algébriques axiomatisées de Wagner et Strong, la théorie des ordinaux admissibles de Platek et Kripke [12]. L'invasion des méthodes algébriques (les treillis, en particulier) et des méthodes infinitaires (ou métafinitaires) a fait perdre à la théorie de la récursion le caractère constructiviste que les créateurs, Kleene, Post, entre autres, y voyaient. Si la théorie de la récursion est née avec les systèmes formels [13] et le problème de la décision, elle a débouché très tôt sur le problème de l'insolubilité et si elle a commencé par l'analyse des procédés de computation, elle s'est dégagée assez tôt des limites imposées par la théorie (restreinte) de la computation. Mais la mode ne semble pas tellement être à l'analyse, mais plutôt à l'enrichissement technique (nous disons structurel) de la théorie. Son apport fondationnel s'en trouve par là réduit et il est sans doute vrai que, comme le dit Kreisel [14], la théorie de

la récursion s'arrête là où commence la théorie des démonstrations.

3. LA THEORIE DES DEMONSTRATIONS

Il ne fait pas de doute que l'impact fondationnel de la théorie des démonstrations est plus grand que celui de la théorie de la récursion ou de la théorie des modèles [15]. Créée par Hilbert pour répondre à son programme métamathématique de la preuve "finitiste" de la consistance ("Widerspruchsfreiheit) de l'analyse classique, la théorie des démonstrations s'attaque aujourd'hui à d'autres problèmes, même si elle vise toujours ultimement la consistance de l'analyse classique et de la théorie des ensembles Z-F, via leurs sous-systèmes. On oppose ordinairement les méthodes syntaxiques de la théorie des démonstrations aux méthodes sémantiques de la théorie des modèles: déductibilité versus vérité qu'on retrouve même dans la logique élémentaire. Grosso modo, la théorie des démonstrations est surtout une théorie des structures ordinales alors que la théorie des modèles est une théorie des structures cardinales.

Il faut distinguer deux orientations principales de la théorie des démonstrations, selon Prawitz [16]: la théorie générale des démonstrations qui étudie la notion de preuve elle-même, ses propriétés, les différentes sortes de preuves, constructives et non constructives, leurs structures (formes

normales), leurs représentations par des dérivations formelles, les critères d'identité pour les preuves, les critères d'équivalence pour leurs dérivations et finalement les applications à d'autres domaines; la théorie "réductrice" des démonstrations s'intéresse, elle, aux preuves d'une théorie mathématique donnée en analysant les principes élémentaires qui régissent la théorie et tente de réduire - à l'aide de sous-systèmes - la ou les théories à leurs fondements constructifs ou réels (par opposition à idéaux, au sens des propositions idéales de Hilbert - idéaux de Kummer, méthodes analytiques en théorie des nombres, etc.).

C'est évidemment Gentzen qui a marqué le plus profondément l'histoire de la théorie des démonstrations et son évolution récente en porte encore la marque. C'est Gentzen qui a introduit, par exemple, la notion de "déduction naturelle". Un système de déduction naturelle est constitué par des règles (cinq ou six ou sept) d'introduction et d'élimination des connecteurs et quantificateurs logiques que nous donnons ici:

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \wedge I \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \wedge E \quad \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \\
 \\
 2) \quad \vee I \quad \frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \quad \vee E \quad \frac{A \vee B \quad \frac{[A] \quad [B]}{C}}{C} \\
 \\
 3) \quad \supset I \quad \frac{[A] \quad B}{A \supset B} \quad \supset E \quad \frac{A \quad A \supset B}{B}
 \end{array}$$

- 4) $\forall I \frac{A(a)}{\forall x A(x)}$ $\forall E \frac{\forall x A(x)}{A(t)}$
- 5) $\exists I \frac{A(t)}{\exists x A(x)}$ $\exists E \frac{\exists x A(x) \quad [A(a)]}{B}$
- 6) $\sim I \frac{[A]}{\frac{\Lambda}{\sim A}}$ $\sim E \frac{A \sim A}{\wedge}$

$\sim A$ équivaut à $A \supset \Lambda$, Λ étant le symbole de l'absurdité ou de la fausseté. La logique classique a pour règle d'absurdité

- 7) $\frac{[\sim A]}{\frac{\Lambda}{A}}$

alors que la logique intuitionniste a

$$\frac{\Lambda}{A}$$

Prawitz a donné un principe d'inversion pour l'introduction et l'élimination des connecteurs et quantificateurs [17], mais les résultats les plus importants sont les théorèmes sur la forme normale (des dérivations) et de normalisation: le "Hauptsatz" de Gentzen dit que

Si A est dérivable de Γ , alors il y a une dérivation normale (pleinement déployée) de A de Γ (dans le système en question).

Une dérivation est normale ou est en forme normale quand elle ne contient pas de formule maximale ou pas de segment maximal - une formule maximale est une formule qui apparaît dans une dérivation comme la conclusion d'une introduction (d'un connec-

teur ou quantificateur logique) et la prémisse majeure d'une élimination, alors qu'un segment maximal contient une suite d'occurrences de formules de la même forme dans une dérivation. Une dérivation normale contient deux parties, l'une analytique, dans laquelle les hypothèses ou les prémisses sont réduites à leurs composantes élémentaires par des règles d'élimination, et l'autre synthétique dans laquelle on recompose à l'aide des règles d'introduction pour obtenir les composantes finales. Une dérivation est pleinement normale quand elle ne contient pas de redondance, *e.g.* une application de $\exists E$ est redondante, s'il n'y a pas d'hypothèse qui soit rayée par l'inférence, et une dérivation est dans une forme déployée quand toutes les formules minimales dans une dérivation pleinement normale sont atomiques (la formule minimale peut être la conclusion d'une élimination, la prémisse d'une introduction et la sous-formule à la fois de la formule initiale et de la formule terminale d'une dérivation).

Le théorème sur la forme normale est appelé aussi théorème sur l'absence de coupure (cut-free). La règle de coupure s'énonce

$$\frac{C \vee A \quad \sim A \vee D}{C \vee D}$$

(le théorème sur la forme normale a pour effet d'éliminer les coupures, ce qu'on pourrait appeler plutôt les "détours"). Le théorème de normalisation est une généralisation ou universalisation

sation du théorème sur la forme normale; il énonce que

"Toute dérivation dans des systèmes atomiques de la logique minimale (qui équivaut aux six premières règles énoncées plus haut), de la logique classique et de la logique intuitionniste est réductible à une forme normale pleinement déployée."

Ces théorèmes ont été appliqués à d'autres systèmes, en particulier à la logique du second ordre (Prawitz), à la théorie intuitionniste des espèces (Martin-Löf), à l'analyse et la théorie des types (Girard).

On rejoint ici l'autre orientation de la théorie des démonstrations, l'orientation réductrice ou "réductive". Après la preuve de Gentzen de la consistance de l'arithmétique classique au moyen de l'induction transfinie [18], Gödel (interprétation *Dialectica* 1958) a donné une démonstration qui utilise les fonctionnelles récursives de type (simple) fini sur les entiers; Spector [19] a élaboré cette analyse en employant les fonctionnelles bar-récurrentes (fonctionnelles avec récursion "barrée") qui permettent d'aller plus haut dans la hiérarchie des types; plus récemment, Luckhardt [20] a tenté de généraliser encore cette approche en définissant une induction "barrée" généralisée.

Toute cette orientation de la théorie des démonstrations a été déterminée par le second théorème d'incomplétude de Gödel (théorème sur les preuves de consistance) qui énonçait:

La formule de P (arithmétique de Peano) qui dit que

P est consistant n'est pas un théorème de P .

Pour trouver une preuve de consistance de P et de S (analyse classique), il faut donc en sortir, aller plus haut. Une méthode, qui est issue de l'interprétation Dialectica de Gödel et qui ne monte pas l'échelle des types, a été formulée par Kreisel: c'est l'interprétation dite "sans contre-exemple" où les variables numériques d'une proposition arithmétique en forme préfixe (quantificateurs alternants à gauche d'une formule sans quantificateur) sont remplacées par des variables fonctionnelles (pour des fonctionnelles récursives); *e.g.*

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \dots \exists x_n \forall y_n A(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

est remplacée par

$$\forall f_1 \forall f_2 \dots \forall f_n \exists x_1 \dots x_n A[x_1, \dots, x_n, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)]$$

Il n'est pas possible dans ce court résumé de traiter des autres problèmes et résultats de la théorie des démonstrations, progressions autonomes, définitions inductives, diagrammes ordinaux, etc., mais on peut se faire une juste idée de la théorie des démonstrations en affirmant qu'elle est essentiellement une théorie du raisonnement mathématique, une théorie de la réflexion, dans la mesure où les principes du raisonnement mathématique sont découverts par réflexion sur la pratique mathématique, et non uniquement par observation. Dans ce sens, la théorie des démonstrations va plus loin que la simple des-

cription des raisonnements mathématiques, elle cherche parfois à les corriger (méthodes classiques non constructives) ou à les réduire - d'où l'appellation de théorie des démonstrations réductrice. La théorie des démonstrations, dans sa vocation hilbertienne et post-hilbertienne [21], jouerait par rapport à l'ensemble des mathématiques le rôle que la théorie des nombres constructive (ou élémentaire) joue par rapport à la théorie des nombres analytique.

La théorie des démonstrations devient donc, dans cette perspective, une théorie générale des principes et des concepts mathématiques étroitement associée aux fondements constructivistes, en particulier à l'intuitionnisme. On a vu que la théorie de la récursion avait aussi, du moins à l'origine, partie liée avec le constructivisme et que, d'autre part, la théorie des modèles était réaliste ou ensembliste. Mais la théorie des démonstrations a un très net penchant idéalistè, puisque l'objectivité des mathématiques, réclamée si fort pour le réalisme ensembliste, ne saurait être sauvegardée sans l'apport du sujet mathématicien universel qui, pour ne pas être une subjectivité transcendantale, n'en reste pas moins un agent ou producteur linguistique dont il faut tenir compte dans la production mathématique. Si la mathématique est une production (au sens marxiste, par exemple), il faut pouvoir expliquer son mode de production; c'est à quoi s'attache la théorie des dé-

monstrations.

La logique mathématique comme métamathématique constitue une certaine distanciation par rapport à la pratique mathématique, un certain dédoublement des théories mathématiques dans leur squelette logique. Cette distanciation et ce dédoublement sont essentiels à la recherche fondationnelle qui se conçoit comme métathéorie de la logique et des mathématiques, métathéorie qui, elle-même, doit être située dans l'horizon métathéorétique qui englobe l'expérience intellectuelle.

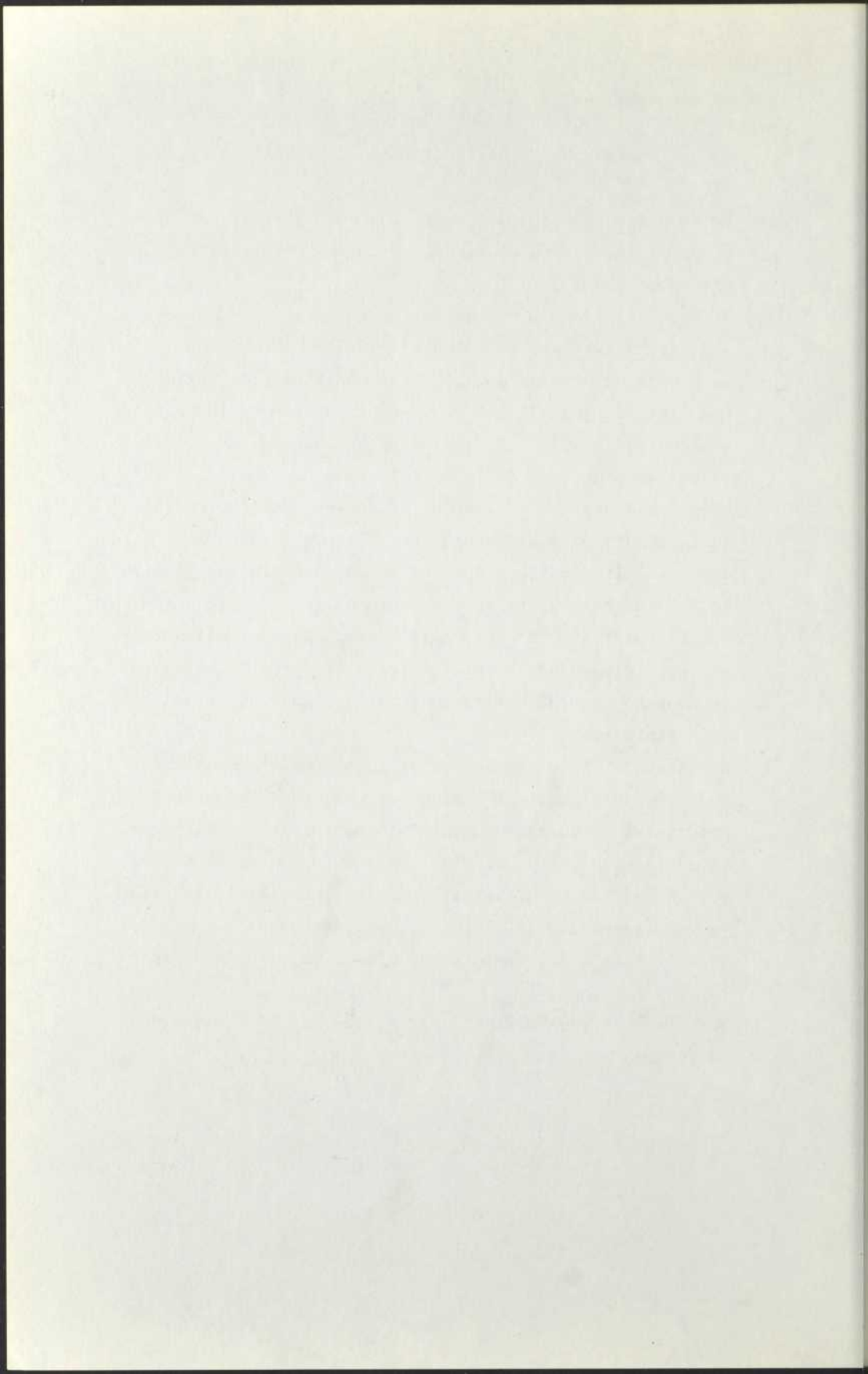
NOTES DU CHAPITRE III

- [1] On peut se reporter pour tout ce chapitre à l'ouvrage déjà cité de Shoenfield.
- [2] Voir R. M. Smullyan, *Theory of Formal Systems*, Princeton University Press (Princeton: 1961), p. 45.
- [3] Pour la logique du second ordre, voir H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press (New York and London: 1972), chap. 4. Voir aussi notre compte rendu de cet ouvrage dans *The Canadian Mathematical Bulletin*, sept. 1976.
- [4] Pour l'analyse non standard, voir l'ouvrage "standard" de A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland (Amsterdam: 1966).
- [5] Plusieurs des résultats de la théorie des modèles pour langages du premier ordre ont une version "infinitaire". Voir H. J. Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic*, North-Holland (Amsterdam: 1971) et *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages*, ed. by J. Barwise, Lecture Notes in Mathematics, no 72, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1968). Pour la théorie des modèles "ordinaire", c'est l'ouvrage récent de Chang et Keisler *Model Theory*, North-Holland (Amsterdam: 1973) qu'il faut consulter pour les notions principales de la théorie des modèles, e.g. ultraproducts, ultrapuissances, modèles saturés, stables, etc.
- [6] L'ouvrage classique pour la théorie de la récursion est celui de H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill (1967). Il y a aussi les ouvrages de Kleene, Davis, Smullyan, pour ne nommer que les mieux connus. La théorie de la récursion est une

théorie plus mathématique que logique, mais son application à la logique par Skolem, Gödel, Kleene, Post, Church et les autres en a fait une discipline qu'on peut appeler logico-mathématique.

- [7] Voir J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, ouvr. cit., Appendix.
- [8] Voir Yu. V. Matijasevič, "Diophantine representation of recursively enumerable predicates" in *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, ed. J. E. Fenstad, North-Holland (Amsterdam: 1971), p. 171-177.
- [9] Il y a \aleph'_0 ensembles récursivement énumérables. A remarquer la parenté entre dénombrable et énumérable.
- [10] La preuve de Friedberg et Muchnick repose sur un argument de priorité qui permet de "remplir" deux ensembles prioritairement de "plus" de telle sorte que l'un ne soit pas récursif dans l'autre, *i.e.* qu'il y ait au moins un élément de B qui soit dans A et vice versa.
- [11] Une relation est un prédicat et peut être identifiée à un ensemble.
- [12] Voir G. Kreisel, "Some reasons for generalizing recursion theory" in *Logic Colloquium 69*, North-Holland (Amsterdam: 1971), p. 139-198.
- [13] Une théorie des systèmes formels qui s'est développée indépendamment, la logique combinatoire de Curry, s'est cantonnée jusqu'ici aux systèmes logiques et mathématiques élémentaires.
- [14] Voir G. Kreisel, "Some reasons for generalizing recursion theory", art. cit., p. 162.
- [15] Voir la magistrale "revue" de Kreisel, "A Survey of Proof Theory", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 33 (1968), no 3, p. 321-388, et "Survey of Proof Theory II" in *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, ed.

- J. E. Fenstad, North-Holland (Amsterdam: 1971), p. 109-170.
- [16] D. Prawitz, "Ideas and Results in Proof Theory", *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, ouvr. cit., p. 235-307.
- [17] D. Prawitz, *Natural Deduction. A Proof-theoretical Study*, Almquist S. Wiksell (Stockholm: 1965).
- [18] La preuve de Gentzen démontre la consistance de l'induction infinie jusqu'à ω en itérant sur les ordinaux dénombrables jusqu'à ε_0 , premier ordinal de la deuxième classe de Cantor et qu'on définit comme la limite de la hiérarchie des ω . Church, Kleene et Post en théorie de la récursion ont élaboré des systèmes de notations ordinales qui permettent de montrer la récursivité (générale) ou la constructivité des ordinaux jusqu'à ω_1 , le premier ordinal non constructif. Mais on peut s'interroger sur le sens que prend constructivité ici. La preuve de Gentzen peut être dite constructive dans un sens large (non finitaire).
- [19] C. Spector, "Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of the principles formulated in current intuitionistic mathematics" in *Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics*, vol. 5, ed. J. C. E. Dekker, American Mathematical Society (Providence, R. I.: 1962), p. 185-199.
- [20] Voir C. Luckhardt, *Extensional Gödel Dialectica Interpretation*, ouvr. cit.
- [21] Voir G. Kreisel, "Hilbert's Programme" in *Dialectica*, vol. 12 (1958), p. 346-372.



Chapitre IV
LA THÉORIE DES CATÉGORIES
ET LA THÉORIE DES TOPOI
COMME LANGAGES FONDATIONNELS

1. LA NOTION DE CATEGORIE

Les défenseurs de la théorie des catégories voudraient y voir un schème fondationnel capable de remplacer la théorie des ensembles qui, selon eux, est incapable d'intégrer les grandes totalités comme la catégorie de tous les ensembles, la catégorie des groupes ou même la catégorie de toutes les catégories. Certains, comme Lawvere, vont plus loin et répudient la théorie des ensembles et sa relation d'appartenance pour excès d'abstraction. Seule la théorie des catégories serait en mesure de dégager les relations structurelles entre les divers concepts mathématiques et ainsi d'unifier l'ensemble des mathématiques dans une théorie systématique et concrète. Avant d'évaluer ces critiques, voyons ce qu'il en est de la notion de catégorie [1].

Informellement, une catégorie est constituée

- 1) d'objets a, b, c, \dots
- 2) d'une fonction qui assigne à toute paire ordonnée $\langle a, b \rangle$ l'ensemble de ses morphismes $\text{hom}(a, b)$, *i.e.* l'ensemble d'applications ou de flèches qui ont pour domaine a et pour codomaine ou champ b .
- 3) une loi de composition qui s'écrit

$$\langle g, f \rangle \mapsto g \circ f$$

où \mapsto est le morphisme de composition et \circ le symbole de la composition pour les flèches f et g

$$(f \in \text{hom}(a, b) \text{ et } g \in \text{hom}(b, c))$$

on a donc la composition

$$\text{hom}(b, c) \times \text{hom}(a, b) \rightarrow \text{hom}(a, c)$$

pour un triplet ordonné $\langle a, b, c \rangle$

- 4) une loi d'identité qui s'écrit $l_b \in \text{hom}(b, b)$ *i.e.*, une flèche de b sur lui-même. On peut ajouter ici une cinquième clause pour des paires ordonnées disjointes

$$\langle a, b \rangle \neq \langle a', b' \rangle$$

$$\text{hom}(a, b) \cap \text{hom}(a', b') = \emptyset$$

Axiomatiquement, on a l'axiome d'associativité pour la composition, *i.e.* pour $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ et $h: c \rightarrow d$, on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

et l'axiome suivant pour l'identité

$$l_b \circ f = f \quad g \circ l_a = g$$

i.e., identité sous la composition

La notion de foncteur joue un rôle important en théorie des catégories: un foncteur est un morphisme de catégories; par exemple, pour des catégories A et B , un foncteur $F: A \rightarrow B$ est une fonction qui fait correspondre à chaque objet de A un objet Tb de B et à chaque morphisme $f: a \rightarrow a'$ de A un morphisme $Tf: Ta \rightarrow Ta'$ de B qui préserve l'identité et la composition.

$$T(1_a) = 1_{Ta}, \quad T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

Les transformations naturelles sont des morphismes de foncteurs; pour deux foncteurs, $S, T: A \rightarrow B$ la fonction qui assigne à chaque objet a de A une flèche

$$t_a = ta : Sa \rightarrow Ta \text{ de } B$$

de telle sorte que chaque flèche $f: a \rightarrow a'$ dans A donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} a & & \\ \downarrow f & & \\ a' & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Sa & \xrightarrow{ta} & Ta \\ Sf \downarrow & & \downarrow Tf \\ Sa' & \xrightarrow{ta'} & Ta' \end{array}$$

(i.e. les flèches se composent mutuellement) [2]: une telle fonction est une transformation naturelle et s'écrit

$$t: S \rightarrow T$$

C'est une application d'un foncteur dans un autre.

Ces transformations naturelles se composent entre elles à leur tour (verticalement et horizontalement) pour donner naissance à des catégories bidimensionnelles (2-catégories) ou

multidimensionnelles.

Liée à la notion de foncteur, la notion de foncteur adjoint joue un rôle tout aussi important en théorie des catégories. C'est cette notion omniprésente qui fait comprendre que la théorie des catégories est essentiellement une description des "situations" mathématiques symétriques ou duales.

Soient A et B deux catégories et deux foncteurs

$$F: A \rightarrow B$$

$$G: B \rightarrow A$$

qu'on peut écrire

$$B \begin{array}{c} \xleftarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} A$$

il est possible de trouver une fonction qui assigne à chaque paire d'objets $a \in A$, $b \in B$ la bijection

$$\phi = \phi_{b,a} : A(Fb, a) \cong B(b, Ga)$$

ou de façon équivalente pour les morphismes

$$\phi = \phi_{B,A} : \text{hom}_A(FB, A) \cong \text{hom}_B(B, GA)$$

pour ϕ une transformation naturelle; F est appelé adjoint à droite pour G et G adjoint à gauche pour F . Une "adjonction" est donc un triplet $\langle F, G, \phi \rangle \rightarrow A$ où \rightarrow est la flèche d'adjonction. Il existe plusieurs concepts équivalents à celui de foncteur adjoint, ceux de limite directe et limite inverse, ou d'extensions de Kan. Les extensions de Kan, en particulier, apparaissent comme un concept qui résume tous les autres concepts catégoriaux, selon MacLane. Une extension de Kan

se définit pour deux foncteurs

$$K: A \rightarrow B$$

$$T: A \rightarrow D$$

comme une paire $R, e: RK \rightarrow T$ qui consiste en un foncteur

$R \in D^B$ (D^B est la catégorie des foncteurs $S: B \rightarrow D$) et une

transformation naturelle $e: (D^K: D^B \rightarrow D^A) \rightarrow T \in D^A$. (L'extension de Kan est une extension à droite de T sur K ici.)

La transformation naturelle est une flèche universelle, *i.e.* si

$S: B \rightarrow A$ est un foncteur et a un objet de A , une flèche

universelle de a à S est une paire $\langle n, m \rangle$ qui consiste en

un objet r de B et une flèche $m: a \rightarrow S_n$ de A , telle

qu'à toute paire $\langle b, f \rangle$ pour b un objet de B et $f: a \rightarrow S_b$

une flèche de A , il y a une seule flèche $f': n \rightarrow b$ de D

telle que $Sf' \circ m = f$.

Il y a plusieurs autres concepts importants en théorie des catégories, ceux de monoïde (ensemble muni d'une opération de multiplication binaire) de monade, graphe, limites, colimites, produits et coproduits, etc., mais c'est l'utilisation fondationnelle de la théorie des catégories qui nous intéresse d'abord ici.

2. LA CATEGORIE DES CATEGORIES

Lawvere a d'abord proposé [3] une version catégorique de la théorie des ensembles dans un langage du premier ordre destinée à formaliser la catégorie des ensembles (comprenant

tous les ensembles et toutes les fonctions sur les ensembles). Cette traduction catégorique permet de recouvrer les constructions et les structures ensemblistes, *e.g.* ordinaux et cardinaux, injections, surjections et bijections, etc., l'ensemble des parties obtenu par une opération d'exponentiation. Mais cette version catégoriale du premier ordre ne suffit pas à définir la catégorie des ensembles, puisqu'on ne peut y construire que des sommes et produits finis, ce qui est évidemment insuffisant pour la théorie des ensembles [4]. Lawvere a tenté de remédier à cette déficience en proposant comme cadre conceptuel la catégorie de toutes les catégories [5] en accord avec l'appétit des grandes totalités, bien connu en théorie des catégories. Les grandes catégories sont, par exemple, la catégorie des ensembles, la catégorie des groupes, la catégorie des espaces topologiques, etc. La catégorie des catégories a pour objets les catégories elles-mêmes et pour morphismes les foncteurs entre les catégories. Mais ce ne sont pas toutes les catégories qui sont objets de la catégorie des catégories; la catégorie des ensembles, par exemple, est une "métacatégorie" qui, bien qu'elle soit une sous-catégorie de la catégorie de toutes les catégories, n'en est pas un objet. Dans ce langage, on peut avoir les sommes et produits infinis, mais la structure supplémentaire est un lourd appareil à porter. Par exemple, que devient la catégorie de tous les foncteurs entre les caté-

gories? Il ne semble pas que la catégorie de toutes les catégories soit une construction plus heureuse que l'ensemble de tous les ensembles. Quoi qu'il en soit, on verra plus loin comment les grands ensembles que sont les grandes catégories peuvent être récupérés pour la structure cumulative des rangs de la théorie des ensembles. Lawvere a proposé plus récemment une interprétation de la théorie des ensembles dans la théorie des topoi.

Les visées fondationnelles des catégoristes sont nettement structurelles: il s'agit d'interpréter ou de traduire la théorie des ensembles et l'ensemble des mathématiques en langage catégorique jugé mieux apte à représenter les structures communes des théories mathématiques, leurs propriétés universelles. Véritable algèbre universelle, la théorie des catégories se voit maintenant relayée par la théorie des topoi ou "topos" pour traduire ou interpréter la logique et les mathématiques structurellement (par l'union des langages catégorique et géométrico-algébrique).

Les défenseurs de la théorie des topoi [6], et ils sont de plus en plus nombreux, y voient une concrétisation, une géométrisation de la logique (il serait peut-être plus juste de parler de "topologisation"). Je veux montrer ici que l'approche géométrique de la logique aboutit à une approche logique de la géométrie; en d'autres mots, que la géométrisation ou la to-

pologisation ou encore l'algébricisation de la logique est équivalente à la "logicisation" de la géométrie, de la topologie ou de l'algèbre.

C'est Lawvere qui s'est fait le principal avocat de l'approche géométrique ou "toposique" de la logique. Lawvere avait proposé le schème fondationnel de la catégorie de toutes les catégories et Feferman [7], inspiré par Kreisel, avait pu montrer que la théorie des catégories pouvait être adéquatément formalisée dans la théorie des ensembles Z-F (avec axiome de choix et cardinal inaccessible) enrichie d'un principe de réflexion pour les petites catégories \underline{s} (dont les objets sont des ensembles).

$$x_1 \in \underline{s} \dots x_n \in \underline{s} [\psi(\underline{s})(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)]$$

Isbell [8] a pu alors parler d'une théorie des ensembles "catégorique". MacLane [9] lui-même, après avoir proposé plusieurs schèmes fondationnels, s'est finalement rallié à l'idée que la théorie des catégories était formalisable dans la structure cumulative des rangs

$$V_0 = \phi$$

$$V_{\alpha+1} = V_{\alpha} \cup P(V_{\alpha})$$

$$V_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}$$

si on consent à utiliser un niveau suffisamment élevé dans la hiérarchie. Grothendieck a aussi un schéma spécial, l'axiome des univers. "Pour tout ensemble x , il y a un univers U

tel que $x \in U$." Mais cet axiome étant équivalent à l'axiome des cardinaux inaccessibles [10], il n'est pas difficile de voir qu'on peut avoir une axiomatisation ensembliste en prenant pour ordinal limite le premier cardinal inaccessible et en appliquant le principe de réflexion

$$\forall \alpha \exists \beta \text{ ordinal limite } \beta > \alpha \forall x_1 \dots \forall x_k \\ [x_1 \in V_\beta \wedge \dots \wedge x_k \in V_\beta \rightarrow \phi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \\ \phi^{V_\beta}(x_1, \dots, x_k)]$$

Plus récemment, R. Street a formulé l'idée de "kosmoi" qui sont des 2-catégories ou catégories bidimensionnelles (catégories avec deux sortes de composition des flèches). On peut imaginer ainsi des catégories multidimensionnelles, mais encore ici un principe de réflexion suffisamment fort peut, semble-t-il, incorporer ces "kosmoi" à la structure cumulative des rangs.

Il apparaît donc que l'ambition des catégoristes de substituer la théorie des catégories à la théorie des ensembles comme système fondationnel pour l'ensemble des mathématiques connaisse un temps d'arrêt. Cependant, l'effort des catégoristes s'est porté depuis quelque temps sur la logique.

Lawvere et d'autres Tierney, Freyd, Volger, Reyes, Joyal, Bénabou pour ne nommer que les plus importants veulent penser la logique dans un cadre toposique. D'abord, Lawvere a suggéré l'idée dans "Adjointness in Foundations" [11] que les foncteurs adjoints pourraient être considérés comme le concept

universel qui unifie ce qu'il appelle les aspects formel et conceptuel des mathématiques, la logique constituant l'aspect formel et l'algèbre ou les structures mathématiques générales formant l'aspect conceptuel. Pour les fondements, la théorie des catégories représenterait l'aspect conceptuel. Les foncteurs adjoints, ou d'une façon équivalente les extensions de Kan, sont des "descripteurs" des "situations" symétriques en mathématiques comme on l'a vu dans la première partie de ce chapitre. Les adjonctions sont une généralisation de la notion primitive d'inverse. Les concepts de sous-catégorie réflexive A et de réflecteur adjoint $F: B \rightarrow A$ au foncteur d'inclusion $K: A \rightarrow B$ pour deux catégories A et B qui donnent l'adjonction

$$\langle F, K, \phi \rangle = \langle F, \phi \rangle : B \dashrightarrow A ,$$

qu'on peut appeler réflexion de B dans sa sous-catégorie A , suggèrent encore que l'adjonction se prête aisément à un traitement dans la structure cumulative des rangs où l'axiome de remplacement qui permet d'obtenir les adjonctions par les images des objets du domaine de la fonction (par scissiparité, dédoublement ou jeux de miroir) est conçu comme conséquence d'un principe de réflexion universelle

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \exists \beta \text{ ordinal limite } \beta > \alpha \wedge \alpha, \beta \in V \\ & \forall X [\{X \in V_\beta \rightarrow \phi(x) \leftrightarrow \phi^{V\beta}(X)\} \rightarrow \{\forall x \exists R^\beta(X)\} \rightarrow \\ & \{\forall X \forall w (\forall x \in w \exists y X(x,y))\} \rightarrow \exists z \forall u \{u \in z \leftrightarrow \exists t (t \in w \wedge X(t,u))\} \end{aligned}$$

$$((\forall c \in C \wedge \forall d \in D \exists F: D \rightarrow C \wedge \exists K: C \rightarrow D) \rightarrow$$

$$\phi = \phi_{D,C} : \text{hom}_D(KC, D) \simeq \text{hom}_C(C, FD))]$$

où X et Y sont des variables du second ordre, C, D des catégories et F et K des foncteurs et R un prédicat. Intuitivement donc, l'adjonction semble expressible en théorie des ensembles - Lawvere a montré en effet que l'axiome de compréhension (du second ordre ou le schéma du premier ordre) pouvait être considéré comme un foncteur adjoint, mais l'axiome (ou le schéma au premier ordre) de compréhension est une conséquence de l'axiome de remplacement qui, accompagné d'un axiome d'infini, est équivalent au principe de réflexion que j'ai énoncé.

3. LA NOTION DE TOPOS EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Passons maintenant à la théorie des topoi et essayons d'en dégager le contenu structurel avant d'en mesurer l'impact logique. La notion de topos est apparue d'abord dans les travaux de A. Grothendieck et J. L. Verdier en géométrie algébrique. Un topos ou un U -topos (défini dans un univers donné U) est une catégorie E telle qu'il existe un site $C \in U$ pour lequel E est équivalente à la catégorie C^{\vee} des faisceaux d'ensembles sur C [12].

Essayons maintenant "d'expliquer" cette définition:

a) un site est une catégorie munie d'une topologie (*i.e.*

l'ensemble de tous les sous-ensembles ouverts de l'es-

pace topologique sous-jacent).

- b) les faisceaux constituent une sous-catégorie de la catégorie des préfaisceaux qu'on définit comme la catégorie \hat{C} des foncteurs contravariants sur C à valeurs dans la catégorie des ensembles.
- c) pour définir les foncteurs contravariants, on se donne une catégorie C^* duale ou opposée à C avec les mêmes objets et les mêmes flèches, mais en direction opposée (on a $f^*: b \rightarrow a$ dans C^* pour $f: a \rightarrow b$ dans C); un foncteur $S: C^* \rightarrow B$ est un foncteur contravariant (noté \bar{S}), s'il assigne à chaque objet c de C (la catégorie originale) un objet $\bar{S}c$ de B et à chaque flèche $f: a \rightarrow b$ une flèche $\bar{S}f: \bar{S}b \rightarrow \bar{S}a$ (dans la direction opposée) de telle sorte que

$$\bar{S}(1_c) = 1_{\bar{S}c}$$

et

$$\bar{S}(fg) = (\bar{S}g)(\bar{S}f)$$

pour le composé fg dans C .

- d) on obtient les faisceaux des préfaisceaux en ayant

$$\text{Hom}_{\hat{C}}(X, F) \leftrightarrow \text{Hom}_{\hat{C}}(R, F)$$

où X est un objet de C (le site original), F un préfaisceau et R un crible.

- e) un crible est défini pour une catégorie C comme une sous-catégorie D , possédant la propriété suivante:

$$\forall x \in C \exists y \in D \exists f(f: x \rightarrow y \ni x \in D)$$

Si l'on a X comme objet de C , on peut associer bijectivement à tout crible de X un sous-objet x de X dans C

$$x \in X_{C^{\wedge}} \leftrightarrow \text{cribles de } X_{C^{\wedge}}$$

On voit que la notion de topos est un enrichissement ou une généralisation, comme dit Grothendieck, des notions de topologie et d'espace topologique (une topologie équivaut à la donnée d'un ensemble de cribles pour tout objet X d'une catégorie C). En particulier, la condition de cohérence ou de finitude exige que les limites projectives finies [ou limites inverses obtenues par le foncteur diagonal $(\Delta: C \rightarrow C^J$ pour deux catégories C, J : la limite pour le foncteur $F: J \rightarrow C$ est une flèche universelle $\langle r, u \rangle$ de Δ à F où r est un objet de C appelé objet limite ou limite projective ou limite inverse] soient représentables dans un topos E correspond à la condition que a) E soit équivalent à la catégorie des faisceaux \tilde{C} (d'une catégorie C), b) que les produits fibrés soient représentables et c) que tout objet de C soit quasi compact (tout recouvrement qui admette un sous-recouvrement fini - un recouvrement d'un ensemble S étant une famille d'ensembles telle que chaque point de S appartienne à au moins un des ensembles de la famille).

P. Deligne a démontré qu'un topos localement cohérent

satisfaisait aux propriétés qu'on vient de définir contient suffisamment de points [13].

4. LA NOTION DE TOPOS LOGIQUE

Ces notions ont évidemment un intérêt topologique et algébrique; elles semblent avoir aussi un intérêt logique. Puisqu'un topos E est équivalent à la catégorie des faisceaux \tilde{C} sur un (petit) site, il était facile d'extraire les topoi de leur contexte topologique pour les plonger dans un cadre logique. C'est ce qu'ont fait Lawvere et Tierney [14] et plusieurs autres à leur suite. Ils ont défini un topos élémentaire comme une catégorie C qui a

- a) des limites et colimites finies,
- b) une fermeture cartésienne (ces deux conditions signifient que l'on a un objet initial et un objet terminal et des objets-produits),
- c) un classificateur de sous-objets T et
- d) une flèche universelle $1 \dashv \omega \dashv \omega$ (pour l'axiome d'infinité et le postulat d'induction). Le classificateur de sous-objets signifie que pour tout sous-objet, il y a une application "vrai" $1 \rightarrow V$ telle que tout sous-objet x est un produit sur T par une application unique

$$x \rightarrow V$$

Sans aller dans le détail de l'article de Lawvere

"Quantifiers and Sheaves" [15] ou de l'exposé de Reyes "From Sheaves to Logic" [16], on peut se demander quelle est la teneur logique des topoi élémentaires. Y a-t-il une logique interne aux topoi ou la logique y est-elle injectée du dehors? A côté de conditions recouvrables par la théorie des catégories (e.g. ω comme objet universel), il y a des conditions qui exigent des constructions catégoriques spécifiques pour recréer l'homéomorphisme local qui rend le principe de localisation topologique pour les topoi [17]. Des conditions supplémentaires et débordant la géométrie sont encore requises pour obtenir la double négation, la disjonction, etc. qui permettent finalement d'arriver chez Lawvere à une reformulation simplifiée de la preuve de Cohen sur l'indépendance de l'hypothèse du continu. Ou si l'on préfère comme Reyes voir dans les topoi une géométrisation de la logique, on peut certainement considérer la logique comme topologique, géométrique ou algébrique ou encore ensembliste. Quelle mesure de structure géométrique y a-t-il, par exemple, en théorie des ensembles? On pourrait dire que la théorie descriptive des ensembles est structurellement géométrique et que le principe de réflexion, qui est à la source des axiomes forts d'infinité, est de nature essentiellement géométrique [18].

Quoi qu'il en soit, il semble qu'on doive distinguer entre aspects constructifs et aspects structuraux des fonde-

ments (Lawvere parle, comme on l'a vu, d'aspects conceptuels et d'aspects formels). Les principes de construction d'une théorie peuvent être constructifs ou structuraux, selon qu'on a une genèse effective pour les opérations définies ou non. Le fait par exemple que la logique des topoi (cohérents) soit intuitionniste signifie simplement que, par ses principes de construction, la théorie des topoi est une représentation structurale de la logique intuitionniste - la syntaxe logique des constructions peut toujours être dégagée de son armature structurelle.

J. Bénabou [19] a récemment exposé une théorie des catégories avec structures déductives où l'on a C une catégorie possédant les produits finis et un foncteur $R; C^* \rightarrow IP$ pour C^* la catégorie duale et IP , la catégorie des ensembles préordonnés et des fonctions croissantes. L'implication est interprétée comme étant la relation d'ordre \leq et le quantificateur universel comme une fonction d'évaluation V_x ; on a en plus une relation d'équivalence qui donne une théorie équationnelle.

On a donc encore ici un cadre différent, un langage "interne" qui permet de "plonger" encore plus radicalement la logique dans les catégories [20].

5. INTUITIONNISME ET THEORIE DES TOPOI*

La logique intuitionniste a été dotée récemment d'une interprétation (dans la sémantique classique) essentiellement chronologique *i.e.* en termes de suite temporelle ponctuelle (voir surtout (6)). L'interprétation topologique, par exemple (10), est cependant toujours vigoureuse (12). Des résultats nouveaux en théorie des topoi, entre autres (7) (11), suggèrent une interprétation "toposique" de la logique intuitionniste. Après avoir revu brièvement l'essentiel de l'interprétation topologique, j'examinerai la thèse de certains catégoristes, comme Lawvere, Joyal, Reyes (11) et MacLane, selon laquelle la logique des topoi est intrinsèquement intuitionniste et ne relève pas d'une construction syntaxique (ou linguistique)(18). Je terminerai en suggérant une interprétation "spatiale" pour la logique intuitionniste comme syntaxe des théories mathématiques locales.

1. L'interprétation topologique traditionnelle de la logique intuitionniste.

Scott dans (12) a donné une version éclairante de l'interprétation topologique: soit T un espace topologique, X et Y deux de ses sous-ensembles ouverts et t un point appartenant à T , alors $t \in U \subset T$ signifiera que U est un

*Texte présenté au 5e Congrès de logique, méthodologie et philosophie des sciences tenu à London (Ontario), du 26 août au 2 septembre 1975.

voisinage ouvert de t (t est donc un point intérieur de U). Par exemple, U sera une "preuve" que $t \in (X \cap Y)$, ssi $U \subset X \cap Y$ et une preuve que $t \in (X \rightarrow Y) = \text{In}((T \sim X) \cup Y)$, où $(T \sim X)$ est le complément de l'ensemble X et In l'ensemble des points intérieurs, ssi pour une preuve U' que $t \in X$, on a une méthode U qui produise une preuve que $t \in Y$. Mais cette version de Scott est plutôt une interprétation intuitionniste des ouverts d'un espace topologique qu'une interprétation topologique de la logique intuitionniste!

Rasiowa et Sikorski (10) ont proposé une version qui utilise le treillis de tous les ouverts d'un espace topologique et le pseudo-complément relatif: ainsi pour trois sous-ensembles ouverts, A, B, C d'un espace topologique X , le pseudo-complément de A relatif à B correspond au plus grand ouvert C tel que $A \cap C \subset B$, ce qui s'exprime par $A \Rightarrow B = \text{In}((X - A) \cup B)$. Nous avons là une algèbre pseudo-booléenne ou une algèbre de Heyting. D'un point de vue mathématique, il est évident que c'est la double négation qui caractérise l'algèbre de Boole, alors qu'elle est absente de l'algèbre de Heyting. La négation équivaut pour un espace topologique au pseudo-complément ou encore au plus grand ouvert disjoint d'un ouvert donné [$(X - A)$ est le plus grand ouvert disjoint de A , ce qui donne $A \Rightarrow B$ qui équivaut à l'implication $A \rightarrow B$]. En d'autres mots, le complément au sens topologique est relatif (ou

local), d'où isomorphie avec la négation intuitionniste qui est essentiellement de caractère *local* (ou, ce qui est la même chose, relatif). De là, l'exclusion du tiers exclu et la plupart des principes *itératifs* de l'intuitionnisme, déploiements, suite irrégulière (lawless), bar-induction, théorème de l'éventail, etc.

2. La théorie des topoi et la logique intuitionniste.

Dans le contexte que nous avons évoqué plus haut, la découverte que la théorie des topoi, issue de la théorie des catégories (ou algèbre homologique) et de la géométrie algébrique, obéissait à une logique intuitionniste ne constitue pas une surprise contrairement à ce qu'ont pensé la plupart des chercheurs (en théorie des catégories). La généralisation introduite en géométrie algébrique et géométrie analytique par l'utilisation de la théorie des faisceaux (13) (14) relativement, à mon sens, la nouveauté de la notion de topos de Grothendieck-Verdier (2). Pour Grothendieck, la notion de topos est essentiellement une généralisation de la notion d'espace topologique: si l'on se rappelle qu'un topos est équivalent à la catégorie C des faisceaux sur un petit site et que les préfaisceaux (ou foncteurs contravariants) et faisceaux (obtenus des préfaisceaux par la bijection $\text{Hom}_{C^{\wedge}}(X, F) \leftrightarrow \text{Hom}_{C^{\wedge}}(R, F)$ pour F préfaisceaux, X un objet de C et R crible ou sous-objet de X) sont définis sur les ouverts d'un espace

topologique (4), on ne doit pas se surprendre du fait que les topoi sont sujets à la même logique locale. Verdier (17) insiste d'ailleurs là-dessus: "Une relation de caractère local sur un site ou sur un topos définit un ouvert" (Exposé IV, p. 3). La théorie des faisceaux cohérents (14) et des topoi cohérents [2, vol. 2] accentue encore le caractère local des constructions toposiques. Pour fixer les idées, disons qu'un topos (au sens où il est utilisé par les catégoristes) est une catégorie possédant les limites et colimites finies, l'exponentiation et une application (appelée "classificateur") sur les sous-objets, "Vrai": $I \rightarrow \Omega$. (Pour les notions de théorie des catégories utilisées ici, voir (8)). Ce n'est que dans le cas où les sous-objets du topos sont considérés comme correspondant aux ouverts d'un espace topologique [2, vol. 2, p. 330] que le topos est dit topos de Heyting et dans le cas où l'on a la double négation équivalente à l'identité que l'on parle d'un topos booléen (7) (15) (11).

Pour les notions de prétopos et de topos (localement) cohérent que des logiciens commencent à utiliser (9), elles sont dues essentiellement à Grothendieck et il n'est pas difficile d'en dégager l'"esprit" local. Informellement, un topos cohérent correspond à la catégorie des faisceaux d'ensembles \mathcal{C}^{\sim} pour \mathcal{C} petit site (catégorie munie d'une topologie) dans lequel les limites projectives finies sont représentables et où

toute famille couvrante admet une sous-famille couvrante finie (quasi-compacité) et pour un topos localement cohérent on aura en plus la condition que les produits fibrés (pullbacks) soient représentables. La topologie induite par les familles couvrantes "recouvre" essentiellement la structure d'espace topologique et ainsi la logique du local par le passage aux cribles ou sous-objets d'un objet X dans la catégorie \hat{C} des préfaisceaux d'une catégorie C (les cribles sont donc en bijection avec les ouverts d'un espace topologique) [Voir là-dessus (2) exposé VI, appendice, pour la preuve de P. Deligne sur le nombre suffisant de points d'un topos localement cohérent, ce qui équivaut à une condition suffisante d'isomorphie entre un espace topologique et un topos]. Nous ne nous attarderons pas sur les autres notions de site, espace étale (ou étalé), etc., qui participent tous de la constructibilité locale; nous voulons plutôt tirer des conclusions d'ordre général sur le sens à donner à la logique "locale". Remarquons qu'en physique quantique, la théorie axiomatique des champs constitue elle aussi une théorie locale, puisque la notion de champ est considérée à juste titre comme une notion locale ou principe de localité (5).

3. Logique intuitionniste et théories locales.

Nous envisageons, à la fin, la logique intuitionniste et l'intuitionnisme en général comme une théorie des "locali-

tés", en analogie avec la théorie des multiplicités de longue mémoire. Les principes intuitionnistes "radicalisés" pourraient donner, selon nous, une théorie globale du local. Commençons par la logique intuitionniste: l'interprétation spatiale n'est pas à proprement parler un modèle, mais le sens même des opérations logiques, leur modèle principal, si l'on veut. Pour Σ , sujets mathématiques, A , assertions finies, D , domaines finis et H , l'horizon mathématique, nous avons

$$(\bigwedge \Sigma \bigwedge A \bigvee H \vdash_D A \subset H) \wedge \neg(\bigwedge \Sigma \bigvee A \bigvee H \vdash_D A \supset H)$$

Cette axiomatisation de la notion d'horizon dans l'esprit de l'axiomatisation du sujet créateur proposée par Kreisel permet de mieux comprendre le sens de l'interprétation "spatiale" et d'éviter certains écueils de l'interprétation "temporelle" [16, dernier chapitre]. Informellement, l'axiome énonce que l'horizon est inaccessible, quoique toujours présent. Si je peux affirmer A , c'est que A est accessible dans un domaine fini donné D_1 , et si je peux affirmer $\neg A$, c'est que l'accessibilité de A dans D_1 est impossible (donc la négation a toujours un caractère local); j'ai $A \wedge B$, s'ils sont tous deux accessibles dans D_1 ou dans $D_1 \cap D_2$, et j'ai $A \vee B$, si l'un ou l'autre est accessible dans D_1 ou dans $D_1 \cup D_2$; $A \rightarrow B$ signifie que l'accessibilité de B dans D_1 découle de l'accessibilité de A , *i.e.* l'accès de B est lié spatiale-

ment à l'accès de A ou en termes de domaines, l'accès au domaine D_1 de A suppose ou implique l'accès au domaine D_2 de B , $\forall xA$ signifie que j'ai eu accès à au moins une instance de A dans un domaine D_1 et $\wedge xA$ signifie que j'ai fait le tour de toutes les instances de A dans le domaine D_1 .

Revenons à la négation: je peux poser $\neg A$ dans un domaine D_1 sans pour cela présupposer que A est absurde dans tous les domaines D_n , donc la négation $\neg A$ est locale, puisqu'elle n'engage pas tous les domaines $D_2 \dots D_n$. Prenons D pour la totalité des domaines: la négation non locale de A entraînerait le tiers exclu. L'interprétation temporelle de Kripke [6, p. 98] ne rend pas le sens intuitionniste de la négation, simplement parce qu'elle comporte le tiers exclu via l'assertion et la négation non locales (ou globales) dans le modèle. Dans notre interprétation, les assertions ou les négations "globales" (sur D) conservent itérativement leur caractère local.

Nous avons développé ailleurs (3) certaines des idées évoquées ici: *e.g.* les notions de stase ou construction positionnelle, domaine effini, *i.e.* hors du fini, etc. et nous les avons appliquées à une critique fondationnelle de la théorie des ensembles et de l'intuitionnisme. L'application de ces principes à la physique, théorie de la relativité et mécanique quantique - qui n'obéit peut-être pas à la logique classique

comme l'ont suggéré plusieurs - pourrait s'avérer fondationnellement intéressant. La logique est affaire de langage. Elle n'est pas d'abord topologique ou géométrique. Mais la syntaxe de notre parole est peut-être isomorphe à l'espace de notre vision, constructions d'un même agent.

6. CRITIQUE DE LA THEORIE DES CATEGORIES ET DE LA THEORIE DES TOPOI

La logique est évidemment syntaxique, grammaire de mots ou de symboles, d'objets, d'opérations ou de constructions de toutes sortes. Une représentation (au sens de la théorie des groupes) ou un modèle d'un système syntaxique peut avoir une variété de contextes structurels, algébrique, catégorique ou topologique. Un contexte structurel peut être plus riche et plus fécond qu'un autre, *e.g.* le contexte catégorique vis-à-vis le contexte des algèbres cylindriques ou polyadiques. Il ne fait pas de doute que l'approche toposique est capable de produire de meilleures formulations, si ce n'est de nouveaux résultats. Mais il serait naïf de croire, comme Freyd [21], par exemple, que puisque la logique interne des topoi est intuitionniste, il y a un transfert naturel des constructions "subtoposiques" à la logique intuitionniste du second ordre; il existe déjà des preuves de complétude pour la logique intuitionniste du premier ordre qui ont été couchées en langage catégorique ou toposique, mais ce sont des preuves classiques qui

ne correspondent pas à l'interprétation (ou à l'intention) intuitionniste. Kreisel a déjà insisté sur la non-pertinence des interprétations fonctionnelles [22] pour les concepts intentionnels de l'intuitionnisme et il me semble que cette critique touche aussi bien les interprétations fonctorielles. Trop de notions syntaxiques abstraites, *e.g.* les diverses notions de suites, parmi elles les "variétés" de suites de choix, ne semblent pas récupérables d'un point de vue purement structurel.

Je voudrais terminer par quelques remarques sur la dialectique maoïste que Lawvere invoque pour justifier l'approche concrète, duale, "contradictoire" des mathématiques. Le schème du matérialisme dialectique de Mao Tsé-Toung est davantage apparenté, selon moi, au balancement dyadique du yin et yang (ou du "ping" et "pong") qu'au procès dialectique de Hegel et Marx. Les écrits philosophiques du président Mao sont des notes sur les notes que Lénine avait prises en lisant la *Wissenschaft der Logik* ("Science de la logique" qui est en vérité une métaphysique ou une ontologie) de Hegel.

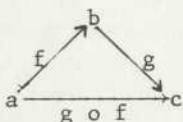
Que nous dit Mao à propos des mathématiques, quand il énonce, après Lénine, que l'addition et la soustraction sont contradictoires ou Lawvere, quand il affirme que les foncteurs adjoints sont les couples principaux d'opposés en mathématiques? Le mouvement dialectique des oppositions (gardons les contradictions en logique "classique") ne me semble pas rendre

compte des structures mathématiques d'une façon exhaustive. Le schème du matérialisme dialectique constitue une conception philosophique valable, mais n'apparaît pas être extrêmement fécond comme description de l'activité mathématique.

Pour moi, la dialectique est essentiellement une structure universelle du langage [23] qui a été hypostasiée et projetée sur le monde idéal (Hegel) ou le monde réel (Marx et ses successeurs). La dialectique n'est pas une structure objective de la réalité, mais un mode de construction de la réalité d'abord linguistique, puis conceptuel et enfin social (dans le sens de la transformation sociale). Le schème du matérialisme dialectique est donc réductible au schème du constructivisme linguistique; le matérialisme historique pourrait être récupéré ici, si l'on suppose que la construction sociale et historique du monde humain s'est effectuée par conflits, antagonismes ou oppositions dialectiques. On verra plus loin comme notre constructivisme est essentiellement matérialiste.

NOTES DU CHAPITRE IV

- [1] Nous suivons, à distance, le texte de S. MacLane, l'un des fondateurs avec S. Eilenberg, de la théorie des catégories, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (New York-Heidelberg-Berlin: 1971). Nous utilisons indifféremment les termes de flèche et morphisme pour la notion d'application (fonction) catégorique.
- [2] Le langage catégorique de la composition des morphismes se prête naturellement à une représentation par de tels diagrammes - un diagramme commute quand tous les triangles représentant la composition des morphismes - commutent. Les diagrammes sont des "compositions" de triangles de ce genre.



- [3] F. W. Lawvere, "An Elementary Theory of the Category of Sets", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 52: 1506-1511, 1964.
- [4] Voir là-dessus W. S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, W. B. Saunders (Philadelphia: 1968), chap. 8, en particulier, p. 314-315.
- [5] F. W. Lawvere, "The Category of Categories as a Foundation for Mathematics" in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, Springer (Berlin-Göttingen-Heidelberg: 1966), p. 1-20.
- [6] Texte traduit et remanié d'une conférence donnée en anglais à l'Université de Toronto en mars 1973 et intitulée "Logica geometrica sive geometria logica".
- [7] In *Reports of the Midwest Category Seminar III*, Lecture Notes in Mathematics 106, Springer-Verlag (Berlin-Heidel-

berg-New York: 1969), p. 201-247.

- [8] Compte rendu de Lawvere (voir note 1), *Math. Reviews*, 34: 1354-1355, 1967.
- [9] S. MacLane, "Categorical algebra and set-theoretic foundations" in *Axiomatic Set Theory*, Proceedings of the UCLA Conference, American Mathematical Society, (Providence, R.I.: 1971), p. 231-240. Voir aussi le compte rendu de G. Kreisel in *Math. Reviews*, 44: 6-7, 1972.
- [10] Voir M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, 2 tomes, Lecture Notes in Mathematics, nos 269-270, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1970), tome 269, p. 2-3.
- [11] F. W. Lawvere, "Adjointness in Foundations", *Dialectica*, vol. 23, no 3/4 (1969), p. 282-296.
- [12] Toutes les définitions sont adaptées de *Théorie des Topos et Cohomologie étale des schémas*, ouvr. cit., exposés I, II, IV, V et VI.
- [13] Voir note 12, tome 2, exposé VI, appendice p. 336-340 de *Cohomologie étale...*, ouvr. cit. La notion de topos cohérent est définie dans l'exposé VI du tome II, p. 165-198. Un certain nombre de concepts doivent être explicités ici. D'abord celui de représentation ou de représentabilité: nous avons des (petits) ensembles hom pour une catégorie C

$$\text{hom}_C(a,b) = \{\forall f: a \rightarrow b \text{ dans } C\}$$

i.e. toutes les flèches qui ont a pour domaine et b pour codomaine; une représentation d'un foncteur de cette catégorie dans la catégorie des ensembles est la donnée d'un objet $r \in D$ et d'une transformation naturelle isomorphe

$$\psi = D(r, -) \xrightarrow{\sim} K$$

où $D(r, -)$ est un foncteur hom covariant (pour - les

morphismes dans D). Un tel isomorphisme est à la base du lemme de Yoneda qui définit une bijection entre les transformations naturelles sur les flèches d'un objet de D et les images de l'identité sur cet objet. La notion de représentabilité d'un foncteur équivaut à celle de flèche universelle que nous avons déjà définie. Enfin un produit fibré ("pullback") est un produit sur un objet a qui est le codomaine commun de deux flèches $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} d$.

- [14] *Reports of the Midwest Category Seminar V*, Lecture Notes in Mathematics 95, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1971), p. 251-254. Voir aussi pour la notion de topos élémentaire, A. Kock et G. C. Wraith, *Elementary Toposes*, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (Aarhus, Denmark: 1971).
- [15] F. W. Lawvere, "Quantifiers and Sheaves" in *Actes Congrès Intern. Math.*, 1970, p. 329-334.
- [16] G. Reyes, "From Sheaves to Logic", à paraître.
- [17] A. Grothendieck et J. L. Verdier, "Topos", exposé IV in vol. I de *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (op. cit.)*, p. 301. Un homéomorphisme est une transformation topologique, *i.e.* une bijection continue entre les points de deux figures géométriques. Voir la section 5 de ce chapitre.
- [18] Voir F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer-Verlag (Berlin-Göttingen-Heidelberg: 1959).
- [19] Conférences données en avril 1973 à l'Université de Montréal. Je tiens à remercier M. Roch Ouellet qui m'a permis de consulter ses notes personnelles.
- [20] A. Joyal a travaillé, par exemple, sur les univers arithmétiques. Il a pu donner, par ailleurs, une version catégorique de la plupart des métathéorèmes de la logique du

premier ordre en internalisant la logique dans la théorie des catégories (communication personnelle). Il faut dire aussi que la recherche est en pleine ébullition de ce côté; Feferman a formulé récemment un nouveau système formel pour les catégories, alors que Lawvere veut introduire la notion d'ensemble variable qu'il oppose à la notion classique d'ensemble statique, mais le concept d'ensemble variable ne semble pas encore vraiment formulé.

- [21] Conférence à l'Université de Waterloo, Canada, du 10 février 1973. Si on croit pouvoir tout faire dans les topoi, c'est peut-être parce que l'ensemble des U-topoi (notation de Grothendieck) forme une "U-topie".
- [22] Voir, en particulier, G. Kreisel, "Perspectives in the Philosophy of Pure Mathematics", *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IV, ed. by P. Suppes et alii, North-Holland (Amsterdam: 1973), p. 255-277.
- [23] Voir là-dessus mon livre *L'Arc et le Cercle. L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin*, Bellarmin-Desclée de Brouwer (Montréal-Paris: 1969). On pourra comparer les idées de Lénine et de Mao Tsé-Toung et celles de Trotsky sur la dialectique *In Defense of Marxism*; qui s'inspire de l'*Anti-Dühring* d'Engels où l'interprétation réaliste-matérialiste s'exprime avec le plus de force naïve. Cette force est encore agissante aujourd'hui puisqu'elle sert de motivation à des entreprises comme celle de Lawvere, cf. "Continuously Variable Sets: Algebraic Geometry = Geometric Logic", à paraître.

7. SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) E. W. Beth, "Semantic Construction of Intuitionistic Logic" in *Medelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Deel 19, no 11.
- (2) M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Lecture Notes in Mathematics, vols. 269-270 (Springer: Verlin-Heidelberg-New York, 1971), tome 1, exposé IV, tome 2, exposé VI.
- (3) Voir chapitres 1 et 2.
- (4) R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- (5) R. Haag, "Quantum Field Theory" in *Mathematics of Contemporary Physics*, ed. by R. F. Streater (Academic Press: London and New York, 1972) p. 1-16.
- (6) S. Kripke, "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I" in *Formal Systems and Recursive Functions* Proceedings of the Eight Logic Colloquium, Oxford, July 1963, (North-Holland: Amsterdam, 1965) 92-130.
- (7) F. W. Lawvere, "Quantifiers and Sheaves" *Actes Congrès intern. math.* 1970, Tome 1, p. 329-334.
- (8) S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, (Springer: New York-Heidelberg-Berlin, 1971).
- (9) M. Makkai et G. E. Reyes, *Model-Theoretic Methods in the Theory of Topoi and Related Categories*, à paraître.
- (10) H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics* (Polska Akademia Nauk: Warszawa, 1963).
- (11) G. Reyes, *From Sheaves to Logic*, à paraître.
- (12) D. Scott, "Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis I" in *Composition Mathematica*, vol.

- 20 (1969), 194-210.
- (13) J. P. Serre, "Géométrie algébrique et géométrie analytique" *Ann. Inst. Fourier* 6 (1956), p. 1-42.
- (14) J. P. Serre, "Faisceaux algébriques cohérents" in *Annals of Mathematics*, vol. 61 (1955), 197-278, en particulier p. 207-208.
- (15) M. Tierney, "Sheaf Theory and the Continuum Hypothesis" in *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 274, Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- (16) R. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 95, (Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 1969).
- (17) J. L. Verdier, *Topologies et faisceaux*, Fasc. 1, Sémin. de géométrie algébrique 63-64, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris.
- (18) F. W. Lawvere "Continuously Variable Sets: Algebraic Geometry = Geometric Logic" à paraître.

Chapitre V

PROBLÈMES FONDATIONNELS DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Je voudrais m'en prendre, dans ce texte, au réalisme comme philosophie des mathématiques et je vais attaquer le problème par le biais de la théorie des nombres. Mon dessein est de proposer un schème fondationnel visant à expliquer les résultats fondamentaux de l'arithmétique et de l'analyse sans devoir recourir à une philosophie réaliste. C'est la philosophie (ou une de ses philosophies) des mathématiques de Hilary Putnam qui me servira de cible ou de prétexte philosophique.

1. QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES NOMBRES

(DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS)

Putnam a avancé la thèse qu'une ontologie réaliste pouvait s'allier à une épistémologie empiriste qui assimile les mathématiques à la physique théorique dans la mesure où toutes deux seraient régies par le raisonnement hypothético-déductif et la confirmation inductive d'hypothèses fondamentales. Par

exemple, il serait légitime, d'après Putnam, de tenir pour vrais le dernier théorème de Fermat et la conjecture de Goldbach, parce que ces hypothèses ont été mises à l'épreuve suffisamment pour emporter notre adhésion - le dernier théorème de Fermat énonce qu'il est impossible de trouver un entier naturel avec un exposant plus grand que deux qui soit la somme de deux autres entiers naturels avec le même exposant, *i.e.*

$$\forall n > 2 \forall x \forall y \forall z (x^n + y^n \neq z^n)$$

e.g. un cube ne peut être la somme de deux cubes, etc. et la conjecture de Goldbach dit que tout nombre pair à partir du nombre six peut être représenté comme la somme de deux nombres premiers autres que deux. Si on veut aller un peu plus loin, on peut remarquer que, dans le cas de la conjecture de Goldbach, on a résolu des problèmes apparentés "Tout nombre impair suffisamment grand est représentable comme la somme de trois nombres premiers impairs" et "Presque tous les nombres pairs sont représentables comme la somme de deux nombres premiers impairs" [1]. Allons encore un peu plus loin: un théorème important de Dirichlet énonce que si a et b sont relativement premiers (*i.e.* s'ils n'ont pas de commun dénominateur, sauf 1), il y a une infinité de nombres premiers de la forme $ax + b$, *i.e.* dans toute progression arithmétique. La preuve de Dirichlet comportait des méthodes analytiques (fonctions L ou fonctions holomorphes de l'analyse complexe, séries et limites in-

finies, etc.), mais Selberg, et d'autres après lui, a pu en donner une preuve élémentaire ou constructive, c'est-à-dire une preuve qui n'utilise que des propriétés arithmétiques, *e.g.* approximations au lieu de limites (les méthodes analytiques sont dites transcendantales, les méthodes constructives "élémentaires").

Avant de tirer quelque leçon philosophique de ces résultats en théorie des nombres, je voudrais indiquer deux problèmes pour lesquels on n'a pas encore l'ombre d'une solution.

Conjecture no 1. Il y a une infinité de nombres premiers de la forme $x^2 + 1$, *e.g.* 2, 5, 17, 37, 101 ...

Conjecture no 2. Il y a une infinité de couples premiers (3, 5), (5, 7), (11, 13) ...

(La liste des problèmes non résolus en théorie des nombres ne comprend pas moins de 250 items, selon H. Hasse). Notons que les problèmes, résolus ou non, que j'ai évoqués jusqu'ici, sont tous reliés à la notion d'infini. J'aurais pu mentionner aussi la preuve d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers ou la preuve constructive du théorème sur les nombres premiers par Selberg et Erdős - le théorème sur les nombres premiers dit que le rapport du nombre de nombres premiers dans un grand ensemble x à $x / \log x$ tend vers la limite 1 lorsque x tend vers l'infini; en bref

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1$$

2. LA NOTION D'EFFINI

Je voudrais maintenant essayer de dégager la signification qu'ont ces résultats pour les fondements des mathématiques (notons que tous les résultats mentionnés, à part des résultats sur la conjecture de Goldbach, ont une démonstration constructive).

Mon approche se résume ainsi: l'infini de la théorie des nombres ne réfère pas à un infini actuel, un ensemble infini ou une totalité close; il ne réfère pas non plus à un infini potentiel qui est, à mon sens, un concept essentiellement ambigu (dans la mesure où potentialité suppose presque toujours l'acte ou l'actualité dans son sens aristotélicien, le concept n'a qu'un contenu chronologique). L'idée que connote le mot infini en théorie des nombres est l'idée d'un procès, procès qui produit la série des nombres selon une règle spécifiée par le concept de nombre et la forme de sa définition. J'appelle fini un procès qui a des bornes déterminées prépositionnellement et postpositionnellement (j'exclus les bornes infinies); un procès effini est un procès qui n'a pas de bornes postpositionnelles déterminées et c'est là le seul concept vraiment négatif ("effini" de "ex-finitus"), de non-fini, au-delà du fini, hors du fini, que les mathématiques peuvent utiliser.

Un procès effini est donc un procès qu'une performance finie avec états initiaux et terminaux ne peut épuiser. Ce concept de procès n'est pas réductible à une machine de Turing, même sans état final, ou à tout autre caractérisation des fonctions récursives). Dans ce contexte, la thèse de Church qui affirme que toute fonction calculable est récursive devient problématique. Kreisel [2] a donné un exemple d'une fonction constructive qui n'est pas mécaniquement calculable ou computable dans le cadre de l'arithmétique de Heyting (qui est valide du point de vue constructif), où p_n représente une preuve constructive d'une dérivation formelle n (avec nombre de Gödel).

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ n'est pas une dérivation d'une formule} \\ & \text{close quelconque de la forme } \exists xA \\ 0, & \text{si } p_n \text{ ne fournit pas une instance numérique} \\ & \text{spécifique qui satisfasse } A, \text{ e.g. } \exists xA \text{ a été} \\ & \text{dédduit de } \forall xA. \\ x + 1, & \text{si } x \text{ est le nombre vérifiant } A \text{ fourni} \\ & \text{par } p_n. \end{cases}$$

La contrepartie mécanique de cette fonction serait

$$f'_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ n'est pas une dérivation d'une formule} \\ & \text{close quelconque } \exists xA \text{ (dans l'arithmétique de} \\ & \text{Heyting)} \\ x + 1 & \text{autrement, pour } x \text{ comme argument de } A \\ & \text{dans la plus courte dérivation (la dérivation} \\ & \text{normale) d'une formule de la forme } Ax. \end{cases}$$

Même si cet exemple n'est pas totalement concluant, il indique

au moins qu'on peut songer à définir des fonctions constructives qui ne sont pas récursives. Il faut se demander aussi si la notion de récursivité n'est pas intensionnelle en dernière analyse.

Je voudrais donner une caractérisation plus abstraite de la notion de procès qui permette d'introduire des opérations intensionnelles. J'appelle *stase* l'équivalent intensionnel d'état. Un procès fini ou effini, avec ou sans bornes positionnelles (voir les définitions plus haut), est toute opération intellectuelle (mentale ou linguistique) qui s'effectue sur une ou plusieurs stases et dont le résultat peut être numérique (ou calculable) ou non. Un procès sans bornes est un procès effini, comme nous l'avons vu, il ne peut être calculable dans sa totalité et ne peut être conçu comme ensemble. Seules les multiplicités finies peuvent être conçues comme ensembles, totalités ou unités comprenant tous leurs membres. Il est possible de quantifier un procès effini, mais non de le totaliser; je veux dire qu'on peut parler de tous les nombres naturels pour signifier qu'il y en a effinement, mais on ne peut former l'ensemble de tous les nombres naturels, en faire un tout puisque cela signifierait qu'un procès sans bornes est terminé ou qu'on a épuisé un procès inépuisable. Pour moi donc, lorsque "tous" s'applique à une multiplicité "non finie", cela signifie un procès expansif et non un ensemble ou un tout

(j'ai montré ailleurs comme le quantificateur universel peut faire naître l'idée de multiplicités infinies comme ensembles ou totalités achevées - même la notion intuitionniste d'espèce doit être modifiée ici).

3. LA NOTION DE STASE

Ce cadre conceptuel serait, à mon avis, suffisant pour rendre compte des méthodes non analytiques en théorie des nombres. Supposons, cependant, que certains résultats analytiques n'aient pas de contrepartie constructive (e.g. les résultats de Vinogradov sur la conjecture de Goldbach). Comment pouvons-nous rendre compte de tels résultats? Prenons l'exemple simple de la définition de la continuité: nous avons X et Y , deux espaces métriques, $E \subset X$, $p \in E$ et $f: E \rightarrow Y$: nous disons que f est continue au point p si

$$\forall \epsilon \in E \forall e > 0 \exists \delta > 0 [(d_X(x, p) < \delta) \rightarrow (d_Y(f(x), f(p)) < e)]$$

ou e et δ sont deux nombres réels positifs (en intuitionnisme et en mathématiques constructives en général on peut remplacer les réels par des expressions rationnelles). L'analyse réelle et complexe, les propriétés de continuité, de continuité uniforme, d'analyticité, etc. semblent requérir des multiplicités infinies (non dénombrables) et d'ensembles infinis de nombres (cardinaux transfinis, 2^{\aleph_0} , $2^{2^{\aleph_0}}$...). Mon point de vue ici est de nouveau l'"effini". Comme plus haut, supposons

une stase et un procès sur cette stase, *e.g.* la suite des nombres naturels; on peut alors engendrer d'autres stases par des opérations définies (remarquons qu'une stase peut être le produit d'un procès). Un procès défini sur une stase elle-même engendrée par une ou plusieurs opérations définies est une métastase; ainsi une fonction continue est une métastase, une fonctionnelle continue une stase de troisième niveau, etc. [un autre exemple: la notion (non constructive) de cardinal mesurable requiert une stase de troisième niveau]. A la limite, on pourrait dire que l'ensemble des mathématiques repose sur "rien", l'ensemble nul ϕ , et sur deux opérations sur ce "rien", P , l'ensemble des parties et S , la fonction de successeur ou l'union. Mais le problème est de définir l'itération "effinie" de ces opérations, si on refuse de penser la limite comme une origine, *i.e.*, nouveau point de départ pour la limite d'un procès.

Quelles sont les différences entre cette façon de voir et l'interprétation classique? L'approche classique admet l'existence de propriétés ou de sous-ensembles arbitraires d'un ensemble infini donné. Dans ma perspective, il n'y a aucun besoin de postuler l'existence d'ensembles infinis achevés ou de propriétés universelles. Au contraire, on suppose que toutes les constructions sont incomplètes. Seuls les ensembles finis et les propriétés locales peuvent être considérés comme des

constructions complètes, leurs analogues infinis et universels étant relégués au royaume des structures idéales.

Quelles relations peut-on établir entre cette approche et la théorie des nombres ou la théorie des ensembles du second ordre? La logique du second ordre introduit la quantification sur les symboles de prédicats ou les symboles de fonctions et suppose que l'ensemble des parties d'un ensemble infini est un ensemble bien formé: nous avons le postulat d'induction du second ordre pour la théorie des nombres

$$\forall X(X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow XSy) \rightarrow \forall yXy)$$

ou l'axiome de compréhension du second ordre pour la théorie des ensembles

$$\forall a \forall X \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow (y \in a \wedge X(y))]$$

Est-il nécessaire de postuler l'existence de tels ensembles? On peut certainement admettre des sous-ensembles ou des parties d'un procès infini - que ce soit l'induction ou la compréhension - mais nous n'avons certainement pas besoin de toutes les "instances" de nos constructions, parce que nous n'avons qu'un nombre fini de stipulations ou de directions pour nos constructions, ce qui suffit pour les uniformiser. Les théories hiérarchiques de types, rangs ou niveaux sont en réalité des théories intensionnelles sous un déguisement extensionnel: parce qu'elles supposent des objets primitifs, plutôt que des opérations primitives, elles sont obligées d'étendre le

champ des objets plutôt que de multiplier les opérations, ce qui donne un réalisme sursaturé et sans fondement.

4. CONCEPTS CONSTRUITS OU CONSTRUCTIFS ET CONCEPTS STRUCTURES OU STRUCTURELS

Il est temps de tirer des conclusions philosophiques de notre analyse de quelques concepts mathématiques. L'analyse conceptuelle a toujours eu la tâche de critiquer les concepts ou bien du point de vue du sens commun, de celui de l'analyse linguistique ou, plus généralement, du point de vue d'un schème philosophique plus ou moins explicite. Personnellement, j'adopte le point de vue constructiviste, qui tend vers l'explicitation totale. Dans cette perspective constructiviste, les concepts sont ou bien construits (ou constructifs) ou bien structurés (ou structurels). Un concept construit est finiment intégré, *i.e.*, il réfère à une expérience intellectuelle "performée" un concept structuré est finiment dérivable de constructions élémentaires [3]. Ce qui revient à dire que ce n'est pas toute notre expérience qui est construite, les parties qui en constituent la ou les structures peuvent être retracées à des constructions passées dans l'histoire intellectuelle de l'homme, qu'elle soit consciente ou non (mais toujours conservée dans le langage). Ici, l'expérience *tout court* serait dépourvue de sens.

Les concepts sont "absolus par construction", s'ils

réfèrent à l'expérience intellectuelle intuitive et évidentielle, "absolus par complétion", s'ils visent plutôt l'expérience possible ou la complétion possible de l'expérience réelle. Les concepts "absolus par complétion" ne sont pas construits, mais plutôt structurés à partir d'autres concepts (la plupart des concepts-clés de la tradition philosophique - aussi bien que de la tradition mathématique - tombent dans cette catégorie, *e.g.*, l'absolu, l'être, le monde, l'infini, etc.) [à rapprocher des "idées" de la raison chez Kant].

Quel est le lien de ces considérations avec l'ontologie réaliste et l'épistémologie empiriste que Putnam veut combiner? Dans notre version de la théorie des nombres avec procès finis et effinis, les nombres, étant des créations libres de l'esprit humain, comme Dedekind aimait à le dire, se prêtent naturellement à l'agrégation en ensembles finis; le procès de formation d'un ensemble est lui-même une idéalisation qui consiste à considérer comme une unité l'agrégation d'objets bien définis de notre pensée ou de notre intuition, comme Cantor cette fois aimait à le dire. On obtient les nombres rationnels et réels de la façon classique, sauf que les réels ne requièrent pas la complétude, comme le pensait Dedekind. Putnam semble croire, dans sa *Philosophy of Logic* [4], que nous devons avoir des nombres naturels, rationnels et réels comme totalités achevées pour les besoins de la science. Je pense le contrai-

re. Les concepts de tels ensembles sont absolus par complétion, ils n'ont pas de référence; ils visent plutôt l'expérience possible ou idéale ou mieux la complétion idéale de l'expérience, mais, comme dans la plupart des cas, une telle complétion est exclue par nos constructions. La quantification universelle est toujours permise, pourvu que nous ne mettions pas "tous" dans le "sac" ontologique, que nous n'empochions pas le "tous" de la quantification dans un "tout", "tous" signifiant, comme nous l'avons vu, effinement nombreux quand il s'agit des nombres (peut-être devrions-nous employer un nouveau symbole " $\overline{\text{I}}$ " pour cette universalisation qui ne donne pas naissance à un univers). Putnam s'interroge sur les besoins de la physique en matière d'ensembles: dans sa conception réaliste de la physique, la notion de distance exige l'existence de fonctions des points spatiaux aux réels. Mais Putnam, qui s'en prend d'abord au nominalisme ici, montre seulement que la formulation du nominalisme est inadéquate et non pas que le réalisme est la condition sine qua non qui permette d'énoncer les lois physiques. On pourrait, en principe, construire la notion de distance en n'admettant que les mesures (ou "numericalizations", comme dit Putnam) finies sans avoir à recourir aux réels comme système complet [5].

Le réalisme ontologique (l'ontologie réaliste des mathématiques) semble reposer sur des présuppositions insuffisam-

ment fondées. Les objections que Putnam soulève contre le nominalisme ne touchent pas au constructivisme [6], puisque le constructivisme admet des opérations abstraites de complexité croissante. Ce que j'ai voulu montrer, c'est que pour quantifier sur les nombres et sur les fonctions, on n'a pas besoin de considérer "tous" comme "tout" ou de mettre tous les nombres dans ce que j'appelle la "poche" ontologique.

5. LE DERNIER THEOREME DE FERMAT ET L'EPISTEMOLOGIE EMPIRISTE

Nous en venons, pour finir, au second volant de la thèse de Putnam, l'épistémologie empiriste des mathématiques. Alors que l'ontologie réaliste touchait au statut des entités mathématiques, l'épistémologie empiriste s'intéresse au statut des propositions mathématiques. Les propositions mathématiques démontrées sont certainement vraies (relativement aux méthodes de démonstration). Putnam veut aller plus loin: pour lui, les propositions encore indémontrées, mais qui ont été suffisamment mises à l'épreuve ("testées"), devraient passer aussi pour vraies (c'est le cas du dernier théorème de Fermat et de la conjecture de Goldbach), leur mesure de probabilité étant très élevée et leur support empirique étendu.

Une telle attitude est erronée, à mon sens. Prenons, par exemple, l'hypothèse du continu. La plupart des logiciens, avant Cohen, avaient tendance à croire que l'hypothèse était vraie. Maintenant, la plupart des logiciens sont enclins à pen-

ser qu'elle est fausse, malgré le fait que la preuve de Cohen n'affecte en rien sa vérité ou sa fausseté et pourtant, on pourrait croire qu'elle a été suffisamment mise à l'épreuve.

Une proposition arithmétique aussi simple que le théorème de Fermat est plus facile à "tester" en termes de valeurs finies de ses variables qu'une proposition arithmétique transfinitie qui n'a pas de valeur finie. Mais le nombre de problèmes non résolus en théorie des nombres devrait être une indication que la mise à l'épreuve n'est pas suffisante. Par exemple, le résultat de Vinogradov qui énonce que "tout nombre impair suffisamment grand est représentable comme la somme de trois nombres premiers impairs" contient l'expression "suffisamment grand" qui n'a pas de sens computationnel immédiat. On peut dire qu'une preuve constructive est un test concluant; mais tout test qui n'équivaut pas à une démonstration n'est qu'un "contre-contre-exemple". Du point de vue intuitionniste, si on n'a pas testé la fausseté d'un énoncé donné, on ne peut conclure à sa vérité, le principe du tiers exclu étant exclu pour les énoncés qui n'ont pas une valeur finie. Si j'exprime le dernier théorème de Fermat sous la forme

$$(F) \forall n > 2 \forall xyz (x^n + y^n \neq z^n)$$

je peux définir, du point de vue classique, un nombre naturel

m par

$$m = \begin{cases} 0, & \text{si } F \\ 1, & \text{autrement} \end{cases}$$

mais cette définition n'est pas constructive, puisque F n'est pas décidé (ou résolu). Supposons donc que nous avons une preuve constructive du théorème de Fermat, ce qui n'est certainement pas exclu. Je pourrais alors définir de façon constructive ou récursivement un tel nombre m et les deux définitions, classique et constructive, coïncideraient. Mais en l'absence de toute preuve, constructive ou non constructive, je ne peux faire mieux (*i.e.* définir un tel nombre m) du point de vue classique, même avec tous les tests de valeur que je peux imaginer, puisque je n'ai pas de preuve de F .

Kreisel soulève un problème similaire d'un angle différent dans son compte rendu de l'article de Putnam "Mathematics without Foundations" [7]. Putnam donne une traduction modale d'un contre-exemple du théorème de Fermat

$$\Box [Ax(S,P) \supset F(S,P)]$$

(pour Ax un ensemble d'axiomes pour une théorie des nombres réduite, S , somme et P , produit, \Box l'opérateur modal de nécessité et F un contre-exemple du théorème de Fermat). La formule dit que si nous avons un contre-exemple du théorème de Fermat, alors il est nécessaire que la négation du théorème soit impliquée par un ensemble d'axiomes d'une théorie des nombres réduite. Mais Putnam ne voit pas, comme Kreisel l'indique, qu'une telle proposition Σ_1^0 n'est pas extensible à un énoncé Π_1^0 de la hiérarchie arithmétique, *i.e.*, pour un énoncé

de la forme

$$P(A) \leftrightarrow Qx_1 \dots Qx_n R(A, x_1, \dots, x_n)$$

où R est un prédicat récursif et Qx_i est $\forall x_i$ ($\exists x_i$ pour un énoncé Σ_1^0), et dont la validité n'équivaut pas à la validité du second ordre. Cela suffit, je pense, à montrer l'implausibilité de la thèse de Putnam qui veut que les tests empiriques puissent établir la vérité d'un énoncé mathématique. Ce que Putnam tente de suggérer dans son épistémologie empiriste, c'est que notre croyance en la vérité de F est fondée sur un raisonnement inductif, mais j'ai essayé de montrer de mon côté que la probabilité de la croyance n'est pas la mesure de la vérité d'une proposition mathématique. Une vérité qui repose sur l'accumulation inductive de tests empiriques n'équivaut pas à une vérité mathématique.

Dans la perspective que j'ai adoptée, la théorie des nombres [8] reçoit une interprétation constructiviste et il semble que le schème constructiviste soit plus solide que les théories qui lui sont opposées, le réalisme et l'empirisme. Malgré la machinerie conceptuelle que j'ai introduite, le constructivisme est loin d'être totalement justifié. Mais en matières philosophiques, il n'est pas possible d'atteindre à une pleine justification, les programmes philosophiques cherchant à donner une compréhension intégrale de l'expérience dans sa totalité. La philosophie constructiviste n'est pas entièrement

"constructible", elle est à construire "ad effinitum".

6. POSTSCRIPT

Historiquement, l'approche que j'ai esquissée est en continuité avec les recherches de Hermann Weyl dans son livre *Das Kontinuum* (Leipzig: 1918). Weyl construit l'analyse sur ce qu'il appelle des catégories fondamentales ("Grundkategorien") d'objets auxquelles s'ajoutent des propriétés et des relations comme éléments idéaux par le moyen de la substitution et de l'itération. Weyl pensait qu'il pouvait obvier de cette façon à la hiérarchie des types qui, selon lui, conduisait à un système artificiel et inutile (ouvr. cit., p. 23).

Il est intéressant de remarquer que Gödel dans son article "Ueber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes" (*Dialectica* 12, 1958, p. 280-287) utilise essentiellement les mêmes moyens, substitution et itération (ou récursion) sur les types finis pour obtenir sa preuve de consistance de l'arithmétique intuitionniste et classique. L'interprétation de Gödel de la théorie des nombres par les fonctionnelles récursives (étendue à l'analyse par Spector et autres) n'est plus strictement constructive au sens de Weyl: Weyl requiert dans sa procédure restreinte, "engeres Verfahren", que le quantificateur existentiel ne s'applique qu'aux objets des catégories fondamentales (ouvr. cit., p. 21). Les fonctionnelles de type fini exigent la quantification sur les

variables de type arbitraire (voir l'article de Gödel, ouvr. cit., p. 284). Kreisel a aussi proposé dans son "Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof" (*Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Edinburgh, 1958, p. 289-299) un schème plus abstrait où entre la notion de preuve finitiste, qui n'est évidemment pas finitiste (*i.e.*, combinatoire), mais abstraite ou "idéale".

La notion de "métastase" fournit un cadre intensionnel pour un tel schème: ce n'est pas une structure de types, mais un système de niveaux de réflexion, où les opérations sur le niveau primaire de la stase effinie des nombres naturels correspondent à des "performances" abstraites permmissibles. Les niveaux ou les strates ne sont jamais complétées extensionnellement. La fermeture intensionnelle suffit pour passer d'un niveau à un autre. Les opérations, et non les propriétés ou les objets, constituent l'essentiel. Qu'un tel schème permette une théorie cohérente du continu, c'est pour le moment une question encore ouverte [9], mais il est certainement en accord avec l'idéal constructiviste [10].

NOTES DU CHAPITRE V

*Ce texte est la traduction d'une conférence donnée en anglais dans différentes versions aux Universités de Toronto, Western Ontario et Queen's.

- [1] Ces résultats de Vinogradov n'ont pas encore été "constructivisés". Voir K. Prachtar, *Primzahlverteilung* (Springer: Berlin, 1957), p. 177 et s.
- [2] Voir G. Kreisel, "Church's Thesis: a kind of reducibility axiom for constructive mathematics" in *Intuitionism and Proof Theory*, ouvr. cit., p. 124-125. Pour des arguments contre la thèse de Church, voir aussi G. Kreisel, "Lawless sequences of natural numbers", *Composition Math.*, 20 (1968), p. 222-248, en particulier p. 227-235. Kreisel établit une distinction basique entre définitions et opérations mécaniquement effectives (m-effectives) et humainement effectives (h-effectives). Voir "Which number - theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π_1^1 - paths through 0 ?" in *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, no 2 (June 1972), p. 311-334. Bien que des résultats récents, obtenus par Prawitz et Mints, en particulier sur l'équivalence fonctionnelle entre preuves et dérivations, aillent à l'encontre de l'interprétation que Kreisel voulait donner de l'exemple cité, il n'en reste pas moins que la notion abstraite (intensionnelle) de preuve n'est pas réductible au calcul mécanique des dérivations. D'où la valeur intrinsèque de l'exemple.
- [3] Voir le chapitre VIII "Constructivisme et structuralisme dans les fondements des mathématiques".
- [4] Harper Torchbooks, 1971.

- [5] Dans son traitement de la théorie prädicative des ensembles, Putnam suppose que les ensembles infinis sont définissables sans avoir à donner une procédure qui les produise. Cependant, la pensée de Putnam est plus nuancée en ce qui touche les besoins ensemblistes de la physique: il admet que l'on peut construire les notions physiques de distance, masse, etc. à l'aide d'approximations rationnelles, plutôt qu'en se servant de fonctions sur les réels; mais Putnam croit qu'une telle construction est compliquée (cf. ouvr. cit., p. 55).
- [6] Putnam ne parvient pas à éliminer le conventionnalisme, plus faible que le constructivisme, puisqu'il ne justifie pas les conventions.
- [7] Voir H. Putnam, "Mathematics without Foundations", *Journal of Philosophy* (1967), p. 5-22. Le compte rendu de Kreisel est dans *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, no 2, (June 1972), p. 402-404. Putnam nous a dit récemment (avril 1973) qu'il travaillait à élaborer l'interprétation modale des mathématiques, en utilisant, en particulier, la notion de "possible en soi". Cette notion n'a pas de sens, selon nous, puisque "possible" est toujours relatif à une théorie ou à des théories, en dernière analyse, à une "métathéorie" des théories où entre la notion de possible.
- [8] Je n'ai pas traité dans cet article de la théorie algébrique des nombres. De mon point de vue, les concepts algébriques sont structurés ou structuraux, bien qu'un certain degré de constructivisation y soit possible [voir la remarque d'André Weil dans son *Basic Number Theory*, Berlin-Heidelberg-New York: 1967, p. V, sur l'unification des complétions des corps réels et des corps p -adiques à l'aide des anneaux adèles; pour le mariage harmonieux des mé-

thodes algébriques et analytiques, voir J.P. Serre, *Cours d'arithmétique* (Paris: 1971)]. J'ai mis l'accent dans cet article sur les problèmes de la théorie des nombres premiers; il y a d'autres problèmes en théorie des nombres qui ont une solution analytique, mais n'ont pas de solution constructive. Par exemple, le problème de la formule de nombre de classe de Dirichlet pour les formes quadratiques

$$C(-p) = \frac{B - A}{p}$$

où C est la classe des formes réduites de discriminant $-p$, B la somme de tous les non-résidus quadratiques et A la somme de tous les résidus quadratiques (mod p). Dirichlet a donné une preuve qui utilise les séries infinies. Le fait que cette formule n'a pas de solution élémentaire est dramatisé par la remarque qu'elle affirme simplement l'égalité de deux nombres naturels (voir H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, 3rd ed., London, 1968, p. 146-148). Cela n'affecte pas cependant le schème fondationnel proposé, puisque les méthodes infinitaires ou infinitistes y sont "effinitisées".

- [9] Voir le chapitre VI "Sur la structure ou la construction du continu".
- [10] Il faut peut-être remarquer qu'il y a des parallèles intéressants entre les idées de Weyl et le constructivisme finitiste de Hilbert. Dans son article "Ueber das Unendliche", *Math. Annalen*, 95 (1926), Hilbert discute de l'introduction des éléments idéaux dans un style proche de celui de Weyl (l'exemple des idéaux de Kummer). Mais le programme général de la métamathématique (le problème de la consistance) est une idée hilbertienne. L'importance que la théorie élémentaire des nombres ou l'arithmétique

avait dans le schème fondationnel de Hilbert comme paradigme de la certitude ("Sicherheit") mathématique explique le choix de notre sujet. On doit aussi remarquer que la reconstruction de l'arithmétique élémentaire par Skolem à l'aide des fonctions primitives récursives est d'inspiration finitiste; l'élimination radicale des quantificateurs ou des variables "apparentes" (liées) est cependant une base insuffisante pour l'analyse (voir "The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains" in J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel* (Cambridge, Mass.: 1967). L'approche que j'ai esquissée pourrait être baptisée "extension effinitiste" du point de vue finitiste. Par ailleurs, l'approche de Selberg dans ses deux preuves constructives du théorème de Dirichlet et du théorème sur les nombres premiers, même si elle ne relève pas d'une attitude philosophique explicite, n'en est pas moins *expressément* constructiviste. Cf. "An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression" *Ann. of Maths*, vol. 50 (1949), no 2, p. 297-304 et "An elementary proof of the prime number theorem" *Id.*, p. 305-313. Voir aussi du même auteur "An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions" *Canad. J. Math*, 2, 1950, p. 66-78. On peut trouver la preuve transcendantale de Dirichlet dans J. P. Serre *Cours d'arithmétique*, ouvr. cit., chap. VI.

Chapitre VI SUR LA STRUCTURE OU LA CONSTRUCTION DU CONTINU*

Nous voulons tenter de montrer brièvement comment une approche constructiviste du continu est possible.

1. LA TRADITION CONSTRUCTIVISTE ET LE CONTINU

Brouwer et Weyl ont donné les premiers une version constructiviste du continu. Weyl a réussi à construire une partie de l'analyse en n'employant que des moyens constructivistes [1]. Grzegorzczyk et Lorenzen ont cherché à pousser cette approche plus loin: en particulier, Lorenzen [2] a introduit des strates ou niveaux de langage ("Sprachschichten").

Lorenzen a un langage élémentaire d'atomes surplombé d'une hiérarchie de strates qui peuvent aller au-delà de ω jusqu'à

*Texte modifié d'une conférence donnée dans la section "mathématiques" du Congrès de l'Association canadienne-française pour l'avancement des sciences tenu à Montréal en mai 1973. Notre présentation ici n'est pas purement mathématique, parce que nous voulons introduire informellement un certain nombre de concepts nouveaux. Ce texte est un essai comparable à celui du chapitre VIII (appendice), mais d'un esprit différent (plus constructiviste).

ε_0 . Cette approche, bien qu'elle s'inspire de Weyl, finit par se rapprocher d'une théorie des types et la preuve de consistance de l'arithmétique classique qu'on peut y formuler n'est pas "plus" constructiviste que les preuves de Gentzen ou de Gödel [3].

Bishop dans son ouvrage *Foundations of Constructive Analysis* [4] a proposé une autre approche constructiviste de l'analyse en s'appuyant, entre autres choses, sur les ensembles complémentés: on a X un ensemble et F un ensemble non vide de fonctions de X à \mathbb{R} ; un ensemble complémenté dans X (relatif à F) consiste en une paire ordonnée (A, B) de sous-ensembles de X tels que:

$$\forall x \in A \forall y \in B \exists f \in F (f(x) \neq f(y))$$

Les ensembles complémentés sont équivalents aux ensembles boréliens - réunions dénombrables d'ensembles fermés ou intersections dénombrables d'ensembles ouverts.

Cette approche, prolongée depuis [5], fait l'objet présentement de recherches formelles. Mais c'est la conception intuitionniste du continu qui est la plus radicale jusqu'à maintenant [6]. A part les cinq propriétés d'ordre sur le continu définies par Brouwer [7], on a entre autres les propriétés de densité et de compacité: on dit que le continu est dense en lui-même si pour deux générateurs de nombre réel α et β - rappelons qu'une séquence de rationnels $\langle R_n \rangle_n$ est un géné-

rateur de nombre réel si

$$\bigwedge k \forall n \forall m (|R_n - R_{m+n}| < 2^{-k})$$

pour k un entier naturel - on a l'implication suivante

$$\begin{aligned} \alpha \in R \supset \exists \phi \exists \psi \{ \forall n [\phi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subset \\ [\phi_{[n]}, \psi_{[n]}] \wedge \forall n \alpha \in [\phi_{[n]}, \psi_{[n]}] \wedge \\ \forall \beta \forall n \beta \in [\phi_{[n]}, \psi_{[n]}] \supset \beta \stackrel{d}{=} \alpha \} \end{aligned}$$

en mots, "pour tout générateur de nombre réel α , il y a une séquence d'intervalles fermés proprement emboîtés contenant α , telle que tout générateur de nombre réel β qui est contenu dans chacun des intervalles est égal à α ".

La propriété de compacité, qui énonce qu'il n'y a pas d'intervalle emboîté vide, s'exprime

$$\begin{aligned} \exists \phi \exists \psi \{ \forall n [\phi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq \\ [\phi_{[n]}, \psi_{[n]}] \wedge \forall \alpha \in R \exists b \alpha \notin \\ [\phi_{[b]}, \psi_{[b]}] \} \end{aligned}$$

Nous avons en plus les théorèmes de la barre et de l'éventail présentés au chapitre II.

Après avoir passé en revue ces diverses approches plus ou moins constructivistes, voyons rapidement ce qu'il en est de l'approche classique. On définit habituellement le continu à partir des suites de Cauchy ou des coupures de Dedekind, deux définitions qui sont en fait équivalentes. Une suite de Cauchy est une suite $\{p_n\}$ de points pour laquelle on a

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \leq n, m [d(p_n, p_m) < \epsilon]$$

où N est un entier naturel (une suite de Cauchy est aussi appelée suite convergente ou suite fondamentale).

Les coupures de Dedekind sont définies de la façon suivante: pour deux ensembles A et B de nombres rationnels on a les conditions suivantes:

- 1) $(x \in A \wedge y \in B \rightarrow x < y)$
- 2) A ne contient pas d'élément maximal ou B ne contient pas d'élément minimal.

Les nombres réels sont alors l'ensemble de toutes les coupures de Dedekind, rationnelles et irrationnelles (A, B) .

Remarquons que Cantor a fondé sa théorie des ensembles (d'abord théorie des multiplicités "Mannigfaltigkeitslehre") sur les suites fondamentales qu'il définit [8]

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_{\nu+\mu} - a_{\nu}) = 0$$

pour " a " un ensemble de nombres rationnels. Cantor peut définir alors des suites fondamentales d'ordre arbitraire n ou α (pour α ordinal transfini).

2. APPROCHE AXIOMATIQUE DU CONTINU CONSTRUCTIVISTE

En théorie des ensembles formulée pour la structure cumulative des rangs, le continu est défini simplement comme l'ensemble des parties de l'ensemble des nombres naturels, un nombre réel correspondant à un ensemble de nombres naturels. Je veux essayer de montrer maintenant comment on peut concevoir le continu dans une perspective constructiviste. Énonçons

quelques principes:

A) Il n'y a pas d'univers de tous les ensembles, l'univers ou les univers n'étant que des unifications ou totalisations (complétions) idéales de l'expérience intellectuelle (mathématique en particulier).

B) Il n'y a que des ensembles finis, le procès d'ensembler n'est possible que pour des multiplicités ou multitudes finies.

C) Il y a des multiplicités effinies pour lesquelles on peut avoir une quantification effinie \prod qu'on note

$$\prod x_1, \dots, \prod x_n, \dots, \prod x$$

D) Les procès ou les opérations (mathématiques) prennent sur les objets ou les propriétés qu'ils engendrent en ce sens que les objets et propriétés sont réductibles, les procès et les opérations ne le sont pas.

Je donne aussi quelques définitions:

- a) J'appelle rayons les objets engendrés par un procès de réflexion $R \rightarrow r$
- b) L'hypersphère est l'unification idéale de tous les objets et de tous les procès [9].
- c) Les segments sphériques sont les niveaux ou les rangs d'objets (ou plans de rayons).
- d) Les cônes \hat{U} et U sont les ensembles ou les multitudes qu'engendrent les procès de réflexion.

Voyons maintenant notre version du continu. La structure cumulative des rangs est donnée par

$$\begin{aligned}V_0 &= \phi \\V_{\alpha+1} &= V_\alpha \cup P(V_\alpha) \\V_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta\end{aligned}$$

Un ordinal limite est obtenu ici par quantification effinie sur des rangs diffus β définis par

$$\beta < \beta < \alpha$$

Ces rangs "diffus" permettent le passage à la limite; ils ne peuvent être "repérés" comme tels, mais constituent la limite elle-même, en tant qu'elle n'est pas accessible. (Remarquons ici que la théorie cumulative des rangs est obtenue de 0 par itération de deux opérations, P , l'ensemble des parties et l'union, comme la suite des entiers naturels est obtenue de 0 par l'itération de la seule opération S , la fonction de successeur; il y a donc bien construction à l'origine.)

On peut définir sur la structure cumulative plusieurs procès de génération

$$\begin{aligned}R^0(x) &= x + 1, 2, \dots, + n . \\R^1(x) &= x \times 2, x \times 3, \dots, x \times n . \\R^2(x) &= x^2, x^3, \dots, x^n \\R^3(x) &= x^\gamma . (\gamma \text{ un ordinal limite})\end{aligned}$$

i.e. addition, multiplication et exponentiation, qui sont des procès arithmétiques - on peut bien sûr définir ici tous les

procès récurrents primitifs [10]. L'ensemble des parties se traduit, par exemple,

$$R^1(V_0) = 1$$

$$R^1(V_{\alpha+1}) = \bigcup_{\beta < \alpha} R^1(V_\beta) \cup R^1(V_\alpha)$$

$$R^1(V_\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} R^1(V_\beta)$$

Plus concrètement: $P(2) = P(1) \cup \text{Im } P(1)$

$$P(3) = P(2) \cup \text{Im } P(2)$$

en général

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_{\alpha-1}) \cup \text{Im } P(V_{\alpha-1})$$

On a ω , comme ordinal limite par quantification effinie sur tous les rangs finis (dont "certains" sont diffus), donc un axiome de l'effini. L'axiome de remplacement s'énonce

$$\forall X \exists Y R^0(X, Y) \rightarrow \forall a \exists b \forall Y$$

$$(Y \in b \rightarrow \exists X (X \in a \wedge R^0(X, Y)))$$

où X et Y sont des variables du second ordre, puisque la structure cumulative est engendrée par l'itération du procès d'ensembles des parties d'un ensemble donné. Le principe de réflexion est formulé

$$\forall \alpha \exists \beta \text{ ordinal limite } \beta > \alpha \exists \gamma > \beta$$

$$\wedge \alpha, \beta, \gamma \in V \forall X [\{X \in V_\beta \rightarrow (\phi(X) \leftrightarrow$$

$$\phi^V_\beta(X)\}] \rightarrow \{\forall X \exists R^Y(\beta) (X^\beta \in R^Y(\beta)$$

$$\wedge R^1(\beta) \subset X^\beta)\}$$

On remarquera que nous utilisons toujours V pour désigner l'univers ou le cône dans l'hypersphère réflexive. La multi-

plicité des réflexions $R^Y(\beta)$ - par $R^3(\chi)$ - englobe ou comprend la multiplicité des parties de β qui correspond à $R^1(\beta)$, pour β un ordinal limite. La multiplicité des parties de ω , classiquement $P(\omega)$, ne forme pas un ensemble. La multiplicité $R(\omega)$ de toutes les réflexions sur ω est évidemment une multiplicité plus vaste que $P(\omega)$ et sa cardinalité est indéterminée (en fait, ce n'est pas non plus un ensemble et ne possède donc pas de cardinalité).

L'axiome de l'ensemble des parties (pour un ensemble fini) s'énonce simplement

$$\forall x \exists R^1(y) \forall z [(z \in R^1(y) \leftrightarrow z \subset x)]$$

Les autres axiomes, extensionnalité, paire, somme, choix ne sont pas difficiles à formuler [11].

Revenons au point de départ: nous avons un univers (ou un cône) dont les objets (ou rayons) sont engendrés par des procès arithmétiques de réflexion. L'ensemble nul qu'on pourrait appeler l'"ombilic" (au sens géométrique) de cette hypersphère des réflexions donne tous les autres objets, ensembles et multiplicités de ces objets par réflexion. Chaque objet est un point nodal de réflexion et tout se réfléchit dans tout - il y a analogie ici avec les monades de Leibniz qui réfléchissent toutes les autres monades et l'univers entier [12]. L'idée centrale de cette structure (conique) cumulative des rangs (ici segments sphériques) est que les objets, les ensem-

bles et les multiplicités d'objets sont engendrés par des opérations arithmétiques et que le continu n'est rien d'autre que la génération effinie des réflexions.

On peut donner quelques théorèmes pour cette théorie des réflexions: le théorème de la barre, par exemple, est modifié de la façon suivante.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\alpha} \forall x X^R(\bar{\alpha} x) \wedge \bigwedge_n (X_n^R \rightarrow Y_n^R) \wedge \\ & \bigwedge_n \bigwedge_m (X_n^R \rightarrow X^R(n * m)) \wedge \\ & \bigwedge_n (\bigwedge_x Y^R(n * \hat{x}) \rightarrow Y_n^R) \rightarrow \bigwedge_n Y_n^R \end{aligned}$$

ou X^R et Y^R sont des prédicats ou des propriétés (ou des espèces) réflexives. On peut donc définir un principe d'induction pour les ensembles finis d'objets (ou de rayons).

Le théorème de l'éventail est modifié de la même façon:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\alpha} \forall x X^R(\Gamma_{\alpha} \alpha, x, \alpha_0, \dots) \rightarrow \\ & \forall y \bigwedge_{\alpha} \forall x \bigwedge_{\beta} (\overline{\Gamma_{\alpha} \alpha y} = \overline{\Gamma_{\alpha} \beta y} \rightarrow \\ & X^R(\Gamma_{\alpha} \beta, x, \alpha_0, \dots)) \end{aligned}$$

3. MODELES "FLUCTUANTS" DU CONTINU

On peut aussi penser aux modèles d'une telle théorie des réflexions R : un modèle serait la donnée d'un triplet $\langle U^R, F^R, P^R \rangle$ pour un univers réflexif, des opérations réflexives et des prédicats réflexifs. Comme les segments initiaux (sphériques) de la hiérarchie sont définis en fonction de leurs réflexions, nous avons donc des modèles "fluctuants" pour

la hiérarchie elle-même.

Solovay [13] a montré que pour la théorie des ensembles du premier ordre, la preuve d'indépendance entraîne le fait que le continu peut avoir n'importe quelle cardinalité (transfinie). Notre problématique indique, en particulier par le schéma de réflexion, qu'au second ordre et aux ordres supérieurs (pour R^n), le continu ne peut avoir de cardinalité fixe (c'est le versant négatif et la généralisation du résultat de Solovay); la multiplicité des parties de ω est un procès ou en procès parmi d'autres procès qui l'englobent. Dans cette perspective, l'hypothèse du continu est trivialement fautive (l'hypothèse généralisée perdant tout sens, puisqu'il n'y a pas ici de cardinalité transfinie).

Donnons, pour finir, quelques indications sur les modèles fluctuants (qui fluctuent selon le flux de réflexion qui détermine l'univers ou le cône d'univers).

Un modèle $\langle M = \langle U_n^R, F_n^R, P_n^R \rangle$ du second ordre ou d'ordre supérieur pour la théorie des réflexions est constitué par un univers U_n^R réflexif (et fluctuant), des variables pour les opérations F_n^R de réflexion (procès de génération arithmétique) et des variables pour les prédicats réflexifs - n signifie ici l'ordre. A part l'appareil usuel de la théorie des modèles, nous avons ce qui suit: la relation de satisfaction pour une variable de prédicat P

$$\vdash_m P^R_{t_1 \dots t_n} \text{ ssi } \langle \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \rangle \in P^R$$

pour des termes t et leurs dénominations \bar{t} dans le langage R de la théorie des réflexions; nous avons aussi

$$\vdash_m \forall P^R_n \phi \text{ ssi pour tout prédicat } R$$

dans un cône fini \hat{U}^R_n , on a

$$\vdash_m \phi [P^R_n | R]$$

et

$$\vdash_m \exists P^R_n \phi \text{ pour tout cône effini}$$

pour les formules bien formées ϕ . De même

$$\vdash_m \forall F^R_n \phi \text{ ou } \vdash_m \exists F^R_n \phi$$

ssi pour toute fonction $f: U^R_n \rightarrow U^R$ on a

$$\vdash_m \phi [F^R_n | f]$$

où $|$ indique que F^R_n est défini pour f , et \vdash signifie vrai dans un modèle arithmétique (effini).

Sans aller dans les détails d'une théorie des modèles pour R , on peut dire qu'il n'y a évidemment pas de modèles isomorphes pour une telle théorie qui ne peut être catégorique et nous n'avons pas de notion de modèle standard. Par ailleurs on peut définir un grand nombre de constructions syntaxiques (arithmétiques) locales sur R . Les "réflexions" sont les "constructions" d'un esprit fini qui pense le continu.

Dans notre perspective constructiviste, c'est la construction intuitive (au sens mathématique) du continu qui constitue la principale tâche de l'entreprise fondationnelle.

Le problème de l'hypothèse du continu qui reçoit une solution radicale (et négative) peut être considéré comme secondaire ou mineur; le problème relève, en fait, d'une problématique mal fondée, ce que nous avons appelé ailleurs (chapitre VIII) la théorie des procès transarithmétiques (et de leurs objets).

Si le continu est, comme le pensait Brouwer, un devenir libre ("freies Werden") c'est par nos constructions que nous pouvons arriver à le concevoir; le continu ne peut être "donné" simplement, puisque pour nous il n'y a pas de donné pur et simple; il n'y a d'ailleurs pas d'analyse ou de description du continu comme donné qui soit satisfaisante, *i.e.* qui ne postule pas quelque réalité transcendante, inaccessible ou inconnaissable.

Hermann Weyl [14] a pu dire que les mathématiques étaient une approche finie de l'infini; nous dirions qu'elles sont une approche finie de l'"effini" [15].

NOTES DU CHAPITRE VI

- [1] H. Weyl, *Das Kontinuum*, Gruyter, (Leipzig: 1918).
- [2] *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Zweite Auflage, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1969).
- [3] Voir chapitre III. Cf. K. Schütte, *Beweistheorie*, Springer (Berlin-Göttingen-Heidelberg: 1960), chap. 21 pour les limitations des preuves (sémantiques) de consistance et de complétude pour l'arithmétique et l'analyse classiques.
- [4] McGraw-Hill, (New York: 1967).
- [5] E. Bishop, "Mathematics as a numerical language" in *Intuitionism and Proof Theory*, ouvr. cit., p. 53-71. Voir E. Bishop et H. Cheng, *Constructive Measure Theory*, Memoirs of the American Mathematical Society no 116, American Mathematical Society (Providence, R.I.: 1972); ce dernier texte est un essai de constructivisation de la théorie de la mesure par le biais de l'intégrale de Daniell (extension des fonctionnelles linéaires). Ici encore les ensembles complétés jouent un rôle prédominant. Il est peut-être encore trop tôt pour évaluer le constructivisme de Bishop et les enthousiasmes débordants, comme celui de Myhill - voir son compte rendu de *Foundations of Constructive Analysis* dans le *Journal of Symbolic Logic*, vol. 37 (1972), no 4, p. 744-747, sont sans doute prématurés. (Mais Myhill a déjà obtenu des résultats partiels: voir "Constructive Set Theory" in *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 40 (1975), no 3, p. 347-382). Le constructivisme numérique est une version du constructivisme qui apparaît plus concrète, mais la recherche montrera sans doute

les limitations de cette approche insuffisamment radicale, à notre sens. Mais l'oeuvre de Bishop constitue un apport important à l'orientation constructiviste en mathématiques. Par ailleurs, le mathématicien russe A. A. Markov a proposé une théorie générale des algorithmes (fonctions effectivement computables dans un alphabet) qui constitue une approche différente du constructivisme. Le livre de N. A. Šanin *Constructive Real Numbers and Function Spaces* trad. par E. Mendelson, American Mathematical Society (Providence, R.I.: 1968) contient un traitement de l'analyse et de l'analyse fonctionnelle fondé sur la notion d'algorithme de Markov. On y trouvera aussi une critique de la notion d'infini actuel qui rejoint la nôtre. D'autres approches sont aussi possibles, comme celles de Goodstein ou de Yessenin-Volpin, etc. A. G. Dragalin distingue, quant à lui, cinq types de constructivisme, du constructivisme strict de Skolem, Goodstein (incluant le finitisme de Hilbert?) au constructivisme traditionnel de Lorenzen et Markov en passant par l'analyse constructive ramifiée jusqu'à la théorie des définitions inductives généralisées et la théorie imprédicative (Luckhardt, Scarpellini, Ershov, etc.) des espèces arbitraires d'objets constructifs (cf. "Constructive Mathematics and Models of Intuitionistic Theories" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, ouvr. cit., p. 111-128). La liste n'est pas exhaustive et pourrait être longuement continuée.

- [6] Pour cette conception intuitionniste du continu, voir surtout R. E. Vesley, "The Intuitionistic Continuum", chap. III de *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, ouvr. cit.
- [7] Voir chapitre II.

- [8] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, ouvr. cit., p. 186. Nous employons "multiplicité" dans ce qui suit pour dénoter une multitude d'objets qui ne forment pas un ensemble.
- [9] L'hypersphère est une configuration locale de l'hyperespace qui n'a pas de figure, si ce n'est celle de la vague ou de l'hyperbole. Ces définitions méritent un mot d'explication: il s'agit ici de définir un contexte constructiviste pour l'"univers des ensembles" que nous essayons de visualiser ou de géométriser. Il serait possible de montrer, par ailleurs, que les mêmes structures peuvent être employées pour décrire la construction de l'"univers physique". Nous essayons ici de construire ou d'arithmétiser la géométrie des ensembles. Plusieurs de nos concepts se rapprochent de ceux de la géométrie algébrique, qui n'a pas, elle, d'orientation spécifiquement constructiviste. Nous reprenons ici, à notre manière, le débat sur la dualité arithmétique-géométrie et sur l'ultime réductibilité de l'une à l'autre.
- [10] Voir là-dessus R. B. Jensen et C. Karp, "Primitive recursive set Functions" in *Axiomatic Set Theory*, ouvr. cit., p. 143-176 et R. B. Jensen, "On the finer structure of L" in *Annals of Math. Logic*, vol. 4, no 3 (August, 1972), p. 229-308.
- [11] Pour une tentative analogue, voir P. Bernays, "Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre" in *Essays on the Foundations of Mathematics*, ed. Y. Bar-Hillel, North-Holland (Amsterdam: 1962), p. 3-49, où presque tous les axiomes de la théorie des ensembles sont dérivés du schéma de réflexion (classique).
- [12] Voir Leibniz, *La Monadologie*, ed. par E. Boutroux, Delagrave (Paris: 1956), prop. 56 et s.
- [13] R. L. Solovay, " 2^{\aleph_0} can be anything it ought to be" in

The Theory of Models, ouvr. cit., p. 345.

- [14] Voir l'ouvrage classique de Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Atheneum (New York: 1963). Weyl y défend en particulier la conception des mathématiques et de la physique connue "constructions théorétiques" du monde, conception que nous partageons évidemment.
- [15] Prenons, par exemple, la célèbre méthode dite de "descente infinie" de Fermat. C'est en réalité une induction régressive "effinie" qui s'appuie sur le principe que tout ensemble non vide (et fini) d'entiers positifs a un plus petit élément. L'infinité ici, comme partout en théorie des nombres, de la preuve d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers au théorème de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans toute progression arithmétique, doit être interprétée dans le sens d'une induction sans borne finie, d'un procès effini.

Chapitre VII **LOGIQUE MATHÉMATIQUE** **ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES**

Pour le philosophe intéressé aux structures et aux fondements du savoir théorétique, à la constitution d'une "mé-tathéorétique", θεωρία, qui, mieux que les "Wissenschaftslehre" fichtéenne ou husserlienne et par-delà les débris de la métaphysique, veut dans une intention nouvelle faire la synthèse du "théorétique", la logique mathématique se révèle un objet privilégié.

1. LOGIQUE MATHÉMATIQUE ET LOGIQUE SYMBOLIQUE

La logique mathématique, syntaxe et sémantique du discours mathématique, ne doit pas être confondue avec ce qu'on appelle communément "logique formelle" (symbolique), qui est, elle, la grammaire du discours ou du langage ordinaire. Ce n'est pas que les deux disciplines aient des origines différentes, mais la diversification des fins a entraîné une division des méthodes qui va s'accroissant avec l'approfondissement des

techniques et la découverte des axiomes. Entre la *Mathematical Logic* (édition révisée 1951) de Quine (55), dont le titre devenu trompeur ne doit pas nous égarer, et la *Mathematical Logic* (1967) de Shoenfield (62), il n'y a rien de commun. Dans ces quelque vingt années, la théorie des modèles, par exemple, a connu un tel essor qu'elle est devenue la discipline maîtresse de la logique mathématique (1). Le calcul propositionnel et le calcul des prédicats du premier ordre constituent encore les langages fondamentaux de la logique, mais ils se sont enrichis du calcul des prédicats avec égalité, des calculs de prédicats d'ordre supérieur, des langages infinitaires (2) (23), des diverses logiques algébriques, cylindriques (Tarski) et polyadiques (Halmos), etc. La richesse des développements en logique mathématique laisse peu de place à la logique symbolique, *i.e.* non mathématique: raffinements, simplifications ou variations sur les thèmes connus en calcul propositionnel et en calcul des prédicats du premier ordre, logiques modales et inductives (dont les fruits ne sont pas encore mûrs), applications dans l'argumentation philosophique (à la manière analytique), ou ailleurs représentent bien peu pour la philosophie des mathématiques. Au reste, on peut se demander si la linguistique, structurale ou non, ne fournit pas un meilleur instrument pour l'analyse du discours ordinaire ou des langages naturels. Les langages formels supposent dès l'abord un appareil analytique

scindé de la réalité "ordinaire" des mathématiques, par exemple, qui doit cependant la représenter adéquatement (similarité ici avec la physique quantique où les opérateurs hermitiques dans un espace de Hilbert représentent les grandeurs physiques, mais n'ont pas tous une interprétation physique adéquate [2] ((33), p. 265-66). La logique mathématique est une entreprise mathématique qui n'a rien à voir avec le discours ou le langage ordinaire; elle porte essentiellement sur la pratique et les théories mathématiques et dans ce sens on peut identifier la logique mathématique à la métamathématique (au sens de Tarski et non au sens de Hilbert). La logique philosophique, qui est essentiellement une analyse philosophique des notions de la logique formelle (symbolique), ne légifère pas non plus le domaine de la logique mathématique. Une philosophie des mathématiques consciente de cette problématique devra avant tout s'insérer profondément dans le sol de la logique mathématique.

2. LOGIQUE MATHÉMATIQUE ET FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

Le problème des fondements occupe une place privilégiée en logique mathématique. Il ne s'agit plus de savoir comme aux temps héroïques de Frege et de Russell, si la totalité des mathématiques est réductible à la logique; le problème est obnubilé aujourd'hui par la question suivante: y a-t-il plusieurs théories des ensembles ou existe-t-il une théorie des ensembles fondamentale d'où dériveraient les autres [3]? La

question n'a pas son lieu hors de la logique mathématique, puisqu'elle n'a de sens que dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel traduite adéquatément dans le langage des prédicats et elle tire tout son sens des conséquences métamathématiques qu'entraîne le choix d'une théorie des ensembles: par exemple, les schémas d'axiomes d'infinité "forts" sur les ensembles inaccessibles ou sur les ensembles mesurables sont intimement liés non seulement à des interprétations "fortes" ou fortement infinitistes de la théorie des ensembles, mais aussi à des modes de construction dont l'évidence est faible [4]. D'autre part, on peut affirmer que la théorie axiomatique des ensembles *est* la logique mathématique, dans la mesure où les fondements sémantiques (théorie des modèles) sont ensemblistes, par opposition aux fondements syntaxiques combinatoires (37). Une distinction plus fine établirait peut-être une ligne de démarcation entre la logique mathématique comme telle, *i.e.* recherches portant sur les systèmes formels, les théories mathématiques, etc. et les fondements proprement dits, *i.e.* justification des axiomes, examen des notions de base, etc. Mais dans cette perspective même, les fondements s'intègrent naturellement à la logique mathématique, à ses différentes méthodes ou approches, théorie des fonctions récursives, théorie des démonstrations (proof theory), théorie des modèles (voir (62)), quand on ne confond pas simplement

fondements et organisation du sujet ou du matériau, comme l'indique Kreisel (35).

La théorie des fondements, selon Kreisel (37), a pour objet la description et l'analyse des mathématiques intuitives, celles du "working mathematician". L'examen critique de la pratique mathématique exige l'élaboration de techniques qui paraissent souvent étrangères au travail quotidien de l'artisan des mathématiques ordinaires. Dans cette tâche, les options traditionnelles de la philosophie des mathématiques sont de peu de secours: réalisme (platonicien ou non), intuitionnisme et formalisme ont perdu leur légitimité foncière. En effet, le réalisme ensembliste ne s'appuie pas sur l'existence d'un ciel intelligible (où logeraient par exemple, les sous-ensembles de l'ensemble des nombres naturels, *i.e.* le continu), l'intuitionnisme se transcende dans une théorie générale des constructions (32) qu'il est possible de concilier avec l'"idéisme" combinatoire post-hilbertien (33). Quant au positivisme ou formalisme strict, héritier de Carnap et de Wittgenstein plus que de Hilbert, il ne semble pas représenter une option encore valable: les résultats "profonds" concernant les systèmes formels invitent à penser que la rigueur informelle (31), c'est-à-dire la réflexion philosophique rigoureuse est non seulement utile, mais essentielle en logique mathématique. On voit que la logique mathématique permet de mieux définir les options fonda-

tales en "radicalisant" les données du problème et en restreignant l'arbitraire des conjectures. Il nous sera loisible de montrer plus loin comment une nouvelle philosophie des mathématiques peut tirer profit de cette situation.

A. Les fondements sémantiques.

En théorie des fondements sémantiques, c'est le calcul des prédicats du premier ordre qui donne lieu au plus grand nombre de résultats. L'axiomatisation des structures mathématiques dans le langage ensembliste s'opère par la formulation d'assertions vraies pour un modèle ou une réalisation d'une structure mathématique donnée (37), la notion de nombre naturel (62), celle d'ensemble ou encore la notion intuitive d'ordinal pour laquelle on adjoint deux symboles non logiques de relation O (unaire) et P (binaire) à L_c (langage des prédicats avec la relation d'appartenance); ici tout ordinal est un ensemble et la structure $\langle \bar{O}, \bar{P} \rangle$, définie par O et P dans F (structure fondamentale) satisfait les conditions suivantes.

- i) P est un ordre total strict de O ,
- ii) tout segment initial de O est un ensemble bien ordonné;
- iii) tout couple d'ensembles Y, Z , où Y est bien ordonné par Z , est isomorphe à l'un quelconque des segments initiaux de O , (37).

La notion d'ensemble elle-même est si fondamentale et si primi-

tive qu'il est difficile d'en donner une définition qui rende possible son axiomatisation. La plupart des logiciens et mathématiciens se réfugient dans un scepticisme ou agnosticisme prudent, lorsqu'il s'agit de définir la notion d'ensemble.

Kreisel distingue trois variantes:

- a) vague extension de la notion de collection finie,
- b) sous-collections arbitraires d'une collection donnée,
- c) abstraction tirée de la notion plus générale de propriété.

La première variante est la moins précise, la seconde la plus usuelle et la mieux définie, la troisième est sans doute la plus fondamentale, mais encore insuffisamment explorée. Dans la théorie des ensembles de Zermelo, c'est la variante b dite structure cumulative des types (s.c.t.) qui constitue la notion de base. A l'aide de cette notion d'ensemble, la théorie des ensembles peut être réduite à la construction de tous les ensembles à partir de l'ensemble vide en itérant (transfiniment) l'opération P (ensemble des parties) de la façon suivante:

- 1) $V_0 = \phi$, *i.e.* l'ensemble vide
- 2) $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha)$ pour tout ordinal α
- 3) $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ pour tout ordinal limite α
- 4) $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \cup P(V_\beta)$ (37).

Cependant, les axiomes usuels de la théorie des ensembles, extensionnalité, (schéma d'axiomes de) compréhension, paire, som-

me, ensemble des parties, infini, auxquels on ajoute l'axiome de régularité ou de fondation n'axiomatisent pas *adéquatement* la notion intuitive de la structure cumulative des types. Par exemple, on ne peut montrer qu'il existe une réalisation satisfaisant les axiomes de Zermelo (*i.e.* un modèle de ces axiomes) à partir de ces mêmes axiomes, plus précisément, il n'est pas possible de trouver une réalisation des axiomes de Zermelo - avec ou sans l'axiome de fondation - qui en soit déductible (même au sens du second ordre (37)). [On obtient un axiome du second ordre, disons l'axiome de compréhension, en admettant une variable X qui porte sur tous les sous-ensembles d'un ensemble donné:

$$\forall a \forall X \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow (y \in a \wedge X(y))];$$

ou encore l'axiome de régularité ou de fondation qui se lit comme suit dans (39), chap. III,

$$\forall x [x \neq \phi \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \phi)]$$

(ce qui signifie en mots: tout ensemble non vide a au moins un de ses sous-ensembles qui n'a avec lui aucun élément commun) donne l'expression du second ordre suivante:

$$\forall a \forall X [X(a) \rightarrow \exists x \forall y \{X(x) \wedge [X(y) \rightarrow y \notin x]\}]$$

Voir (36), chap. 7, exercices 1 et 5, exercice 5 du chapitre 3 et surtout (33) p. 256-262 et (32) p. 138-152] [5].

Le modèle minimal des axiomes de Zermelo (pour la s.c.t. avec $V_0 = \phi$) donne la structure suivante:

$$M = \langle V_{\omega+\omega}, \varepsilon_{\omega+\omega} \rangle$$

il est clair que toute réalisation "sub-minimale" $\varepsilon \in V_{\omega+\omega}$ ou de cardinalité $< \aleph'(n)$ pour n quelconque (on a $\text{card } M = \aleph_n \aleph'(n)$) ne peut y être vraie. (Notons que $V_{\omega+\omega}$ avec $V_0 = \phi$ satisfait les axiomes de Zermelo, mais c'est un modèle qui ne découle pas de ces mêmes axiomes, mais de la notion intuitive de la s.c.t.). Le théorème d'incomplétude de Gödel, dont on sait qu'il visait d'abord la version russellienne de la théorie des types, généralise ces résultats: d'une façon informelle, on peut dire que le théorème de Gödel énonce que, pour la théorie des ensembles de Zermelo, en particulier - puisque c'est le cas qui nous intéresse ici [6] - sans l'axiome de fondation, mais avec l'axiome de l'infini, il n'existe pas de modèle de cette théorie qui en soit déductible; plus précisément, il y a une formule (close) V qui est indécidable tout en étant vraie, *i.e.* ni V ni sa négation ne peuvent être prouvées dans l'axiomatique des ensembles de Zermelo. A l'aide de la méthode diagonale de Cantor, il est aisé de trouver une formule close A , telle que $\overline{A_1} \leftrightarrow \neg A("A_1")$, c'est-à-dire la réalisation $\overline{A_1}$ est vraie, si et seulement si A_1 n'a pas la propriété A ; de là on a pour V close (obtenue de $V(x)$, ensemble des formules closes conséquences des axiomes de Zermelo)

$$\overline{V_1} \leftrightarrow \neg V ("V_1")$$

i.e. \bar{V}_1 est vraie, mais V_1 n'est pas conséquence des axiomes de Zermelo. [On peut en donner aussi une démonstration purement combinatoire, voir (37) p. 176-179; la preuve originale de Gödel impliquait le "calcul" des fonctions récursives primitives sur l'ensemble des nombres naturels].

Que signifient ces résultats? Que la théorie des ensembles est irrémédiablement incomplète. Si l'on ajoute les résultats formels obtenus avec la méthode de Cohen, la théorie des ensembles n'apparaît plus que comme un squelette axiomatique qu'on peut habiller des peaux les plus disparates. Certains, dont Mostowski (52), semblent accepter une floraison de théories des ensembles qui tirent leur suc d'une notion d'ensemble à la fois trop vague et trop riche pour ne donner naissance qu'à une seule pousse. Ils proposent de réduire l'ensemble des théories des ensembles (il n'y a pas de paradoxe ici!) à un commun dénominateur, afin de satisfaire aux besoins fondamentaux des mathématiques courantes.

Une façon de pallier les déficiences de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel ou de Bernays-Gödel selon d'autres (20), (65) serait l'introduction de nouveaux axiomes d'infini, tels les axiomes d'inaccessibilité, de singularité (ensembles singuliers des cardinaux ρ_0 de Mahlo) et de mesurabilité [7]. Ainsi Levy (45) peut-il utiliser une fonction (normale) définie sur l'ensemble des ordinaux pour réfléchir une

propriété de l'univers entier (des ordinaux) dans un ensemble transitif donné s . L'approche arithmétique, enrichie du principe de réflexion, permet donc, dans les mots même de Levy, "a fast trip into the realm of infinity". Les axiomes d'infini comportent des hypothèses existentielles concernant les "grands" cardinaux ou "grands" ensembles. Que signifie, par exemple, croire en l'existence d'un cardinal mesurable, selon Scott(60)? Une théorie des ensembles réaliste (en un sens platonicien ou autre) a du mal à se justifier philosophiquement [8]. D'autre part, une théorie idéaliste comme l'intuitionnisme semble être trop exigeante vis-à-vis des constructions ou structures admissibles et rejette la théorie des ensembles dans sa presque totalité. Il reste que la "construction" d'infinis hypothétiques n'est peut-être pas un jeu moins gratuit que l'invention des sur-mondes de la science-fiction (remplacée en théorie des ensembles par l'arithmétique transfinie et quelques structures algébriques privilégiées comme les idéaux ou les filtres)! Mais le jeu peut devenir trivial (32). Tarski (65) voudrait que l'on axiomatise des segments de plus en plus vastes de l'absolu cantorien (qui était aussi un paradis pour Hilbert!), mais il ne faut pas oublier que les théologies apophantiques ont dû céder la place aux théologies cataphantiques, après que l'on eût découvert que les attributs divins (langage des prédicats d'ordre ω^ω !) n'attribuaient plus rien à personne (lan-

gage imprédictif par excellence!)).

En général, les logiciens et mathématiciens qui sont enclins à admettre les axiomes "forts" sur les "grands" ensembles sont aussi portés à rejeter l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} =$

$$1 \text{ ou } \forall \sigma (2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{S(\sigma)})$$

sous sa forme généralisée, qui restreint le nombre des ensembles (sous-ensembles de ω). Mais l'hypothèse a résisté à tous les assauts jusqu'ici. L'axiome de constructibilité de

$$\text{Gödel (19)} \quad \forall x \exists \alpha [O_n(\alpha) \wedge x \in L_\alpha] \quad (39)$$

implique l'hypothèse du continu, mais Cohen a pu construire un modèle N qui englobe la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome de constructibilité, *i.e.* le modèle dénombrable M , par le théorème de Löwenheim-Skolem, de $Z-F + V = L$ est un sous-ensemble propre de N - dans lequel l'axiome de constructibilité et, par conséquent, l'hypothèse du continu sont faux. La construction de N exige l'addition d'ensembles génériques

$$\alpha_\delta \subseteq \omega, \quad 0 \leq \delta \leq 2^{\aleph_0}$$

clos relativement aux huit opérations J pour les ensembles constructibles ((19), chap. 5) et en plus convenablement définis par des séquences de propositions - convoyeuses d'informations P - elles-mêmes engendrées par des conditions de contrainte (forcing conditions) formellement déterminées [9] (4) (5). On a réussi à trouver une interprétation purement topolo-

gique de la notion de "forcing" et D. Scott (61) a donné une preuve simplifiée de l'indépendance de l'hypothèse du continu en utilisant les notions d'événements dans un espace de probabilité, de leur algèbre booléenne et de fonctions de probabilité définies sur l'ensemble des nombres réels (random reals).

Les résultats formels d'indépendance et de consistance relative n'ont sans doute pas l'importance philosophique qu'on est en droit d'attendre de résultats *fondamentaux*; la raison en est que les axiomes de Z-F ne sont pas assez "contraignants" pour définir de façon précise, *i.e.* axiomatiser, la notion d'ensemble au sens de la structure cumulative des types et l'introduction de nouveaux axiomes intuitivement motivés exige davantage que l'élaboration formelle des axiomes existants. En particulier, la rigueur informelle, dont Kreisel s'est fait l'avocat, suppose une réflexion philosophique capable d'intégrer l'ensemble des horizons thématiques de la problématique ensembliste, *e.g.* la notion de conséquence du second ordre. Par exemple, l'hypothèse du continu qui énonce que tout ensemble de nombres réels est en correspondance biunivoque (bijection), ou bien avec l'ensemble des entiers ou bien avec l'ensemble des nombres réels, est décidable au second ordre

$$\{(A \rightarrow HC) \in V^2\} \vee \{(A \rightarrow \neg HC) \in V^2\}$$

où A signifie la théorie des ensembles de Zermelo et V^2 l'ensemble des conséquences du second ordre. Le positivisme et

ses variantes formalistes qui refusent de prendre en considération les notions de validité intuitive ou de conséquence du second ordre se font un point d'honneur de n'admettre que la problématique formelle; par là, ils se leurrent sur le rôle de la formalisation qui ne sert qu'à mettre en forme les intuitions originelles et *parfois* à les corriger. Le problème de l'évidence, central dans les recherches fondamentales, est complètement escamoté par le positivisme. Il est *évident* que pour le positiviste, l'évidence et l'intuition logiques ou mathématiques en elles-mêmes ne signifient rien, mais c'est là faire aveu d'impuissance, tout comme certains défenseurs de la "linguistic analysis" (qui n'est parfois qu'une "monolinguistic catalysis") qui se glorifient de ne pas aborder les problèmes fondamentaux. Entre l'aveu d'impuissance ou d'impotence et le vœu d'omnipotence, le philosophe n'hésite pas qui s'est voué à la tâche "synoptique" de la philosophie, selon l'épithète de Platon.

L'intuitionnisme, ou plus généralement le constructivisme, en ne se déroband pas à la problématique des fondements, est sans doute plus proche de la philosophie, en particulier de la phénoménologie, dont il est partiellement l'héritier (18). Le concept de structure lui-même, notion primordiale s'il en est pour le formalisme et le structuralisme, a une teneur théorique qu'il faut dégager informellement. Mais la thèse posi-

tiviste ou formaliste s'appuie surtout sur la nature supposément mécanique du raisonnement logico-mathématique. La thèse semble partiellement confirmée si l'on s'en tient aux notions de récursivité, computabilité ou calculabilité (Turing) qui impliquent un calcul effectif, c'est-à-dire essentiellement mécanisable (voir Lacombe (40) et Smullyan (64)); mais il serait illusoire de penser que cela suffit pour démontrer le caractère mécanique de la pensée logique ou mathématique et les développements récents de la théorie des fonctions récursives et méta-récursives dépassent nettement le cadre strictement effectif, *e.g.* ensembles non énumérables récursivement. Quoi qu'il en soit, il faut d'abord définir ce que l'on entend par fondements combinatoires pour pouvoir délimiter l'aire d'effectivité du raisonnement logico-mathématique.

B. Les fondements combinatoires

Les fondements combinatoires s'opposent aux fondements ensemblistes dans la mesure où l'étude syntaxique des langages formels diffère de leur étude sémantique. La distinction est opérée entre la forme et le sens et l'accent est mis sur la notion de preuve combinatoire au lieu de celle de réalisation et de modèle. De plus, le raisonnement combinatoire est finitaire, alors que l'approche sémantique impose presque nécessairement des méthodes infinitaires (30). Finalement les fondements sémantiques ensemblistes ont une orientation réalisme

te, les fondements syntaxiques combinatoires, eux, sont résolument idéalistes. La nette démarcation des deux approches est d'un intérêt primordial pour les recherches fondamentales.

Les fondements combinatoires traitent évidemment de combinaisons finies d'objets concrets, tels les lettres de l'alphabet, les chiffres, les symboles d'un langage formel; les combinaisons peuvent être des arrangements divers, des permutations ou des substitutions, comme dans le cas des algorithmes markoviens, et des fonctions définies sur ces arrangements; on se rend compte facilement ici que, étant donné un nombre fini de combinaisons, il est possible de trouver une combinaison déterminée après un nombre fini d'essais, *i.e.* après avoir éliminé toutes les autres. On a donc la notion de preuve combinatoire qui correspond en pratique à une règle mécanique appliquée, par exemple, à un système binaire ou à un système d'égalités et d'inégalités.

Les résultats d'incomplétude pour les systèmes formels en général sont valides à plus forte raison pour les systèmes purement combinatoires. Ainsi peut-on montrer d'une façon combinatoire que la formule $(1 + a = Sa)$ pour la règle d'addition n'est pas dérivable dans le système de règles mécaniques définies pour l'addition en arithmétique numérique, puisque la formule n'est pas vraie pour l'ordinal ω : $1 + \omega \neq \omega + 1$. Les langages combinatoires sont les langages du cal-

cul des prédicats avec égalité, mais sans quantificateurs, leurs réalisations (combinatoires), qui comportent essentiellement des énumérations d'identités et des fonctions énumérantes (assurant le caractère combinatoire des langages considérés), peuvent être traduites dans le langage ensembliste, mais pas toujours, dû au fait qu'il existe des ensembles non énumérables par des fonctions mécaniquement définissables (récur­sives), *a fortiori* par des fonctions combinatoires (37). La notion de computabilité ou de calculabilité n'a donc qu'une portée relative; il n'existe pas, en particulier, d'algorithme (ou séquence de règles combinatoires) qui permette de décider si deux algorithmes donnés définissent une seule et même fonction (24). Mais les fondements combinatoires permettent une meilleure caractérisation du raisonnement mathématique que les fondements ensemblistes dans la mesure où la représentation du raisonnement mathématique par des systèmes formels, même si elle n'est pas complète, donne une idée de l'activité constructrice de l'esprit en dévoilant les structures formelles élémentaires de la pensée [10]. L'intuitionnisme (voir (32)), ou le constructivisme en général, sont plus proches des sources intuitives; seule l'approche prédicative en théorie des ensembles (29) (10) [11] où l'on n'emploie que des quantificateurs portant sur des ensembles déjà construits, s'apparente assez au constructivisme pour être justiciable d'un point de vue philosophique qui répu-

die l'ontologie naïve d'un univers ensembliste "sursaturé".

La théorie des démonstrations, dont Hilbert a jeté les fondements dans sa forme originelle finitiste (26) (28), impliquait une conception métamathématique sans doute trop étroite [12], mais qui a tout de même influencé par coups et contrecoups tout le développement ultérieur de la logique mathématique et a permis de formuler l'important problème de la consistance ou de la non-contradiction: $\text{Dem } (x, "B") \rightarrow \neg$

$\text{Dem } (y, "\neg B")$ c'est-à-dire la démonstration d'une formule implique qu'il n'y a pas de démonstration de sa négation dans le même langage; cependant, le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel, appelé aussi théorème sur les preuves de non-contradiction, énonce que la formule de P (arithmétique de Peano), qui établit que P est non contradictoire, n'est pas un théorème de P . Il existe des preuves de non-contradiction de P , mais elles ne sont pas combinatoires, *i.e.* elles comportent une analyse constructiviste d'objets abstraits et non plus d'objets concrets seulement. Ainsi la validité combinatoire d'un système formel combinatoire L_c dans lequel on a des axiomes pour les fonctions de successeur, les schémas de démonstration par induction et de définition par récurrence (37) ne suffit pas pour constituer une axiomatisation adéquate de la réalisation (combinatoire) du langage de base combinatoire. Le problème de Hilbert, qui était de trouver une preuve finitiste

ou combinatoire de la non-contradiction dans les systèmes formels, reste donc ouvert. Il est possible d'élargir le programme de Hilbert, soit en intégrant des notions sémantiques aux notions combinatoires (comme dans (63), VI, chap. 21), soit en introduisant des éléments intuitionnistes ou constructivistes, *i.e.* objets abstraits tels que fonctions, fonctionnelles, itérations, etc. Le développement des recherches constructivistes laisse présager qu'on verra de plus en plus l'intégration des méthodes s'allier à la différenciation des résultats. L'unité foisonnante ainsi réalisée ne pourra certainement garantir une réduction simplificatrice des fondements syntaxiques et sémantiques [13], mais le réalisme et l'idéalisme ont perdu leurs arêtes et sans doute apparaîtront de nouvelles conceptions plus souples et mieux aptes à faire la synthèse des connaissances logico-mathématiques. D'autre part, les fondements doctrinaires et stérilisants, comme le positivisme ou le formalisme grossier, perdent de plus en plus de terrain, à mesure que les recherches sur les fondements prennent de l'ampleur. En effet, le positivisme, qui proclame qu'il n'y a pas de problème des fondements, est réfuté par l'évidence du contraire... Si le praticien, qu'il soit logicien ou mathématicien, ne fait pas état de son orientation fondationnelle ou de ses préoccupations philosophiques - on comparera à cet égard (36) (14) et (8) pour le domaine français - cela ne signifie pas qu'il adopte impli-

citement l'attitude du formaliste. C'est plutôt la séparation des domaines qu'il consacre ainsi. On peut se demander si une telle scission - travail technique et réflexion philosophique - n'est pas la cause première de l'attitude formaliste. Il est rare que le technicien, le praticien, s'interroge sur sa pratique, laissant plutôt au chercheur fondationnel la tâche critique. Mais l'existence de langages mathématiques bien établis l'assurera du sens de sa démarche mathématique, la justification fondationnelle ne l'intéressant pas directement. Il semble que seuls les grands mathématiciens aient été en mesure de dominer leur champ de recherche pour en scruter les fondements; mais la recherche fondationnelle a modifié cette perspective et aujourd'hui, la logique, médiatrice de la philosophie et des mathématiques, a rendu le questionnement fondationnel *obligatoire*. C'est du moins ce que les travaux récents en théorie axiomatique des ensembles ont rendu apparent. La découverte de nouveaux axiomes requiert de nouvelles intuitions.

Les nouveaux axiomes qui seraient nécessaires pour enrichir la théorie des ensembles actuelle et pour résoudre, en particulier, l'hypothèse du continu, viendront probablement d'une conception plus harmonieuse des objets ou structures abstraites et de leur relation à l'activité constructrice qui les engendre. Il faut peut-être aller plus loin et proposer une approche encore plus radicale; l'intuitionnisme de Brouwer est

trop étroit et peut même confiner au solipsisme, parce qu'il veut dissocier complètement intuition mathématique et langage. Or il est possible d'élaborer une philosophie transcendantale du langage (post-kantienne et post-husserlienne) qui fonde l'intuition mathématique, tout en ne la réduisant pas, comme le positivisme ou le nominalisme, à la perception de configurations symboliques finies ou à l'adoption de règles de grammaire pour l'emploi correct de l'idiome logique ou mathématique; une conception, par exemple, qui se situe par-delà le réalisme et l'idéalisme traditionnels en montrant comment la *dialectique interjective* des structures du langage ne suppose ni un objet en soi, ni un sujet créateur, mais l'imbrication symétrique des structures et des actes de construction à l'intérieur du langage qui agit lui-même sur un plasma indéterminé (l'"unbestimmte Unmittelbarkeit" de la logique hégélienne), une matière première (la "ύλη" aristotélicienne) qui n'acquiert de réalité qu'en *interjection* [14]. Dans ce sens, non seulement de nouveaux axiomes pour la théorie des ensembles, mais de nouvelles notions primitives sont peut-être concevables. (Une notion, comme celle de "stase" - du grec "στασις" pour "position" - que nous avons déjà introduite ailleurs, avec la corrélation enstase-exstase, pourrait définir non plus une collection d'objets ou de propriétés, une totalité déterminée à partir de ses éléments, mais les éléments, eux-mêmes tireraient leurs déter-

minations d'opérations sur une "stase" indéterminée - qui ne peut être l'ensemble nul, résultat lui-même d'une opération antérieure - par symétrisation; toute opération détermine à la fois une enstase et une exstase, des éléments enstatiques et des éléments exstatiques. L'opération ainsi décrite, plus fondamentale que la définition de l'élément inverse en théorie des groupes ou de la notion de dualité en algèbre et ailleurs, permettrait de construire symétriquement l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres réels et pourrait conduire à de nouvelles intuitions concernant l'hypothèse du continu; mais c'est là un programme pour l'avenir [15] (voir aussi note 8); plus immédiat est le problème que suggèrent les considérations précédentes.

C. La théorie des catégories et les fondements des mathématiques.

La théorie des catégories, qui n'a qu'une trentaine d'années, a trouvé des apologistes, surtout parmi ses fondateurs, comme MacLane et successeurs, qui voudraient en faire la théorie fondamentale sur laquelle reposerait l'édifice entier des mathématiques. La théorie des catégories se pose donc en rivale à la théorie des ensembles; le problème des fondements "catégoriels" est un problème pour les recherches fondamentales et "fondationnelles" (au sens de fondation et non de fondement).

La notion de catégorie est définie de la façon sui-

vante (47) (Voir aussi (53)): une catégorie est constituée par des objets et des morphismes sur lesquels on applique parfois une loi de composition; plus formellement, on a pour une catégorie C une classe d'objets A, B, C, \dots et en plus:

1) à chaque paire d'objets est associée une famille d'ensembles disjoints $\text{hom}(A, B)$

2) pour chaque triplet d'objets A, B, C , on a une fonction: $f: (\alpha \in \text{hom}(A, B) \wedge \beta \in \text{hom}(B, C)) \rightarrow (\beta \circ \alpha \in \text{hom}(A, C))$

3) pour chaque objet A , on a une fonction:

$$f: A \rightarrow I_A \in \text{hom}(A, A)$$

et les lois usuelles d'associativité et d'identité.

Les problèmes posés par la théorie des catégories sont ceux qui concernent l'emploi de "grandes" catégories, comme la catégorie de tous les ensembles, la catégorie de tous les espaces topologiques, etc. On a même proposé une axiomatisation de la catégorie de toutes les catégories comme fondement des mathématiques, en utilisant la métacatégorie de toutes les catégories où les objets sont des catégories et où tous les morphismes sont des foncteurs (fonctions sur les catégories) (43).

Il est bien connu que la théorie des ensembles ne peut accueillir sans paradoxe ces "grands" ensembles ou ces "grandes" catégories. La question se pose donc de formuler un

langage qui soit apte à manier la catégorie de tous les ensembles ou de toutes les catégories. La théorie des ensembles de Bernays-Gödel, avec sa distinction des classes et des ensembles, permet l'emploi de la notion de classe de tous les ensembles, mais ne permet pas la libre formation des catégories de foncteurs, selon MacLane (49). Cependant, Feferman (12) a donné une réponse ensembliste au problème des fondements de la théorie des catégories en montrant que la pratique actuelle (en théorie des catégories) était traduisible dans ZFC (la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel plus d'axiome du choix) en y ajoutant le principe ou schéma de réflexion pour les "petites" catégories [le schéma de réflexion s'énonce:

$$\forall x_1 \in s \dots \forall x_n \in s [\phi^{(s)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n)]$$

pour toutes les formules ϕ avec variables libres $x_1 \dots x_n$; l'énoncé signifie que pour tous les x dans s (s pour l'ensemble des "petites" catégories *i.e.* dont les objets forment un ensemble) les formules ϕ de s sont équivalentes aux formules ϕ de l'univers ensembliste dans lequel le langage L de ϕ est défini: il y a donc bien une réflexion dans s des propriétés de l'univers entier de L (pour l'important principe de réflexion, voir (44)). D'autre part, Kreisel (35) indique que les caractéristiques d'auto-application ou d'auto-réflexion de certaines structures en théorie des catégories, telles la structure de semi-groupe sur les semi-groupes ou la

structure de catégorie sur les catégories, ne constituent pas un principe nouveau pour la théorie des ensembles où l'on a déjà, par exemple, la propriété de bon ordre qui est elle-même bien ordonnée, etc.

Il semble donc que, pour l'heure tout au moins, la théorie des catégories ne ravira pas à la théorie des ensembles son rôle "fondationnel".

3. FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

Les recherches fondamentales ou fondationnelles en mathématiques prennent aujourd'hui, comme on l'a vu, deux directions principales: l'orientation constructiviste (post-intuitionniste) au sens large et l'orientation non constructiviste (au sens large aussi!). La logique mathématique ou la métamathématique (au sens post-hilbertien de Tarski) que développent l'une et l'autre tendances - théorie des démonstrations, théorie de la récursivité, hiérarchies arithmétique et hyperarithmétique, etc. pour le constructivisme (Kreisel, Feferman, Myhill, Heyting, Kleene et autres *e.g.* (24)), théorie des modèles (commune aux deux tendances), logiques algébriques et méthodes algébriques, théorie des ensembles (imprédicative) etc., pour le non-constructivisme (Tarski, Henkin, Beth, Mostowski, Robinson, et autres, *e.g.* (57)) - prend appui sur un fond commun: les fondements sémantiques ensemblistes. Mais on peut dire aussi que les méthodes de la logique mathématique n'ont

pas de caractère ou de vocation fondationnelle en elles-mêmes (voir (56)). Les fondements relèvent-ils donc d'une démarche qui serait étrangère à la logique mathématique? D'autre part, la philosophie des mathématiques dans sa formulation la plus nette, s'en est toujours plus ou moins tenu à un kantisme modifié (voir, par exemple, H. Weyl (67)). De plus, les options traditionnelles, platonisme, intuitionnisme, positivisme ou formalisme, pragmatisme ou nominalisme ont perdu leur valeur descriptive et ne représentent plus qu'un intérêt théorétique limité. (voir (25) pour un exposé succinct des différentes "écoles"). On peut donc demander quel est l'apport de la philosophie des mathématiques à la problématique fondamentale. La réponse à ces deux questions, celle des fondements et celle de la philosophie des mathématiques, est intimement liée au statut de la logique mathématique à l'intérieur du savoir mathématique. Il semble bien que l'orientation constructiviste sera de plus en plus appelée à faire le partage entre le fondationnel et le non-fondationnel; cette fonction discriminatoire ne sera possible pour le constructivisme que s'il veut poser le problème des fondements dans toute son ampleur, c'est-à-dire dans sa signification théorétique. La problématique des fondements implique le dépassement des méthodes. Les méthodes, que ce soit en logique ou en mathématique ou, à ce compte, dans tout autre domaine, n'ont pas de légitimité naturelle. Le naturalisme

d'un donné primitif, qu'un Gödel, en particulier, professe (21) [16], n'a pas plus de justification philosophique que l'ontologie particulière ou déterministe en mécanique quantique qui voudrait contester l'interprétation prétendument idéaliste de Copenhague. En mathématiques aussi bien qu'en physique, le donné est un mythe, selon l'expression de Wilfrid Sellars. Pour les mathématiques, l'ensemble des nombres naturels N semblerait constituer - le nom le dit - le donné naturel sur lequel tout le reste peut être édifié, mais la réponse (constructiviste) de Dedekind à la question "Was sind und was sollen die Zahlen?" reste toujours valable. Pour la logique, le concept de déduction naturelle (Gentzen) pose le problème, qui n'est pas naturel, de la fonction et de la forme des langages logiques (les questions transcendantales de Husserl, pour être métalogiques, n'en sont pas moins essentielles pour la logique formelle). En général, le réalisme logico-mathématique n'est pas enclin à interroger les démarches *naturelles* de l'esprit, alors que le constructivisme ou idéalisme constructif cherche à radicaliser l'expérience logico-mathématique. Selon nous, l'idéalisme constructif, qui n'a rien à voir avec les illusions créationnistes d'un réalisme inversé, est une entreprise infinie, dans la mesure où il est une réflexion infinie de la "praxis" théorétique (il ne s'agit pas ici de renouveler la philosophie de Brunschvicg, mais, pour nous, son motif fondamental n'est

pas démodé). Les diverses théories idéalistes elle-mêmes sont le plus souvent susceptibles de critiques dévastatrices, ce qui n'interdit pas une radicalisation encore plus profonde de l'activité constructive. Les objets de l'activité constructive, que nous pouvons appeler langages construits ou structures, n'ont pas la réalité opaque d'un matériau qui serait pré-fabriquée, peut-on dire. Leur permanence ou leur immuabilité est une éternité constamment réanimée par le jeu d'une structuration continue. Une métaphysique valable pour tous les mondes possibles, selon le vœu de Heinrich Scholz, n'est *possible* que parce que tous les mondes possibles sont concevables par une activité conceptuelle.

Les structures logico-mathématiques ne peuvent prétendre à plus d'objectivité qu'un texte, c'est-à-dire un langage construit ou une structure en général. Mais la lecture du texte mathématique ou logique, son herméneutique, est plus uniforme que celle des autres textes, à cause de sa généralité abstraite, de sa pauvreté *intensionnelle*. Chaque conscience individuelle "lectrice" doit s'immerger dans le texte pour le reconstruire ou le réécrire, mais il s'agit bien d'une reconstruction; la conscience (ou l'activité constructive, il n'est pas nécessaire de substantialiser la conscience) doit émerger de nouveau du texte, soit pour le comprendre, soit pour le prolonger ou le dépasser. La dialectique des structures et des

actes de langage ("logaux") réconcilie donc la dialectique de la conscience (Husserl) et la dialectique des concepts (Cavaillès) dans un système "interjectif" ou "interstatique" où l'interrelation des pôles assure une homéostasie intégrative des genèses et des structures [17].

L'objectivité mathématique n'exige donc pas l'existence objective d'"êtres" mathématiques; les structures du langage tout en supportant l'intersubjectivité, suffisent pour fonder l'évidence mathématique. Une pareille conception entraîne bien sûr des décisions fondationnelles qui touchent, par exemple, aux "grands" ensembles. Le critère suprême de ces décisions relève d'une analyse théorétique (Kreisel dit "informelle") qui synthétise et radicalise à la fois la problématique logico-mathématique à l'intérieur des horizons théorétiques qui embrassent la totalité de l'expérience pensante (la philosophie). Nous appelons "métathéorétique" l'étude des fondements théorétiques en général - nous employons théorétique au lieu de théorique pour signifier que l'objet des fondements est constitué par des théories et des métathéories [18]. Dans les recherches fondationnelles en logique mathématique, il faut distinguer les fondements théorétiques logico-mathématiques ou métamathématiques (avec ou sans apport philosophique) des fondements théorétiques philosophiques (ou autres). La "métathéorétique" est l'étude critique des fondements théorétiques dans

leur ensemble - nous réservons "épithéorétique" pour l'étude qui a pour objet une théorie particulière. Il faut reconnaître que la plupart des recherches fondationnelles en logique mathématique portent sur les fondements théorétiques logico-mathématiques. La métamathématique contemporaine est une discipline logique (et mathématique) qui semble faire peu appel aux théories philosophiques, si ce n'est implicitement. Si les mathématiques sont l'étude des structures abstraites au sens de Bourbaki (voir (17)), on peut dire que la logique mathématique a pour objet l'étude des systèmes de structures abstraites ou systèmes structurels et de leurs relations formelles, *e.g.* systèmes relationnels, systèmes équationnels au sens de Tarski. La logique mathématique a pour objet les théories mathématiques; elle a donc dès l'abord une fonction fondatrice. Si les recherches fondationnelles en logique mathématique n'impliquent pas nécessairement le recours à une conception philosophique donnée, elles requièrent une justification théorétique générale, *i.e.* métathéorétique - ce qu'on a pu appeler déjà "métalogique".

La thèse de Putnam (54), qui soutient que les mathématiques n'ont pas besoin de fondements, est elle-même de nature fondationnelle, puisque Putnam voudrait une traduction "modaliste" de la théorie des ensembles, donc une justification théorétique d'orientation constructiviste [19]. Qu'on le

veuille ou non, les résultats de validité, de complétude et d'incomplétude, de consistance (relative) et d'indépendance, ont un caractère fondationnel, dans la mesure où ils légitiment ou invalident certaines théories ou certaines thèses logiques ou mathématiques. En retour, la justification théorétique (ici philosophique) de ces mêmes résultats n'est pas toujours essentielle. Leur valeur "évidentielle" est parfois minimale, comme dans le cas de l'indépendance de l'hypothèse du continu, et la signification théorétique (philosophique) des résultats ne va pas toujours de pair avec leur validité formelle. Le rôle de la réflexion philosophique est donc difficile à évaluer; il peut s'agir d'une analyse logique de concepts mathématiques ou le plus souvent d'une analyse informelle rigoureuse qui s'inspire plus ou moins de principes philosophiques, *e.g.* évidence, intuition, etc.

La plupart du temps, les fondements philosophiques ne sont pas (et n'exigent pas d'être) explicités en une conception bien définie, qui correspondrait, disons, aux options de l'éventail traditionnel de la philosophie des mathématiques. Ces options, on l'a répété, sont à la fois trop générales et trop tranchées pour servir de point d'appui à la recherche. En d'autres mots, la philosophie des mathématiques, telle qu'on l'a entendue jusqu'à maintenant, marque un retard sur les recherches fondationnelles de la logique mathématique et ce re-

tard ne peut être comblé que par une meilleure compréhension de la démarche logico-mathématique (voir (22)).

On peut se demander, à la fin, quelles sont les conclusions que l'on peut tirer maintenant pour la philosophie des mathématiques. Tout d'abord on ne peut plus "faire" la philosophie des mathématiques directement, c'est-à-dire sans la médiation de la logique mathématique, à l'exemple de Desanti (9). La philosophie des mathématiques de type russellien et wittgensteinien et leurs variantes (voir le compte rendu par Kreisel de *Remarks on the Foundations of Mathematics* de Wittgenstein (27)) n'ont pas l'ampleur théorétique pour pouvoir embrasser l'activité mathématique et logique dans toutes ses dimensions. Quant aux autres philosophies des mathématiques, celles par exemple d'inspiration kantienne, elles devraient être repensées en fonction de la nouvelle problématique logico-mathématique. Il faudrait sans doute remplacer la philosophie des mathématiques par ce que nous pouvons appeler la "théorétique logico-mathématique" [20]; une telle théorétique ou théorie globale, tout en se tenant proche de la logique mathématique, verrait à intégrer la problématique logique et mathématique dans l'élément général d'une métathéorétique, conception d'ensemble des fondements théorétiques du savoir. Si la philosophie des mathématiques est encore possible, elle devra découler d'une théorétique logico-mathématique qui elle-même relève

d'une conception unifiante des structures théorétiques. Plus encore, il n'y a pas de philosophie propre aux mathématiques, mais uniquement une ou des conceptions assez larges pour assigner une place, privilégiée sans doute, aux mathématiques, dans un système théorétique global. Et cette ou ces conceptions suffisamment englobantes ne peuvent avoir accès aux mathématiques, sur le plan théorétique, que par la médiation de la logique mathématique. C'est ainsi que dans le système général de la métathéorétique, la théorétique logico-mathématique représente l'approche intégrale des fondements théorétiques de la logique et des mathématiques.

4.

APPENDICE I

LE PRINCIPE DE REFLEXION

Le principe métamathématique de construction transarithmétique que nous avons décrit en note 10 s'applique de façon particulière au principe de réflexion en théorie axiomatique des ensembles. Comme les divers principes de réflexion selon Levy (44) sont apparentés aux extensions arithmétiques de Tarski et Vaught [21], on pourrait leur donner le nom d'"extensions transarithmétiques" dans la perspective constructiviste que nous adoptons [22].

Le principe de réflexion d'après Kreisel (32)

$$\forall \xi \exists n (\xi < n. (\forall x : n) (\forall y : n) \dots \\ \{ \phi(x, y, \dots) \leftrightarrow \phi^{(n)}(x, y, \dots) \})$$

où $\phi^{(n)}$ est la restriction à n des variables de ϕ dérive sa légitimité de l'existence d'un *supremum* dans la structure cumulative des types

$$(\forall \xi < \alpha) \exists n \phi(\xi, n) \rightarrow \\ (\exists \xi < \alpha) (\exists n < \rho) \phi(\xi, n) \quad [23]$$

pour toute formule ϕ . (Krivine utilise la même méthode pour sa formulation (39) p. 66:

$$\forall \alpha (\exists \beta > \alpha) \forall x_1 \dots \forall x_k [x_1 \in V_\beta \text{ et } \dots \\ \text{et } x_k \in V_\beta \rightarrow (E(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow E^{V_\beta}(x_1, \dots, x_k))] \cdot)$$

La généralisation de P. Bernays dans "Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre" [24]

$$A \rightarrow (E y) (\text{trans}(y) \wedge \text{Rel}(y, A) \\ \text{trans}(a) \leftrightarrow (u)(v) (u \in v \wedge v \in a \rightarrow u \in a))$$

pour les ensembles transitifs à partir de la formulation de Levy (45)

$$\exists u [(u \wedge (x_1) \dots (x_n) (x_1 \in u \wedge \dots \wedge x_n \in u. \\ \rightarrow .A \leftrightarrow \text{Rel}(u, A))],$$

ou x_1, \dots, x_n sont des variables libres pour $\phi(x_1, \dots, x_n)$, expose plus clairement le principe de relativisation (Relativierung) qui rend compte de la fonction essentielle du schéma de réflexion. La totalité qui est réfléchie ou relativisée

dans une formule restreinte à un type n , dans le cas de la formulation kreiselienne, ou dans une formule restreinte à des variables libres données, comme dans notre dernier cas, est une totalité infinie actuelle ou actualisée ou encore achevée (hypothétiquement). Nous avons montré dans le texte principal comment Feferman utilise le principe de réflexion pour "manipuler" les "grandes totalités" de la théorie des catégories dans son approche fondationnelle ensembliste.

Mais indépendamment de l'utilité du principe en théorie axiomatique des ensembles transfinis et en théorie des catégories, on peut se demander quelle est sa justification fondamentale (philosophique) dans une perspective constructiviste qui n'accepte qu'une totalité potentiellement infinie.

On peut bien admettre que les axiomes "forts" de l'infini pourraient éventuellement permettre de "décider" certaines questions essentielles - on a vu que ce n'était pas le cas pour l'hypothèse du continu [25] - tout en faisant l'économie des hypothèses existentielles (31). Même dans ce cas, la "suspension" du procès arithmétique, dont nous supposons toujours que c'est un procès constructif potentiellement infini, apparaît peu convaincante. La hiérarchie cumulative $\omega + \omega \dots$ ou la hiérarchie transfinie $\omega < \omega^\omega$ ou $\mathcal{L}(n) < \mathcal{L}^s(n)$ elles-mêmes reposent sur un principe d'itération transarithmétique modelé sur le procès arithmétique fini enrichi de "transfinités"

pour le moins hypothétiques...

Il faut distinguer, à la fin, les principes ensemblistes de réflexion que l'on vient de discuter des principes combinatoires de réflexion - qui réfléchissent la prouvabilité d'une proposition en validité: "Si une proposition ϕ (d'un langage formel S) est prouvable dans S , alors ϕ est valide".

Kreisel et Levy, dans l'article cité plus haut (note 23 de l'appendice), distinguent trois principes de réflexion "démonstrative": le principe de réflexion locale qui s'énonce

$$\forall p [\text{Prov}_S (P, " \phi ") \rightarrow \phi]$$

où " ϕ " est un terme dont la valeur est le nombre de Gödel pour ϕ , le principe de réflexion globale

$$\forall p \forall a [\text{Prov}_S (p, a) \rightarrow V_S (A)]$$

où V signifie vérité (on sait que Tarski a montré qu'une telle définition "globale" de la vérité n'est pas possible pour les systèmes formels) et le principe de réflexion uniforme qui vient s'insérer entre les deux premiers

$$\forall p \forall n [\text{Prov}_S (p, s(" \phi ", n)) \rightarrow \phi(n)].$$

Les principes de réflexion locale et uniforme expriment la réflexivité, dans le sens que c'est la prouvabilité d'une proposition donnée dans un système formel défini qui se réfléchit (par nous) en validité et non plus l'univers ensembliste ou "catégoriel" qui se réfléchit (sans nous!) dans un de

ses sous-univers.

Ce dernier problème de la réflexivité formelle combinatoire se situe à l'intérieur de la problématique des résultats d'indécidabilité syntaxique (Gödel) et de relativité sémantique (définition tarskienne de la vérité) pour les systèmes formels et se subordonne à ce que nous appelons le "principe d'expressibilité universelle" non seulement dans les systèmes formels, mais aussi pour le constructivisme en général (y compris l'intuitionnisme). Mais c'est là une question que nous traiterons ailleurs.

APPENDICE II

LA NOTION D'ATTRIBUT OU DE PROPRIÉTÉ

Nous avons indiqué dans le texte principal qu'il existe trois variantes de la notion d'ensemble, une première vague, une seconde précise (qui correspondrait à la définition cantorienne "Menge" et à son axiomatisation par Zermelo et Russell) et une troisième plus fondamentale, mais insuffisamment explorée. Cette troisième notion est celle de propriété ou d'attribut. Russell, entre autres, a défendu (cf. *Introduction to mathematical philosophy*, London, 1919) cette dernière notion *intensionnelle* (critiquée notamment par Quine). Russell

soutient que la notion extensionnelle d'ensemble est réductible à la notion intensionnelle de propriété, alors que celle-ci n'est pas réductible, même théoriquement. Pour Russell il y a donc priorité de la notion de propriété ou d'attribut sur celle d'ensemble. Récemment P. C. Gilmore, reprenant le programme de Russell, s'est fait l'avocat de la notion intensionnelle (en particulier dans "Attributes, sets, partial sets and identity" in *Compositio Math.* 20 (1968), p. 53-69.

Si la notion d'attribut présente certains avantages philosophiques - le philosophe a une longue habitude des attributs - et permet, par exemple, de formuler plus concrètement les axiomes d'ordre supérieur en théorie des ensembles, *e.g.* l'axiome de compréhension du second ordre

$$\forall a \forall X \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow (y \in a \wedge X(y))]$$

(où X peut être interprété comme la propriété d'"être un sous-ensemble de a ") ou encore ceux de la théorie ramifiée des types, la réduction de la notion d'ensemble à celle de propriété ne restitue qu'une partie de la théorie classique des ensembles (voir le compte rendu critique de l'article de Gilmore par S. Feferman dans *Mathematical Reviews*, vol. 37, no 4, April 1969, no 3910). La notion de "stase" que nous avons proposée, pour être intensionnelle, ne confine pas cependant au réalisme des propriétés ou au nominalisme des attributs comme "façons de parler".

Il est certainement possible d'explorer davantage la notion de propriété, mais il faudra l'"abstraire", sans doute dans le sens de structure abstraite, comme notre notion de "stase". Inutile de dire qu'un long travail de formalisation et davantage d'axiomatisation s'impose ici, sans parler des exigences plus fondamentales encore de rigueur informelle.

D'autre part, l'analyse prédicative au sens de Feferman (10) et la théorie de la récursivité (voir Shoenfield (62) chap. 7) avec ses hiérarchies analytique, arithmétique et hyperarithmétique et les relations Σ_n (pour quantificateurs existentiels), Π_n (pour quantificateurs universels) et Δ_n (pour les relations avec les deux sortes de quantificateurs) représentent une approche parallèle à la théorie axiomatique des ensembles et il est permis d'espérer que le concours, si ce n'est la convergence, des deux approches (prédictive et imprédictive) aidera à mieux définir la notion d'ensemble. La notion de prédictivité a une longue histoire, de Poincaré, Russell et Weyl à Feferman et Kreisel; celle de récursivité est plus récente - et celle de métarécursivité et d'ensembles métarécursifs plus récente encore. Il semble cependant qu'il soit de plus en plus difficile de s'en tenir à la simple prédictivité, par exemple, dans les recherches sur les sous-systèmes de l'analyse classique, et là aussi bien qu'en théorie axiomatique de la récursivité et en théorie axiomatique des ensembles la

chasse aux axiomes est perpétuelle... Ici encore il faudra peut-être chasser d'autres bêtes et avec d'autres armes.

APPENDICE III

LE PROCES TRANSARITHMETIQUE

Le principe métamathématique de construction ou d'extension transarithmétique, véritable principe de discontinuité arithmétique, que nous avons formulé en note 15 peut être formalisé de la façon suivante

$$\forall x \forall y \exists z (x > z \wedge y > z) \rightarrow \phi(x, y, z)$$

$$\leftrightarrow \phi(x, y, \Theta)$$

où Θ signifie une totalité achevée. Si on veut étendre la formule aux cardinaux inaccessibles et mesurables, on obtient

$$\forall n \forall \text{inac } x \forall \text{mes } y \{ [(\text{inac } x > z \wedge \text{mes } y > z)$$

$$\rightarrow (\exists z > n)] \leftrightarrow \exists \Theta [(\Theta \text{ transar}) \text{inac } x \wedge \text{mes } y] \}$$

où n signifie nombre naturel. La conclusion qui en découle est donc $\Theta \rightarrow \sim A$ où A désigne le procès infini de la construction arithmétique tel que défini dans notre article. Cependant la théorie réaliste des grands cardinaux exige

$$CT \rightarrow \Theta \wedge A.$$

(CT pour "cardinaux transfinis").

NOTES DU CHAPITRE VII

- [1] Dans cet article sur les problèmes généraux de la logique mathématique et des fondements des mathématiques, nous nous sommes guidé souvent sur les travaux de Georg Kreisel, en particulier les *Eléments de logique mathématique. Théorie des modèles* (36), écrit en collaboration avec J. L. Krivine. Nous utilisons surtout les travaux de Kreisel qui relèvent directement de la problématique des fondements sans tenir compte d'une façon précise des recherches qui portent sur les mathématiques intuitionnistes et constructivistes. Le Professeur Kreisel nous a gracieusement permis d'utiliser en particulier, le texte manuscrit des additions de l'édition allemande de (36) à paraître. Nous tenons à remercier sincèrement le professeur Kreisel pour ses nombreuses suggestions concernant cet article et pour son empressement constant, aussi bien dans la correspondance que nous avons échangée que dans les conversations que nous avons eues avec lui à l'Université Stanford. L'auteur était "Research Fellow" dans le "Group in Logic and the Methodology of Science", Département de mathématiques de l'Université de la Californie à Berkeley, au moment de la rédaction de cet article. Nous tenons à remercier le professeur Leon Henkin qui a rendu possible notre séjour à Berkeley. Cet article a été publié à l'origine dans *Dialogue*, vol. X (1971), no 2.
- [2] Voir notre article "The use of the axiomatic Method in Quantum Physics" à paraître dans *Philosophy of Science*.
- [3] Cf. A Mostowski (52) p. 94-95. Pour le problème général des fondements de la théorie des ensembles, voir (13).
- [4] On peut inclure ici bien sûr la preuve de l'indépendance

de l'hypothèse du continu de P. J. Cohen. Là-dessus voir (34), p. 360.

- [5] On a d'abord l'axiome du second ordre, d'où on dérive le schéma du premier ordre (compréhension, remplacement, régularité). Les problèmes du calcul des prédicats du second ordre et d'ordre supérieur n'ont été abordés que récemment (et timidement!). Pour une idée générale de ces problèmes et de leurs fruits possibles, voir R. Montague (50). C'est sans doute dans la direction des concepts de second ordre ou même d'ordre supérieur que la logique mathématique contemporaine va prendre un tournant décisif.
- [6] Le théorème de Gödel s'applique évidemment à tous les systèmes formels. Voir la forme rudimentaire qu'en donne Smullyan (64), p. 45 ou l'exposé détaillé de Ladrière (41).
- [7] Pour ces concepts, voir Shoenfield (62).
- [8] La théorie "actualiste" des ensembles (qui admet un ou plutôt "des" infinis actuels) ne se compare pas, sur le plan philosophique, à la théorie d'une totalité seulement potentielle (30). Ce qui fait défaut ici, c'est une analyse conceptuelle de l'idée d'infini, qui montre comment l'infini conçu comme totalité n'est que l'achèvement d'un procès. L'infini ou mieux l'"effini" est processif; le fini est le procès "itérant" de l'infini "itéré". Une analyse plus poussée du concept d'infini pourrait montrer comment l'infini est engendré par "sursomption" ("Aufhebung" voir (15)) du fini: le procès de l'infini est lui-même fini. Le concept d'infini n'est jamais qu'une totalisation maximale (cf. intégration à la limite). Cette totalisation peut elle-même être l'objet d'une nouvelle totalisation et ainsi de suite. D'autre part, le fini lui-même n'est concevable que parce qu'il peut être dépass-

sé, *i.e.* par le passage à la limite idéale. Autrement dit, les deux concepts sont essentiellement "interrelatifs", n'ont de sens que définis l'un par l'autre (voir notre analyse du concept de "stase" plus loin). Mais seul l'infini "dénombrable" a une fonction conceptuellement bien définie, parce qu'il a le sens d'achèvement (idéal) du procès - parallèlement aux concepts grecs de fini et d'infini qui signifiaient respectivement achevé et inachevé. Il serait possible de montrer *a priori*, dans ce sens, que l'univers physique - macrocosmique et microcosmique - ne peut être fini ou que la proposition "il existe une totalité physique infinie" est vraie *a priori*, pourvu que l'on définisse bien les termes en présence. Totalité par exemple, doit signifier "ensemble ouvert" dont les membres sont dénombrables. La proposition proprement interprétée veut dire qu'il n'y a pas d'ensemble vide dans l'univers physique, puisque l'intersection d'un ensemble vide et d'un ensemble non-vide est elle-même vide. Ce principe de "plénitude" (anaxagoréen!) - continuité ou uniformité et connexion topologiques - est plus fort que le principe d'uniformité relativiste ou d'analyticité quantique.

[L'argumentation de Mélissos, le disciple de Parménide, qui soutenait contre son maître que l'Etre est illimité (mais pour nous l'argument topologique remplace l'argument ontologique) est toujours valable]. Matière à spéculations futures.

- [9] Pour un exposé clair de ces résultats, voir Mostowski (51) et (52).
- [10] Pour la problématique générale de la logique combinatoire, on pourra consulter (6) et (7). Pour la théorie des fonctions récursives, l'exposé le plus récent et le plus complet est celui de H. Rogers (58), mais Rogers ne traite à

aucun moment du rôle fondationnel de la théorie des fonctions récursives. Les recherches de Kreisel et autres sur la métarécurtivité, par exemple, semblent plus riches, "fondationnellement" parlant.

- [11] En fait, l'approche prédicative réussit à reconstruire *presque* totalement les mathématiques imprédicatives (voir (32) et (33), pour des informations d'ordre général (66)). Les résultats récents ((34) (11) et les articles de Kreisel et Feferman dans (59)) disent cependant quel prix il faut payer: ou bien une certaine insuffisance des résultats ou bien un peu plus de *souplesse imprédicative*.
- [12] Elargie notamment par Lorenzen (46).
- [13] La comparaison des deux espèces de fondements montre que les fondements sémantiques sont plus profonds et plus riches - les notions sémantiques fondent plus de mathématiques courantes - alors que les fondements syntaxiques, s'ils ont une moins grande *intension*, sont plus généraux. Notons que (36) devrait être suivi par un volume sur la théorie des démonstrations, mais Kreisel a renoncé pour le moment à ce projet, sans doute en raison des avantages de l'approche sémantique (voir (38) Introduction).
- [14] Il s'agit ici d'une interaction non pas physique, mais épistémologique ou phénoménologique au sens philosophique. L'interaction observé-observateur en mécanique quantique est du même ordre (logique ou "logal", *i.e.* en relation avec "λόγος"). Pour l'avoir ignoré, certains ont professé et continuent de professer les pires absurdités philosophiques.
- [15] Une première démarche dans la discussion de l'hypothèse du continu serait sans doute l'examen critique des axiomes d'inaccessibilité et de mesurabilité. Gödel, qui avait parrainé l'axiome de constructibilité, dont on sait qu'il

implique l'hypothèse du continu, pensait qu'il était probablement faux (20). L'axiome de mesurabilité entraîne la négation de l'axiome de constructibilité. Mais on peut se demander si la légitimité de ce dernier axiome n'est pas mieux assurée que celle des deux autres. Si l'on exclut le principe de réflexion (45), basé sur une totalisation idéale, on peut dire que les axiomes forts d'infinité sont fondés "négativement", par application d'un principe de limitation d'une totalité ou d'un procès potentiellement infinis (ou singularisation d'ensembles selon Mostowski (52)). L'actualisation d'un procès potentiellement infini et son achèvement - pour ensuite le dépasser - se ramènent donc essentiellement à la *négation* du procès même. Qu'on utilise ce même procès pour ensuite "construire" une nouvelle hiérarchie "transarithmétique", (sans rapport avec la hiérarchie hyperarithmétique), peut-on dire, comme dans le cas des cardinaux inaccessibles (arithmétiquement) et mesurables (avec mesure additive finie sur tous les sous-ensembles d'un ensemble non dénombrable), apparaît peu justifié - philosophiquement, du moins. La proposition métamathématique "Tout axiome d'infinité au sens fort est transarithmétique, *i.e.* peut être obtenu par la négation du procès arithmétique potentiellement infini et sa réapplication subséquente" indique qu'il y a peu d'espoir de montrer la vérité ou la fausseté de l'hypothèse du continu dans cette direction. La dialectique douteuse que nous avons mise à jour plus haut implique, en particulier, qu'on peut formuler un nombre indéfini, si ce n'est infini, d'axiomes forts sur les "transfinités" ou les infinités transarithmétiques. Si la soif des "transfinités" n'est pas satisfaite par la puissance du continu, peut-être est-ce une fausse soif.

- [16] Le cas de Gödel est intéressant. Son réalisme ne semble pas incompatible avec un constructivisme "large" (21). La même remarque s'appliquerait dans un contexte différent à Beth ((13) Concluding Remarks). Comme Bernays, (voir en particulier, l'article dans Lakatos (42)), Gödel hésiterait peut-être aujourd'hui à majorer l'importance des recherches sur les "hautes puissances" ou les "grands cardinaux". Encore une fois, nous soulignons l'inadéquation des "thèses" traditionnelles vis-à-vis des recherches fondationnelles et la nécessité d'une nouvelle synthèse.
- [17] Voir l'ouvrage de Desanti (9) et notre critique (18). Desanti voudrait garantir l'objectivité des structures mathématiques aux dépens de l'intuition ou de la conscience mathématique, mais, pour nous, il ne réussit qu'à objectiver le "texte" mathématique sans le fonder dans le langage logico-mathématique.
- [18] Théorétique est justifié par le grec "θεωρητικός"; l'anglais a "theoretical" et l'allemand "theoretische". L'emploi substantif de "métathéorétique" est de nous.
- [19] Malgré que Putnam en ait, le recours à la logique modale a une signification philosophique: à l'origine, la logique modale avait pour but (constructiviste) de radicaliser l'étude du raisonnement logique.
- [20] De même on peut substituer à la philosophie (le plus souvent inutile ou inutilisable) de la physique quantique une "théorétique quantique", la mécanique quantique (relativiste et non relativiste) jouant le même rôle par rapport à l'ensemble de la physique que la logique mathématique (ensembliste et non ensembliste) par rapport à l'ensemble des mathématiques.
- [21] A. Tarski et R. L. Vaught "Arithmetical extensions of relational systems" in *Compositio Math.* vol. 13 (1957),

p. 81-102.

- [22] Pour une défense récente de l'orientation constructiviste, voir P. Lorenzen "Constructive Mathematics as a philosophical problem". *Composition Math.* vol. 20 (1968), p. 133-142. Pour des exposés techniques sur le constructivisme, voir *Constructivity in Mathematics*, ed. by A. Heyting, North-Holland, Amsterdam 1957, en particulier les contributions de Kreisel, Lorenzen et Mostowski.
- [23] Cela explique la remarque de Kreisel dans son article avec A. Levy "Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems" in *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 14 (1968), p. 97-148, à propos du principe de réflexion (illimité) de Montague:
- "Si ϕ est valide dans l'univers ensembliste, alors ϕ est valide aussi dans un ensemble quelconque a_ϕ ".
- [24] *Essays on the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1962, p. 3-49.
- [25] L'hypothèse du continu a encore du sens dans notre optique constructiviste, mais ce sens il faut le chercher dans l'engendrement des nombres réels (le continu) à partir des nombres naturels. Peut-être faut-il chercher dans la direction de ce que nous pouvons appeler les "ensembles génétiques" de nombres naturels? Le programme constructiviste a des limitations évidentes (à l'heure présente), mais il tire sa vitalité de la pensée que tout ou presque tout reste à faire, c'est-à-dire à "construire".

5.

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) Addison, Henkin, Tarski (eds) *The Theory of Models. Proceedings of the 1963 Symposium on Model Theory in Berkeley, California*, North-Holland, Amsterdam, 1965.
- (2) Barwise, J. (ed.) *The syntax and semantics of infinitary languages. Lectures Notes in Mathematics*, vol. 72, Springer, Berlin, 1968.
- (3) Beth, E. W. *The Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1959.
- (4) Cohen, P. J. "The Independence of the Continuum Hypothesis" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, I, vol. 50 (1963), p. 1143-1148, II, vol. 51 (1964), p. 105-110.
- (5) Cohen, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, New York and Amsterdam, 1966.
- (6) Curry, H. B. et Feys, R. *Combinatory Logic*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1958.
- (7) Curry, H. B. *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- (8) Daigneault, A. *La théorie des modèles en logique mathématique*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1964.
- (9) Desanti, J. T. *Les idéalités mathématiques*, Editions du Seuil, Paris, 1968.
- (10) Feferman, S. "Systems of Predicative Analysis" in *The Journal of Symbolic Logic*, I, vol. 29 (1964), p. 1-30, II, vol. 33 (1968), p. 193-220.
- (11) Feferman, S. "Lectures on proof theory" in *Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds 1967, Lectures Notes in Mathematics*, vol. 70, Springer, Berlin, 1968.
- (12) Feferman, S. "Set-theoretical Foundations of Category

- Theory" in (48) p. 201-232.
- (13) Fraenkel, A. et Bar-Hillel, Y. *Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1958.
- (14) Fraissé, R. *Cours de logique mathématique*, T. I. *Relation, formule logique, compacité, complétude*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- (15) Gauthier, Y. "Logique hégélienne et formalisation" in *Dialectique*, vol. VI, no 2, 1967, p. 151-165.
- (16) Gauthier, Y. "The Use of the Axiomatic Method in Quantum Physics" *Philosophy of Science*, vol. 38, (1971), no 3.
- (17) Gauthier, Y. "La notion théorétique de structure" in *Dialectica*, vol. 23, nos 3-4, 1969, p. 217-227.
- (18) Gauthier, Y. "Phénoménologie et Mathématiques" in *Dialogue*, vol. XI, (1972), no 2.
- (19) Gödel, K. *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.
- (20) Gödel, K. "Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics (1946)" in *The Undecidable*, ed. by M. Davis, Raven Press, New York, 1965, p. 84-88.
- (21) Gödel, K. "What is Cantor's Continuum Hypothesis?" in *Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
- (22) Hintikka, J. (ed.) *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, London, 1969.
- (23) Karp, C. R. *Languages with expressions of infinite length*, North-Holland, Amsterdam, 1964.
- (24) Kleene, S. C. *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1952.
- (25) Körner, S. *The Philosophy of Mathematics*, Harper, New York

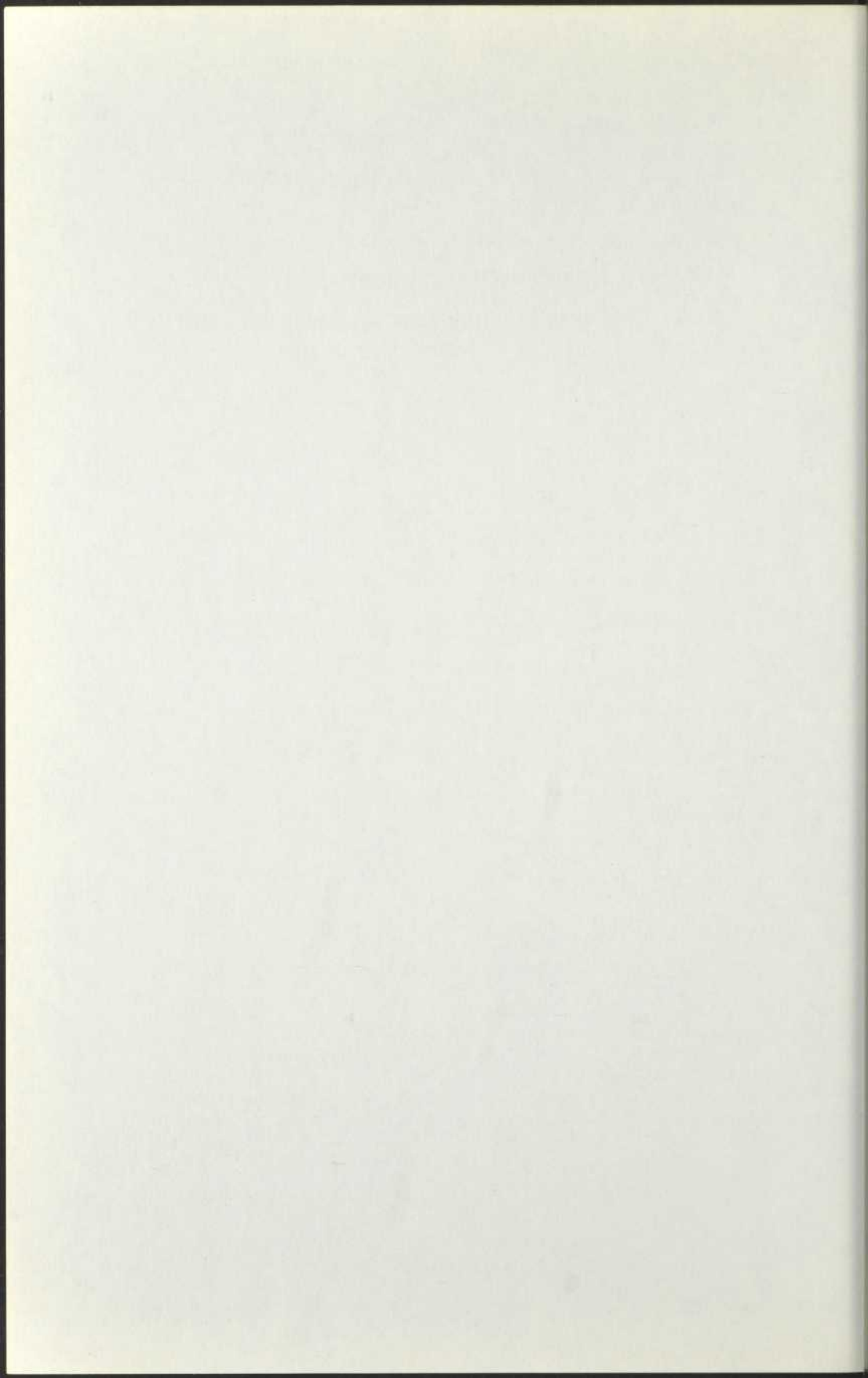
1960.

- (26) Kreisel, G. "A variant to Hilbert's theory of the foundations of arithmetic" in *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. IV (1953-1954), p. 107-129.
- (27) Kreisel, G. Compte-rendu de *Remarks on the Foundations of Mathematics* de L. Wittgenstein in *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. IX (1958), p. 135-158.
- (28) Kreisel, G. "Hilbert's Programme" in *Dialectica*, vol. 12, nos 3-4, 1958, p. 346-372.
- (29) Kreisel, G. "La prédicativité", *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 88 (1960), p. 101-128.
- (30) Kreisel, G. "Set-theoretical problems suggested by the notion of potential totality" in *Infinistic Methods*, Pergamon Press and PWN, Oxford and Warszawa, 1961, p. 103-140.
- (31) Kreisel, G. "Informal rigour and Completeness Proofs" in (42) (22).
- (32) Kreisel, G. "Mathematical Logic" in *Lectures on Modern Mathematics*, vol. III, ed. by Saaty, Wiley, N. Y., 1965, p. 95-195.
- (33) Kreisel, G. "Mathematical Logic: what has it done for the philosophy of mathematics?" in *Bertrand Russell: Philosopher of the Century*, Allen and Unwin, London, 1967, p. 201-272.
- (34) Kreisel, G. "A Survey of Proof Theory" in *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 33, no 3, Sept. 1968, p. 321-388.
- (35) Kreisel, G. "Appendix II" à l'article de S. Feferman in (48) p. 232-245.
- (36) Kreisel, G. et Krivine, J. L. *Éléments de logique mathématique. Théorie des modèles*, Dunod, Paris, 1967.
- (37) Kreisel, G. "Appendices I et II" à (36).
- (38) Kreisel, G. and Krivine, J. L. *Elements of Mathematical Logic. Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1967.

- (39) Krivine, J. L. *Théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F., Paris, 1969.
- (40) Lacombe, D. "La théorie des fonctions récursives et ses applications" *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 88, 1960, p. 393-468.
- (41) Ladrière, J. *Les limitations internes des formalismes*, Béatrice Nauwelaerts, Paris-Louvain, 1957.
- (42) Lakatos, I, (ed.) *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- (43) Lawvere, W. F. "The Category of Categories as a foundation for Mathematics" in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Folla 1965*, Springer, Heidelberg and New York, 1966.
- (44) Levy, A. "Principles of Reflection in Axiomatic Set Theory", *Fund. Math.*, XLIX (1960), no 1, Warszawa, p. 1-10.
- (45) Levy, A. "Axiom Schemata of strong infinity in Axiomatic Set Theory" in *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 10 (1960), p. 223-238.
- (46) Lorenzen, P. *Metamathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.
- (47) MacLane, S. *Homology*, Springer, Berlin, 1963.
- (48) MacLane, S. (ed.) *Reports of the Midwest Category Seminar III, Lectures Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 1969.
- (49) MacLane, S. "One universe as a foundation for Category Theory" in (48).
- (50) Montague, R. "Set Theory and higher-order logic" in *Formal Systems and Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 131-148.
- (51) Mostowski, A. *Thirty years of Foundational Studies*, Basil Blackwell, Oxford, 1966.
- (52) Mostowski, A. "Recent results in Set Theory" in (42)

- p. 82-96.
- (53) Papert, S. "Structures et Catégories" in *Logique et connaissance scientifique*, publié sous la direction de J. Piaget, Gallimard, 1967, p. 486-511.
- (54) Putnam, H. "Mathematics without Foundations" in *the Journal of Philosophy*, vol. 64, no 1 (1967), p. 5-22.
- (55) Quine, W. v. O. *Mathematical Logic*, Harper and Row, New York, revised edition (1951).
- (56) Rasiowa, H. et Sikorski, R. *The Mathematics of metamathematics*, PWN, Warszawa, 1963.
- (57) Robinson, A. *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland, Amsterdam, 1963.
- (58) Rogers, H. *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- (59) Rootselaar, B. van et Staal, F. (eds) *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- (60) Scott, D. "Mesurable cardinals and constructible sets" in *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences*, vol. 9 (1961), p. 521-524.
- (61) Scott, D. "A proof of the independence of the Continuum Hypothesis" in *Mathematical Systems Theory*, vol. 1, 1966, p. 89-111.
- (62) Shoenfield, J. R. *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967.
- (63) Schütte, K. *Beweistheorie*, Springer, Berlin, 1960.
- (64) Smullyan, R. M. *Theory of Formal Systems*, (revised edition), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961.
- (65) Tarski, S. "Some problems and results relevant to the foundations of set theory" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science I*, Stanford University Press, Stanford, Cal., 1962, p. 125-136.

- (66) Wang, H. *A Survey of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1963.
- (67) Weyl, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, Princeton University Press, N. J., 1949.



Chapitre VIII **CONSTRUCTIVISME** **ET STRUCTURALISME** **DANS LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES***

Mon exposé porte sur les fondements des mathématiques: je veux, dans une première partie, définir ce que j'entends par fondements des mathématiques; dans une deuxième partie, j'analyserai quelques problèmes fondationnels précis dans les perspectives structuraliste et constructiviste que j'aurai préalablement dégagées de la problématique des fondements. Ma conclusion indiquera quelques voies pour les recherches futures en fondements des mathématiques.

1. LA QUESTION DES FONDEMENTS

Je pense qu'il est peut-être utile tout d'abord de clarifier le statut de la problématique des fondements: l'ex-

*Texte d'une conférence prononcée le 21 avril 1972 au Département de Mathématiques de l'Université de Montréal et paru depuis dans *Philosophiques*, vol. I, no 1, p. 83-105. Le structuralisme dont nous parlons ici n'est pas celui des philosophes. Voir notre article "La notion théorétique de structure" *Dialectica*, 23 (1969), p. 217-227.

pression fondements des mathématiques est employée souvent dans des sens différents, si ce n'est divergents. J'élimine tout de suite le sens "d'éléments fondamentaux", de mise en ordre ou d'organisation systématique d'un langage donné d'un matériau mathématique précis; par exemple, l'ouvrage de Dieudonné *Foundations of modern analysis* ou celui d'Eilenberg et Steenrod *Foundations of algebraic topology*, ne traitent pas des fondements au sens que je définis à l'instant; les fondements des mathématiques constituent une analyse critique de la pratique mathématique et de sa validité, c'est-à-dire que les fondements prennent pour objet la pratique mathématique, les principes, les concepts fondamentaux des mathématiques en vue de formuler une théorie unifiée de l'ensemble des mathématiques. Les fondements des mathématiques sont une entreprise à la fois mathématique, logique et philosophique; c'est une discipline de synthèse qui utilise ces divers aspects logique, mathématique et philosophique ou épistémologique dans un but théorique précis: la formulation d'une théorie de la pratique mathématique [1]. Notons que les fondements des mathématiques ne sont pas la philosophie des mathématiques, discipline plus ou moins anachronique dans son acception habituelle qui cherche à proposer du dehors une théorie ou des théories concernant la nature des êtres mathématiques et qui tente de décrire, avec plus ou moins de bonheur, la portée et les limites de la pensée mathé-

matique. Notons aussi que les fondements ne coïncident pas avec la logique mathématique, avec laquelle on les confond souvent dans la littérature courante: si les résultats logico-mathématiques peuvent avoir une signification importante pour les fondements, ils sont la suite de la pratique mathématique, plutôt que son analyse critique. Je dirai plus loin comment distinguer plus finement entre les fondements et la logique mathématique.

Cette définition préliminaire des fondements des mathématiques doit beaucoup à Georg Kreisel. C'est lui, le premier, qui a doté les fondements des mathématiques d'une spécificité assez grande pour en faire une discipline à part.

Historiquement, les fondements ont été réduits ou bien à une certaine conception philosophique des mathématiques ou bien à un certain programme de reconstruction des mathématiques, à partir de la logique, par exemple, chez Frege et Russell. Sans doute, celui qui avait à l'origine la conception la plus précise et la plus radicale est Hilbert. On sait qu'il s'agissait pour lui d'assurer les mathématiques; il parle d'une "Sicherung", d'une certification sur les bases combinatoires finies d'objets concrets. On sait aussi que ce programme métamathématique a été contredit par les résultats d'incomplétude de Gödel [Voir là-dessus G. Kreisel "Hilbert's Programme" *Dialectica*, 12 (1958)]. L'intuitionnisme de Brouwer en admettant

les objets abstraits, comme les fonctions et les fonctionnelles - ici je fais allusion à l'interprétation de Gödel "Ueber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes" qui admet des fonctionnelles de type fini avec les seuls procédés de construction de substitution et de récursion - va plus loin. Le formalisme élargi (où l'on accepte des méthodes constructives qui ne sont pas finitaires) et l'intuitionnisme ne sont pas incompatibles à la limite; ce sont des théories fondationnelles convergentes dans la mesure où la théorie des démonstrations débouche sur une théorie des constructions mentales, ce qu'est essentiellement l'intuitionnisme.

2. FONDEMENTS CONSTRUCTIVISTES ET FONDEMENTS STRUCTURELS

Mais avant de nous engager plus loin dans la discussion, il faut préciser le rôle de l'entreprise fondationnelle. Les fondements, pour être une analyse critique des principes et des concepts de la pratique mathématique, cherchent à asseoir l'ensemble des mathématiques sur des bases irréductibles, un langage primitif. L'idéal hilbertien de la certification ou de la solidification réapparaît ici, mais il est couplé à un système conceptuel où les notions primitives sont mises à jour. Cette volonté réductrice, et non pas "réductiviste", des fondements ne signifie pas qu'il faille réduire les mathématiques à leur plus simple expression, mais plutôt qu'il faut mettre à l'épreuve les notions fondamentales ou premières en tachant

d'étendre les mathématiques existantes dans des directions où les concepts et les principes de construction mathématique sont mis en relief [2] comme, par exemple, dans la théorie des catégories et dans la théorie des topoi où ressort nettement le caractère géométrique ou algébraico-géométrique des constructions.

J'appelle structurels les principes de construction fondés sur l'usage actuel et les extensions possibles d'un langage mathématique donné sans critiquer ce même langage et ses méthodes; sont donc constructifs ou constructivistes les principes de construction qui sont fondés sur une analyse critique du langage utilisé; l'exemple le plus clair ici, la reconstruction intuitionniste de l'analyse classique. Je reviendrai là-dessus plus loin. Extension, validation, justification ou certification des principes, des méthodes et des concepts mathématiques constituent, par conséquent, le but même des fondements. Les fondements des mathématiques, pour préciser la définition que j'ai déjà proposée, sont une théorie générale des principes et des concepts mathématiques que l'analyse critique dégage de la pratique mathématique. Une telle théorie, il va sans dire, n'en est qu'aux premières ébauches; il faut se garder d'une première méprise qui consisterait à penser que l'analyse de la pratique mathématique doit utiliser les mêmes notions que la pratique. La théorie de la pratique mathématique peut s'éloi-

gner radicalement parfois de la pratique, parfois même les écarts de la théorie et de la pratique sont si grands, que la théorie en devient plus ou moins inutile, par exemple, la théorie des types des *Principia Mathematica* qui, pour contenir trop de notions *ad hoc*, perd tout contact avec la réalité de la pratique, alors que la théorie contemporaine de Zermelo, appelée maintenant "structure cumulative des rangs", pour la théorie axiomatique des ensembles, plus sobre conceptuellement, a été adoptée par les praticiens. La situation est comparable à la mécanique quantique où l'interprétation indéterministe de Copenhague apparaît moins arbitraire que l'interprétation déterministe de de Broglie ou de Bohm, par exemple.

Les fondements des mathématiques, dans le sens défini plus haut, ont selon moi deux versants: un versant structurel ou extensionnel, où les langages de la pratique sont employés et élargis afin de clarifier les notions fondamentales et d'en tirer le plus de fruits possibles sur le plan formel, c'est-à-dire la logique au sens technique; l'autre versant, je l'appelle conceptuel ou intensionnel; c'est l'analyse conceptuelle au sens propre où la pratique mathématique est analysée critique-ment [3]. Ici les notions ou les concepts, les principes et les méthodes sont radicalisés, l'analyse tend à les réduire à leur plus petit noyau intensionnel pour faire émerger les raisons, les justifications théoriques ou théorétiques, si l'on

veut mettre l'accent sur la teneur en théorie des fondements des mathématiques. Mieux, il faudrait dire fondements méta-théorétiques, puisque les fondements conceptuels prennent pour objet les théories mathématiques qu'élabore la pratique mathématique.

Les attitudes fondationnelles dans cette description se résument pour moi à ce que j'appelle le structuralisme, qui regroupe des options diverses comme le réalisme, le formalisme au sens d'A. Robinson, le nominalisme, et d'autre part, le constructivisme dans toutes ses variétés, parmi lesquelles l'intuitionnisme occupe une place centrale. Remarquons que le constructivisme ne recouvre pas nécessairement l'ensemble des fondements conceptuels, mais les fondements conceptuels semblent déboucher naturellement sur le constructivisme, alors avec les fondements structurels invitent une interprétation structuraliste. J'emploie structuralisme ici d'abord dans le sens de la théorie bourbakiste des structures, mais surtout dans le sens de Bernays qui définit les mathématiques comme phénoménologie théorétique ou théorique des structures [4].

3. FONDEMENTS STRUCTURELS DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

Cette systématisation ou cette unification des recherches fondationnelles n'aurait qu'une valeur esthétique, si elle ne contribuait à préciser notre analyse des mathématiques et de la logique mathématique contemporaines. La problématique

fondationnelle, en mettant l'accent sur les aspects distinctifs, les variantes fondationnelles, les composantes essentielles des concepts ou des notions, peut permettre de mieux comprendre les mathématiques et par là même d'orienter la recherche dans des directions plus susceptibles de porter des fruits.

Si la théorie des ensembles est généralement considérée comme la théorie fondamentale des mathématiques, cela ne signifie aucunement qu'elle n'a pas besoin de fondements, au sens d'analyse critique des notions fondamentales. Les constructions de la théorie axiomatique des ensembles fournissent un bon exemple d'élaboration structurelle ou extensionnelle. Prenons l'axiomatisation de Zermelo, dite structure cumulative des rangs ou des types, qu'on définit de la façon suivante:

$$V_0 = \phi$$

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha) \quad \text{pour tous les ordinaux}$$

Remarquons que cette hiérarchie mène vers ce que Cantor appelait "eine absolut unendliche oder inkonsistente Vielheit". Mais en considérant un ordinal limite

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$$

on peut obtenir un segment suffisant pour la théorie des ensembles ou la théorie de la catégorie de toutes les catégories de Lawvere en prenant Cat_α , comme l'indique MacLane [5]. La structure hiérarchique a été utilisée surtout dans la théorie des modèles de la théorie des ensembles pour obtenir les résul-

tats de consistance relative et d'indépendance. Gödel emploie cette structure ramifiée pour ses ensembles constructibles L_α et Cohen loge ses ensembles génériques entre V_α (pour le modèle minimal M) et V_β pour $\beta > \alpha$ (dans le modèle générique N). Cependant, la théorie pleine des ensembles est une théorie du second ordre, alors que le résultat de Cohen n'est valable que pour le premier ordre et on peut montrer que le premier ordre est dérivé du second. Le schéma de compréhension du premier ordre

$$\forall a \forall x_1 \dots \forall x_n \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow [y \in a \wedge A(y, x_1, \dots, x_n)])$$

constitue une restriction de l'axiome du second ordre

$$\forall a \forall X \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow (y \in a \wedge X(y))]$$

ou X est une variable du second ordre (c'est-à-dire que X exprime la propriété d'être un sous-ensemble). Dans ce sens, il est naturel de penser que l'hypothèse du continu est décidable au second ordre

$$(ZF \vdash_2 HC) \vee (ZF \vdash_2 \sim HC)$$

sous la forme

$$X \subset V_{\omega+1} \rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{V_\omega}} \vee \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{V_{\omega+1}}}$$

pour V_ω comme collection des ensembles finis et X comme sous-ensemble de l'ensemble des réels. La position structuraliste est représentée ici par Gödel qui, dans son article "What is Cantor's Continuum Hypothesis" affirme que

"set-theoretical concepts and theorems describe some well-determined reality in which Cantor's conjecture must be either true or false".

Soutenir donc que l'hypothèse du continu est décidable au second ordre n'est autre chose que préciser le point de vue de Gödel [6]. Mais la validité de la hiérarchie cumulative - les rangs supérieurs - n'est pas pour autant assurée. En effet, si on peut facilement accorder l'évidence intuitive de la notion d'ensemble de, "set of", appelée notion itérative d'ensemble pour les ensembles finis, la chose est moins sûre pour les ensembles infinis. La propriété d'être un sous-ensemble arbitraire ou un prédicat arbitraire est-elle constructible, au sens propre? Le constructivisme n'accepte pas le donné d'une structure cumulative sur les ensembles infinis; il faut plutôt penser en termes de procès itératif infini ou plutôt effini, c'est-à-dire en dehors du fini, au-delà du champ du fini. Selon moi, c'est du côté du quantificateur universel qu'il faut regarder - vers son imprédictivité, comme disaient les premiers constructivistes. On se souvient de la définition de la notion d'ensemble que l'on trouve chez Cantor "un ensemble est une synthèse ou un rassemblement ("Zusammenfassung") d'objets distincts déterminés de notre intuition ou de notre pensée (les "éléments" de l'ensemble) en un tout ("zu einem Ganzen") [7]". C'est ici que "tous", le quantificateur universel devient un tout, une totalité. Ce passage de tous à tout a une longue

histoire philosophique. Le monde ou l'univers comme tout comprend toutes les choses. Mais le monde, le tout, le "to παν" des Grecs, est-il autre chose qu'une unité idéale, qu'un concept sans référent? L'idée de tout implique celle de contenant: le tout, par exemple, \mathbb{N}'_0 contient tous les entiers, ${}^2\mathbb{R}'_0$ tous les réels, ${}^2{}^2\mathbb{R}'_0$, toutes les fonctions sur les réels, ainsi de suite. Le contenant, le tout, même lorsqu'on le suppose infini, est cependant représenté comme fini, puisqu'il est lui-même contenu dans d'autres contenant de la hiérarchie. Comment se représenter un contenant contenu si ce n'est comme fini? Cette idée du contenant universel à une longue tradition de la sphère de Parménide à l'univers sphérique d'Einstein. Le continu arithmétique signifie une constructibilité indéfinie alors que le continu ensembliste signifie un tout achevé, une totalité infinie contenue dans un ensemble. L'ensemble infini est donc considéré comme la totalité des éléments "dans l'ensemble".

Cette critique du quantificateur universel et des ensembles infinis que je viens d'esquisser s'applique particulièrement bien aux axiomes forts d'infinité, par exemple les axiomes d'inaccessibilité et de mesurabilité [8]. On sait qu'un cardinal est inaccessible lorsque 1) pour B plus petit que A , A (transfinité), A n'est pas la somme d'un nombre B de cardinaux plus petits que A et 2) A est plus grand que

l'ensemble des sous-ensembles de B :

$$1) A > \omega$$

$$2) \forall x \subset A, \text{Card}(x) < \bar{A} \rightarrow \text{Un}(x) < \bar{A}$$

$$3) \forall B, B < A \rightarrow 2^B < A$$

Pour un cardinal mesurable, on a un idéal sur un ensemble transfini qui partitionne les sous-ensembles de l'ensemble transfini en petits et grands sous-ensembles.

Pour A ensemble transfini, on a un sous-ensemble B de l'ensemble des parties ou des sous-ensembles de $P(A)$ tel que

a) pour tout sous-ensemble C de B tel que

$$\bar{C} < \bar{A}, \cup C \in B$$

b) pour tout sous-ensemble C de A

$$C \in B \vee A - C \in B$$

$$c) \cup B = A$$

$$d) A \notin B$$

Remarquons que l'axiome de mesurabilité fait appel à une définition du troisième ordre, puisque l'idéal est défini sur la totalité des sous-ensembles d'un ensemble transfini. Ici la représentation du contenant est claire: on a deux sous-contenants d'un contenant principal déterminé. De plus, on suppose que le cardinal du contenant principal est transfini. J'appelle "principe ou procès transarithmétique" [9], la procédure qui consiste à définir, "à contenir" le procès arithmétique dans

les limites d'un procès cumulatif pour ensuite l'appliquer sur l'accumulation des contenants infinis, qui eux-mêmes sont constitués par la négation du procès arithmétique.

Je veux donner un dernier exemple d'analyse critique pour la théorie axiomatique des ensembles, les schèmes de réflexion. Je prends la formulation de Krivine [10]: on a une relation fonctionnelle $y = W_\alpha$ dont le domaine est l'ensemble des ordinaux On , croissante, c'est-à-dire $\alpha \leq \beta \rightarrow W_\alpha \subset W_\beta$ et continue (si α est un ordinal limite, $W_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta$); considérons W comme la collection qui est l'union des ensembles W_α , collection que l'on définit de la façon suivante

$$W(x) : \exists \alpha [On(\alpha) \wedge x \in W_\alpha]$$

Si $E(x_1, \dots, x_n)$ est un énoncé sans paramètres, nous avons ce qui suit

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \exists \beta > \alpha \forall x_1 \dots x_k [x_1 \in W_\beta \wedge \dots \wedge x_k \in W_\beta \\ & \rightarrow (E^W(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow E^{W_\beta}(x_1, \dots, x_k))] \end{aligned}$$

Ce qui signifie que l'énoncé E^{W_β} est équivalent à l'énoncé E^W pour la simple raison qu'il appartient à la hiérarchie des ordinaux (comme ordinal limite). Ainsi l'univers ou le contenant universel se réfléchit-il dans un de ses sous-contenants; si nous nous représentons le contenant universel comme un cercle ou une sphère et la structure cumulative des rangs comme une pyramide renversée, on peut réfléchir de la façon suivante sur les réflexions: la hauteur ou le niveau dans la structure

cumulative correspond à son rang ordinal et la largeur du niveau correspond à son cardinal.

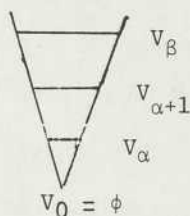
On a la structure cumulative des rangs

$$V_0 = \phi$$

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha)$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$$

et nous nous représentons l'univers de la façon suivante



pour $V = V_\gamma$ (voir appendice). Mais cet univers ne représente qu'une ordination, *i.e.* chaque ensemble et chacun de leurs éléments ne sont ordonnés qu'une fois. Si nous plongeons cette structure cumulative dans un univers plein, c'est-à-dire dans une sphère de cardinalité \aleph'_γ , on obtient alors une ordination transfinie des ensembles et de leurs éléments, chaque point de la circonférence de la sphère ou du cercle constituant la base d'une structure cumulative ou son ensemble vide ϕ . Chaque ensemble comprenant l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble qui le précède dans la hiérarchie, on a $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ et $V_{\omega+1} = P(V_\omega)$. Mais cette hiérarchie doit elle-même être hiérarchisée transfiniment dans un univers plein, *i.e.* dans une sphère de cardinalité \aleph'_γ .

Cette ordination transfinie qui donne \aleph'_γ et que nous notons $R(\omega)$, nous l'appelons réflexion coordinale universelle: en effet, dans cette construction, chaque élément, par ordination transfinie, réfléchit tous les autres éléments en même temps que l'univers tout entier; chaque élément est un miroir à facettes de cardinal $2^{\aleph'_0}$.

De cette façon, l'hypothèse du continu est violée ou falsifiée, puisque le cardinal du continu est ici \aleph'_2 ou tout autre cardinal transfini $> \aleph'_2$. Soulignons que notre notion d'ordination est différente de la notion d'ordre ou de bon ordre - c'est en fait une multiplicité de puissance \aleph'_γ de bons ordres sur tous les éléments de l'univers. Remarquons aussi que notre construction ne donne pas, comme on pourrait le penser, l'ensemble des fonctions sur le continu (qui donnerait \aleph'_3 ou un autre cardinal plus grand), simplement parce que le continu est constitué par l'ensemble des réflexions $R(\omega)$. La justification d'une telle construction par rapport à la structure cumulative, c'est que la structure cumulative représente une construction finie incomplète (procédant par étapes). Après coup, on peut y voir une lointaine analogie avec le principe philosophique de Leibniz, selon lequel les monades reflètent l'univers entier et toutes les autres monades ou encore le principe du tout en tout d'Anaxagore. Encore ici le ressourcement philosophique peut nourrir les recherches fondationnelles.

4. FONDEMENTS CONSTRUCTIVISTES DE L'INTUITIONNISME

Je veux d'abord examiner la notion de sujet créateur. L'idée du sujet créateur a été introduite en 1948 par Brouwer pour justifier ses contre-exemples de la forme

$$\forall \alpha \quad \forall \beta \quad (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \rightarrow \alpha \# \beta)$$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{R}$

(où $\stackrel{\circ}{=}$ est la relation de coïncidence et $\#$ la relation de séparation pour les nombres réels) et a connu depuis quelques années un renouveau important dans les travaux de Kreisel, Myhill [11] et Troelstra sur l'intuitionnisme. Le concept central de l'intuitionnisme est celui de procès selon moi. Tous les autres concepts dérivent de celui-là: déploiements (spreads), espèces, séquences ou suites irrégulières (lawless), séquences de choix, séquences constructives et sujet créateur ou constructeur. La notion de procès mathématique implique pour moi celle du sujet dans la mesure où tout procès conscient renvoie à un agent. Par exemple, pour revenir au principe de réflexion, la théorie des démonstrations comporte aussi des principes de réflexion; cependant ces derniers ne réfléchissent pas l'univers dans un de ses sous-univers, mais plutôt la convertibilité, pour le sujet pensant, de la prouvabilité en validité; ainsi

$$\forall p [\text{Prouv}_g(p, " \phi ") \rightarrow \phi]$$

où " ϕ " est un terme dont la valeur est le nombre de Gödel pour ϕ .

C'est sans doute là l'une des raisons qui font dire à Kreisel que la théorie des démonstrations comme théorie des notions et des constructions n'existe pas encore [12], et aussi que la théorie des fonctions récursives s'arrête là où commence la théorie des démonstrations. Mais du moins voit-on que le principe de réflexion dont il s'agit ici a peu en commun avec le principe de réflexion dans l'univers ensembliste.

Les mathématiques étant une activité constructive de l'esprit, il faut un constructeur ou un "structurateur" pour les structures mathématiques. Mais il ne faut pas croire que cela signifie l'introduction de la psychologie en mathématiques. Tout ce dont nous avons besoin, c'est d'une légitimation pour le procès mathématique, qui ne requiert qu'un sujet impersonnel, transcendantal, comme dit Husserl (ou encore un agent purement linguistique).

Les axiomes pour le sujet constructeur ont été introduits par Kreisel et repris par Troelstra [13].

$$\begin{aligned} & (\Sigma \vdash_m A) \vee \neg(\Sigma \vdash_m A) \\ & A \rightarrow \wedge \Sigma (\neg \neg \forall m (\Sigma \vdash_m A)) \\ & \forall \Sigma \forall m (\Sigma \vdash_m A) \leftrightarrow A \end{aligned}$$

ce qui signifie que le sujet constructeur a une preuve de A à l'étape m ou il n'en a pas et s'il existe une preuve de A , elle ne peut pas être inaccessible et il suffit qu'un sujet créateur ait une preuve de A à une étape donnée pour qu'exis-

te une preuve de A . Ayant abordé notre critique de ces axiomes, voyons ce qu'on peut en tirer. En premier lieu, le schème de Kripke

$$\begin{aligned} & \forall x [(\bigwedge x (\chi x = 0) \leftrightarrow A) \\ & \wedge (\forall x (\chi x \neq 0) \rightarrow A)] \end{aligned}$$

ou dans sa forme forte

$$\forall x (\forall x (\chi x \neq 0) \leftrightarrow A)$$

qui signifie qu'il suffit qu'existe une séquence réalisable (une séquence étant un procès qui associe à tout nombre naturel un objet mathématique appartenant à une espèce donnée, ou ayant une certaine propriété) pour X , un nombre naturel, pour qu'on ait une preuve de A .

$$(\vdash_n A) \rightarrow \chi_n = 1$$

$$(\neg \vdash_n A) \rightarrow \chi_n = 0$$

Une séquence définie de cette façon est appelée empirique; une séquence est mathématique, lorsqu'il n'est pas nécessaire de la définir par étapes, par exemple, une fonction récursive primitive. Il y a plusieurs problèmes liés à cette axiomatisation du sujet créateur, tels ceux de la continuité et de la succession chronologique des étapes. Ces problèmes sont centrés autour de la notion de séquence de choix.

Toute centrale qu'elle soit, la notion de séquence de choix a fait l'objet de définitions diverses. J'en propose une ici et je lui donne un nouveau nom: séquence polymorphe ou po-

lygénétique. Une séquence de choix est en effet une séquence engendrée par des choix successifs de valeurs et des limitations qui leur sont imposées. On commence par choisir des valeurs x_0, x_1, \dots , pour une séquence de choix α , puis on décide à un certain moment de limiter les choix futurs de valeurs en imposant que $\alpha = \Gamma_0 \alpha_0$ où α_0 est une nouvelle genèse de choix de valeurs et Γ_0 une opération continue (une fonctionnelle) sur la séquence α : en d'autres mots, sur un segment initial de valeurs α , on peut ajouter l'information $\alpha = \varepsilon | \beta$, poursuivre le choix de valeurs sur β et ainsi de suite indéfiniment. Kreisel et Troelstra dans "Formal systems for some branches of intuitionistic analysis" (*Annals of Mathematical Logic* vol. 1, no 5) parlent, pour leur part, d'un principe de données analytiques formulé de la façon suivante:

$$\Lambda(\alpha) \rightarrow \text{Ve}[\alpha \varepsilon \in e \wedge \beta A(e|\beta)]$$

pour α et β comme séquences de choix, A une propriété et e un ensemble analytique (sur l'espace de Baire de toutes les séquences de choix). On voit que ce qui est requis ainsi, c'est que le sujet constructeur assiste aussi loin que possible à la genèse de ses propres constructions mathématiques.

Dans ce qui suit, je veux tenter de répondre brièvement à une question posée par Kreisel et Troelstra (un problème ouvert de l'intuitionnisme) [14]. Comment relier les étapes (stages) de la théorie des séquences de choix et des séquences

irrégulières aux "étapes" de la théorie du sujet créateur? J'ai tenté ailleurs [15] de formuler une théorie axiomatique des fondements à l'aide de quatre notions fondamentales, celles de stase, de procès, de fini et d'effini (sans rapport avec la notion de métafini en théorie de la métarécursion). Je veux encore une fois être bref.

J'appelle "domaine dominable" l'activité constructive en général et "domaine dominé" le domaine des constructions finies. Le domaine dominé est celui de l'arithmétique finie, des lois logiques élémentaires (intuitionnistes). Le domaine dominable est celui des itérations effinies, *i.e.* hors du fini, comme, par exemple, les fonctions récursives primitives, les séquences de choix, *e.g.*, la suite des nombres naturels qui est effinie pour moi à la différence des intuitionnistes qui acceptent l'ensemble des nombres naturels comme un donné. Les structures nouvelles que l'on admet, plutôt que d'être définies par un procès cumulatif, sont engendrées par un processus d'expansion du domaine. Le point de vue ici n'est plus celui de l'arithmétique ordinaire, mais celui de la géométrie (projective finie). Le procès expansif ne comporte pas de niveaux, mais des degrés (au sens géométrique d'ouverture d'un angle) ou des périodes qu'on peut exprimer axiomatiquement de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 & (\Sigma \vdash_{D(\alpha)} A) \vee \neg(\Sigma \vdash_{D(\alpha)} A) \\
 & A \rightarrow \wedge \Sigma (\neg \neg \forall_{D(\alpha)} (\Sigma \vdash_{D(\alpha)} A)) \\
 & \forall \Sigma \forall D(\alpha) (\Sigma \vdash_{D(\alpha)} A) \leftrightarrow A
 \end{aligned}$$

J'évite ainsi toute théorie hiérarchique ou stratificationnelle de types, de rangs ou de niveaux. L'horizon est indéfiniment ou effinement expansible, mais il indique les limites de la visualisation [16]. L'ordre ω des étapes est remplacé par une progression vers l'horizon constructif qui détermine aussi les genèses successives des séquences de choix et aussi bien les monogenèses des fonctions récursives primitives par expansions périodiques. Je pense ici que l'idée de procès générateur d'expansions et de périodes ou degrés sur un horizon rend fidèlement l'interprétation constructiviste exigée par Kreisel et Troelstra. Je voudrais dire quelques mots, avant de passer aux conclusions, sur l'interprétation structurelle du constructivisme. Je pense surtout à l'interprétation de Vesley, qui dans son travail "A palatable substitute for Kripke's schema" [17] a proposé le schème suivant

$$\begin{aligned}
 & \text{Dense } (\neg A(\alpha), \nu) \wedge \forall \alpha (\neg A(\alpha) \supset \\
 & \exists \beta B(\alpha, \beta)) \supset \forall \alpha \exists \beta (\neg A(\alpha) \supset B(\alpha, \beta))
 \end{aligned}$$

qui signifie qu'à toute séquence de choix dans l'espèce dense négative A correspond une séquence de choix β sur l'espèce universelle ν . Ici, l'interprétation structurelle ou objectiviste est fondée sur le principe des extensions continues des

fonctions continues de l'analyse classique. Mais c'est sans doute là déroger à la nature des mathématiques intuitionnistes qui cherchent à reconstruire les mathématiques classiques en utilisant des méthodes constructivistes.

Il n'est pas surprenant alors que Joan Rand Moschovakis, dans un article récent, dans le *Journal of Symbolic Logic* "Can there be no non-recursive functions?" [18], ait pu démontrer la consistance de la thèse de Church - qui, comme on le sait, affirme que toute fonction effectivement computable est réursive générale - avec le système intuitionniste de Kleene pour l'analyse exposé dans son ouvrage écrit en collaboration avec Vesley *The Foundations of Intuitionistic Mathematics* [19].

D'autre part, Dana Scott a donné une interprétation structurelle topologique - prenant pour modèle le treillis des sous-ensembles ouverts d'un espace topologique donné - pour laquelle le schème de Kripke est consistant [20]. Or, on sait que le schème de Kripke contredit la thèse de Church, puisque les fonctions constructives au sens intuitionniste débordent le domaine des fonctions effectivement computables [21]. Cet exemple montre peut-être la valeur toute relative des résultats formels de consistance relative et d'indépendance pour l'intuitionnisme aussi bien que pour la théorie des ensembles. Mais il montre aussi que l'approche structurelle en logique mathématique et dans les fondements des mathématiques pour être riche

et féconde, ne suffit sans doute pas pour résoudre les problèmes ouverts ou pour découvrir des axiomes neufs justifiables, réclamés par Gödel en particulier. La rigueur informelle, dont parle Kreisel, consiste peut-être à prendre ses distances par rapport à l'approche structurelle (qui, elle-même, comprend l'approche formelle technique) afin de laisser libre champ à l'intuition et à l'analyse conceptuelle. Mais là encore, c'est une dialectique de la complémentarité qui joue et je pense que cette dialectique est essentielle à la recherche fondationnelle en logique et en mathématiques.

5. LA PROBLEMATIQUE FONDATIONNELLE

Il est temps de conclure. Je voudrais d'abord dire quelques mots concernant la théorie des catégories. Ce que j'en ai dit ne couvre que les travaux de MacLane et de Lawvere avant la théorie des topoi. Feferman [22] a montré comment on pouvait formaliser la théorie des catégories à l'aide du schème de réflexion dans la théorie des ensembles et MacLane a admis la possibilité de formuler la même théorie sur la structure cumulative des rangs. Ce que je sais de la théorie des topoi m'incline à croire que c'est essentiellement une théorie structurelle, géométrico-algébrique, engendrée par le couple géométrique algébrique (théorie des faisceaux) et algèbre homologique (théorie des catégories). Il semble bien cependant que ce point de vue, comme le point de vue logico-algébrique, qui con-

naît une croissance structurelle accélérée dans sa variété cylindrique, ne sera pas moins fécond pour la recherche fondationnelle. Si l'on considère que les recherches fondationnelles et la logique mathématique ont été dominées par les courants de l'arithmétisation (liée à la théorie des démonstrations), de l'algébrisation (correspondant à la théorie des modèles), la tendance géométrisante pourrait bien se faire une place. Mais si la géométrie a toujours eu une vocation fondationnelle constructiviste, elle a sans doute renié partiellement son caractère constructiviste en s'algébrisant. Mais il n'y a là aucune condamnation. L'intérêt mathématique d'une théorie est parfois inversement proportionnel à son intérêt fondationnel. Cela ne veut pas dire qu'il faille identifier fondationnel à non mathématique ou encore philosophique. Loin de là. Comme je l'ai indiqué au début, les fondements des mathématiques ne sont jamais réductibles à la philosophie des mathématiques, même si certaines considérations philosophiques peuvent ou doivent entrer en ligne de compte.

Un autre aspect que je n'ai pas touché et qui est sans doute important pour la problématique fondationnelle, c'est le problème des relations entre la physique et les mathématiques. J'ai abordé ce problème dans un article récent [23] où j'ai soutenu l'idée que la physique et les mathématiques avaient ultimement le même objet: la construction du continu

ou, ce qui est la même chose, du discontinu. Hermann Weyl, von Neumann, parmi d'autres soutenaient que seules les mathématiques applicables à la physique (et par extension aux autres sciences) pouvaient être légitimées, c'est-à-dire possédaient un intérêt fondationnel. Mais il est sans doute impossible de faire la démarcation entre les mathématiques qui sont applicables et celles qui ne le sont pas. L'exemple des fondements de la mécanique quantique est instructif à cet égard. Une grande variété de structures logiques et logico-algébriques sont étudiées dans ce qu'on est convenu d'appeler la logique quantique - logiques multivalentes, treillis, etc. - même la théorie des ensembles n'a plus la pureté (si l'on peut encore utiliser ce mot) d'une théorie inutile pour la physique.

Mon propos n'a pas été d'exposer les mérites du constructivisme aux dépens de ce que j'ai proposé d'appeler le structuralisme, plutôt que non-constructivisme. J'ai essayé au contraire de montrer les mérites respectifs des deux approches.

Il est inutile, selon moi, de tenter de réduire l'importance des recherches purement formelles, comme il est vain de rejeter les recherches fondationnelles qui seraient trop philosophiques ou n'auraient qu'une valeur heuristique. Je pense qu'on ne peut pas imposer de bornes *a priori* à l'invention ou à l'imagination mathématique, pas plus qu'on ne peut tracer la ligne de partage entre philosophie et mathématiques.

Mais je l'ai dit au début, la division du travail dans ce domaine n'a plus beaucoup de sens et le travail fondationnaliste, le fait qui le peut.

On pourrait aussi objecter que les mathématiques n'ont pas besoin d'autres fondements qu'elles-mêmes, ce qui reviendrait à dire que les mathématiques occupent tout l'horizon théorique, ce qu'il faudrait d'abord montrer, ou, à l'inverse, qu'elle n'ont aucune visée théorique, ce qu'il faudrait aussi montrer. Le sujet même des fondements des mathématiques en fait une entreprise théorique ambivalente, si ce n'est ambiguë. Sa fonction de synthèse et d'unification la force à réunir des résultats parfois disparates, à joindre des méthodes opposées, à lier des intentions divergentes. Mais il se peut que les recherches fondationnelles en mathématiques soient un symptôme d'une nouvelle ouverture d'esprit, d'une nouvelle perspective sur le savoir qui n'est plus confiné dans des disciplines étroites. Les recherches fondationnelles, en mathématiques comme dans les autres branches du savoir, sont peut-être les nouvelles avenues de l'interdisciplinarité. Il ne fait pas de doute que la logique, par exemple, a une vocation interdisciplinaire. Quoi qu'il en soit, le chercheur fondationnaliste, le fondationnaliste, pour employer un néologisme, épistémologue qu'il faudrait appeler épistémologiste, a une double figure; il est à la fois girouette et anémomètre: girouette parce

qu'il est battu par tous les vents de la connaissance, anémomètre parce qu'il mesure la vitesse de progression du savoir au confluent des disciplines. Et le fondationnaliste ou l'épistémologue n'a pas de visage pour avoir ces deux masques.

6.

APPENDICE

L'HYPOTHESE DU CONTINU ET LE SCHEME DE REFLEXION

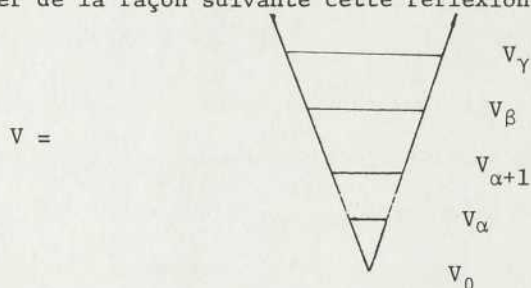
L'idée, ce n'est encore qu'une idée, qu'un univers ensembliste pleinement réfléchi - au sens de la structure cumulative des rangs et du schéma axiomatique de réflexion - viole l'hypothèse du continu, peut être approchée ou "approximée" de façon différente (en évitant la procédure intuitive, trop intuitive peut-être, d'immersion dans une sphère de la cardinalité du continu).

Chaque rang de la structure cumulative contient tous les ensembles des rangs précédents; nous appelons ce procès réflexion "ascendante" en analogie avec la dialectique ascendante de Platon "συναγωγή" ou le théorème de Löwenheim-Skolem "upward", puisque tout ensemble de rang inférieur est réfléchi à tous les rangs supérieurs. L'autre procès de réflexion, par lequel l'univers se réfléchit dans un rang donné correspondant à un ordinal limite, je l'appelle réflexion "descendante", encore une fois en analogie avec la dialectique "descendante" de Platon "διαίρεσις" ou le théorème de Löwenheim-Skolem "down-

ward".

Le continu combine ces deux réflexions; d'un côté, tout segment de droite est une droite, de l'autre, tout segment a la cardinalité de la droite elle-même.

La hiérarchie est donc doublement réflexive. On peut représenter de la façon suivante cette réflexion symétrique



Le segment V_β de la hiérarchie reflète l'univers V , mais l'ensemble déterminé par l'ordinal β réfléchit autant de copies possibles de lui-même dans la hiérarchie transfinie des ensembles et chaque ensemble réfléchit ou se réfléchit aussi transfiniment; si l'on limite le segment à V_ω , alors les réflexions $R(\omega)$ donnent ω .

Axiomatiquement, nous avons un modèle ∇ (le modèle "del"). Notre modèle "del" n'a rien à voir avec les modèles booléens ∇ de Vopenka et Hajek (théorie des semi-ensembles). Nous avons défini récemment des "modèles fluctuants" pour notre théorie du continu, mais dans une perspective plus résolument constructiviste.

Pour la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel ∇

n'est pas dénombrable, c'est un modèle pour un langage du second ordre avec cardinalité \aleph'_γ . Nous exprimons le principe de réflexion coordinalement ou symétrique universelle de la façon suivante au second ordre

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \exists \beta. \beta > \alpha \exists \gamma > \beta, \alpha, \beta, \gamma \in V \forall X \{X \in V_\beta \rightarrow \\ & (\phi(X) \leftrightarrow \phi^{V^\beta}(X))\} \rightarrow \{\forall X \exists R^B(X)\} \rightarrow \\ & \{\forall X \forall w \{(\forall x \in w) \exists y X(x, y)\}\} \rightarrow \exists z \forall u \\ & \{u \in z \leftrightarrow \exists t (t \in w \wedge X(t, u))\} \rightarrow \\ & \forall X \exists R^\gamma(\beta) \{(X^\beta \in R^\gamma(\beta) \wedge (P(\beta) \subset X^\beta)\} . \end{aligned}$$

Cet axiome implique que le principe de réflexion entraîne ce que l'on pourrait appeler un axiome de remplacement multiple, les objets ayant une multiplicité de réflexions R ou d'images (R^2 étant l'image au sens ordinaire). Remarquons que l'ensemble des parties pour tous les rangs ordinaux à partir de 0 est constitué par une réflexion R^2 : 1-2-4-8-16... Pour un ordinal quelconque, nous avons

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha) \quad \text{où} \quad P(V_\alpha) = P(V_{\alpha-1}) \cup \text{Im}(P(V_{\alpha-1}))$$

L'ensemble des parties d'un ensemble donné est engendré par l'union des parties et des images de l'ensemble des parties de l'ensemble qui le précède immédiatement dans la hiérarchie ordinaire. Le principe de réflexion que nous avons formulé semble indiquer qu'un univers plein "à la Leibniz" où tous les objets ou monades reflètent l'univers tout entier et toutes les autres monades, est beaucoup plus riche que l'ensemble des parties de

l'ensemble des nombres naturels qui ne constitue qu'une seule réflexion sur les sous-ensembles et que le continu, s'il doit être réflexif, viole nécessairement l'hypothèse cantorienne du continu. La conception constructiviste du continu, pour faire l'économie des transfinités, n'en abandonne pour autant les "réflexions" qui remplissent le continu "effinement".*

Finalement, ces spéculations "métathéorétiques" n'ont pour but que de renouer avec celles de Cantor qui ont donné naissance à la théorie des ensembles. Mais de notre point de vue constructiviste, elles s'accompagnent d'un clin d'oeil sceptique. La surenchère ensembliste de cardinaux de plus en plus grands ou de plus en plus élevés pourrait trouver sa fin dans ce que l'on pourrait appeler cardinaux "inconcevables". Après les cardinaux inaccessibles, indescriptibles, ineffables, etc. - remarquons que tous ces cardinaux sont définis négativement, en particulier, un cardinal est inaccessible s'il n'est pas atteint par les deux opérations fondamentales de la hiérarchie cumulative des rangs, *i.e.* l'union et l'ensemble des parties - on pourrait imaginer que tous les cardinaux "concevables" sont limités par le premier cardinal "inconcevable"!

*Ce que nous avons appelé axiome de remplacement multiple est analogue à la notion de surface de Riemann; une fonction multivaluée peut être définie sur les "feuilles" d'une telle surface. Ainsi une fonction n -valuée est définie sur une surface de Riemann à n -feuilles (ou à n -sphères concentriques en théorie contemporaine des fonctions d'une variable complexe). L'idée première ici est celle d'objets possédant une multiplicité d'images ou de réflexions.

NOTES DU CHAPITRE VIII

- [1] Notons ici que nous donnons un sens précis - kreisélien - à l'expression "fondements des mathématiques". Pour une perspective différente voir l'article de Leon Henkin "Mathematical Foundations for Mathematics" in *American Mathematical Monthly*, vol. 78, no 5, p. 463-487. Il est clair que nous rejetons l'appellation "fondements" pour l'ensemble des recherches logiques ou mathématiques qui portent sur des théories mathématiques fondamentales, mais qui n'ont pas de fonction fondationnelle comme telle.
- [2] Voir G. Kreisel "Perspectives in the Philosophy of Pure Mathematics" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, ed. by P. Suppes et alii, North-Holland (Amsterdam: 1973), p. 255-277. Voir aussi G. Kreisel "Observations on popular discussions of Foundations" in *Axiomatic Set Theory*, American Mathematical Society, (Rhode Island: 1971), p. 189-197, où Kreisel s'en prend particulièrement à P. J. Cohen et A. Robinson.
- [3] L'analyse critique suppose que l'on ne se limite pas à l'utilisation d'un langage mathématique (ou logique).
- [4] P. Bernays "Comments on Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*", in *Philosophy of Mathematics*, ed. by Benacerraf and Putnam, Prentice Hall (Englewood Cliff: 1964), p. 528.
- [5] S. MacLane "Categorical Algebra and Set-Theoretic foundations" in *Axiomatic Set Theory*, ouvr. cit., p. 235.
- [6] Ceci répond à une objection soulevée par A. Mostowski "Recent Results in Set Theory (Discussion)" in *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland (Amsterdam: 1967), p. 107. Remarquons avec la question de la décida-

bilité de l'hypothèse du continu n'a pas de sens intuitionniste.

- [7] Georg Cantor *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. von E. Zermelo, Georg Olms (Hildesheim: 1966), p. 282.
- [8] Pour la définition de ces notions, voir J. R. Shoenfield *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (Reading, Mass: 1967).
- [9] Cf. chapitre VII.
- [10] J. L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F. (Paris: 1969), p. 64-72.
- [11] Voir J. Myhill "Formal systems of Intuitionistic Analysis I" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, ed. by van Rootselaar and Staal, North-Holland (Amsterdam: 1968), p. 161-162. Voir aussi, pour un résumé des problèmes de l'intuitionnisme et de sa formalisation, J. Myhill "The formalization of intuitionism" in *La philosophie contemporaine*, vol. 1. ed. R. Klibansky, (Firenze: 1968), p. 324-341.
- [12] G. Kreisel "Some reasons for generalizing recursion theory" in *Logic Colloquium '69*, ed. by Gandy and Yates, North-Holland (Amsterdam: 1971), p. 162.
- [13] A. S. Troelstra "The Theory of Choice Sequences" in *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, ouvr. cit., p. 212. Les degrés $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ représentent ainsi un procès expansif qui vise un horizon constructif effini: l'horizon n'est jamais accessible, mais est toujours présent. J'axiomatise la notion d'horizon H de la façon suivante
- $$(\wedge \Sigma \wedge A \vdash_D A \subset H) \wedge \neg(\wedge \Sigma \wedge A \vdash_D A \supset H)$$
- [14] Voir A. S. Troelstra *Principles of Intuitionism*, Lecture Notes in Mathematics, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1969), p. 107.
- [15] Voir chapitre II, 5.

- [16] Le modèle du champ visuel donné ici doit être complété par un modèle du champ linguistique, où la performance du sujet parlant doit être comprise en fonction de sa compétence, *i.e.* sa connaissance du champ linguistique. Pour nous, il n'y a pas de pensée sans langage, ou plutôt, le langage est la pensée. Il faudrait donc déterminer quelles sont les opérations linguistiques qui correspondent aux opérations mathématiques, en d'autres mots, quels sont les rapports de la syntaxe mathématique et de la syntaxe des langues naturelles. C'est cette jonction de la visualisation et de la verbalisation qui constitue pour nous l'assise dernière du sujet pensant. Mais c'est toute une théorie philosophique qu'il faudrait élaborer ici.
- [17] R. E. Vesley "A Palatable Substitute for Kripke's Schema" in *Intuitionism and Proof Theory*, ed. by Myhill, Kino, Vesley, North-Holland (Amsterdam: 1970), p. 197-207.
- [18] J. R. Moschovakis "Can there be no non-recursive functions"? in *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 36, no 2, p. 309-315.
- [19] S. C. Kleene and R. E. Vesley *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland, (Amsterdam: 1965).
- [20] D. Scott "Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis I" in *Logic and Foundations of Mathematics*, ded. to Prof. A. Heyting on his 70th birthday, Wolters-Nordhof (Groningen: 1968), p. 194-210 et "Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis II", in *Intuitionism and Proof Theory*, ouvr. cit., p. 235-255; voir aussi la discussion de Kreisel "Church's thesis: a kind of reducibility axiom for constructive mathematics" dans le même volume, p. 121-150, en particulier, p. 128 et 137.
- [21] Voir l'important article de Kreisel "Lawless sequences of

natural numbers" in *Logic and Foundations of Mathematics*, ouvr. cit., p. 222-248, où la notion de fonction constructive est prise comme notion primitive non-équivalente à la notion de fonction récursive.

- [22] S. Feferman "Set-theoretical foundations for category theory. With an appendix by Georg Kreisel" in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, ed. by S. MacLane. Lecture Notes in Mathematics, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1969), p. 201-247.
- [23] Voir Y. Gauthier "The use of the axiomatic method in Quantum Physics" in *Philosophy of Science*, vol. 38, no 3 (Sept. 1971), p. 429-437, et "Le constructivisme et la structure des théories physiques" à paraître.

Chapitre IX PHÉNOMÉNOLOGIE ET MATHÉMATIQUES*

1. LE CADRE PHENOMENOLOGIQUE

De Platon à Descartes et de Kant à Husserl, les idéalités mathématiques ont constamment été l'objet de l'attention philosophique; pour Platon et Descartes, idéalités discursives (Dianoia) et régulatrices, pour Kant et Husserl, idéalités pures (géométrie) et objectives (arithmétique). Chez le dernier, bien que les tentatives inaugurales de philosophie mathématique aient été sévèrement critiquées par un Frege et malgré l'intérêt limité qu'elles ont aujourd'hui pour l'épistémologue des mathématiques, l'idéalité mathématique restera toujours un modèle - au sens d'idéal - épistémologique privilégié. Le Centre des Archives - Husserl de Louvain publiera bientôt, par les soins de H. R. Brennecke de Cologne, un ouvrage réunissant les

*Cet article est d'abord paru dans *Dialogue*, vol. XI (1972), no 2.

principaux écrits mathématiques de Husserl - dont la thèse de doctorat sur le calcul des variations écrite sous l'inspiration de Weierstrass, *Beiträge zur Variationsrechnung* - sous le titre *Studia Mathematica*. Si Husserl n'a pas pu mener à terme son projet de "Mannigfaltigkeitslehre", théorie des multiplicités - sur le modèle mathématique de la théorie des multiplicités du XIXe siècle - il n'en demeure pas moins que les analyses phénoménologiques ne sont pas dépourvues d'intérêt pour la doctrine de la science contemporaine et peuvent même constituer le langage approprié pour l'épistémologue des sciences naturelles ou sociales. C'est cela même que semble récuser Desanti, du moins pour l'épistémologie mathématique [1]. Disons tout de suite que Desanti se défend mal d'utiliser le langage phénoménologique et s'il le conteste, c'est peut-être qu'il n'est pas parvenu à le dé-construire totalement, selon l'expression de Derrida.

Ce n'est d'ailleurs pas tant à la description phénoménologique que Desanti en veut, mais à l'égologie transcendante que Husserl a surimposée à l'analyse intentionnelle. Que Desanti procède à son tour, après Lacan, Derrida et Foucault, à la décollation de la phénoménologie, il n'y a rien là que de souhaitable et les philosophies de la structure ont, avec bonheur, mis l'accent, à la suite de Heidegger, sur ce que nous avons appelé ailleurs l'autologie du langage, sa logique auto-

nome, plutôt que sur la parole du sujet constituant.

L'ouvrage de Desanti s'insère dans une tradition continue de philosophie mathématique en France, depuis Poincaré et Couturat jusqu'à la période contemporaine. Léon Brunschvicg, à qui on reproche aujourd'hui de n'avoir pas été assez "formel", avait retracé les étapes de la philosophie mathématique. Mais pour lui, la mathématique était déjà philosophie. On est moins pressé maintenant d'intégrer tout bonnement les mathématiques à la philosophie. C'est avec Bachelard, Lautman, et surtout Cavailles que la philosophie mathématique française devient plus rigoureuse et plus consciente de ses tâches épistémologiques précises. Mais déjà un Cavailles, dans son dernier ouvrage *Sur la logique et la théorie de la science*, voulait se définir "en fonction de Husserl, un peu contre lui" [2]. Quoiqu'elle ne soit pas une constante dans l'épistémologie française - qu'on pense à Suzanne Bachelard qui, dans son livre *La conscience de rationalité* [3] en particulier, se rattache sans équivoque à la phénoménologie et à Husserl - l'attitude de Desanti n'est pas nouvelle: elle est en continuité directe avec l'oeuvre de Cavailles. Il ne faut donc pas voir dans le livre de Desanti une simple allégerance à la philosophie de la structure.

La conclusion, qui semble autoriser une telle interprétation, est d'ailleurs la partie la plus faible de l'ouvrage.

ge.

"A vrai dire [...] un personnage s'est effacé: c'est le sujet constituant qui, réduit au statut de spectateur anonyme, n'a été rien d'autre que le mode, chaque fois spécifique, de manifestation de son objet [4]."

Il n'y a pas lieu de s'alarmer, comme nous l'avons dit, avec Lacan, Foucault et Derrida, de la perte du sujet. Le discours sur l'absence du sujet demeure un discours égologique, c'est-à-dire un discours sur le discours dé-construit du sujet annulé.

Le mérite essentiel de Desanti est ailleurs: son livre renferme les plus précises analyses intra-mathématiques qui soient. Il n'y a pas d'autre exemple dans la littérature mathématique contemporaine - les beaux ouvrages de Vuillemin sont moins ambitieux - d'une recherche épistémologique aussi fine, aussi suivie, aussi attentive à la dialectique des objets mathématiques. Peut-être même les analyses de Desanti sont-elles parfois excessives, j'entends par là que la volonté analytique devient tyrannique à certains moments et que les survols panoramiques ne donnent trop souvent qu'une synthèse brouillée, myope, à force de concentrer le regard sur le fin tissu d'immanence des imbrications mathématiques. Les conclusions d'une entreprise si rigoureuse sont minces, parce qu'elle veut se tenir au plus près du texte idéal de la mathématique, soucieuse d'en délier prudemment les noeuds et d'en recomposer exactement le rythme. Et Desanti entrevoit une longue suite de recherches

qui viendront compléter ce premier aperçu du champ ordonné des idéalités mathématiques.

2. LES IDEALITES MATHÉMATIQUES

Le livre est organisé selon trois grandes articulations: "Préliminaires", "Noyaux opératoires" et "Statut d'objet et conscience d'objet". C'est la troisième qui constitue l'articulation maîtresse, couvrant les trois quarts du volume. Les trois moments de la démarche épistémologique, les moments descriptif, analytique, phénoménologique, correspondent aux trois articulations de l'ouvrage.

La théorie des fonctions de variables réelles, que Desanti a choisie comme objet d'analyse, présente, selon lui, un degré d'ancienneté, un enchaînement de gestes constructeurs, une stratification de structures abstraites et une ordonnance thématique propres à la recherche épistémologique (p. 7). L'ouvrage classique qui fournit leur point de départ et leur prétexte aux analyses de Desanti est celui de E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* [5]. Mais c'est surtout sur la première partie de cet ouvrage (les 200 pages des trois premiers chapitres) que se concentrent les analyses de Desanti. Il s'agit, pour lui, d'énucléer de la théorie des fonctions de variables réelles les deux noyaux opératoires que sont les concepts de nombre réel et d'ensemble de points. Ces concepts pourraient être appelés

"tertiaires", puisqu'ils opèrent au sein de concepts de second degré, qui thématissent les concepts primaires de propriétés, eux-mêmes divisibles en concepts naturels, comme "cercle" et "triangle", et concepts structuraux, comme "groupe de déplacements" (p. 25-34).

Le projet de Desanti consiste à étudier l'enchaînement des objets idéaux, leur dialectique propre, selon le vœu de Cavailles, en mettant le temps entre parenthèses. Ainsi, malgré leur relation organique à la théorie des fonctions de variables réelles, les concepts de nombre réel et d'ensemble de points peuvent-ils en être isolés en tant que fondements théoriques ensemblistes: on pourrait même dire que Desanti traite davantage dans son livre de la théorie des ensembles (par exemple, la longue analyse de l'axiome du choix, p. 137 et s., s'appuie plus sur Cavailles que sur Hobson) [6]. On sait assez l'importance, le rôle fondamental des thèmes originaires de nombre réel et d'ensemble de points [7] dans la problématique cantorienne, dans la formation du concept de bon ordre et dans la formulation de l'hypothèse du continu en particulier, pour insister sur l'orientation ensembliste de Desanti.

Les analyses phénoménologiques ou proprement épistémologiques de l'auteur ne commencent vraiment que dans la troisième section de l'ouvrage consacrée au problème de l'objet et de la conscience d'objet. C'est ici qu'on pourra mesurer l'o-

riginalité de la démarche de Desanti et clarifier ses divergences, justifiées ou non, d'avec la phénoménologie. L'objet mathématique, par exemple, le concept "ensemble de points", dégagé à l'intérieur d'un domaine D (ici, la droite réelle " L "), défini par des propriétés que nous nommons D et médié par des relations que nous qualifions de type D , s'offre comme pôle d'idéalité qui unifie les enchaînements d'actes dans l'immanence du champ réflexif. Nous ne suivrons pas Desanti dans son analyse subséquente (p. 89 et s.) de la structure intentionnelle de l'objet; soulignons simplement que, tout en faisant usage du langage phénoménologique, ou plutôt de ses abus de langage, dans le style bourbakiste, Desanti cherche à prendre ses distances avec la phénoménologie. Les différenciations successives des niveaux d'actes, des médiations d'horizon, des théorie₁ et théorie₂ (la première est la théorie au sens ordinaire ou "objet-théorie", la seconde signifie l'aire théorique indéfinie où les idéalités se composent selon un système théorique défini, c'est-à-dire selon une théorie₁) débouchent sur le détournement nécessaire d'une analyse qui prend pour objet la conscience de production d'axiome (p. 133 et s.).

Ce qui fait problème à ce point, c'est la saisie du procès selon lequel s'organisent, dans le champ théorique des idéalités, les médiations qui rendent possible un système d'axiomes donné, c'est-à-dire une théorie₁. Sur l'exemple de l'a-

xiome du choix, Desanti tente d'analyser le procès médiateur de l'aire théorétique, elle-même ouverte sur les possibilités idéales, dans la région délimitée d'une théorie. Comment se produit une conscience d'axiomes, comment une visée axiomatique est-elle possible? Après avoir parcouru les différents moments de la formation de l'axiome de choix, de Cantor et Peano à Zermelo et Fraenkel, l'auteur en arrive à la conclusion (p. 221) qu'un énoncé axiomatique comporte une double indication d'ouverture et de fermeture de régions de possibilité.

"Un thème axiomatique [...] désigne l'horizon de possibilités d'un système de médiations d'horizon" (p. 224).

Un système axiomatique révèle donc un circuit autocentrique, une autologique de l'objet idéal qui se constitue par le jeu des médiations d'horizon (p. 225 et s.) qui définissent ses possibles. Le champ de conscience n'a plus la structure privilégiée d'un englobant, mais est simplement co-posé comme complément de l'objet dans le système total des connexions idéales. Ce système même couvre tout le domaine des idéalités, il le "strie" selon une géométrodynamique précise en suivant les points de condensation d'un espace fermé sur lui-même, les singularités locales d'un champ sphérique, pour employer le vocabulaire de la relativité générale. L'objet-théorie se trouve emmaillé dans un réseau de connexions qui se construit dans une "chronique" propre où la conscience actuelle du sujet "mathéma-

ticien" n'est plus que l'occasion actualisante du devenir autarcique de l'objet mathématique.

Il est évident que nos raccourcis ne rendent pas justice aux riches analyses de Desanti. Mais notre intention est d'abord critique et nous voulons évaluer à la fin les résultats de l'auteur. Une première considération critique relève l'absence presque totale d'une perspective métathéorique, plus spécialement d'une perspective métamathématique propre [8]. L'absence d'une telle perspective relativise la radicalité des analyses de l'auteur. Par exemple, la catégorie du possible ou du "pensable" n'est pas la même pour un réaliste, un formaliste et un intuitionniste; l'axiome du choix ou l'objet idéal $[0,1]$ ou encore " $0 \leq x \leq 1$ " (pour l'hypothèse du continu) n'ont pas la même signification dans les trois cas et il y a antinomie de possibilités entre un Tarski, un Cohen et un Kreisel, pour donner un autre exemple. Comment définir alors les possibles axiomatiques sans recourir à une métathéorie fondatrice [9]? Dans la même veine, Desanti rejette un peu légèrement toute la théorie des démonstrations (proof theory) en récusant le rôle de l'intuition et de l'évidence (p. 230) [10]; là encore une fois, Kreisel, un des champions de la logique mathématique actuelle et de la recherche sur les fondements des mathématiques, le contredit (voir Georg Kreisel "A survey of proof theory" in *the Journal of Symbolic Logic*, vol. 33 (1968), p. 321-388, en

particulier p. 360).

3. LA PROBLÉMATIQUE LOGICO-MATHÉMATIQUE

L'attitude de Desanti est celle du formaliste dans la mesure où, tout en acceptant le conventionnalisme de Carnap, il semble opter pour un ensemble fini de choix normatifs. Mais une telle attitude devrait entraîner une définition du "possible" mathématique ou une catégorisation des possibilités idéales et par là devrait effectuer un retour aux fondements théorétiques, pour ne pas dire intuitifs, des mathématiques. L'habitation intra-mathématique n'invalide pas ces critiques, puisque la métamathématique fait partie intégrante de la réalité mathématique. On ne peut plus aujourd'hui dissocier mathématiques et métamathématique et négliger les fondements métathéoriques au profit de l'étude exclusive de la structure intra-théorique. Une telle entreprise se limiterait tôt à la répétition analytique et, leurrée par la présence immédiate de l'objet idéal, sombrerait à courte échéance dans une ontologie régionale de l'être mathématique [11].

L'arbitraire de l'objet-théorie qu'étudie Desanti, par exemple, l'axiome du choix - arbitraire que Desanti reconnaît lui-même d'ailleurs - vient précisément de l'absence d'une visée fondationnelle. L'axiome du choix n'est pas un objet *thématique* de la mathématique, mais bien de la logique [12] et la distinction *fonctionnelle* des deux domaines est assurée de-

puis l'échec du logicisme (Frege et Russell) et l'essor de la logique mathématique [13] (au sens de la théorie des démonstrations et de la théorie des modèles). A ce compte, on peut se demander si l'analyse que Desanti élabore de l'axiome du choix ne risque pas d'être faussée: si l'on veut y voir, selon le dessein de Desanti, un exemple du monde de production des idéalisés mathématiques, le mathématicien a beau jeu d'en décrire l'arbitraire; la genèse des géométries non euclidiennes, de la théorie des groupes, de la topologie algébrique ou de la théorie des catégories présentent des exemples plus nets de production mathématique. Les problèmes de consistance relative et d'indépendance pour l'axiome du choix et l'hypothèse du continu avec l'axiome de constructibilité (Gödel) et la notion de "forcing" (Cohen) constituent sans doute de meilleurs exemples de l'activité génératrice, mais ici encore, la problématique fondationnelle ne doit jamais être négligée, *i.e.* le caractère paradoxalement non constructiviste de l'axiome de constructibilité et le sens strictement formaliste de la preuve de Cohen. Logique mathématique et problématique des fondements ont acquis droit de cité en mathématiques et il devient de plus en plus difficile pour le mathématicien-praticien (*working mathematician*) d'en négliger l'importance. L'épistémologue des mathématiques, lui, s'il ne veut pas confondre son entreprise avec celle de l'historien, n'a plus accès directement aux idéalisés

mathématiques; pour s'installer dans la mathématique elle-même (p. 286), il doit payer son droit de passage à la logique mathématique et à la recherche fondationnelle.

Y a-t-il des chances pour que Desanti réintègre la perspective métamathématique dans une étape ultérieure de sa démarche? Le prochain moment de l'analyse consistera, selon Desanti, à réintroduire l'histoire dans les structures phénoménologiques dégagées par l'analyse épistémologique. Mais la perspective génétique, si elle représente une des dimensions de l'objet mathématique, ne lui restituera pas ses fondements. On comprend que Desanti se refuse à penser les fondements des mathématiques dans la direction de la phénoménologie transcendante. La phénoménologie décapitée ne nous prive pas cependant du corps de la théorie qu'on peut prolonger dans le sens d'une phénoménologie du langage et ultimement d'une "métathéorétique". Mathématiques et logique sont, trivialement, des langages, avec leurs grammaires propres. Quelle est la forme générale du discours mathématique, du langage d'idéalités, sa syntaxe universelle? Tenter de définir l'espace idéal des possibles mathématiques en éloignant trop radicalement les gestes d'abstraction des pôles d'idéalité pour sauver l'autologique de l'objet risque d'imposer trop hâtivement une clôture à la conception ou à l'imagination mathématique. S'il y a une limite à l'invention mathématique, elle est d'ordre pratique d'a-

bord: simplicité et maniabilité des nouveaux êtres. Mais la simplicité elle-même est inépuisable et toute pensée y tend par des chemins détournés. La phénoménologie est un des chemins qui conduisent au simple, à l'originel, dont nous apercevons aujourd'hui qu'il est langage. Le jeu réglé des idéalités mathématiques est un autre chemin de langage vers le langage, et, ici, Russell et Husserl, Wittgenstein et Heidegger se rejoignent.

On n'a pas fini de tirer tous les fruits "possibles" de la croisée des chemins et du croisement des "cheminants"; dans ce sens, la phénoménologie n'est pas encore épuisée [14].

4. LA THEORIE DE TOUTES LES THEORIES POSSIBLES EST-ELLE POSSIBLE?*

C'est un thème husserlien que je veux aborder ici, un thème qui relève de la philosophie husserlienne de la logique: celui de la "Mannigfaltigkeitslehre" ou doctrine des multiplicités. J'exposerai brièvement ce thème et j'essaierai ensuite d'en donner une version moderne qui soit à la fois une critique et un renouvellement des intentions de Husserl.

Husserl s'explique sur la doctrine de la multiplicité dans *Logique formelle et logique transcendantale* [15]. Mais l'idée remonte aux *Logische Untersuchungen*, tome I. *Prolegomena zur reinen Logik* [16] comme théorie des formes possibles de

*Texte paru dans *Dialogue*, vol. XIV (1975), no 1, p. 81-87.

théorie qu'il appelle aussi théorie des systèmes déductifs.

Husserl dit expressément que c'est la théorie mathématique des multiplicités qui l'inspire ici. Essentiellement la théorie des multiplicités, que l'on désigne aujourd'hui sous le nom de théorie des variétés, est la théorie des espaces n -dimensionnels inaugurée par Gauss, Grassmann dans son "Ausdehnungslehre" ou "doctrine de l'extension" et que Riemann avait formulée dans son célèbre mémoire "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Riemann part du concept de grandeur multidimensionnelle qu'il dérive, dit-il, du concept universel de grandeur. Il arrive ainsi à l'idée de multiplicités discrètes et de multiplicités continues; cette idée qui est à la base de la géométrie différentielle allait connaître un essor singulier dans la relativité générale, par exemple (*i.e.* l'espace riemannien est une variété n -dimensionnelle).

Ce qu'en retient Husserl, c'est que l'on peut concevoir un système général de déterminations ou de formes, dont les divers espaces, métriques, topologiques, différentiables, ne sont que les réalisations ou les instantiations. Et vu que ce système général doit se présenter sous une forme axiomatique, Husserl en conclut qu'un système général de multiplicités possède la structure d'une théorie déductive. Mais toute théorie déductive donnée n'est qu'une instantiation de la forme catégoriale - au sens classique de catégorie - de toutes les

théories déductives, ce qui correspond à la théorie husserlienne des multiplicités.

Husserl est alors amené à proposer le concept de multiplicité définie "definit Mannigfaltigkeit". C'est ici que Husserl achoppe à de sérieuses difficultés, difficultés qui lui viennent sans doute du parallélisme qu'il a voulu établir avec le programme hilbertien de la formalisation.

Il n'est pas facile de cerner ce que Husserl entend par multiplicité définie: il commence par dire que c'est un noyau théorique qui régit un domaine infini d'objets, un système axiomatique qui domine l'ensemble de ses conséquences ou théorèmes. Ici, on pourrait penser à une théorie finiment axiomatisable *i.e.* ne comportant qu'un nombre fini d'axiomes non logiques comme la théorie des ensembles de von Neumann-Bernays-Gödel (la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel n'est pas finiment axiomatisable). Mais Husserl veut davantage et on ne peut identifier fini et défini ici. Sa multiplicité n'est pas seulement définie par un système d'axiomes, mais par un système complet: il semble bien que Husserl entende par là la complétude syntaxique, c'est-à-dire la propriété d'un système formel qui exige que toute formule bien formée ou sa négation soit un théorème ou encore qu'il ne soit pas possible d'ajouter un axiome au système formel sans entraîner de contradiction. C'est le sens de l'axiome de complétude de Hilbert (remarquons

que c'est un axiome pour Hilbert et non le théorème de complétude démontré par Gödel en 1930, qui énonce l'équivalence entre les formules bien formées logiquement valides et les théorèmes de la logique des prédicats du premier ordre). Jean Cavailles (*Sur la logique et la théorie de la science* [17]) et Suzanne Bachelard à sa suite (*La logique de Husserl* [18]) ont insisté sur le fait que le premier théorème d'incomplétude de Gödel en ruinant le programme de Hilbert, qui était lié au problème de la consistance ou de la non contradiction, plutôt qu'à celui de la complétude, invalidait en même temps l'espoir de Husserl de constituer une théorie des multiplicités définies au sens de systèmes déductifs. Husserl, inspiré évidemment par Hilbert, avait sans doute une conception trop étroite des systèmes formels et n'a pu prévoir les développements qui surviendront un ou deux ans après la publication de *Formale und transzendente Logik* (1929) [19].

On pourrait rendre davantage justice au projet de Husserl en s'écartant un peu de sa terminologie. Le théorème de complétude, comme on le sait, ne s'applique qu'à des théories relativement restreintes, logique des connecteurs, logique des prédicats du premier ordre, logique des prédicats d'ordre supérieur qu'on ramène au premier ordre à l'aide des modèles généraux à la façon de Henkin. Mais considérons une théorie au second ordre, disons la théorie des nombres qui devient par là

le système de l'analyse. L'analyse ou le système des nombres réels est complet au sens où on ne peut y ajouter d'autres axiomes, c'est-à-dire qu'on ne peut l'étendre (erweitern). Hilbert avait sans doute conçu son axiome en fonction du théorème de complétude pour les nombres réels dû à Dedekind: on prend l'ensemble des nombres réels R qu'on divise en deux sous-ensembles A et B

$$R = \{a \in A, b \in B\}$$

on a alors

- 1) $A \neq B \wedge B \neq A$
- 2) $\forall a \in R (a \in A \vee a \in B)$
- 3) $\forall a \in R \neg (a \in A \wedge a \in B)$
- 4) $\forall a \forall b (a \in A \wedge b \in B \rightarrow a < b)$
- 5) $\forall a \forall b \exists ! c \in R (a \leq c \leq b)$

ou "c" est ou bien le plus grand élément de A ou le plus petit élément de B , ce qui entraîne la complétude du système, puisque l'on ne peut rien y ajouter. C'est plutôt dans ce sens qu'il faudrait entendre système déductif complet chez Husserl et Hilbert, sens qu'on ne peut réconcilier avec le théorème (logique) de complétude.

Prenons maintenant les modèles de l'analyse au sens de la théorie des modèles. La théorie des nombres du second ordre équivalente à l'analyse ou théorie des nombres réels possède un modèle absolu $P(N)$ qui a pour univers l'ensemble des

parties de l'ensemble des nombres naturels. Les postulats de Peano

- 1) 0 est un nombre naturel
- 2) $\forall x(Sx = x + 1)$, où Sx signifie le successeur de x .
- 3) $\forall x(0 \neq Sx)$
- 4) $Sx = Sy \rightarrow x = y$

avec le postulat d'induction au second ordre

- 5) $\forall X(X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow XSy) \rightarrow \forall yXy)$

donnent une théorie catégorique, *i.e.* dont tous les modèles sont isomorphes. Nous avons donc avec la théorie des nombres du second ordre une théorie catégorique qui constitue, dans les mots de Husserl, une explication théorique unitaire d'un domaine infini d'objets (FTL, par. 31). Si donc on consent à prendre une certaine distance d'avec le langage de Husserl, on peut retrouver l'intention qui l'animait. Mais il n'en reste pas moins que le projet husserlien d'une théorie des théories aujourd'hui, pour avoir des chances de succès, doit pouvoir embrasser davantage que les théories formelles - nomologiques ou déductives comme dit Husserl. C'est la possibilité d'une telle entreprise, la construction d'une théorie des théories, que je veux envisager maintenant.

Husserl a pensé à une théorie des systèmes déductifs parce qu'il envisageait une théorie de la forme de toutes les théories possibles, une science nomologique universelle des

formes de multiplicité. C'est donc la généralité formelle que vise Husserl, un système global de structures théoriques dont les théories particulières ne seraient que les dérivations. Une telle ambition est utopique, non pas à cause des limitations qu'imposent les résultats d'incomplétude de Gödel et de non-définissabilité de la vérité de Tarski, mais simplement parce qu'il n'y a pas de structure de toutes les structures mathématiques, pas plus qu'il n'y a d'ensemble de tous les ordinaux et de tous les cardinaux ou plus naïvement d'ensemble de tous les ensembles. Récemment, Lawvere a proposé pour la théorie des catégories - une catégorie peut être décrite informellement comme un ensemble d'objets et un ensemble de morphismes ou fonctions pour lesquelles on a des lois de composition et d'identité - une formalisation de la catégorie de toutes les catégories, mais il apparaît que la catégorie de toutes les catégories n'englobe pas toutes les catégories - la catégorie des ensembles qui est une métacatégorie (*i.e.* n'est pas un ensemble) n'y est pas, pas plus que la catégorie des foncteurs, *i.e.* morphismes de catégories, entre toutes les catégories. La théorie des catégories ne semble pas plus forte à cet égard que la théorie des ensembles de von Neumann-Bernays-Gödel où l'on a des classes propres - classes qui ne sont pas des ensembles. MacLane, l'un des fondateurs de la théorie des catégories, a de plus reconnu que celle-ci pouvait être formalisée dans la théo-

rie des ensembles de Zermelo-Fraenkel à l'aide d'un cardinal suffisamment grand de la structure cumulative des rangs.

Mais c'est une remarque de Bernays dans "Von der Syntax der Sprache zur Philosophie der Wissenschaften" [20], [Dialectica, II (1957), p. 233-246] qui circonscrit parfaitement le problème. Parlant de la syntaxe formelle ou théorie des démonstrations et de la sémantique formelle ou théorie des modèles, Bernays dit qu'elles sont ancrées, pour la première, dans la théorie des nombres et pour la seconde dans la théorie des ensembles et qu'elles ne peuvent fournir la base d'une discussion épistémologique des mathématiques "Sie können also keinen Standort liefern, von dem aus der erkenntnistheoretische Status der Mathematik diskutiert wird". Kreisel a repris cette remarque dans "Hilbert's Programme" [21], en disant qu'il est nécessaire d'utiliser des concepts non mathématiques pour définir le statut des concepts mathématiques. On voit ici comment relativiser le projet husserlien d'une théorie formelle des théories déductives.

En fait, c'est tout le problème des fondements qui a échappé à Husserl. La problématique des fondements, que ce soit les fondements des mathématiques, les fondements de la physique, etc., exige un cadre conceptuel tout à fait différent de celui qu'avait imaginé Husserl. Ce ne peut plus être une science nomologique ou formelle qui définisse la forme de tou-

tes les théories possibles; une approche fondationnelle suit plutôt le chemin inverse, elle cherche à définir une pratique théorique de l'intérieur pour dégager les structures fondamentales qui renvoient à son dehors, ce que j'appelle l'horizon théorétique. Cet horizon théorétique peut être la visée idéale de toute entreprise théorique, mais chaque discipline formelle n'en découpe qu'un fragment, n'en parcourt qu'un segment. La métathéorie fondatrice, que ce soit la métamathématique, si on veut redonner à ce terme le sens plénier d'un discours sur les mathématiques et non plus le sens plus étroit de théorie des démonstrations que lui avait imposé Hilbert, ou la métaphysique, si on veut l'entendre comme discours sur la physique, nonobstant la tradition, situent ces corpus théoriques dans l'horizon de l'ensemble des activités théoriques. J'appelle métathéorétique l'entreprise qui essaie de décrire ou de définir cet horizon théorétique dernier, les fondements du savoir. Une telle métathéorétique n'est certainement pas une théorie nomologique ou formelle, même si elle comporte des aspects formels, mais une théorie suprême au sens de Husserl. On peut se représenter les choses de la façon suivante

	métathéorétique				
métathéorie ₁	métathéorie ₂	métathéorie ₃	métathéorie ₄	...	
théorie ₁	théorie ₂	théorie ₃	théorie ₄	...	
objets ₁	objets ₂	objets ₃	objets ₄	...	
(théorie du) monde					

Dans la perspective de la métathéorétique, le monde n'est pas donné dans sa réalité virginale, il est toujours-déjà-théorisé. La métathéorétique ne gère pas "d'en haut" les structures des théories, elle enquête d'abord sur les théories existantes, que ce soit dans les sciences exactes ou dans les sciences humaines et sociales. Ce n'est qu'après une telle enquête qu'elle peut tenter de dire ce que sont et ce que font les théories, faire émerger leur structure interne, établir les liens inter-théorétiques, proposer les principes qui règlent leur développement, tracer leur dessein. La métathéorétique est-elle une théorie de toutes les théories possibles? Elle est d'abord une théorie des théories faites, en acte; mais elle peut aussi par là même plonger jusque dans l'activité théorique elle-même, sonder ses fondements, suivre son cheminement, scruter son futur heuristiquement, éveiller ses possibles.

Tout cela s'accorde assez bien avec la tâche ancienne que la métaphysique s'est assignée. Mais la métaphysique a, dès l'origine, identifié sa tâche à la découverte de principes ontologiques ultimes que récuse la métathéorétique. Il ne s'agit pas de ressusciter à nouveau frais le couple réalisme-idéalisme, mais les principes ultimes, qu'ils relèvent de l'ontologie ou d'hypothèses dernières sur la nature du réel ou sur l'essence de l'esprit, la vérité ou la raison ou l'homme et autres paradigmes, symboles archaïques de la philosophie, n'ont

plus guère de place que dans une histoire conceptuelle où ils ne vivent que du feu tremblotant d'une pensée frileuse et d'une mémoire glacée. La seule hypothèse que retient la métathéorétique et je soutiens qu'elle est minimale, c'est celle du langage: que le langage rend inutiles tous les autres paradigmes, qu'il est un fondement irréductible, qu'il est le dernier mot ou que le dernier mot est du langage. Sans verser dans une théologie ou une théophagie du langage qui avalerait toute la métaphysique du passé, on peut dire rapidement que son origine est accidentelle et que sa fin le sera probablement aussi, que c'est une matière, si subtile soit-elle, et qu'on ne peut en parler qu'une fois dedans. Tout ce qu'il y a dans le langage, et le langage lui-même, n'est que construction, mais cela ne signifie pas arbitraire ou n'évoque pas nécessairement Babel. Nos constructions théoriques, qui sont des constructions linguistiques - on n'a pas besoin de faire appel à la raison ou au réel pour expliquer nos théories - sont assujetties à l'ordination de notre expérience, qui n'est pas uniquement linguistique, mais qui l'est ultimement, et à la communication universelle. Ce sont là les deux fonctions pérennelles de la philosophie qui apparaît ainsi comme construction dernière. Si la métathéorétique est constructiviste, et je termine là-dessus, c'est parce que nos constructions sont toujours partielles et qu'une construction totale n'est pas possible, si ce n'est com-

me idéal rêvé. L'ouverture constructiviste signifie seulement que nous n'avons jamais fini de construire nos vies, nos pratiques comme nos théories, la société comme le monde et tout... et tout le reste.

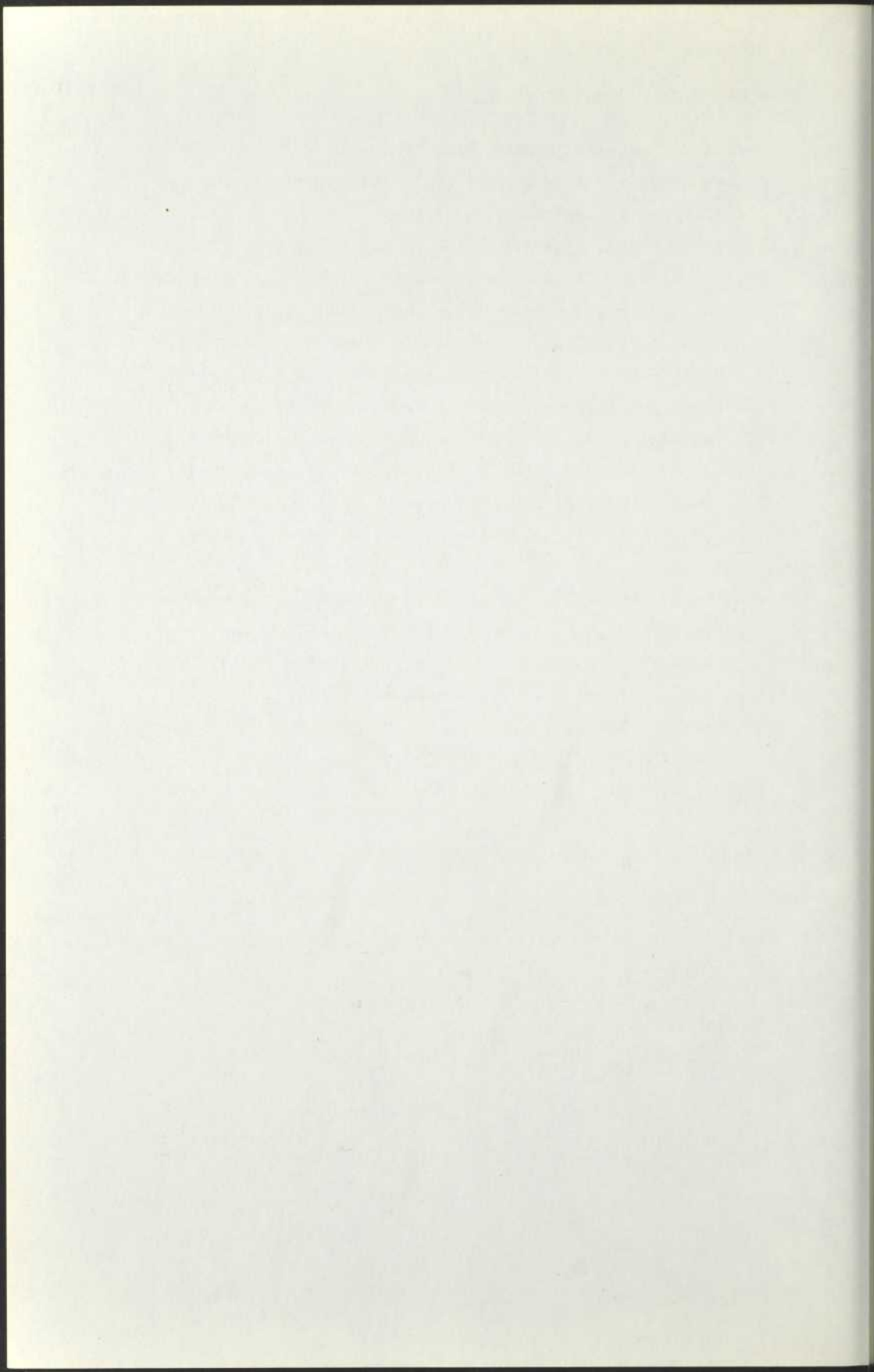
NOTES DU CHAPITRE IX

- [1] Voir J. T. Desanti *Les Idéalités mathématiques*, éd. du Seuil, coll. "L'ordre philosophique", Paris, 1968.
- [2] P.U.F., 2e éd., Paris, 1960, p. VII. C'est par rapport surtout à *Formale und transzendente Logik* que cherche à se définir Cavailles.
- [3] P.U.F., Paris, 1959. Cf. aussi son ouvrage sur *La logique de Husserl*, P.U.F. Paris, 1957. Voir aussi les remarques de Jules Vuillemin sur la phénoménologie dans *Philosophie de l'Algèbre*, t. I, P.U.F., Paris, 1962, conclusion, p. 465-518.
- [4] *Les Idéalités mathématiques*, ouvr. cit., p. 290.
- [5] 3e éd. (1927), 2 vol., Dover, New York, 1957.
- [6] Cf. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, p. 25-176 dans *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.
- [7] Pour les lecteurs philosophes qui souhaiteraient se familiariser avec les concepts principaux de la théorie des fonctions de variables réelles, nous conseillons l'introduction relativement simple de Sze-Tsen Hu, *Elements of Real Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1967. Les deux chapitres initiaux sur la théorie des ensembles et sur la droite réelle, qui reproduisent à peu près le début de l'ouvrage de Hobson en plus court, suffisent pour "se faire une idée" des analyses intra-mathématiques de Desanti.
- [8] Desanti utilise le terme "épithéorie", mais dans un sens éloigné de "métathéorie". Sur la métamathématique, voir les ouvrages d'introduction de P. Lorenzen *Metamathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962. Pour une vue d'ensemble de la problématique des fondements, Andrzej

- Mostowski *Thirty years of foundational studies*, Oxford, Basil Blackwell, 1966 et, à un niveau élémentaire, l'ouvrage de R. L. Wilder *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2e éd., John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [9] Desanti ne fait que souligner le problème en page 201.
- [10] Il est vrai que c'est la phénoménologie que vise explicitement Desanti ici. Mais c'est tout l'intuitionnisme qu'il touche par extension et la discipline très vigoureuse de la théorie des démonstrations. Voir là-dessus un autre article important de G. Kreisel, "Mathematical Logic: what has it done for the philosophy of mathematics?" in *Bertrand Russell: Philosopher of the Century*, Allen and Unwin, London, 1967, p. 201-272.
- [11] Cf. l'article de J. T. Desanti, "Remarques sur la connexion des notions de genèse et structure en mathématiques" in *Entretiens sur les notions de genèse et structure*, éd. par Gandillac, Goldmann et Piaget chez Mouton, La Haye, 1965, p. 143-155. On pourrait objecter à nos critiques qu'elles dépassent l'ambition de Desanti. Celui-ci a voulu en effet étudier la théorie des fonctions de variables réelles dans un moment précis de son histoire, à une époque où la logique mathématique était encore en gestation et où elle n'était pas encore thématifiée par les mathématiciens. Mais qu'on ne s'y méprenne pas! C'est tout le problème des fondements que veut cerner Desanti et la théorie des fonctions de variables réelles n'est qu'une occasion, un prétexte pour une entreprise qui vise "les idéalités mathématiques".
- [12] Voir, par exemple, Jean Dieudonné *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press (New York: 1960), p. 6 et J. B. Rosser *Logic for Mathematicians* (New York: 1953), chap.14.
- [13] On remarquera l'absence de référence à la logique chez De-

santi, à part le recours "anachronique" à Carnap et quelques renvois à Rosser *Logic for Mathematicians*, ouvrage d'ailleurs incomplet.

- [14] Desanti aussi, dans son livre *Phénoménologie et praxis*, éd. Sociales, Paris, 1963, pensait qu'après la décapitation, *i.e.* l'abandon de l'égologie transcendantale, un recommencement de la phénoménologie était possible. Mais c'était dans le sens du marxisme, pour lui à ce moment-là, perspective à laquelle il n'a sans doute pas renoncé.
- [15] E. Husserl *Logique formelle et logique transcendantale*, trad. S. Bachelard, P.U.F. (Paris: 1957), par. 28-36.
- [16] E. Husserl *Logische Untersuchungen*, t. I *Prolegomena zur reinen Logik*, 4e édition Halle (Niemeyer: 1928), par. 69.
- [17] S. Cavailles *Sur la logique et la théorie de la science* 2e édition, P.U.F. (Paris: 1960), p. 72 et s.
- [18] S. Bachelard *La logique de Husserl*, P.U.F. (Paris: 1960).
- [19] E. Husserl *Formale und Transzendente Logik*, Halle (Niemeyer: 1929).
- [20] *Dialectica*, 11 (1957), p. 233-246.
- [21] *Dialectica*, 12 (1958), p. 346-372.



Conclusion

**LE SENS PHILOSOPHIQUE
DES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES**

Au terme de notre travail, nous devons nous poser certaines questions sur la portée et la signification des recherches fondationnelles.

Théorie des ensembles, intuitionnisme, théorie des catégories et théorie des topoi, logique mathématique, théorie des modèles, théorie des démonstrations et théorie de la récursion sont autant de théories mathématiques ou logiques qui ont un impact sur la recherche fondationnelle. La recherche fondationnelle apparaît elle-même comme une métathéorie, une analyse de la pratique mathématique et logique. Cette analyse a pris la figure, dans notre enquête, d'un constructivisme radical, apparenté à l'intuitionnisme.

1. CONSTRUCTIVISME ET PRATIQUE MATHÉMATIQUE

Le constructivisme articulé autour des notions de stase, procès, fini, effini pourrait faire l'objet de longues

analyses. Il faudrait d'abord en montrer la filiation historique, du finitisme de Hilbert à celui de Herbrand [1] et Gentzen [2] (dans ses écrits philosophico-mathématiques où il s'objecte au concept d'infini actuel) et de l'intuitionnisme (ou semi-intuitionnisme) de Kronecker, Poincaré, Weyl, etc. jusqu'au "néo-intuitionnisme" de Brouwer et au post-intuitionnisme contemporain, sans parler des ascendants philosophiques, de Kant à Cassirer (*Philosophie der Symbolischen Formen*), Brunschvicg (*Les étapes de la philosophie des mathématiques*) et combien d'autres. Mais surtout il faudrait montrer comment il s'applique à la pratique mathématique.

On peut se demander à juste titre quels rapports existent entre l'analyse fondationnelle et la pratique mathématique. Peut-être aurait-il fallu analyser une théorie mathématique précise dans le détail pour justifier le type d'analyse fondationnelle que nous avons mené. Les candidats ne manquent pas: il y a des théories mathématiques qui sont déjà constructivistes, du moins partiellement, *e.g.* la théorie des nombres que nous avons déjà traitée en partie (chapitre V), la théorie des groupes finis, d'autres qui sont partiellement constructivisables comme l'algèbre abstraite (structures algébriques), d'autres encore comme la géométrie algébrique (que nous avons discutée au chapitre IV) qui apparaît comme un véritable carrefour mathématique [3] et dont l'intérêt pour nous réside dans

les conditions de finitude imposées aux constructions (malgré qu'il y ait là comme en théorie des nombres de puissantes méthodes transcendantes, *i.e.* non constructives). Même si certaines théories, comme la théorie des équations différentielles, la géométrie différentielle ou la topologie différentielle, ne sont pas facilement constructivisables, elles possèdent toutes en leurs fondements des notions "locales" dont il est possible de dégager le contenu constructif. Là-dessus encore, l'analyse est "effinie"!

Une théorie mathématique que nous n'avons pas abordée et dont l'importance surtout pratique est évidente, c'est la théorie des probabilités. La théorie des probabilités possède un statut particulier, c'est en quelque sorte une théorie-charnière qui d'un côté a des assises non constructives dans la théorie de la mesure et de l'autre reçoit de multiples applications non seulement dans les sciences physiques, mais aussi bien dans les sciences sociales. Elle a donc des aspects fondationnels importants; philosophiquement la distinction entre probabilité *a priori* et probabilité *a posteriori*, entre objectivistes et subjectivistes, entre bayésiens et antibayésiens [4] en fait une théorie riche en débats fondationnels. Il est évident que le point de vue constructiviste en théorie des probabilités privilégie le caractère non donné, construit des probabilités des processus stochastiques (ou aléatoires), des

jeux, etc. Autrement dit, en théorie des probabilités, pas plus qu'ailleurs, les jeux ne sont *faits*, il y a toujours "préparation", détermination, construction. Le concept de probabilité à lui seul mériterait une longue analyse conceptuelle [5].

La géométrie est un autre exemple de théorie mathématique dont nous n'avons pas traité, mais qui a soulevé des problèmes fondationnels, surtout dans le passé. Cependant ces problèmes étaient liés davantage à l'axiomatisation (Hilbert) et on peut dire que la géométrie, depuis sa "crise non euclidienne" qui appartient à l'histoire et surtout le programme d'Erlangen de Felix Klein qui réduisait les géométries aux invariants de leurs groupes de transformations, n'a plus de vocation fondationnelle spéciale [6]. L'intuition géométrique a perdu les privilèges d'une approche directe des structures mathématiques.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur le caractère constructif des méthodes mathématiques qui sont liées aux mathématiques appliquées, des mathématiques finies aux théories mathématiques de l'information, programmation et optimisation, etc. toutes ces démarches s'inscrivent naturellement dans l'orientation constructive des mathématiques. Il y aurait sans doute matière à philosopher sur les ordinateurs et surtout sur leurs possibles: en principe (pour nous, du moins) il n'est pas impensable qu'en complexifiant leur langage, les ordina-

teurs deviennent de véritables mathématiciens. Le sujet humain n'a ici qu'un droit d'aïnesse; le langage n'étant essentiellement qu'un travail matériel, l'intelligence naturelle (*i.e.* animale ce qui veut dire aussi humaine) n'a que le temps et une tradition millénaire à son avantage. L'intelligence artificielle (qu'il faudrait appeler électronique), malgré sa naissance récente, fait des pas de géants. La société extra-humaine de robots n'est pas plus improbable que les civilisations extra-terrestres: le possible n'est que la chance du présent. Mais c'est en d'autres lieux que nous philosopherons de cette manière-là (à la manière de Giordano Bruno!)

2. CONSTRUCTIONS, DEMONSTRATIONS ET EXISTENCE MATHÉMATIQUE

Nous avons tenté dans la conclusion du chapitre II de serrer d'un peu plus près la notion de construction, nous y avons dit qu'une construction mathématique est un acte linguistique de production finiment effectuable de structures ou objets mathématiques et dont le résultat ou produit est directement relié aux principes de l'activité productive. La notion d'effectivité qui découle de celle d'effectuation mériterait aussi de retenir l'attention, si ce n'est qu'en relation avec la thèse de Church: un procès effectif est un procès dont la génération ou la loi de génération est finie, itérable effinement et reproductible indéfiniment. Il est important de noter que si on voulait objecter que toutes les constructions répon-

dent à la définition donnée et que tous les procès sont effectifs, il serait facile de donner des exemples dans les mathématiques classiques ou ensemblistes où les constructions n'ont rien d'effectuable et où les procès ne sont absolument pas effectifs. Prenons l'exemple d'une notion en apparence constructive: l'ensemble de tous les ensembles finis. Kreisel a mis l'accent sur le fait qu'une telle notion requiert la notion d'ensemble infini, *i.e.* ω . Mais ce n'est pas le fait qu'il y ait davantage qu'un nombre fini d'ensembles finis qui semblent exiger cette notion d'ensemble infini, c'est seulement que l'on suppose que tous les ensembles finis qui correspondraient à la suite des naturels pour un univers dénombrable forment un ensemble comme l'on suppose que la suite des nombres naturels constitue un ensemble. C'est là une procédure illégitime, comme nous l'avons montré, puisque l'on suppose que la suite infiniment ou effinement processive de tous les nombres naturels se totalise en un ensemble ou que tous les nombres naturels sont ensemblés par quelque dieu assembleur, alors qu'ils ne sont qu'un procès jamais achevé, un devenir constructif.

L'induction (ou la récurrence) mathématique est ce procès constructif effini. L'induction transfinitie est une généralisation sur les ω qui correspond à ce que nous avons appelé procès transarithmétique (illégitime dans notre perspective). L'induction mathématique n'exige, en nos termes, qu'une

quantification infinie. Il est évident que l'élément essentiel est un nombre naturel fini arbitraire et son successeur; le postulat d'induction du second ordre

$$\forall x [X0 \wedge \forall y (Xy \rightarrow XSy) \rightarrow \forall y Xy]$$

étend donc les propriétés de n'importe quel nombre naturel fini à tous les nombres naturels. On voit donc la signification de la quantification universelle: aucune totalité infinie n'y est postulée, seule la génération des nombres naturels arbitrairement grands est centrale (de même pour la fonction de successeur $\forall x (Sx = x + 1)$).

Le raisonnement inductif ou principe de récurrence est en fait l'une des méthodes de démonstration les plus utilisées en mathématiques et en logique. Mais il y a aussi d'autres méthodes qui sont liées à des principes plus ou moins forts; la méthode de réduction à l'absurde ou méthode de preuve indirecte fait appel au tiers exclu, puisqu'on suppose la négation de l'énoncé à démontrer entraînant par là une contradiction qu'on élimine en rétablissant la vérité de l'énoncé en question. Cette méthode, extrêmement répandue en mathématiques et logique classiques, n'est évidemment pas acceptable dans toute son extension d'un point de vue constructiviste [7]. D'autres méthodes sont plus directes: la méthode de l'hypothèse auxiliaire où on suppose vrai l'énoncé à démontrer d'où l'on déduit un autre énoncé. La méthode de disjonction des cas ou de

la coupure se résume au schéma suivant

$$\frac{C \vee A \quad \sim A \vee D}{C \vee D}$$

Le théorème d'éliminabilité de la coupure de Gentzen montre cependant qu'on peut obtenir des preuves en forme normale (voir chapitre III). Finalement la méthode de la constante auxiliaire qui fait intervenir une constante par substitution à une variable consiste à raisonner sur le cas de la constante *i.e.* un objet quelconque doué de certaines propriétés pour ensuite conclure à un cas plus général (*e.g.* une implication $A \rightarrow B$ où la constante ne figure pas dans B , mais seulement dans A) [8].

Les méthodes de preuve ne sont pas toutes d'égale valeur. Seule une analyse fondationnelle peut les départager. Les méthodes de preuve pourraient être mises en parallèle avec les procédés de définition; en effet, les définitions formelles ou informelles que l'on accepte dans une théorie logique ou mathématique déterminent le contenu constructiviste ou non constructiviste de la théorie (*via* les concepts employés et que la théorie doit définir univoquement). On a suffisamment dénoncé les définitions imprédicatives (*i.e.* les définitions définissant un objet qui est une des valeurs d'une variable liée par un quantificateur apparaissant dans la définition ou encore les définitions qui réfèrent à une totalité à laquelle appartient l'objet ou l'ensemble à définir) et le cercle vicieux qu'elles entraînaient depuis Russell pour qu'il faille revenir ici sur

cette question dont l'intérêt est surtout historique.

L'intérêt immédiat du parallèle entre méthodes de preuve et procédés de définition touche plutôt à la question de l'existence mathématique. Pour le constructivisme, il est facile de voir qu'existence signifie constructibilité "esse est strui". La logique et les mathématiques classiques, où existence correspond souvent à consistance (ou non-contradiction) recourent au tiers exclu, à la décidabilité de toute question mathématique ou à la "reductio ad absurdum". Un exemple classique est le théorème du bon ordre dû à Zermelo qui affirme que tout ensemble possède un bon ordre, *i.e.* est ordonné et dont tout sous-ensemble non vide contient un plus petit élément [9]. Le caractère existentiel de ce théorème comme celui de l'axiome du choix saute aux yeux, mais il est aussi clair que l'axiome pas plus que le théorème n'est constructivement admissible (excepté pour les cas finis). Un autre exemple classique est le théorème de Bolzano-Weierstrass (discuté au chapitre II) qui repose essentiellement sur le principe du tiers exclu. Rappelons que Hilbert dans "Ueber das Unendliche" et ailleurs a voulu défendre l'idée que l'existence en mathématiques se réduisait à l'exigence de non-contradiction, mais que de son point de vue métamathématique, la non-contradiction devait se démontrer finitairement (point de vue que partageait Herbrand et qu'il l'appelait "intuitionniste"). Dans ce sens, l'existence d'ob-

jets idéaux signifiait qu'on pouvait en *supposer* l'existence sans contradiction, même si on ne pouvait les construire.

Il serait superflu de définir à nouveaux frais les critères constructifs d'existence. Nous avons déjà insisté sur la notion d'effectivité: finitude, computabilité, répudiation des totalités infinies achevées, introduction ou élimination finie des concepts (*i.e.* définissabilité finie chez Lebesgue) etc., tout cela fait partie des critères de constructibilité mathématique, mais s'il est possible de fixer une limite supérieure aux méthodes constructives, il serait présomptueux de prétendre à l'exhaustivité en ce domaine. Les mathématiques (et la logique) sont une activité de construction perpétuelle et l'inventaire des démarches mathématiques n'est jamais tout à fait à jour. Non pas que le retard de la philosophie soit inévitable, mais la réflexion fondationnelle comporte un recul nécessaire que ne saurait combler l'analyse descriptive de la pratique, si actuelle soit-elle.

3. L'AGENT LINGUISTIQUE CONSTRUCTEUR

Notre constructivisme se présente comme un "effinitisme", centre médian entre le finitisme et les méthodes infinitaires. Dans la variété des constructivismes, le constructivisme effinitiste se veut le plus près du finitisme, tout en intégrant des constructions définies qui vont au-delà des manipulations combinatoires et exigent un "constructeur" intention-

nel. C'est ce point peut-être qui mérite le plus un éclaircissement ici, le problème du sujet constructeur.

Nous avons entendu "structuralisme" au chapitre VIII au sens de langage de structures (structures abstraites au sens mathématiques). Ce sens est assez éloigné du structuralisme philosophique (français), préoccupé surtout de la déconstruction du sujet créateur (chez les Foucault, Lacan, Althusser, Derrida, Deleuze, Desanti, etc.). Le structuralisme ainsi entendu s'est érigé en réaction contre Husserl et sa théorie de l'ego transcendantal, pôle constituant des expériences noétiques du sujet. Quels rapports entretient notre constructivisme avec Husserl ou le structuralisme?

Nous avons insisté à maintes reprises sur l'importance du sujet créateur ou du producteur, qui n'est pas un ego transcendantal husserlien, mais un agent linguistique. Comment dans le système du langage (ici tout langage ou tout le langage) une production linguistique est-elle possible? Que le sujet créateur se réduise au rôle d'élément ou de moment du système, de "dispositif d'allumage", le constructivisme, tel que nous l'entendons, n'y répugne pas. Mais c'est à partir de ses éléments que nous devons comprendre le système. Prenons l'exemple d'une théorie mathématique précise, la géométrie algébrique, qu'il serait intéressant d'analyser comme un des paradigmes de la pratique mathématique. Comment comprendre l'évo-

lution récente de la géométrie algébrique sans faire intervenir l'"action linguistique", l'activité mathématique de Grothendieck, qui, à partir de "Sur quelques points d'algèbre homologique" [10], a donné un nouveau tournant à la discipline [11]? L'activité mathématique est une activité linguistique et le langage pour être un système autonome, n'en est pas moins la totalité de ses composantes. C'est l'intégration, la composition nécessaire du système et des systèmes (éléments du système) qu'il faut comprendre. Que le sujet transcendantal de Husserl dans ce contexte se voie décapité, parce qu'il n'est plus le fondateur, hors du langage, du système du langage, nous l'accordons aux structuralistes; mais, qu'en plus, le système soit le jeu réglé de ses éléments, locuteurs émetteurs et récepteurs [12], le relais d'une tradition, l'imagination d'un futur, accouplés à l'arbitraire d'une histoire (l'histoire des mathématiques n'est pas moins "stochastique" que l'histoire tout court), que le système soit engendré dans une dialectique des moments [13] du langage, concepts et conscience (ou langage), c'est ce que le structuralisme n'a pas vu suffisamment ou ce qu'il devrait voir dans la "synoptique" des structures.

L'introduction du sujet constructeur ou la description de son rôle dans l'activité mathématique ne signifie pas l'irruption de la psychologie dans les fondements des mathématiques. Si la psychologie des mathématiques est possible, de

Hadamard à Piaget, c'est à un autre niveau et Piaget ne l'a peut-être pas bien aperçu. Piaget a tenté, avec l'aide de Beth [14] pour un temps et parallèlement, de formuler une épistémologie génétique des mathématiques. Prenant pour modèle ou paradigme les structures mères de Bourbaki, structures algébriques, structures d'ordre et structures topologiques, il a donné les éléments d'un constructivisme génétique (psychologique) qui ne manque pas d'intérêt, mais dont l'intérêt fondationnel n'est pas évident. En effet, Piaget ne s'est pas interrogé sur les relations des structures mères (plus ou moins arbitraires ou réductibles) aux fondements. Une genèse ou une chronologie psychologique de l'apparition des structures dans le raisonnement de l'enfant n'a que peu d'utilité dans l'évaluation fondationnelle de ces mêmes structures. Ce n'est pas au succès de l'apprentissage de la théorie élémentaire des ensembles chez les enfants qu'on juge de la validité des principes de la théorie axiomatique des ensembles. Cependant, dans la mesure où le constructivisme psychologique de Piaget rejoint le nôtre - il faut bien reconnaître une genèse psychologique à nos concepts et à nos constructions - nous ne pouvons que souscrire à ses idées maîtresses tout en délimitant clairement la portée de la psychologie constructiviste qui ne saurait légiférer dans les fondements proprement dits (qui ne sont pas psychologiques). La problématique fondationnelle du sujet

créateur n'a rien à voir non plus avec la question de l'invention mathématique, soulevée par Hadamard ou Polya, entre autres. On ne peut guère tirer de conclusions valables pour les fondements des rêves ou de l'inconscient de Gauss ou de Poincaré, ou même du conscient du mathématicien ordinaire... La caractérologie des mathématiciens n'est bonne que pour alimenter les mythes biographiques. La possibilité d'une interprétation purement psychanalytique de l'activité mathématique comme telle suppose une théorie globale de l'activité pensante et la psychanalyse dans ce contexte n'est rien moins qu'une théorie philosophique comme les autres et sujette aux mêmes critères.

Quant à l'interprétation marxiste (ou maoïste) [15] des mathématiques, si elle est toujours possible, elle ne demeure pas moins problématique. Que peut nous apprendre le marxisme sur les mathématiques? Dans la mesure où le marxisme nous donne une interprétation (peut-être la meilleure) des productions sociales ou socio-culturelles, il peut fournir des indices importants sur l'histoire (sociale) des mathématiques, mais il ne semble pas possible de réduire l'activité mathématique - comme l'activité philosophique ou l'activité intellectuelle en général - à l'image superstructurelle de la production et des relations de travail ou encore au reflet pur et simple de la lutte des classes. La structure cumulative de la théorie axiomatique des ensembles est-elle à l'image de la so-

ciété capitaliste, comme l'a déjà suggéré Lawvere?

Il serait vain de voir dans de pareilles correspondances plus que des analogies. Encore ici, toute théorie de la production mathématique doit faire sa place à la dialectique fine de la production, du producteur et du produit du savoir. Il est vain aussi de se demander s'il y a une logique ou une mathématique dialectique [16]. On peut concevoir que l'histoire et les sciences sociales ou humaines requièrent une méthode dialectique, une logique (au sens large) dialectique, mais la logique et les mathématiques n'ont rien de dialectique - au sens où la dialectique irait au-delà du principe de contradiction, dans une interprétation naïve. Il n'est pas interdit cependant, que la théorie ou la métathéorie de la logique et des mathématiques soit dialectique et le constructivisme que nous défendons a ce caractère dialectique par l'interaction du producteur, de la production et du produit du savoir mathématique. Si nous rejetons l'interprétation matérialiste courante, nous défendons cependant une théorie matérialiste des mathématiques et de leur histoire. Le langage - le discours logique et mathématique - est matériel, il ne suppose pas l'activité d'un esprit ou d'une conscience, l'arrière-monde de la pensée. Cette autarcie, cette autologie du langage, nous l'avons exposée ailleurs et projetons de le faire de nouveau dans un contexte élargi; qu'il suffise de dire, que de notre point de vue, une

perspective matérialiste (sans le dogmatisme du matérialisme dialectique) peut rendre compte de l'idéalité linguistique mieux que les hypothèses partielles ou fragmentaires des diverses philosophies des mathématiques contemporaines.

La mathématique (le produit mathématique) peut être conçue enfin comme texte et là, la dialectique du texte [17] et de son lecteur peut donner naissance à une herméneutique d'inspiration constructiviste ou autre. Toute interprétation, quelle qu'elle soit, doit pouvoir se tenir assez près des mathématiques pour nous informer sur sa nature ou ses fondements et assez loin pour situer les mathématiques dans un contexte théorétique global; une interprétation doit être capable d'ouverture, c'est-à-dire apte à intégrer le plus de réalité mathématique dans une perspective suffisamment articulée qui puisse rendre compte de la totalité de l'expérience théorétique.

Si nous rejetons le réalisme sous toutes ses formes et le matérialisme dialectique et le nominalisme, le positivisme (empirisme logique) et le conventionnalisme, ne sommes-nous pas acculé à la fin à une sorte d'idéalisme, idéalisme qui s'allierait bien au constructivisme, selon la formule brunshvicgienne d'idéalisme constructif? On pourrait taxer notre constructivisme d'idéalisme du langage, mais il faudrait tenir compte de notre rejet systématique de toute réalité intellectuelle (ou spirituelle) autre que linguistique. La seule idéal-

lité que nous acceptons, c'est celle du langage qui englobe (ou à quoi se réduisent) la pensée, l'esprit ou la conscience. Idéalisme peut-être, mais idéalisme minimal qui ne postule à l'origine de l'activité mathématique que le langage et des agents linguistiques qui produisent progressivement plus de langage. Au commencement étaient le langage et l'activité linguistique (issus de la genèse obscure et interaction d'un constructeur - que l'on a convenu d'appeler homme - et de sa construction - que l'on a convenu d'appeler monde).

4. L'APPLICABILITE DES MATHEMATIQUES

Un autre problème hante les abords, on serait tenté de dire inférieurs, de la problématique fondationnelle, c'est celui des mathématiques appliquées (dont le concentré est la physique mathématique). Le problème se résume à la question: pourquoi les mathématiques sont-elles applicables au monde physique? La réponse constructiviste que nous y apportons tient en peu de mots: parce que le monde physique n'est pas moins une construction théorétique [18] que la mathématique et qu'ultimement, mathématique et physique ont le même but, la construction du continu, ou ce qui est la même chose, la construction du discontinu.

Cette réponse sommaire appelle des explications. Peu de philosophes, encore moins de mathématiciens et de physiciens, sont prêts à admettre que la physique est une construc-

tion au même titre que les mathématiques. La physique a des contraintes que les mathématiques ne connaissent pas. Hermann Weyl aimait répéter que l'applicabilité d'une théorie mathématique était son test suprême. Quelles sont donc les contraintes qui sont imposées à la physique mathématique? Prenons le cas de la physique théorique. Le fait que des méthodes non-constructives soient utilisées, *e.g.* la théorie des fonctions analytiques en physique classique ou la théorie des espaces de Hilbert (l'analyse fonctionnelle en général) en mécanique quantique est un indice que la physique est une construction théorique parallèle aux mathématiques. En effet, comment expliquer que des constructions qui postulent des infinités réussissent à définir une réalité physique finie, si ce n'est en montrant que toutes deux, "réalité" mathématique et "réalité" physique coïncident par construction. D'autre part, il est évident que des disciplines mathématiques sont issues de problèmes physiques concrets, *e.g.* l'hydrodynamique a engendré la théorie des équations différentielles partielles [19]; ici c'est le continu ou le "plein" physique qui trouve son "image" mathématique. Mais, s'agit-il de décrire plutôt que de construire le continu, pour reprendre le vieux débat entre la géométrie et l'arithmétique? On peut dire avec Hegel que ce qui est donné dans l'expérience c'est l'immédiateté indéterminée "die unbestimmte Unmittelbarkeit", mais cette immédiateté indéterminée

(du "plein" ou du "vide") n'est rien, elle n'est pas descriptive: ce n'est que par construction qu'on réussit à remplir ce plein, à "continuer" le discret en continu. Sans doute y a-t-il une dialectique fine du continu et du discontinu, la physique quantique l'a montré à l'évidence, mais la dialectique ne peut être que le procès même de cette construction polaire, de cette biconstructibilité.

Si la physique n'apparaît pas comme un ensemble de constructions aussi arbitraires que les constructions mathématiques, c'est simplement parce que la physique semble liée à une réalité sensible; mais l'évolution de la physique a rendu ce lien extrêmement lâche [20] et on ne peut dire que les groupes spéciaux unitaires en théorie de particules élémentaires, les hyperespaces en cosmologie relativiste ou les opérateurs hermitiques en mécanique quantique ont quelque attache avec le monde sensible. La physique n'est pas la description de la réalité donnée aux sens, c'est la construction théorique du monde, comme dit Hermann Weyl. Loin donc de postuler une hypothétique réalité physique inaccessible, la physique mathématique ou théorique est la construction d'une forme à partir d'un contenu indifférencié d'une matière première indéterminée. Ce que Aristote appelait " $\upsilon\lambda\eta$ " "matière" n'est rien d'autre que le bois de construction qui sert à bâtir le monde physique.

La physique expérimentale, dans ce contexte, risque

de se voir attribuer la portion congrue. Qu'il suffise de dire pour nos besoins, que les expériences physiques elles-mêmes sont des constructions, des arrangements, des préparations qui n'auraient guère de sens si elles n'étaient guidées par des constructions théoriques.

Qu'y a-t-il de proprement constructiviste, finalement, dans la construction des théories physiques? Les théories physiques n'obéissent pas nécessairement aux critères du constructivisme mathématique. Il y a de nombreux exemples en physique mathématique d'application de théories mathématiques non constructives. Mais les constructions analytiques ou "transcendantes" sont toutes en attente d'une constructivisation, qui ne modifierait en rien leur applicabilité. Mais le fait que des constructions non finies trouvent une application physique montre encore la déterminabilité (ou la constructibilité) indéfinie du "monde" physique. C'est dans ce sens qu'on peut parler de théorie physique constructiviste, dans la mesure où elle est fondée sur des constructions mathématiques, finitaires ou non. Il ne faudrait pas négliger le contenu "constructif" des théories mathématiques proches de la physique, par exemple la théorie des équations différentielles ordinaires, la théorie des équations différentielles non linéaires, la théorie des fonctions elliptiques, etc. Ces théories sont dotées de méthodes constructives, méthodes d'approximation, qui produisent

des solutions numériques - à comparer aux théorèmes (*e.g.* du point fixe) non constructifs d'existence et d'unicité (des solutions). L'hypothèse constructiviste a pour sens ici qu'il est toujours possible en principe d'énucléer le contenu strictement constructiviste des mathématiques applicables (un exemple instructif mériterait une étude détaillée, celui de la topologie différentielle et de la théorie des catastrophes de R. Thom ou encore celui des singularités en cosmologie relativiste).

5. PHILOSOPHIE ET FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

Il nous reste encore à dire quelques mots sur les relations des fondements des mathématiques (ou de la logique) à la philosophie des mathématiques (ou de la logique). Nous avons déjà dit que, malgré un usage répandu, nous faisons une distinction assez nette entre les deux. La philosophie des mathématiques s'est intéressée traditionnellement à classer les diverses conceptions philosophiques des mathématiques, réalisme, intuitionnisme, logicisme, formalisme, nominalisme, conventionnalisme, etc. Ces conceptions philosophiques ont rarement été mises à l'épreuve: elles restaient étrangères à la pratique mathématique ou à ses fondements (mathématiques) et constituaient des options plus ou moins personnelles. Dans ce sens, elles sont devenues anachroniques, ne répondant plus aux exigences des recherches fondationnelles, indissociablement logiques, mathématiques et philosophiques. Les positions philoso-

phiques qui se sont fait jour dans le passé, disons avant 1930, se sont considérablement affaiblies et on peut dire qu'il ne reste guère plus que deux conceptions qui sont encore près de la pratique logique et mathématique, le constructivisme et le non-constructivisme ou réalisme. Mais ces conceptions elles-mêmes n'ont plus le caractère vague et général que la tradition philosophique leur avait accordé. L'évolution de la logique mathématique et l'élaboration des théories fondationnelles ont forcé le constructivisme à devenir une hypothèse fondationnelle concrète qui a des répercussions (heuristiques) sur la pratique et l'orientation de la recherche.

On peut encore identifier, si l'on veut, philosophie des mathématiques et fondements des mathématiques, pourvu que l'on reconnaisse que la philosophie des mathématiques a évolué au rythme des recherches logico-mathématiques et qu'elle s'en est rapprochée au point de s'y confondre presque. Ainsi, là où la philosophie semble reprendre ses droits, c'est dans l'évaluation des recherches logico-mathématiques à l'intérieur du panorama total de l'expérience théorétique. Si les fondements sont définis comme une analyse conceptuelle de la pratique mathématique, les concepts et les principes, comme on l'a vu, ne peuvent venir de la pratique elle-même, mais de plus bas ou de plus haut en quelque sorte. La philosophie peut alors se définir comme fondement (abyssal) des fondements (des mathémati-

ques, de la physique, etc.), puisqu'elle prétend fournir les concepts et les principes premiers ou irréductibles du savoir. Les fondements des mathématiques comme théorie générale des concepts et des principes mathématiques (et logiques) ont nécessairement des assises philosophiques. Ce qui ne signifie pas que les fondements (philosophiques) ultimes se soustraient, de droit et de fait, à la critique ou à l'analyse. Tout schème fondationnel, toute théorie philosophique, comme tout autre théorie d'ailleurs est hypothétique: c'est sa richesse, sa fécondité, son irréductibilité, sa "globalité", sa cohérence enfin qui font qu'une hypothèse philosophique est préférable à une autre.

Il ne sert à rien de rejeter la philosophie péremptoirement: "Toute philosophie n'est qu'une question d'humeurs (d'opinions)". Ceux qui ne peuvent proposer de théorie philosophique générale sont aussi incapables de formuler une théorie "humorale" générale. Un schème cohérent - et global - de l'expérience (qu'elle soit théorétique ou non) doit avoir le caractère d'une théorie, ensemble systématique de propositions. Une théorie des mathématiques, qu'on l'appelle métamathématique ou autrement, est une métathéorie, qui n'est plus par le fait même exclusivement mathématique - à moins que l'on n'identifie métamathématique à la logique mathématique ou à la théorie des systèmes formels au sens de Hilbert [21]. La métathéorie fon-

datrice, ensemble systématique de propositions premières ou fondamentales, est philosophique. On pourrait évoquer Husserl ici qui a conçu le projet d'une théorie des multiplicités "Mannigfaltigkeitskehre", sur le modèle de la théorie des multiplicités mathématiques (qu'on appellerait aujourd'hui théorie des variétés), qui donnerait la forme de toutes les théories possibles, qui serait ultimement une théorie générale des théories possibles (voir chapitre IX). Notre idée de "métathéorétique" n'est pas étrangère à une pareille conception, mais elle s'appuie sur un autre savoir et a une autre visée: rejet de toute métaphysique de l'être et analyse fondationnelle de la science contemporaine. Mais c'est dans la proximité des mathématiques que Husserl avait suggéré sa science des théories (voir ses *Logische Untersuchungen*, I) et c'est aussi dans cette proximité que la métathéorétique commence à construire.

Dans la mesure où les métathéories fondatrices constituent avec les théories proprement dites ce que nous appelons la "théorétique" du savoir, une métathéorétique est possible comme théorie générale du théorétique, c'est-à-dire comme conception philosophique générale qui remplace la vieille métaphysique que la tradition a identifiée le plus souvent à la théorie de l'être, "vieux plumage ailé", pour reprendre une expression de Mallarmé. La métathéorétique n'est plus théorie générale de l'être, mais théorie générale de la science, syn-

thèse philosophique du savoir (ou des savoirs). Cette ambition "métathéorétique" dépasse la visée des fondements des mathématiques, la déborde vers l'horizon de l'expérience théorétique intégrale, mais il était nécessaire d'en indiquer le sens. Un tel projet est aux antipodes de la dissémination que la pratique théorique en vogue veut instituer. Mais si la "praxis" elle-même n'est pas un nouvel "inconstructible", comme l'"être" de la tradition métaphysique, la θεωρία demeure nécessaire comme vie théorétique, source même de la liberté selon Anaxagore, comme *Selbstbildung*, construction de soi dans la construction du monde. Et si la communication universelle, l'omnicommunication, selon le terme de Lacan, est l'idéal de toute philosophie [22], il importe que les savoirs communiquent entre eux, se rejoignent dans une métathéorétique fondatrice [23]. A cette condition peut-être et sous la réserve que les fondements sont abyssaux, y a-t-il une chance de construire du sens par le rassemblement des significations que le savoir a semées dans le vent fou du non-savoir.

6. LOGIQUE, MATHÉMATIQUES ET METATHEORETIQUE

Nous avons déjà évoqué la métathéorétique comme l'aboutissement dernier de nos efforts théoriques; en particulier, nous sommes revenu à plusieurs reprises sur l'idée que l'analyse fondationnelle devait y trouver sa justification ultime. La théorie des fondements, ici des mathématiques, doit pouvoir

s'intégrer dans un champ global qui embrasse toute l'expérience théorétique ($\beta\acute{\iota}\omicron\varsigma$ θεωρητικός comme disait Aristote). C'est l'engrenage logique-mathématique-métathéorétique que nous voulons éclairer ici.

Qu'en est-il de la logique (au sens le plus général de la logique formelle)? Prenons d'abord le problème de la vérité en logique. On ne doute pas qu'une vérité logique doit être universelle, puisqu'elle ne vise que la forme d'un énoncé, forme qui doit se retrouver dans toutes les langues naturelles. Ne préservant que la forme des énoncés, une vérité logique sera donc invariante par rapport aux différents contenus, que ce soit des énoncés ou composants d'énoncés (*e.g.* des prédicats). Cette notion d'invariance ou de propriété invariante est d'origine géométrique: une propriété invariante est une propriété qui n'est pas modifiée par les transformations qui affectent, par exemple, une figure géométrique que l'on projette sur un plan (en géométrie projective). La logique serait alors une véritable syntaxe ou grammaire universelle dont le contenu sémantique (et pragmatique, selon le schème de la sémiologie) pourrait varier au gré des langues et des langages (scientifiques et autres).

Mais l'invariance des notions ou des vérités logiques, d'où vient-elle? Là-dessus, plusieurs options philosophiques sont possibles et nous verrons plus loin que si elles

admettent toutes l'universalité ou l'invariance de la logique, elles ne la justifient pas toutes de la même façon.

La question de l'objectivité se rattache directement à celle de la vérité. La théorie de la correspondance héritée d'Aristote et qu'a reprise Tarski se résume au paradigme qu'a formulé Tarski: "La neige est blanche" est vrai, ssi la neige est blanche *i.e.* un énoncé est vrai, ssi il correspond à un état de fait. Cette notion de vérité, qu'on pourrait appeler vérifactuelle, n'a qu'une portée limitée. On peut concevoir, en effet, que certains énoncés scientifiques sont vrais, ssi ils correspondent, non à des états de faits, mais à d'autres énoncés théoriques qui ne recouvrent pas directement des états de faits observables ("ssi" abrégie "si et seulement si").

"La charge électrique du neutron est nulle" est vrai, ssi la charge électrique du neutron est nulle ou encore "La logique est *a priori*" est vrai, ssi la logique est *a priori*. Cette notion de vérité, on pourrait l'appeler vérithéorique, ou vérité selon la théorie ou les théories dont on dispose. On voit que plusieurs critères de vérité sont possibles.

Pour la logique, l'invariance de ses notions garantit-elle leur objectivité? L'objectivité vient de l'invariance même. La logique transcendantale, au sens de Kant, expliquait l'objectivité par l'universalité et l'unité de l'aperception transcendantale ou de la conscience de soi (transcendantale)

fondatrice de l'objet dans la mesure où elle est l'acte unificateur du donné dans sa multiplicité et ainsi peut le constituer comme objet susceptible de déterminations catégoriales. La constitution transcendantale de l'objectivité que Husserl a reprise avec le schème de l'égologie transcendantale va dans le même sens: une telle construction transcendantale peut se justifier si on recourt au langage comme structure transcendantale (ce que ni Kant, ni Husserl n'a fait). Le fondement de l'objectivité de la logique serait ultimement linguistique ou empirico-transcendantal (le langage étant également un phénomène empirique).

Les thèses traditionnelles en philosophie de la logique depuis Aristote et surtout le moyen âge avec Occam, pour avoir été remâchées inlassablement, n'ont pas perdu tout leur sucre. Ainsi H. Putnam, dans son petit livre *Philosophy of Logic*, consacre-t-il le plus gros de son argumentation au débat réalisme-nominalisme [24]. Il serait inutile cependant de reprendre le débat dans sa forme ancienne [25]. Dans sa forme actuelle, il apparaît comme le résultat d'interprétations divergentes de la logique plutôt que comme une prise de position métaphysique. De Russell à Quine, le motto est nominaliste "Entia non sunt praeter necessitatem multiplicanda", sans pour autant que cela entraîne la thèse nominaliste. D'autre part, si "to be is to be the value of a variable" selon le dictum de

Quine, on sait que l'ontologie ne s'en trouve pas nécessairement réduite à l'inventaire du monde physique. Le réalisme en logique est souvent identifié à la doctrine qui soutient l'existence d'universaux en plus d'admettre l'existence des individus singuliers. Les universaux d'aujourd'hui correspondent aux ensembles ou aux classes et le nominalisme, dans un sens strict, se résume à nier l'existence des ensembles ou des classes abstraites. Il n'est pas difficile de répudier les ensembles ou classes comme façons de parler ou fictions utiles, comme Leibniz l'avait fait pour les infinitésimaux, que l'analyse non standard a récemment ressuscités - qui sont devenus par là peut-être plus utiles mais non moins fictifs pour autant. Définitions contextuelles, quantifications virtuelles comme chez Quine [26] ne suffisent pas cependant à "déréaliser" la théorie des ensembles avec ou sans classes (on sait que les classes ont été introduites dans la théorie des ensembles de Bernays-Gödel-von Neumann, par exemple, pour éviter les paradoxes de l'ensemble des ensembles: les classes propres ne peuvent pas être membres d'autres classes, alors que les ensembles peuvent être membres d'autres ensembles). Putnam est en droit de demander, comme il le fait dans son livre *Philosophy of Logic*, si la physique n'exige pas davantage que le nominalisme le voudrait. Mais la physique semble requérir plus que la théorie prédicative des ensembles, *i.e.* que des ensembles appartenant à

une totalité bien définie. La théorie des nombres réels sur laquelle la physique est fondée fait appel à des principes imprédicatifs et les notions de fonctions d'une variable réelle et d'ensemble non dénombrable n'apparaissent pas, à première vue, réductibles.

Si le nominalisme ne peut guère éliminer les notions ensemblistes, pas plus que le formalisme ne peut faire dans les fondements des mathématiques l'économie des notions abstraites (rappelons que Hilbert voulait fonder les mathématiques classiques et la preuve de leur consistance uniquement sur les notions concrètes d'une combinatoire finie), le réalisme ne constitue pas toutefois le seul refuge.

Examinons, pour un instant, à l'interprétation substitutionnelle des quantificateurs: on interprète la quantification par ses substituts possibles, uniquement parce que le nom commun n'est qu'un substitut pour des noms propres. On peut facilement voir que cette interprétation soulève des problèmes de nomenclature; en plus, elle n'est pas strictement nominaliste, puisque la liste infinie de noms dont on a besoin pour la logique des prédicats peut être fournie par la suite infinie des entiers ou la suite infinie de leurs noms, ce qui en soi n'a rien de l'individuel concret (par opposé à l'universel abstrait). Le réalisme consisterait ici à donner un statut existentiel aux noms communs ou termes généraux, à tout le

moins, aux nombres et aux ensembles. En particulier, les ensembles infinis auraient droit de cité dans le ciel idéal "τόπος οὐράνιος" aussi bien que les ensembles finis [27]. Le "Wolkenkuckusland", terre des coucous dans les nuages d'après Nietzsche ou paradis cantorien, selon l'expression de Hilbert, est-il artificiel ou bien faut-il embrasser une ontologie pleine, comme le voudraient bon nombre de logiciens, chez qui la naïveté n'a d'égale que la générosité (*i.e.* le réalisme naïf du logicien ou du mathématicien praticien entraîne au débordement ontologique).

Une voie médiane est possible qui conserve l'ascétisme du nominaliste mais qui ne se prive pas pour autant des joies mystiques du réaliste. Comme le conceptualisme qui, au moyen âge, a pu représenter le tiers parti entre un nominalisme trop radical et un réalisme trop accueillant (où l'"angelitas" pouvait librement battre des ailes) et comme l'intuitionnisme plus récemment qui constitue une position intermédiaire entre le formalisme (hilbertien) et le réalisme, le constructivisme, à plusieurs égards, se situe à égale distance du nominalisme et du réalisme en philosophie de la logique et des mathématiques. Si nous consentons à voir dans les autres thèses conventionnalisme, fictionalisme, pragmatisme, empirisme, rationalisme, idéalisme, logicisme, formalisme ou encore conceptualisme des variétés ou variations soit du constructivisme, soit du réalisme

me que nous préférons appeler structuralisme, nous en sommes réduits au duo constructivisme-structuralisme (le nominalisme étant une forme limitée, dans cette perspective, du constructivisme). Reprenons les raisons pour lesquelles nous appelons le réalisme et ses variations "structuralisme". Si nous concevons les mathématiques, à l'instar de Bernays, comme théorie des structures abstraites (structures dans le sens bourbakiste, par exemple, les structures mères, structures algébriques, structures d'ordre et structures topologiques), il est possible de voir la logique comme théorie des structures invariantes ou universelles (du langage, qu'il y ait isomorphie ou non entre langage et réalité). Une position comme celle de Quine qui définit la vérité logique de la façon suivante "Un énoncé est logiquement vrai, si tous les énoncés qui ont la même structure grammaticale (ou logique) sont vrais" [28] est nettement structuraliste dans cette perspective. La thèse formaliste de Carnap, en vertu de laquelle la vérité logique est uniquement question de structure linguistique, est elle aussi structuraliste tout en étant plus radicale que celle de Quine - qui veut que la vérité logique résulte à la fois de la structure de la langue et de la structure du monde. Avec Carnap, nous soutenons que la logique (et les mathématiques) est affaire de langage; mais nous voulons aller plus loin et soutenir que le langage est construction, c'est-à-dire que la structure du monde

(logique ou autre) est construite. C'est dire que les constructions linguistiques ne sont pas plus ou moins arbitraires - comme le voudrait le conventionalisme - mais relèvent plutôt d'une nécessité génératrice, d'actes, d'actions, d'interactions, de productions que seule une théorie globale et systématique du langage (et de tout ce qui s'ensuit) peut justifier. Nous ne pouvons ici qu'en donner les linéaments.

En particulier, une telle théorie systématique doit pouvoir reconstruire l'histoire de la logique et en expliciter la genèse. Si l'on se rappelle la thèse récente de Szabo [29], la méthode axiomatique et le raisonnement logique auraient leur origine dans la dialectique et les $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha$ auraient été les énoncés primitifs que l'on reconnaît comme vrais avant d'entreprendre un débat. Dialectique veut d'abord dire dialogue et l'on sait que P. Lorenzen a proposé une interprétation de la logique formelle en termes de jeux dialogaux (Dialogspiele). On pourrait donc considérer la logique comme issue de la dialectique et de la reconnaissance de certaines formes invariantes du discours démonstratif - dont la géométrie est le paradigme ou peut-être est-ce la philosophie, si l'on suit Szabo - ou simplement plausible (dialectique signifie raisonnement probable chez Aristote) [30]. Que la logique apparaisse d'abord liée au discours et à la rhétorique (dans la sophistique), il est inutile de le contester. Mais qu'en est-il du langage lui-même?

Laissons les hypothèses génétiques pour mettre l'accent sur l'immanence du langage: il serait futile, en effet, de supposer une structure du monde objectif ou des caractères communs de l'expérience humaine pour expliquer l'uniformité ou l'universalité du langage dans la diversité des langues, puisqu'il serait facile de défendre l'hypothèse opposée, à savoir que c'est le langage, par exemple la filiation indo-européenne à partir du sanskrit, qui a moulé l'expérience ou le monde. C'est d'ailleurs cette hypothèse minimale que nous allons retenir: le langage est la forme qui façonne la matière indéterminée du monde ou de l'expérience, pour reprendre le vocabulaire d'Aristote. Autrement, la science, la culture, l'histoire devraient être expliquées en recourant à des hypothèses réalistes plus lourdes, plus "chargées" ontologiquement (la nécessité d'un appareil ontologique minimal se justifie par le principe de parcimonie, défendu en particulier par Russell: il faut avoir le maximum de raison pour le minimum d'objets de croyance; et l'on est toujours à l'intérieur du langage...).

Le constructivisme s'oppose au structuralisme dans la mesure où pour le constructivisme les structures sont toujours le résultat de constructions: il ne s'agit pas seulement de montrer la genèse des structures, mais davantage, d'en dégager les possibilités de construction. Donnons un exemple: le conditionnel. Un énoncé conditionnel comporte, comme on l'a vu,

un antécédent et un conséquent. Depuis Hume, nous savons qu'il est illusoire de voir dans l'énoncé conditionnel le reflet d'une structure causale objective. Mais l'implication stricte ou l'implication modale introduisent dans le langage une nécessité qui ne saurait être dans le monde. L'énoncé conditionnel, loin donc de mimer une loi objective, inscrit la différence plutôt que l'homologie, l'asymétrie du langage et de la réalité objective, si tant est qu'il y ait une "réalité objective".

Les actes constructeurs du langage modèlent une réalité qui ne peut jamais être un "donné". Le donné, c'est du *déjà* construit. La vérité logique, dans cette perspective, prend un sens nouveau: elle est la condition d'adéquation des constructions, condition qui n'est pas fixée une fois pour toutes, mais se meut avec le mouvement même des constructions.

Une pareille conception serait vite confinée au perspectivisme ou au relativisme, si elle ne conjoignait vérité et présent: la vérité se conjugue au présent. Je veux dire que le présent est le point d'origine, le commencement qui rend possible la faction de la vérité ou des vérités, leur cumul et leur composition en un système ordonné. C'est la vérité du présent - au présent - qui juge de la vérité du passé. Le présent est le critère absolu de la vérité, l'indicatif absolu du vrai, comme il est l'indicatif absolu non de la présence mais de l'acte de dire. Le présent n'est donc que pure forme, signe

premier indifférent à la marche des temps, position et rection des actes et des actions. Il est important de remarquer qu'il s'agit ici du présent comme forme grammaticale, immanence qui transcende et les fonde en même temps, temps et espace, présence et absence, locuteur et destinataire. C'est dans ce sens que le présent est origine comme condition du dire, mais c'est une structure de la syntaxe du langage déterminé par un acte, une activité, l'activité du dire. Cette autarcie du langage ou autologie ne nous oblige pas à pousser les hauts cris de la métaphysique et à faire parler - ou se taire dans la voix éteinte de l'écriture - le langage lui-même "en personne", mais plutôt à proposer une théorie générale du langage qui soit constructiviste et qui tienne compte tout autant de la dialectique des genèses et de la logique des structures que de la mouvance des concepts et de l'architectonique des constructions [31].

Théorie générale du langage qui ne va sans une théorie générale des actes et des actions: si les uns émergent de l'activité linguistique, les autres activités devront tirer leur sens de celle-là (ce qui va à l'encontre des théories de l'action habituelles).

Que la théorie de la logique soit tributaire de la théorie du langage - et non de la linguistique ou encore de la psychologie comme certains "pragmatistes" le soutiennent - nous invite à penser que la métaphysique fait partie du jeu; et s'il

faut compter avec la métaphysique, mieux vaut l'avoir explicitée qu'implicite et secrètement active dans les assises de la théorie logique (il faut l'exhiber pour qu'elle n'inhibe pas les motifs recteurs de l'entreprise théorique). Le pragmatisme qui privilégie l'action ou l'empirisme qui met en évidence le recours à l'expérience dans la recherche des garanties du savoir ne parviennent pas à donner à la logique des fondements suffisants, simplement parce qu'ils ne peuvent rendre compte de la problématique logique dans son ensemble. Le marxisme n'a pu encore donner une théorie de la logique et des activités théoriques en général qui soit satisfaisante, n'ayant pu encore formuler adéquatement la question du langage. La production des énoncés ne relève pas de la même dialectique que la production économique. Mais la logique est production dans un sens constructiviste et il y a affinité entre constructivisme et marxisme dans la mesure où la théorie marxiste des procès économiques, sociaux, culturels requiert des fondements constructivistes plutôt que la métaphysique réaliste de la matière qui renvoie à une hypothétique nature productrice ou machine universelle dont les mécanismes sont mystérieusement actionnés par le moteur dialectique. La dialectique comme théorie de l'interaction répond d'une théorie du dialogue. La reconnaissance du langage comme production du théorique et comme production paradigmatique éviterait au marxisme bien des naïvetés métaphy-

siques. Mais il n'est pas facile de composer dans un système théorique unifié les constructions sociales et les constructions théoriques, praxis et théorie: une théorie du langage comme pratique et production du théorique à la fois pourrait constituer les prolégomènes d'une théorie de la logique formelle. On voit qu'il n'y a pas que la logique qui soit en cause ici.

La logique, les logiques ou le logique jouit d'une certaine autonomie, comme le mathématique, qu'il faut pouvoir intégrer dans l'unification idéale de nos éparpillements que nous appelons savoir. L'appareil du savoir n'est pas une machine, c'est un dessin, un plan, un "blue print". Savoir est un nom de projet, dont le savoir absolu n'est que la projection dans un espace idéal. La philosophie est un autre nom qui dit l'unité imaginable de nos savoirs et de nos pratiques. L'horizon théorétique que veut décrire la philosophie (ou la métaphysique) traditionnellement déborde l'horizon de nos théories. Ce que la métathéorétique - le nom est dérivé du grec θεωρητικός - veut faire, c'est de définir l'horizon de nos théories, de l'activité théorique sans prétendre voir au-delà et imaginer des arrière-fonds que seule la métaphysique pouvait contempler - selon le mot de Nietzsche qui a parlé du monde des métaphysiciens comme "Hinterwelt". L'unité construite ou constructive de nos théories scientifiques ou autres ne vient pas d'un monde

qu'on supposerait un: le monde lui-même n'est que le résultat d'un procès unificateur, le recueil de nos expériences dans un théorème global.

Théories et théorèmes - j'entends par là tout objet de théorie - réunissent donc nos actions et nos visées dans une action - l'activité théorétique - et dans une visée - la théorie philosophique. La métathéorie n'est rien d'autre que l'entreprise qui prend pour objet l'ensemble des théories - les théories scientifiques d'abord - et l'exigence des fondements n'est que la nécessité - une fois admise la nécessité d'unifier - d'intégrer les activités éparses de la théorisation dans le système du savoir. Ce qui ne signifie pas qu'il faille postuler les principes qui ont fait la fortune des métaphysiques et peuplé les rêves des philosophes. La logique et l'épistémologie ont des rôles précis dans le programme métathéorétique: l'épistémologique ou logique du savoir se définit comme la syntaxe et la sémantique (et possiblement pragmatique) du discours scientifique de la même façon que la logique se veut syntaxe et sémantique du discours ordinaire (mathématique pour la logique mathématique). L'analyse critique, c'est-à-dire l'analyse qui fait appel à des critères définis que fournissent ici la logique et l'épistémologique, tentera de dégager des concepts leur noyau irréductible et d'énucléer du discours théorique en général ses exigences de rectitude, complétude, minimalité, simpli-

citée, etc. Le système ou la syntaxe de nos théories obéit à des principes d'organisation interne qu'il faut donc repérer à l'intérieur même du savoir. L'illusion métaphysique est venue de l'imagination d'un au-delà qui surplombe, d'un en dehors qui encercle ou d'un en-deça qui fonde le savoir. De l'intérieur, les concepts-limites n'apparaissent que comme constructions limitrophes qui n'ont d'autre fonction que de marquer les bornes mobiles du savoir [32]. La métathéorétique n'est pas davantage que la synopsis de ce mouvement de dérive du savoir vers ses limites récessives. Mais le savoir ne découvre pas la totalité de notre expérience théorétique; la métathéorétique s'intéresse à l'autre du savoir dans la mesure où il est théorétique et les limites du théorétique se perdent dans le vécu inédit, l'entre-deux du dire et de ce qui n'est pas encore dit et qui arrive toujours à se dire.

On ne fera pas ici l'apologie de la métathéorétique et le compte de ses vertus. Qu'il nous suffise de dire que la logique doit y trouver le lieu de ses assises, qu'elle les y trouvera construites et que le langage s'y trouvera chez soi... [33].

On a vu que la théorie "linguistique" de la logique que nous défendons est plus radicale que celle de Carnap. La théorie constructiviste s'appuie sur le langage, mais pour en montrer les ressorts constructifs. Le discours scientifique

n'est pas moins "constructif" que le discours logique (ou mathématique), il requiert seulement d'autres constructions en plus des constructions logiques. Mais la logique a-t-elle besoin de fondements? Nous avons voulu montrer que les fondements répondent d'une exigence minimale: celle de relier une entreprise théorétique donnée à l'ensemble (ou l'horizon) des activités théorétiques. Les principes invoqués dans une telle synthèse systématique sont internes, ils ne sont pas étrangers à la constitution du savoir comme tout (la totalité visée n'est jamais achevée, elle est unification idéale).

Le parcours de la logique, de la logique des connecteurs aux résultats d'incomplétude, représente le trajet théorétique de la logique à la métalogue. La logique est auto-suffisante dans le sens où elle s'occupe elle-même (résultats métalogiques), de définir son extension et ses limites, mais elle ne l'est pas dans le sens où elle ne peut tirer d'elle-même le matériau (le discours ordinaire, mathématique ou scientifique) qu'elle formalise. Dans la mesure où elle s'attache aux formes les plus générales du discours, la logique est la première des démarches scientifiques; c'est aussi la dernière dans la mesure où le discours doit déjà être constitué avant d'être objet d'analyse logique. La logique partage ainsi avec la philosophie et la mathématique le rôle de maîtresse et de servante dans la maison du savoir; et la logique à son tour partagée en-

tre la philosophie et la mathématique est à la fois concierge et "folle du logis".

A la fin, il faut dénoncer la métaphore des fondements et la fiction métathéorétique [34]. Les fondements ne retiennent plus le singulier de fondation qui en ferait une entreprise idéaliste. Là-dessus, nous avons été suffisamment clair: l'analyse fondationnelle n'est pas à la recherche d'un fondement originaire, mythique, "Urgrund" où vont se perdre toutes les raisons dans l'antériorité d'un principe absolu; les fondements, dans leur pluralité, participent de la dispersion et ce n'est que par un mouvement de ressac qu'ils peuvent trouver, à la faveur de concepts imperméables, l'unité d'une certitude immobile pour un moment. Si la philosophie et surtout la métaphysique n'ont plus de droits ancestraux ici, c'est que l'exigence originelle qui les explique, celle de comprendre d'un seul tenant toute l'expérience pensante-parlante, tous les discours, s'est reconvertie à de nouvelles fins; non pas que la passion de tout embrasser en une seule enceinte théorique, rêvée par les philosophes et les mathématiciens de Platon à Husserl, de Lulle à Herbrand en passant par Leibniz et Kant, se soit éteinte, mais le pathos qui l'alimentait se dissipe aujourd'hui par d'autres exutoires. Le plérôme d'une intuition qui circulerait dans toutes choses, toutes les paroles et tous les vécus et par-delà dans l'ἀπειρον, où l'effini décourage

toute expérience et où l'extase mystique s'accomplit de n'avoir pas d'objet, se répand maintenant par les fissures d'une inquiétude que l'idée de système effraie. Hegel est mort et la morale est nietzschéenne (il y a pourtant des velléités de système chez Nietzsche) et les fondements de l'édifice du savoir sont lézardés.

Sans verser trop dans la ferveur poétique, qui fait toute la richesse d'une certaine philosophie (française) contemporaine - la poésie conserve cependant son rôle dans l'oeuvre de nos émois - dans la sociologie, sociopolitique ou critique idéologique du savoir (unité idéale des sciences qui ne correspond pas à la science, mythe philosophique), on doit reconnaître que le projet métathéorétique n'échappe pas à son ancrage historique, social et politique. Autocritique et autocensure sont des tâches d'auteur, le jeu coupable d'un acteur qui a perdu l'innocence. Il ne suffit plus de colmater, il faut reconstruire perpétuellement. Qui court après le discours total s'essouffle. Le constructivisme n'est rien d'autre que l'hypothèse d'un "souffle" théorique, d'une dynamique du travail théorique, de l'élan de dire qui trouve en soi sa propre justification. Le repos théorique n'est pas éternel et l'apathie, la théorie-fiction, le délire que certains veulent défendre relèvent d'un théoricisme exaspéré.

La pratique théorique - théorétique ou métathéoréti-

que est un métier comme les autres, il faut seulement en circonscrire les effets; mais il n'y a pas de limites à l'exercice de la liberté et de l'activité théorique qui la rend possible (la théorie étant la pulsation du possible au coeur du présent). Le sommeil, la nuit et la mort qui sont les frontières du regard ne sont pas les bornes du "theorein" qui s'absout et s'accomplit en s'abolissant [35].

Mais puisqu'il faut bien mettre momentanément un terme à l'ivresse théorique, nous suivrons ailleurs d'autres chemins théorétiques, d'autres chemins où mène l'inquiétude du savoir.

NOTES DE LA CONCLUSION

- [1] Jacques Herbrand *Ecrits logiques* P.U.F. (Paris: 1968).
- [2] G. Gentzen *Collected Papers*, ed. by E. Szabo, North-Holland (Amsterdam: 1969).
- [3] Voir l'histoire de la géométrie algébrique que J. Dieudonné vient de publier *Cours de géométrie algébrique*, P.U.F. coll. Sup. (Paris: 1974) 2 vol. Le premier volume est consacré à l'histoire de la géométrie algébrique.
- [4] Entre eux qui acceptent et ceux qui rejettent le théorème de Bayes sur les probabilités *a priori*

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

où les B_k sont des événements stochastiques.

- [5] Voir notre compte-rendu du volumineux travail de W. Stegmüller *Personnelle und statistische Wahrscheinlichkeit, Dialogue*, vol. XIII (1974), no 3, p. 631-633.
- [6] Remarquons que Frege, à la fin de sa vie, désillusionné sur les fondements logiques des mathématiques, croyait que c'était du côté de la géométrie qu'il fallait chercher pour asseoir l'édifice des mathématiques. Cf. *Nachgelassene Schriften* Hildesheim (Olms: 1970).
- [7] Sur l'origine philosophique du raisonnement déductif, de la méthode axiomatique, de la réduction à l'absurde, etc. nous renvoyons à l'ouvrage de A. Szabo *Die Anfänge der griechischen Mathematik* Oldenburg (München-Wien: 1969).
- [8] Voir là-dessus N. Bourbaki *Théorie des ensembles* Hermann (Paris: 1970), p. E I.27 et s.
- [9] Cf. *Foundations of Set Theory*, ouvr. cit. p. 220 et s.
- [10] *Tôkohu Math. Jour.*, t. IX (1957), p. 119-221.

- [11] Voir l'article de Dieudonné retraçant l'histoire de la géométrie algébrique, "The historical development of algebraic geometry" in *The American Mathematical Monthly*, vol. 79 (1972), no 8, p. 827-866. Voir aussi le monumental traité entrepris par Grothendieck et Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, I, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1971).
- [12] Le modèle cybernétique du langage vaut aussi bien pour les mathématiques.
- [13] Pour la dialectique du langage, voir notre ouvrage *L'Arc et le Cercle. L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin*. Desclée de Brouwer et Bellarmin, (Paris et Montréal: 1969).
- [14] E. W. Beth et J. Piaget, *Epistémologie mathématique et psychologie* dans les "Etudes d'épistémologie génétique", vol. XIV, P.U.F. (Paris: 1963).
- [15] Voir nos comptes-rendus des livres à dessein marxiste d'Alain Badiou, *Le concept de modèle* in *Dialogue*, vol. XI (1972), no 3, p. 460-464 et de Pierre Raymond *Le passage au matérialisme* in *Dialogue*, vol. XIV, (1975), no 1, p. 180-183.
- [16] Nous sommes revenu sur ce problème à quelques reprises, "Logique hégélienne et formalisation" dans *Dialogue*, vol. VI (1967) no 2, p. 151-165, et "Dialectic logic and algebraic logic" in *Hegel and the Sciences*, Proceedings of the Congress, Boston (à paraître).
- [17] Nous avons suggéré une telle interprétation dans un texte sur "Expressibilité et communicabilité universelle en logique mathématique" in *La Communication*, t. I, Actes du XV^e Congrès international des Sociétés françaises de philosophie, Montmorency (Montréal: 1971), p. 124-128.
- [18] Voir Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural*

Science, Atheneum (New York: 1963), p. 66.

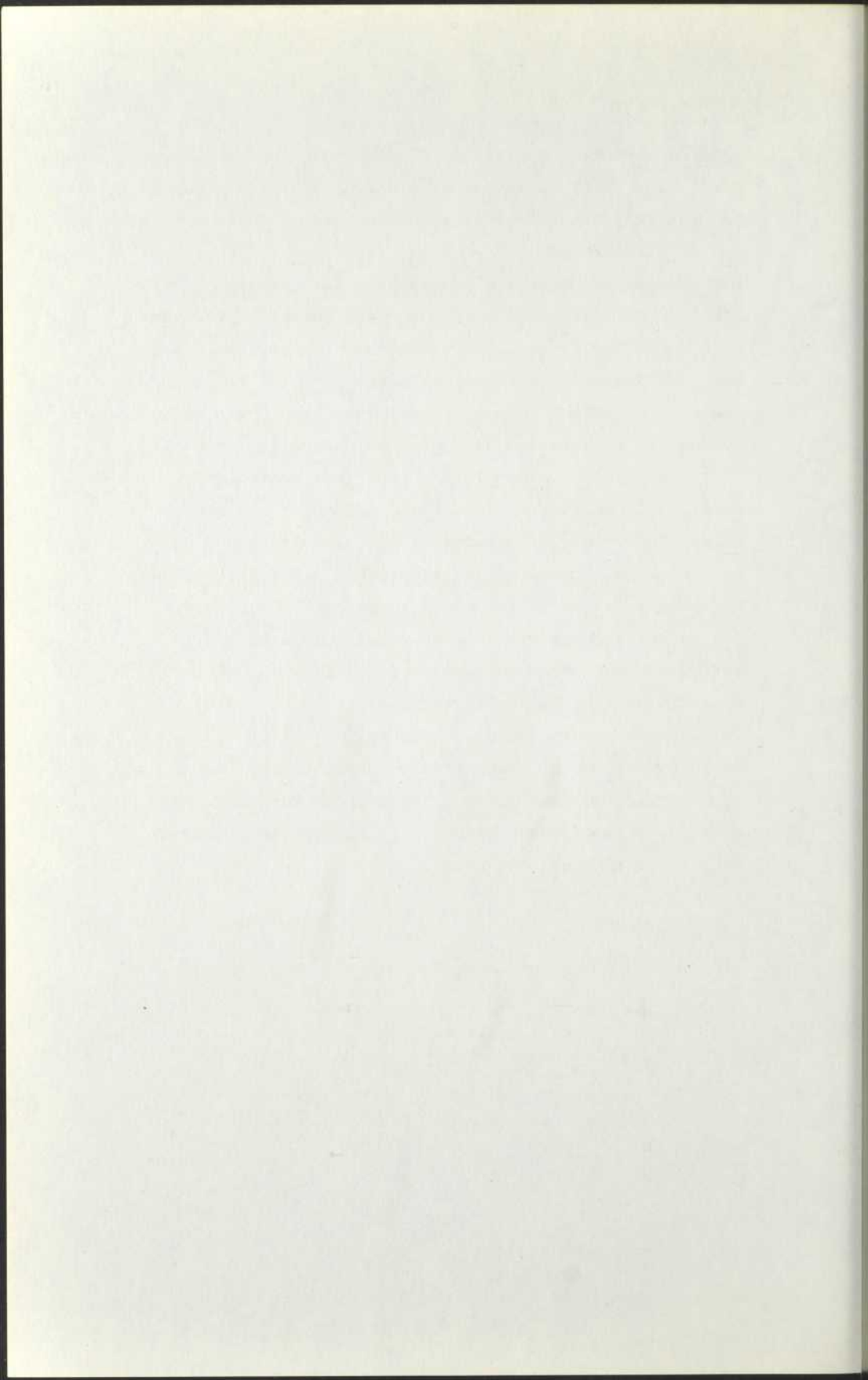
- [19] On trouvera nombre d'exemples semblables dans l'ouvrage remarquable de M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press (New York: 1972).
- [20] Voir nos articles "The use of the axiomatic method in quantum physics" in *Philosophy of Science*, vol. 38 (1971), no 3, p. 429-437, "Theory of Science and Metatheoretics" in *Science et Esprit*, vol. XXIII (1971), p. 379-387, "La communication théorétique entre mathématique, physique et philosophie" in *Revue de l'Université Laurentienne*, vol. 4 (1972), no 2, p. 3-8, et "Le constructivisme et la structure des théories physiques", à paraître dans un prochain ouvrage intitulé *Théorétiques. Ebauches pour une métathéorétique*.
- [21] Voir, par exemple, P. Lorenzen, *Metamathematik*, Bibliographisches Institut (Mannheim: 1962).
- [22] C'est peut-être cet idéal qui m'incite à utiliser constamment le "nous" de la catholicité intersubjective et de la philosophie "faite par tous".
- [23] On nous reprochera peut-être cet impérialisme "métathéorétique", qui ne semble pas éloigné du savoir absolu hégélien. Mais c'est l'inquiétude du savoir qui rassemble et organise dans la visée intégrale du "theorein". Que la praxis ou le pathos de la pensée en subisse les effets, que la vie soit politique et que le dessein métathéorétique n'en soit pas innocent, c'est là l'arrogance nue d'un pur défi où le désir est construction et où les fondements n'ont pas de fond. (Même si la signification du constructivisme pour les pratiques sociales n'a pas été exploitée ici, on peut dire qu'il y a continuité entre constructivisme et pratique révolutionnaire, entre le modèle d'une activité intellectuelle constructive et celui d'une action

concrète axée sur la construction de la société. Mais le philosophe ne peut guère être qu'un indice ou peut-être un exemple...).

- [24] H. Putnam *Philosophy of Logic*, Harper & Row (New York: 1971). Nous empruntons ici certaines des conclusions de notre ouvrage sur *Méthodes et concepts de la logique formelle* (à paraître).
- [25] On peut se reporter à l'ouvrage de William et Martha Kneale *The Development of Logic* Clarendon Press (Oxford: 1962) pour l'histoire de la question.
- [26] Cf. W. O. Quine *Philosophy of Logic*, Prentice Hall (Englewood Cliffs, N. J.: 1970) p. 64 et s. et *Set Theory and its Logic* (Cambridge: Harvard, 1969).
- [27] On remarquera que la distinction entre philosophie de la logique et philosophie des mathématiques s'amenuise ici.
- [28] Cf. *Philosophy of Logic*, ouvr. cit., p. 47 et s.
- [29] Cf. *Die Anfänge der griechischen Mathematik*. Oldenburg (München-Wien: 1969).
- [30] La dialectique (ou logique dialectique) du sens de Hegel serait un dialogue ou entrerait un troisième terme, un tiers (le contenu, le mouvement du concept) alors que la logique formelle bivalente serait une logique du dialogue (vrai ou faux) d'où le tiers serait exclu. Pour une interprétation matérialiste de la dialectique, le troisième terme serait la matière ou le mouvement de la matière.
- [31] Les flux et reflux du même et de l'autre, de logicisation et de "délogicisation" ne sont qu'un seul et même mouvement. Quoi qu'en veuille un Derrida, la décentration (ou dissémination) n'est rien d'autre que la centrifugation, la déconstruction que la déclinaison (au sens épicurien) des concepts dans leur histoire. Le logocentrisme de la métaphysique n'est que le recueillement d'une voix que le

vent dissémine. La critique derridienne, fondée en bonne part, du présent vivant husserlien, ne s'applique pas ici, puisque le présent dont nous parlons est la forme syntaxique du discours.

- [32] Par exemple, le concept d'immédiateté indéterminée ("unbestimmte Unmittelbarkeit") que nous empruntons à Hegel est un concept-limite que nous utilisons pour désigner le dehors du langage, son rebord externe.
- [33] Ces considérations terminales ont leur complément dans un ouvrage en préparation *Théorétiques, Eléments d'une philosophie des sciences* et elles auront leur prolongement dans un travail projeté sur la *Métathéorétique*.
- [34] Après avoir tenté de scruter et de faire le tour d'une problématique "constructivistiquement", il s'agit ici de s'exprimer "aboutistiquement" peut-être (l'aboutisme" est la philosophie pratique de celui qui combat l'esprit de sérieux). Assistons-nous aujourd'hui à la naissance d'une nouvelle sensibilité philosophique?
- [35] On pourrait croire que nous faisons ici l'éloge de la vie de l'esprit. Mais ce spiritualisme sans esprit est aussi un matérialisme sans matière, un théisme sans dieu, un constructivisme sans constructeur (égologique), etc. On voit l'inanité des étiquettes.



Appendice I

**DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE BOURBAKI
À LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES***

On connaît les caractéristiques du traité de Bourbaki: rigueur dans la présentation formelle, souci de la perspective historique et indifférence plus ou moins marquée vis-à-vis des fondements. C'est d'ailleurs sur ce dernier point qu'on peut formuler la seule réserve sérieuse.

La présentation, comme on l'a dit, est inspirée par un souci constant de rigueur. Le premier chapitre "Description de la mathématique formelle" manifeste ce souci dès l'abord: les notions primitives d'assemblage, terme et relation (*e.g.* la relation fonctionnelle) sont explicitées avec précision; sont aussi définis avec le plus grand soin les critères déductifs et les méthodes de démonstration d'une théorie mathématique.

*Nous reproduisons ici deux comptes-rendus que nous avons publiés dans *Bulletin Canadien de Mathématiques*, vol. 15 (1972), no 4, p. 623-626 et vol. 15 (1972), no 3, p. 463-465 des ouvrages de N. Bourbaki *Théorie des Ensembles*, Hermann (Paris: 1970) et J. L. Krivine *Théorie axiomatique des ensembles* P.U.F. (Paris: 1969).

Dans le chap. II "Théorie des ensembles", l'accent est mis de nouveau sur les relations: ε est ainsi appelé collectivisante, notée $\text{Coll}_x(x \varepsilon y)$, *i.e.* la relation R est collectivisante en x . Le graphe d'une relation R (ou son ensemble représentatif) sur le couple d'éléments (x,y) est défini comme une partie du produit $E \times F$ de deux ensembles E et F . Ici, "domain" et "range" deviennent respectivement "première projection" ou ensemble de définition et "seconde projection" ou ensemble de valeurs du graphe G . On passe ainsi facilement des graphes fonctionnels aux notions d'application injective, surjective et bijective. L'application inverse à gauche devient rétraction et l'application inverse à droite devient section. Les opérations de réunion, intersection et produit d'une famille d'ensembles, de même que les relations d'équivalence, sont décrites "classiquement". Une anomalie cependant: l'axiome du choix est présenté dans le fascicule de résultats, mais il est absent du texte principal. On aura remarqué que c'est le choix du vocabulaire et la définition des notions de base qui retient le plus l'attention dans ce traité; c'est là un trait particulier de l'approche formelle de Bourbaki.

Le chap. III est consacré aux ensembles ordonnés, cardinaux et nombres entiers. Ici aussi le traitement est classique. On relèvera toutefois le sous-chapitre 7 qui traite

des limites projectives ("inverse limits") et des limites inductives ("direct limits") en détail: la limite projective, notée $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ de la famille d'ensembles $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ pour la famille d'applications $(f_{\alpha\beta})$ est la partie E de l'ensemble produit $G = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ qui satisfait à chacune des relations

$$\text{pr}_\alpha x = f_{\alpha\beta}(\text{pr}_\beta x)$$

("pr" pour projection, *i.e.* application du produit d'une famille d'ensembles sur l'un des ensembles facteurs; la restriction f_α de f sur E_α est appelée application canonique de E_α dans E). La limite inductive, notée $E = \varinjlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ pour la famille $(f_{\beta\alpha})$ est l'ensemble quotient

$$E = GR$$

où G est l'ensemble somme de la famille d'ensembles $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ et R une relation d'équivalence dans G . Notons que "lattice" de la terminologie anglaise devient "ensemble réticulé". Un certain nombre d'autres concepts sont aussi définis dans les exercices.

Le chap. IV sur les "Structures" est sans doute le plus novateur: on sait que ce thème de structure est proprement bourbakiste. C'est le groupe Bourbaki qui a, en effet, thématiqué les structures en mathématiques et les a catégorisées selon les trois grandes espèces de structures mères; structures algébriques, structures d'ordre et structures topologiques. Comment obtenons-nous une structure? On se donne d'abord un

certain nombre d'ensembles distincts E, F, G qui forment une *base*; les opérations ensemble des parties ou produit d'ensembles sur la base nous donnent de nouveaux ensembles qui constituent une échelle d'ensembles.

Une structure de l'espèce T , par exemple, est donnée lorsque sur une échelle d'ensembles ayant pour base les ensembles E, F, G (parmi lesquels E peut jouer le rôle principal et les autres un auxiliaire), on a défini un certain nombre de propriétés d'un élément x d'un ensemble quelconque M et T l'intersection des éléments ou parties m de M possédant les propriétés de x ; on dit alors qu'un élément x^a ("a" pour axiomes) de l'intersection T définit sur les ensembles de base E, F, G une structure de l'espèce T . Les espèces de structures ainsi définies peuvent être enrichies de morphismes, de structures initiales, de structures finales. Le sous-chapitre contient des notions de morphisme, structures initiales, structures finales, applications universelles, etc. qui sont maintenant la marque de commerce de la théorie des catégories, prétendue rivale de la théorie des ensembles. Le sous-chapitre 3 est consacré aux applications universelles et à quelques exemples.

Nous en venons maintenant à la note historique terminale qui touche l'ensemble de l'ouvrage. Il s'agit en fait d'un exposé sur les fondements des mathématiques émaillé de ré-

férences historiques. Cet exposé ne marque pas beaucoup de progrès par rapport à l'édition originale et il aurait pu être presque entièrement écrit il y a trente ans. En ce qui concerne, par exemple, les questions fondationnelles de la théorie des ensembles, les résultats récents sont passés sous silence - une petite note seulement, ambiguë d'ailleurs, sur les résultats de non-contradiction relative (Gödel) et d'indépendance (Cohen) de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu.

La lacune la plus importante cependant concerne l'intuitionnisme: selon Bourbaki, l'école intuitionniste n'est destinée à survivre qu'à titre de curiosité historique. C'est là faire preuve d'une ignorance totale touchant les recherches contemporaines des Kreisel, Myhill et Troelstra, entre autres, sur les fondements intuitionnistes et mésestimer singulièrement la vigueur du constructivisme en général. D'ailleurs, si on retrace d'une façon assez juste les étapes du développement de la logique jusqu'à 1930, on semble radicalement incapable de saisir le sens de la recherche logico-mathématique contemporaine. Toute cette partie devrait être réécrite dans une prochaine édition, par un Georg Kreisel, par exemple.

L'orientation formaliste de Bourbaki n'est pas totalement explicite; si on se rapproche de Hilbert sur l'idéal de la formalisation, le point de vue bourbakiste est réfractaire, peut-on dire, à la problématique fondationnelle: la non-con-

tradition de la mathématique, sa survie, est une question que seule l'expérience semble pouvoir résoudre. A plusieurs reprises, les questions fondationnelles sont associées à des motivations psychologiques. C'est là encore une fois une vue trop courte, qui n'est pas à la hauteur de cet ouvrage remarquable.

L'approche formelle ou "formaliste", dans le style bourbakiste des abus de langage, se situe à mi-chemin de l'approche naïve *e.g.* celle de Halmos, et l'approche axiomatique, *e.g.* celle de Krivine, de la théorie des ensembles. Dans cette perspective, le traité de Bourbaki représente une voie mitoyenne indispensable. Mais, plus profondément, l'ouvrage constitue la pierre angulaire de tout l'édifice des mathématiques que le groupe Bourbaki a entrepris de reconstruire sur la base de la théorie des ensembles. Cette reconstruction, voilà sans doute le plus haut titre de gloire de l'école Bourbaki et la véritable dimension de l'ouvrage discuté.

*

Jean Cavaillès*, mort trop tôt dans le choix d'un destin que la guerre a tragiquement brisé, a laissé une oeuvre courte, mais dense. Les écrits réunis sous le titre "Philosophie mathématique" constituent, avec les deux minces plaquettes *Méthode axiomatique et formalisme* (Hermann, 1938) et *Sur la lo-*

*Compte-rendu de l'ouvrage de Jean Cavaillès *Philosophie Mathématique* Hermann (Paris: 1962) paru dans *Dialogue* vol. X (1971) no 4, p. 818-821.

gique et la théorie de la science, (P.U.F., 1947) les oeuvres complètes d'un épistémologue sur qui on fondait les plus grands espoirs.

Comme Lautmann, Bachelard, Poirier et Piaget, il avait été l'élève de Brunschvicg - dont toute l'épistémologie française est issue en ligne droite, qu'on le reconnaisse ou non aujourd'hui - et c'est "en fonction de Husserl, un peu contre lui", comme il l'écrivait à son ami Lautmann, qu'il voulait définir son oeuvre.

Le recueil contient une étude de caractère surtout historique "Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles", la traduction avec E. Noether d'une partie de la correspondance Cantor-Dedekind et un texte posthume "Transfini et continu".

La première partie des "Remarques" porte sur la pré-histoire de la théorie des ensembles: on sait que c'est à partir de recherches sur les séries trigonométriques que Cantor en vient à la conception de sa théorie des ensembles, d'abord "Mannigfaltigkeitskehre", puis "Mengenlehre". Plus précisément, Cantor est intéressé par le problème de la représentation d'une fonction $f(x)$ - pour "x" réel - par une série trigonométrique; c'est là une problématique héritée, entre autres, de Riemann et dans l'élaboration de sa preuve sur l'unicité d'une telle représentation, Cantor est amené à formuler le concept

d'"ensemble de points dérivés", itérable indéfiniment, *i.e.* jusqu'à un index α et au-delà, transfiniment, jusqu'à $\omega, \omega + 1, \dots, \omega^2, \dots$ (cf. Georg Cantor *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. v. Ernst Zermelo, Olms, Hildesheim, 1962, p. 71-115).

Dans un deuxième chapitre, Cavailles décrit la création cantorienne: vont émerger progressivement les concepts d'ensemble dénombrable et d'ensemble non dénombrable (*e.g.* l'ensemble des nombres réels), équivalence de deux ensembles, leur puissance ("Mächtigkeit"), la méthode diagonale, ensembles ordonnés et bien ordonnés, théorie des cardinaux et ordinaux transfinis, hypothèse du continu. Tous ces concepts forment la base de la théorie moderne des ensembles, dont N. Bourbaki a donné un exposé classique (voir plus haut).

Le troisième chapitre est consacré à la théorie des chaînes (Ketten) de Dedekind, qui a permis à ce dernier de formuler le théorème d'équivalence, retrouvé plus tard par Zermelo - deux ensembles sont équivalents s'il peuvent être mis en correspondance biunivoque, par exemple, l'ensemble des nombres entiers et l'ensemble des nombres rationnels. Cavailles étudie ensuite brièvement les différentes axiomatisations de Zermelo, Fraenkel, von Neumann (jusqu'à 1939), qui ont clarifié, étendu, précisé et parfois remanié la théorie cantorienne des ensembles.

La correspondance Cantor-Dedekind, partiellement tra-

duite par Cavaillès et Mlle Noether, est extrêmement importante pour l'intelligence de l'évolution des idées cantorienne. L'imagination créatrice d'un Cantor trouve en Dedekind une heureuse contrepartie; la rigueur d'un esprit "en escalier" - "Trep-penverstand", selon l'autodescription de Dedekind - qui ne gravit qu'une marche à la fois, a su guider les élans de Cantor qui avouait n'être pas sûr d'une preuve avant que Dedekind ne l'ait vérifiée. Sur le plan philosophique aussi bien, l'idéalisme critique de *Was sind und was sollen die Zahlen* contraste avec le réalisme platonicien des écrits cantorienne.

Le dernier texte du volume "Transfini et continu" est un commentaire incomplet sur la preuve gödelienne, récente à ce moment-là, de la non-contradiction de l'hypothèse généralisée du continu avec l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. Cavaillès y met l'accent, avec plus ou moins de bonheur, sur le caractère prédicatif - la prédictivité signifie que l'on n'accepte dans la construction des ensembles que les ensembles explicitement définis - de la conception gödelienne des ensembles constructibles. Malgré l'usage de définitions prédictives dans la construction de Gödel, on ne peut dire que sa théorie des ensembles constructibles définis sur les ordinaux est prédictive, puisque, comme le souligne Cohen qui a montré l'indépendance de l'hypothèse du continu, on ne dit pas comment sont obtenus les ordinaux et la distinction n'est pas faite entre "prédictif"

et "imprédictif" (cf. P. J. Cohen *Set theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966, p. 86). Malgré cette "surinterprétation" de Cavailles, on doit reconnaître la solidité d'une conception philosophique qui lie la superposition intuitive, c'est-à-dire méta-intuition, au sens où l'on parle de métalangage, qui s'appuie sur une intuition première et toujours en procès de dissolution, et la dialectique du concept, le devenir en entrelacs des idéalités mathématiques. Un Desanti, qui s'inspire pourtant de Cavailles, n'a pas su retenir tous les éléments de cette synthèse presque brunshvicgienne de l'intuitif et de l'axiomatique (Brunshvicg disait vérification), synthèse que la logique mathématique contemporaine a d'ailleurs retrouvée par d'autres chemins, chez un Kreisel ou un Myhill, par exemple.

Finalement, cette "philosophie mathématique", qui savait se tenir près des mathématiques, demeure pertinente.

*

Depuis les recherches sur les fondements axiomatiques de la théorie cantorienne de Zermelo (1908), il y a eu une floraison d'axiomatisations de la théorie des ensembles: Russell (théorie des types dans les *Principia Mathematica*), Skolem, von Neumann, Bernays, Quine (et ses systèmes successifs), Morse et autres. Mais le système axiomatique fondamental reste celui de Zermelo (modifié par Fraenkel); celui de Bernays (mo-

difié par Gödel dans *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J.: 1940) et plus récemment celui de Morse (modifié par Kelley, voir l'appendice à *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N. J.: 1955) contiennent des extensions importantes de Z-F (l'introduction de la notion de classe à côté de celle d'ensemble dans Bernays-Gödel et sa généralisation - schéma d'axiomes de classification - dans Morse-Kelley).

Le premier chapitre du livre de Krivine présente les axiomes de la théorie des ensembles de Z-F. Les connecteurs propositionnels et le quantificateur existentiel sont introduits par la médiation de la théorie des relations binaires (unaires pour la négation). Les schémas d'axiomes de substitution et de compréhension tiennent lieu (comme c'est l'usage) des axiomes du second ordre - les schémas signifient que les énoncés sont restreints aux variables qui satisfont une formule du langage de base: $A(x, x_1, \dots, x_k)$.

Le chapitre II contient un exposé du traitement classique de la théorie des ordinaux et de celle des cardinaux, avec l'axiome du choix et ses énoncés équivalents, dont le plus simple est: "Le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide" ou encore le théorème de Zermelo sur le bon ordre. On y trouve aussi le très utile lemme de Zorn. Finale-

ment, la théorie des cardinaux transfinis et l'axiome de l'infini sont exposés brièvement.

Le chapitre III est consacré à l'important axiome de fondation; c'est ici que l'exposé de l'A. devient original. Les preuves de consistance (ou non contradiction) relative pour les axiomes de fondation, de l'infini et d'accessibilité sont données avec un minimum de moyens.

Une autre innovation de l'ouvrage est le traitement du schéma de réflexion dans le chapitre IV. L'A. énonce de la façon suivante le schéma:

$$\forall \alpha (\exists \beta > \alpha) \forall x_1 \dots \forall x_k [x_1 \in V_\beta \text{ et } \dots \text{ et } \\ x_k \in V_\beta \rightarrow (E(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow E^{V_\beta}(x_1, \dots, x_k))]]$$

où α et β sont des ordinaux et V la classe universelle; le schéma signifie que pour tous les x dans V^β , l'énoncé "réfléchit" la formule $E(x_1, \dots, x_k)$ (Krivine dit "convient à ..."). (Remarquons que l'ordinal β doit être un ordinal limite; correction qui a été apportée dans la seconde édition publiée en 1972).

Le théorème de Löwenheim-Skolem est exposé dans le chapitre V sur l'ensemble des formules, c'est-à-dire les modèles de la théorie des ensembles; le théorème affirme que "toute théorie dénombrable ayant un modèle en a un dénombrable".

La consistance relative de l'axiome du choix est démontrée dans le chapitre VI à l'aide de l'axiome de fondation

en utilisant la collection des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux (satisfaisant "héréditairement" un énoncé $A(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ où x est la seule variable libre et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des ordinaux).

La consistance relative de la négation de l'axiome du choix est démontrée dans le chapitre VII sans l'axiome de fondation, puisque la démonstration repose sur l'introduction d'atomes (modèles de Fraenkel-Mostowski) définis par

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x = a)$$

En introduisant des permutations sur les éléments de X (ensemble d'atomes équipotent à ω), on peut montrer que l'ensemble des atomes ne peut être totalement ordonné, ce qui contredit l'axiome du choix.

L'ouvrage se termine sur la démonstration de la consistance de l'hypothèse généralisée du continu d'après Gödel, avec des modifications dues à A. Levy et C. Karp (formules restreintes, *i.e.* dont tous les quantificateurs sont restreints).

Dans son introduction, l'A. nous dit que son texte "constitue une introduction aux résultats de Cohen"; il faut entendre ici "introduction" au sens propre, puisque les résultats sur l'indépendance de l'hypothèse du continu ne sont pas présentés. Il n'y a pas non plus de traitement des axiomes "forts" de l'infini (pour ces compléments importants, voir J. R. Shoenfield *Mathematical Logic*, Addison Wesley, Reading,

Mass., 1967, chap. 9).

L'ouvrage est complémentaire aux *Eléments de logique mathématique* (Dunod: Paris, 1967) de G. Kreisel et l'A., en particulier, à l'appendice II de Kreisel, auquel il faut renvoyer pour les questions "fondationnelles" de la théorie des ensembles.

Appendice II
**CONSTRUCTIVISME
ET MATHÉMATIQUES CONTEMPORAINES***

1. INTRODUCTION

Le constructivisme que je veux aborder aujourd'hui n'est pas un thème neuf et cependant il est assez récent pour se prêter à toutes les confusions de la mode. C'est d'abord un thème fondationnel et cela signifie d'un point de vue philosophique que la problématique des fondements des mathématiques s'inscrit dans la perspective générale des fondements du savoir (ou des savoirs), une entreprise que j'appelle métathéorique. D'un point de vue mathématique, le constructivisme est associé au finitisme de Hilbert ou à l'intuitionnisme de Brouwer, deux théories fondationnelles qui n'ont eu jusqu'ici qu'un écho assez faible en France, si l'on fait exception de Jacques

*Conférence prononcée le 2 juin 1976 au Séminaire de Philosophie et Mathématiques de Monsieur Loi à l'Ecole Normale Supérieure de Paris. Ce texte que nous reproduisons ici en appendice résume quelques-unes des idées maîtresses de notre ouvrage.

Herbrand.

Le philosophe, le logicien, l'épistémologue que je préfère appeler épistémologicien, lorsqu'il prend pour objet la mathématique déplace sensiblement l'objet du mathématicien, il lui fait subir une translation ou mieux il le projette sur un plan qui tout en n'étant pas absolument étranger à la pratique mathématique risque de la déformer singulièrement. Un exemple contemporain en France, le travail d'épistémologie historique de Desanti qui resitue quelques thèmes ensemblistes dans le trajet conceptuel de phénomènes d'idéalités qui ne répondent plus au contexte de la pratique mathématique.

Les recherches fondationnelles obviennent à une pareille démarche, puisqu'elles visent à analyser la pratique mathématique, à critiquer l'usage et l'abus des concepts recteurs de l'imagination mathématique et enfin si elles ne cherchent pas à orienter le travail du mathématicien, elles peuvent lui suggérer des voies nouvelles ou à tout le moins indiquer les impasses d'une pratique égarée.

Là-dessus, le mathématicien lui-même n'est pas toujours la source d'inspiration rêvée. Si l'on met à part quelques grands mathématiciens qui ont réfléchi sur leur pratique, on ne doit attendre que peu de secours des opinions que se font les praticiens des mathématiques; ils ne se targuent guère de "scrupules" philosophiques et leur attitude fondationnelle se

résume le plus souvent à un mot d'ordre (qui en dit parfois long sur leur orientation fondationnelle) [1].

Le constructivisme est une option fondationnelle qui propose une révision radicale de la pratique mathématique. Je ne veux pas m'attarder ici aux antécédents historiques du constructivisme, Kronecker, ceux que l'on a appelé les semi-intuitionnistes français Lebesgue, Borel, la métamathématique finitiste de Hilbert, l'intuitionnisme de Brouwer et plus récemment, le constructivisme numérique de Bishop, le constructivisme algorithmique des Russes, Markov, Šanin et autres, l'ultra-intuitionnisme de Yessenin-Volpin et combien encore de variétés, depuis le finitisme strict jusqu'à la théorie prédictive des ensembles, etc. Je veux m'attacher plutôt à définir quelques traits fondamentaux d'un constructivisme radical, traits que l'on pourrait considérer comme le dénominateur commun de tous les constructivismes.

Le premier trait est négatif; le constructivisme, sous toutes ses formes, est avant tout une critique principielle des mathématiques classiques, c'est-à-dire de l'analyse et de la théorie cantorienne des ensembles. Les principes qui sont visés le plus souvent sont évidemment le tiers exclu, l'admission d'ensembles ou de totalités infinies, de modes de définition imprédictive et de méthodes de preuve non constructives. Bishop, dans son ouvrage sur les fondements de

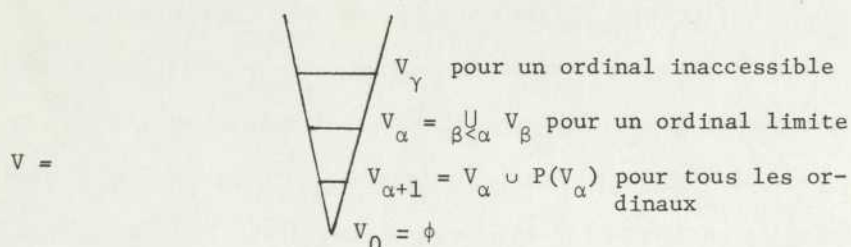
l'analyse constructive, dénonce le principe du tiers exclu qu'il rebaptise "principe d'omniscience" et qu'il formule de la façon suivante:

"Ou bien tous les éléments d'un ensemble A possèdent la propriété P ou bien il existe un élément de A qui a la propriété non P [2]."

Aux yeux du constructiviste qui peut bien passer dans ce contexte pour un athée, le mathématicien classique paré de ses attributs divins ne peut être qu'un théologien [3]! Les totalités infinies, par ailleurs, ne sont admissibles à aucun titre, puisqu'elles relèvent de concepts ou de principes non constructifs. D'autres principes comme l'axiome (classique) du choix, la méthode de preuve indirecte ou *reductio ad absurdum* qui se réduit au tiers exclu, l'axiome de l'infini, etc. sont exclus parce qu'ils ne correspondent pas aux critères de validité constructive. Mais le constructivisme ne rejette pas l'ensemble des mathématiques dites classiques: il y a une partie des mathématiques classiques qui est constructible; en d'autres termes, le constructivisme est une tentative de reconstruction des mathématiques classiques. Avant de passer à cet aspect plus positif du constructivisme, je veux montrer comment on peut utiliser la démarche constructiviste pour critiquer les démarches non constructivistes. Je prends l'exemple de la théorie axiomatique des ensembles et j'en propose une critique fondationnelle.

2. CRITIQUE DE LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES

Le concept central ici est celui de la structure cumulative des rangs que l'on représente ainsi:



Les deux opérations fondamentales qui permettent d'engendrer les ensembles sont donc l'union et l'ensemble des parties itérées transfinitement. La structure cumulative est assise, peut-on dire, sur l'axiome de fondation formulé par von Neumann

$$\forall x(x \neq \phi \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \phi))$$

ce qui interdit d'avoir $x \in x$ ou $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \dots$. Mais les axiomes les plus significatifs sont l'axiome de l'infini

$$\exists x\{\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

et l'axiome de remplacement

$$\text{Fonc } (F) \rightarrow F'' \quad x \in V$$

dont nous dérivons l'axiome de compréhension du second ordre

$$\forall X \forall x \exists y \forall z \{z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge X(z))\} \quad .$$

Les axiomes d'infinité et de remplacement pris ensemble équivalent au principe de réflexion qui joue un rôle central dans la pratique ensembliste contemporaine

$$\forall \alpha \exists \beta . \beta > \alpha \quad \forall X \quad [X \in V_\beta \rightarrow (\psi(X) \leftrightarrow \psi^{V_\beta}(X))] \quad .$$

Le principe énonce que l'univers V est réfléchi à un niveau suffisamment élevé V_β de la structure cumulative des rangs [4], que V_β "correspond" à l'univers V .

Il existe plusieurs utilisations du principe de réflexion dans la littérature ensembliste récente, mais la plus intéressante à mon avis est celle de W.N. Reinhardt [5], qui a recours à une forme très forte du principe pour justifier l'existence des cardinaux mesurables et extensibles; je formule le principe de Reinhardt de la façon suivante

$$\forall x \forall y \in V_\Omega \{ \psi^{V_\Omega}(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y) \}$$

le Ω majuscule dénotant l'ensemble de tous les ordinaux. Cette extension du principe de réflexion est-elle justifiable? Il semble bien que non. Si Reinhardt reconnaît que pour Cantor la totalité de tous les ordinaux est absolument infinie, il oublie de nous dire que Cantor considère cette totalité absolument infinie comme une pluralité "Vielheit" inconsistante ou contradictoire, simplement parce que la supposition que tous les ordinaux forment un ensemble ou la notion de leur "être ensemble" (Zusammensein) entraîne une contradiction [6]. On voit aisément qu'un tel abus ensembliste n'a plus de sens, Ω ne correspondant pas à un ordinal, *i.e.* à un rang. Peut-on imaginer assigner un ordinal à l'ensemble de tous les ordinaux, à l'ensemble de tous leurs sous-ensembles, (un ordinal équivalent à un ensemble)? (Constructivement, l'univers ensembliste V

doit être remplacé par un horizon que j'axiomatise ainsi:

$$(\bigwedge D \bigwedge \Sigma \bigwedge \bigwedge \forall H \vdash_D A \subset H) \wedge \neg (\bigwedge D \bigwedge \exists \forall \forall H \vdash_D A \supset H)$$

pour Σ sujets, A assertions, H horizon, D domaines et \bigwedge et \forall pour les quantificateurs universel et existentiel intuitionnistes. L'axiome signifie que l'horizon est toujours présent, mais inaccessible. Gödel, que Reinhardt cite dans une note, semble autoriser une telle extension du principe de réflexion qui permet, selon Gödel toujours, de réfléchir les propriétés structurelles de la notion d'ensemble. Constructivement parlant, un ensemble ne peut être que fini, puisqu'il est le résultat d'une opération ou d'un procès que j'appellerai ensemble selon le terme de Cantor "Zusammenfassung". La notion fondamentale est celle de procès: tous les procès ne sont pas finis, mais il n'y a pas de procès infini; certains procès peuvent être effinis, *i.e.* hors du fini, qui n'ont pas de limite assignable. Un exemple simple: la fonction récursive primitive de successeur

$$\forall x(Sx = x + 1)$$

on a ici un procès ouvert, expansif ou effini. Le postulat d'induction de Peano au second ordre décrit un procès similaire

$$\forall X\{X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow XSy) \rightarrow \forall yXy\}$$

Si une propriété est possédée par zéro, par n'importe quel nombre naturel et son successeur, alors elle est possédée par tout nombre naturel. Il s'agit dans ces exemples d'une véritable

quantification effinie, c'est-à-dire une quantification où tous n'équivaut pas à un tout ou à une totalité. Les procès dont il vient d'être question sont arithmétiques. J'ai déjà défini ailleurs la notion de procès transarithmétique pour désigner le mode de génération des ordinaux transfinis: en bref, on a d'abord des procès arithmétiques *e.g.* union, l'opération ensemble des parties peut être considérée pour les besoins de la cause comme une sorte d'exponentiation; ce sont des procès arithmétiques effinis, auxquels on assigne une limite, *e.g.* ω comme ordinal limite, *i.e.* qui n'a pas de prédécesseur immédiat, puis on forme l'ensemble des termes de la suite arithmétique et on applique de nouveau les procès arithmétiques [7]. On verra plus loin comment cette dialectique du procès et de l'ensemble ou de l'approximation et de la limite se retrouve en analyse classique. Le platonisme, ou paradis artificiel des idéalités mathématiques, qui semble inhérent à la théorie des ensembles a trouvé un ardent défenseur en Gödel. Gödel ne voit aucune difficulté conceptuelle dans l'itération transfinie de la notion "ensemble de" [8]. Dans son ouvrage [9], Hao Wang fait état de conversations récentes avec Gödel où celui-ci reprend avec force le thème de la pensée transfinie, dans les mots de Gödel. Les arguments de Gödel sont pour la plupart fondés sur la sémantique ensembliste, *i.e.* la théorie des modèles. La théorie des modèles en logique mathématique est essentiellement réalis-

te, elle recourt aux notions ensemblistes dès le départ, c'est-à-dire dès la métathéorie de la logique des prédicats du premier ordre pour les théorèmes de complétude, de Löwenheim-Skolem, etc. (on postule déjà à ce niveau un univers d'individus de cardinalité \aleph'_0). Il n'est pas étonnant alors que pour la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, les résultats de consistance relative et d'indépendance de l'hypothèse généralisée du continu

$$\forall \sigma (2^{\aleph'_\sigma} = \aleph'_{\sigma+1})$$

dûs respectivement à Gödel et Cohen fassent appel à des moyens non constructifs, *i.e.* essentiellement sémantiques - le modèle constructible et le modèle générique. Il faut se demander dans ce contexte, si l'hypothèse du continu a un sens. Pour un réaliste platonicien comme Gödel, il ne s'agit que de trouver de nouveaux axiomes qui décideront de l'hypothèse du continu, pour le constructivisme, la question n'a pas de sens, puisque les alephs ne désignent rien. On sait que malgré les résultats de Gödel et de Cohen, le problème de la non-contradiction de la théorie des ensembles (Z-F) reste entier, comme d'ailleurs le problème de la non-contradiction de l'analyse classique. Une preuve de consistance doit être constructive, comme l'avait exigé Hilbert. Il y a bien la preuve de non-contradiction de l'arithmétique classique qu'a obtenue Gentzen, mais cette preuve fait appel à l'induction transfinie jusqu'à e_0 , *i.e.* la

limite des ω ; les essais plus récents, de Gödel ("Interprétation Dialectica") à Spector pour l'analyse, ne sont pas plus constructivistes. Mais il existe des résultats de constructivisation de théorèmes classiques qu'il est important d'analyser. Je veux parler du théorème sur les nombres premiers

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1$$

et le théorème de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique (*i.e.* $ax + b$, pour a et b relativement premiers, *i.e.* qui n'ont pas de commun diviseur excepté un). Ces résultats dûs à Hadamard, de la Vallée Poussin et Dirichlet utilisent des méthodes analytiques ou transcendantes, fonctions (entières) d'une variable complexe, limites infinies ou convergence absolue pour séries infinies de Dirichlet [10], etc. Ces deux théorèmes sont centraux en théorie des nombres. Selberg, en 1949, a obtenu une version constructive pour ces deux théorèmes classiques en n'utilisant que des sommes, produits et limites finies (ou partielles) et des propriétés élémentaires de la fonction logarithmique [11]. Il m'apparaît important de dégager la signification fondationnelle de cette constructivisation: il est possible d'obtenir des preuves constructives (ou élémentaires) de théorèmes portant sur une infinité de nombres et d'objets. Mais le terme infini est un abus de langage, comme on l'a vu plus haut: en fait, ce

qu'on démontre, c'est qu'un procès, dans l'un quelconque de ses segments finis, approxime une limite, *i.e.* converge. C'est l'idée d'approximation, qui est centrale ici, que j'oppose à l'idée de résultat ou de terme, l'approximation est le contenu effectif, le procès constructif, alors que le résultat n'est que la visée, le terme idéal du procès [12], son arrêt imaginaire; en d'autres mots, le "passage à la limite" est interdit. Les méthodes d'approximation sont des outils privilégiés de la constructivisation des résultats classiques. On est en droit de se demander si des problèmes classiques comme le dernier théorème de Fermat

$$\forall n > 2 \forall x \forall y \forall z (x^n + y^n \neq z^n)$$

la conjecture de Goldbach "Tout nombre entier pair > 4 est la somme de deux nombres entiers impairs" (ou encore l'hypothèse de Riemann, reliée elle aussi à la théorie des nombres [13]), puisque ce sont là des problèmes qui touchent aux nombres entiers, n'auront pas une solution constructive, si on trouve jamais une solution. L'hypothèse du continu est un problème tout différent qui fait intervenir directement des cardinalités transfinites, *e.g.* la puissance du continu comme ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble des entiers. La notion de sous-ensemble arbitraire d'un ensemble infini pourrait bien être une notion arbitraire, c'est-à-dire sans justification. Sa formulation en apparence "naturelle" en a fait un problème classique.

Si on examine d'un peu près la hiérarchie constructive L de Gödel, on se rend compte que la motivation constructiviste originaire [14], la génération régulière des ordinaux, se double d'une sémantique, le modèle Δ , qui lui enlève toute sa "constructibilité". C'est cette doublure, cette sémantique parallèle qui, à mon sens, est significative et qui rend compte de ce que Gödel appelle le raisonnement transfini. Ce que j'ai appelé tout à l'heure procès transarithmétique s'applique parfaitement ici: on surimpose aux procès arithmétiques des notions ensemblistes qui constituent le modèle; or l'univers du modèle est par définition donné, garanti par l'hypothèse sémantique: ce réalisme inhérent de la théorie des modèles n'est pas le garant d'une réalité mathématique objective, comme le voudrait Gödel, mais bien plutôt une transarithmétique (infinitaire) - théorie des modèles - que je distingue de la métamathématique (finitaire) hilbertienne - théorie des systèmes formels. Le raisonnement transfini de Gödel n'est effectivement qu'un métalangage, le métalangage de l'arithmétique et les transfinités cantorienne ne sont plus que les façons de parler... ce métalangage ou ce langage parallèle.

Un dernier mot sur la théorie axiomatique des ensembles. Les résultats d'indépendance dans Z-F ne montrent peut-être qu'une seule chose: que Z-F n'est pas assez riche, que ce n'est pas le bon contexte ou encore que la question est mal

posée. L'intuitionnisme distingue les questions indécidables ou ouvertes des questions mal posées; il se pourrait bien que l'hypothèse du continu fasse partie du second groupe.

3. LE CONSTRUCTIVISME CONTEMPORAIN

Le mathématicien pour qui la théorie axiomatique des ensembles appartient aux mathématiques "molles" par opposition aux mathématiques "dures" *e.g.* la géométrie algébrique ou la théorie des groupes simples finis, pourra objecter que nous nous sommes attaqués à la partie la plus faible de l'édifice des mathématiques. Ce à quoi nous répondrons que cette partie faible est dans les fondements mêmes de l'édifice, que la théorie des ensembles est omniprésente au moins par le caractère envahissant de son vocabulaire et qu'elle accapare la majorité des logiciens, cette tribu de chercheurs qui sont incapables de faire des mathématiques et de la philosophie prises séparément, mais qui réussissent à faire les deux conjointement. La logique, plus particulièrement la théorie des modèles, en est venue dans la pratique à s'identifier à la théorie axiomatique des ensembles; on n'a qu'à songer aux résultats les plus récents de Solovay, Silver, Scott, Jensen et autres. Si la théorie des catégories a paru menacer un moment l'hégémonie de la théorie des ensembles, la menace s'est résorbée quand on s'est rendu compte que la théorie des catégories équivaut fondationnellement à la théorie des ensembles, même si son langage jouit

d'une plus grande généralité structurelle. C'est cette généralité structurelle de la théorie des catégories (ou algèbre homologique) qui a rendu possible son mariage avec la géométrie algébrique dont est issue la théorie des topoi (ou topos). La théorie des topoi qui est une création de Grothendieck et de son école est d'inspiration finitiste [15], mais des logiciens pervers commencent à l'utiliser aux fins de la théorie des modèles pour langages infinitaires! J'y reviendrai.

Le constructivisme contemporain, dans toute ses variétés, est aussi omniprésent que la théorie des ensembles, mais peut-être d'une façon moins spectaculaire, plus souterraine. Les tendances constructivistes, finitistes dans les mathématiques contemporaines ne sont évidemment pas toutes attribuables à une option fondationnelle précise, mais elles indiquent généralement une orientation qui ne répudierait pas une philosophie constructiviste. Je fais la distinction dans la pratique mathématique entre constructivisme et structuralisme. Le structuralisme dont je parle n'a rien à voir avec le structuralisme des linguistes et des philosophes, il renvoie plutôt à Bourbaki et aux structures mères. Une attitude structuraliste, par contraste avec une attitude constructiviste, privilégie les structures mathématiques données ou bien définies dans la pratique, cherche à exploiter à fond le langage mathématique existant sans tenter de le remettre en question, de le critiquer,

ou de le justifier. Les philosophies formaliste et réaliste se retrouvent donc côte à côte ici. Les limites de l'esprit structuraliste sont apparentes et ses succès ne le sont pas moins. La majorité des mathématiciens ne veut pas reconstruire les mathématiques, mais faire des mathématiques, c'est-à-dire s'inscrire dans une tradition et une histoire qui à elles seules permettent d'assurer l'avenir et d'écartier le danger de la contradiction au sein des mathématiques, dirait le multicéphale Bourbaki.

Le souci de justification ou de certification au sens de la "Sicherheit" de Hilbert départage encore constructivistes et structuralistes. J'ai déjà indiqué comment la distinction entre méthodes finitistes et méthodes infinitistes, méthodes élémentaires et méthodes transcendantes constituait la ligne de partage entre constructivisme et structuralisme. Je voudrais terminer en insistant sur une autre distinction, essentielle pour moi, la distinction entre méthodes globales et méthodes locales en mathématiques que j'appuierai sur des exemples contemporains.

L'intuitionnisme brouwerien et post-brouwerien est fondé sur des principes locaux. Que l'on pense aux diverses notions de suite, surtout aux suites de choix, suites irrégulières, théorèmes de l'induction barrée, de l'éventail, etc. Mais c'est, à mon sens, au niveau fondamental de l'interpréta-

tion constructiviste des connecteurs et quantificateurs logiques que sont à l'oeuvre les principes locaux. La négation joue un rôle central dans cette perspective et je veux montrer comment on peut l'interpréter constructivement [16].

On sait que la double négation intuitionniste ne donne pas l'identité

$$\neg\neg A \neq A$$

Algébriquement, cette négation ou pseudo-complément est caractéristique d'une algèbre pseudo-booléenne ou de Heyting (ou treillis de Brouwer) par contraste avec l'algèbre booléenne pour laquelle la double négation redonne l'identité. Topologiquement, le pseudo-complément correspond au plus grand ouvert disjoint d'un ouvert donné, c'est un complément relatif; ainsi pour trois sous-ensembles ouverts A, B, C d'un espace topologique X , le pseudo-complément de A relatif à B correspond au plus grand ouvert C tel que

$$A \cap C \subset B ;$$

finalement le pseudo-complément relatif s'exprime par

$$A \Rightarrow B = \text{In}((X - A) \cup B) .$$

Cette relativité du complément ou de la négation topologique, je l'appelle principe de la négation locale ou principe de localité. Un tel principe est nettement dégagé dans la théorie des topoi de la géométrie algébrique: la notion de topos, qui est une généralisation de la notion d'espace topologique, en

particulier la notion centrale de topos localement cohérent où les cribles ou sous-objets sont en bijection avec les ouverts d'un espace topologique, ces notions sont essentiellement de nature locale. Les généralisations introduites par la théorie des faisceaux permettent aussi de considérer la géométrie analytique comme une théorie du local. La géométrie différentielle a, par ailleurs, une vocation locale depuis l'origine jusqu'à ses applications récentes en théorie générale de la relativité. Il est intéressant de remarquer à ce propos que A.J. Wheeler, qui a repris le programme de la géomérodynamique inauguré par Einstein qui voulait loger les propriétés de la matière dans la structure géométrique de l'espace, veut à son tour fonder la géométrie sur une pré-géométrie qui ne serait rien d'autre qu'une théorie locale des connecteurs propositionnels [17]. Notons aussi que la théorie quantique des champs pourrait s'inscrire dans cette perspective, puisque la notion de champ est une notion caractéristiquement locale [18]. Même dans les théories où la notion d'espace n'entre pas directement en jeu, mais où intervient la notion de sous-ensemble comme la théorie des groupes simples finis (et de leurs sous-groupes) les méthodes locales jouent un rôle extrêmement important. Nombre de résultats récents, dont le célèbre théorème de Feit et Thompson [19] sur la solvabilité des groupes finis d'ordre impair, ont été obtenus grâce à l'analyse locale en théorie des

groupes [20]. De même pour toute l'algèbre abstraite. Mais cela ne signifie pas que les approches globales, les méthodes transcendantes (analytiques) ou infinitistes soient inutiles. Jacques Hily a montré l'an dernier [21], dans ce même séminaire, que les méthodes de l'analyse en arithmétique étaient en quelque sorte indispensables. Je dirais plutôt qu'elles ont été rendues nécessaires par l'histoire aléatoire des mathématiques, les méthodes transcendantales étant apparues plus tôt - peut-être parce qu'elles étaient plus faciles (ou plus qualitatives, comme dit Jacques Hily; on entend souvent que les mathématiques constructivistes sont plus difficiles et moins élégantes!). Ces détours transcendents - par les éléments idéaux pour Hilbert qui s'était inspiré des nombres idéaux de Kummer - permettent l'accès à des résultats que l'on ignore comment obtenir par la voie directe. Autrement, tout serait déjà acquis ou trivial.

4. CONCLUSION

Il est temps de conclure. J'ai voulu montrer comment le philosophe des mathématiques tente d'énucléer de la pratique mathématique les concepts dominants, les traits caractéristiques des méthodes de preuve, certaines lignes de force ou orientations générales. L'analyse critique des concepts et des méthodes peut avoir des effets heuristiques sur la recherche elle-même. Le praticien ou le technicien des mathématiques

n'a que rarement le recul nécessaire qui lui conférerait le rôle d'analyste de sa propre pratique; le logicien, théoricien bicéphale, le plus souvent occupé à appliquer des structures mathématiques aux notions logiques, ne consacre que peu de temps et de réflexion à la justification de ses moyens. La véritable théorie philosophique des démonstrations, par exemple, en est encore à ses premiers balbutiements[22]. Si l'on pense avec l'historien Szabo que le raisonnement mathématique, ses méthodes de preuve, la méthode déductive elle-même, prennent leur source dans la dialectique philosophique des Eléates[23], on peut espérer que la philosophie ne perde pas sa pertinence dans la prétention qu'elle a de fonder les mathématiques et d'en critiquer parfois la pratique. C'est cette activité d'analyse et de critique qui semble le plus faire défaut aux philosophes d'ici et d'ailleurs. L'analyse fondationnelle, et malgré la saveur métaphorique de l'expression fondements des mathématiques, a pour objet une pratique bien définie et bien vivante, que ce soit la pratique mathématique ou la pratique scientifique en général. La métaphysique n'a pas besoin de déconstructeurs, elle est bien capable de mourir toute seule, alors que la science ou le savoir ne s'autoanalyse ou ne s'autocritique pas tout seul. Que ce soit le philosophe instruit selon le vœu de Bachelard ou le mathématicien conscient, ou le savant éclairé, qui fasse cette analyse et cette critique, peu impor-

te; la fait qui le peut. L'épistémologue, qu'il vienne de tous les horizons, n'a pas d'autre juge que son propre discours.

NOTES DE L'APPENDICE II

- [1] Un exemple éloquent, Jean Dieudonné qui dans la Préface de la seconde édition de son magistral traité *Foundations of Modern Analysis* (Tome I) déclare que dorénavant seul l'infini dénombrable possède un statut existentiel à ses yeux.
- [2] E. Bishop *Foundations of Constructive Analysis* McGraw-Hill (New York: 1967), p. 9.
- [3] Ce qui n'est pas totalement faux si l'on songe en particulier aux justifications que Cantor a données à sa théorie des ensembles transfinis.
- [4] Voir pour ces notions J.L. Krivine *Théorie axiomatique des ensembles*, 2e éd. revue et augmentée, P.U.F. (Paris: 1972). Remarquons que nous avons formulé le principe de réflexion au second ordre. Pour avoir une version au second ordre de la théorie des ensembles, on n'aurait qu'à formuler ainsi l'axiome de fondation
- $$\forall x \forall y [X(x) \rightarrow \exists y \forall z \{X(y) \wedge [X(z) \rightarrow z \notin y]\}]$$
- [5] "Remarks on Reflection Principles, Large Cardinals and Elementary Embeddings" in *Axiomatic Set Theory*, vol. XIII, part 2, Proceedings of the UCLA Conference, American Mathematical Society, (Providence, R.I.: 1974), p. 189-205.
- [6] G. Cantor *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. v. E. Zermelo, Olms (Hildesheim: 1966), p. 443 et s.
- [7] On trouvera l'explicitation appropriée de ces notions dans les chapitres antérieurs.
- [8] Voir K. Gödel "What is Cantor's Continuum Problem?" in *Selected Readings in the Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf et H. Putnam, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J.: 1964), p. 258-273.
- [9] *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul

- (London: 1974).
- [10] Pour ce résultat sur le théorème de Dirichlet, voir J.P. Serre *Cours d'arithmétique* coll. SUP, P.U.F. (Paris: 1970), chap. VI, mais Serre n'indique pas la preuve constructive de Selberg pour ce théorème. Pour toute cette question, je me permets de renvoyer à mon article "Foundational Problems of Number Theory" à paraître dans le *Notre-Dame Journal of Formal Logic*.
- [11] A. Selberg "An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression" *Ann. of Maths*, vol. 50 (1949), no 2, p. 297-304 et "An elementary proof of the prime number theorem", *Id.*, p. 305-313.
- [12] On n'a qu'à penser aux différentes méthodes d'approximation, dont la méthode de Picard, en théorie des équations différentielles pour se rendre compte du caractère constructif de la notion d'approximation. On peut aussi s'en rendre compte chez Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, ouvr. cit.
- [13] L'hypothèse de Riemann postule que tous les zéros de la fonction zêta, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ sont sur la droite $x = 1/2$. Cette série est en fait un cas spécial de la série de Dirichlet $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ qui est elle-même un cas spécial de transformée de Laplace, $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx$. Riemann avait utilisé cette fonction pour tenter de démontrer le théorème sur les nombres premiers, démonstration qu'a obtenue finalement de la Vallée Poussin à l'aide de la même fonction zêta.
- [14] Comme le dit expressément Gödel, cité par Hao Wang, ouvr. cit. p. 10.
- [15] Cf. M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. 2, Lecture

Notes in Mathematics, vol. 270, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York: 1972), p. 165.

- [16] Je reprends ici quelques idées d'un article "Intuitionistic Logic and Local Mathematical Theories" à paraître dans le *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*.
- [17] Cf. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler *Gravitation* Freeman & Co. (San Francisco: 1973). Cette remarque vaut aussi bien pour la topologie différentielle "locale" des catastrophes élémentaires (surtout biologiques) de René Thom, qui insiste dans son livre *Stabilité structurelle et morphogénèse* Benjamin (Reading, Mass.: 1972) sur les notions "locales". C'est dans le même sens que Thom réclame une géométrie algébrique réelle par opposition à la géométrie algébrique complexe en usage.
- [18] Cf. R. Haag "Quantum Field Theory" in *Mathematics of Contemporary Physics*, ed. by R.F. Streater, Academic Press (London and New York: 1972), p. 1-16.
- [19] W. Feit et J.G. Thompson *Pac. J. Math.* vol. 13 (1963), p. 775-1029. La preuve de Feit et Thompson, considérée comme la plus longue dans l'histoire des mathématiques, résolvait un problème posé par Burnside en 1906. Un autre problème posé par Burnside et qui n'a pas encore été résolu a une formulation très simple "Un groupe G qui a un nombre fini de générateurs et dont tous les éléments sont d'ordre fini est-il nécessairement fini?"
- [20] Cf. M.B. Powell et G. Higman, eds, *Finite Simple Groups*, Academic Press (London and New York: 1971), surtout les exposés de G. Glauberman et D. Gorenstein.
- [21] Séance du 5 mai 1975.
- [22] Passage difficile en effet que celui de la "Beweistheorie" ou théorie des systèmes formels de Hilbert à une authenti-

que théorie des démonstrations, dont Kreisel pourrait être considéré comme l'initiateur. Cf. "From Proof Theory to a Theory of Proofs", AAAS Bulletin, à paraître.

- [23] Cf. *Die Anfänge der griechischen Mathematik*, Oldenburg (München-Wien: 1969).

Appendice III
LANGAGE ET PENSÉE
DANS LE CONSTRUCTIVISME CONTEMPORAIN*

1. INTRODUCTION

Je voudrais aborder ce thème "chomskien" du langage et de la pensée en mathématiques par le biais constructiviste: c'est un thème central dans l'intuitionnisme de Brouwer qui a plus ou moins perdu sa pertinence dans la formalisation de l'intuitionnisme post-brouwerien, mais qui reste cependant actuel, si on consent à redéfinir à nouveaux frais la problématique qui le sous-tend.

La dichotomie langage-pensée peut recouvrir, par exemple, l'opposition géométrie-arithmétique, si l'on admet que la géométrie est la théorie de l'espace ou de la forme et que l'arithmétique est la théorie du temps ou du procès. On sait que Frege, après avoir voulu fonder les mathématiques sur l'a-

*Conférence prononcée sur l'invitation du comité organisateur au Colloque international sur "Langage et pensée mathématiques" tenu du 9 au 11 juin 1976 à Luxembourg.

rithmétique et la logique avait fini par suggérer des fondements géométriques [1]. Il faut bien reconnaître cependant que les difficultés du système frégéen lui viennent de son infrastructure ensembliste responsable des paradoxes de l'imprédicatif plutôt que de l'armature arithmétique. Brouwer, s'inspirant de Kant, fonde et l'arithmétique et la géométrie sur le caractère *a priori* du temps qui rend compte, selon lui, de l'intuition fondamentale des mathématiques, la biunité, c'est-à-dire l'intuition de l'unité, de sa scissiparité et de sa multiplicité successive [2]. Le divorce brouwerien entre langage et pensée s'explique aisément dans cette perspective: le sens interne ou intime, "der innere Sinn" chez Kant, médiatise toutes les intuitions sensibles, celles de l'espace et celles du temps et ne recourt donc aucunement au langage, celui-ci devant se réduire pour Brouwer au rôle auxiliaire d'aide-mémoire ou de moyen de communication. Une telle conception, que le néo-kantisme d'un Cassirer, par exemple, dans sa *Philosophie der Symbolischen Formen* aurait pu sensiblement modifier, n'est plus défendable aujourd'hui et même un Heyting, qui a repris le programme de Brouwer ne partagerait plus le radicalisme de Brouwer. Les formalisations diverses de l'intuitionnisme de Heyting, Kleene et Vesley à Kreisel, Troelstra [3], Myhill, Girard, Martin-Löf, si elles n'apportent pas de lumière essentiellement nouvelle à la logique et surtout aux mathématiques

intuitionnistes n'en changent pas moins l'éclairage philosophique et les recherches fondationnelles sur l'intuitionnisme doivent tenir compte de cette inflexion nouvelle.

2. FONDEMENTS DE LA LOGIQUE INTUITIONNISTE

Avant de passer à mon interprétation personnelle de la problématique du langage et de la pensée dans le cadre constructiviste, j'aimerais discuter de certaines idées de Michael Dummett sur les fondements philosophiques de la logique intuitionniste [4]. La justification que veut donner Dummett de la logique intuitionniste est intéressante à un titre au moins, elle prend le contre-pied des idées de Brouwer pour exploiter un thème (ou un slogan) wittgensteinien: la signification d'un mot ou d'un énoncé, c'est son usage.

Les remarques de Wittgenstein sur les fondements des mathématiques [5], on l'a répété, n'ont pas eu beaucoup d'échos chez les mathématiciens et Kreisel qui a étiqueté la position fondationnelle de Wittgenstein comme "finitisme strict" n'a pas hésité à confiner sa pertinence aux mathématiques élémentaires.

Selon Dummett, si la signification d'un énoncé logique ou mathématique se ramène à la connaissance de son usage, la notion de vérité mathématique objective, *i.e.* indépendante de nos constructions et de nos méthodes de preuve, n'a plus de rôle assignable. On a là un premier critère qui distingue le platonisme ou le réalisme des mathématiques classiques et de la

théorie des ensembles, du constructivisme, intuitionniste ou autre, puisque la théorie platoniste de la signification suppose qu'un énoncé est vrai ou faux (c'est le tiers exclu) dans le ciel intelligible des idéalités mathématiques. Cela n'est ni nouveau, ni très éclairant. Il y a cependant un autre sujet dans la discussion de Dummett [6] qui nous permettra de passer à notre propre point de vue: c'est le thème du sujet créateur ou du sujet mathématicien que je préfère appeler agent linguistique. Brouwer avait introduit [7] cette notion de sujet créateur pour mieux décrire les situations mathématiques où apparaissent les notions de suites de choix, d'assertions décidables et les questions indécidables. Kreisel a introduit à son tour des axiomes pour le sujet créateur:

$$1) (\Sigma \vdash_m A) \vee \neg (\Sigma \vdash_m A)$$

i.e. le sujet mathématicien Σ affirme l'énoncé mathématique A au moment m (ou *peut* le démontrer) ou il ne l'affirme pas, *i.e.* la relation $\Sigma \vdash_m A$ est décidable

$$2) A \rightarrow \wedge \Sigma (\neg \neg \Sigma \vdash_m A)$$

si A est une assertion mathématique, il serait absurde de penser que A ne sera ou ne pourra jamais être démontrée (nous utilisons \neg , \vee , \wedge , pour la négation, le quantificateur universel et le quantificateur existentiel intuitionniste dans l'ordre).

$$3) \forall \Sigma \forall m (\Sigma \vdash_m A) \leftrightarrow A$$

ce qui signifie que le fait pour un sujet mathématicien d'avoir démontré une assertion mathématique à un certain moment équivaut à la vérité ou validité universelle de cette même assertion. Troelstra a repris ce thème et a tenté de l'exploiter dans le contexte des étapes de la démonstration d'une assertion mathématique et des niveaux de réflexion [8].

On peut résumer la discussion de la façon suivante: Si on adopte une version forte de l'axiome 2 de Kreisel, nous obtenons

$$A \leftrightarrow \bigvee_m (\vdash_m A)$$

ce qui entraînerait la conclusion que le sujet mathématicien démontre, effectivement, toutes les instances d'une quantification universelle

$$\bigwedge x Ax \leftrightarrow \bigwedge x \bigvee_m \vdash_m Ax$$

ce qui est à la fois excessif et constructivement contradictoire. Pour obvier à la difficulté, Troelstra recourt à la notion de niveaux de réflexion qui permet de contourner le problème; ainsi, on obtient

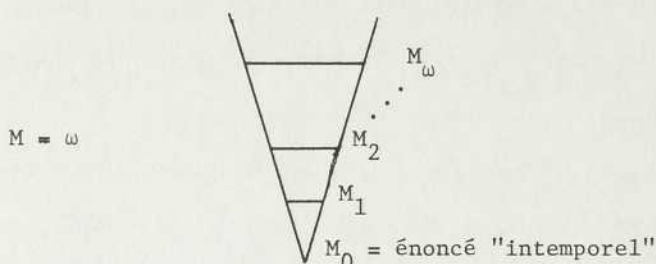
$$\bigwedge_a^{(m)} \bigvee_b^{(m+1)} (\bigwedge x (ax = 0) \leftrightarrow \bigvee y (by = 0))$$

pour des fonctions constructives assujetties au schème (fort) de Kripke

$$\bigvee a (\bigwedge x (ax \neq 0) \leftrightarrow A)$$

Ici les preuves de a et de b ne sont pas au même niveau. On voit qu'il y a deux ordres, deux axes dans cette théorie: une

ordination temporelle par étapes et une hiérarchisation des preuves, semblable à la génération des ordinaux dans la structure cumulative des rangs



De 0 à ω , on a toutes les étapes de l'activité constructive du sujet mathématicien; les énoncés "intemporels" sont ceux qui sont déjà acquis au point de départ. Cette double interprétation n'apparaît pas satisfaisante et la discussion de Dummett sur ce point n'est pas plus concluante.

Par ailleurs, l'interprétation qu'a donnée Kripke [9] de la logique intuitionniste est aussi d'ordre "temporel". Je veux proposer à mon tour une interprétation qui soit uniquement en termes spatiaux. C'est dans ce sens que la géométrie doit avoir la priorité sur toute construction temporelle, mais en même temps je veux montrer que les constructions spatiales sont fondées sur des constructions logiques couplées à des concepts géométriques ou topologiques: on pourrait peut-être parler de "géométrologique" ou de "topologique".

3. INTERPRÉTATION "DOMANIALE" DE LA LOGIQUE CONSTRUCTIVISTE

Au lieu de moments, j'emploie la notion de domaines,

notion très générale et qui a l'avantage d'avoir un emploi étendu en mathématiques. Axiomatiquement, on peut réintroduire les axiomes du sujet créateur en substituant des domaines D aux moments M ; on peut aussi leur adjoindre notre axiome pour l'horizon constructif :

$$(\forall D \wedge \exists M \forall H \vdash_D A \subset H) \wedge \neg (\forall D \wedge \exists M \forall H \vdash_D A \supset H)$$

qui énonce que l'horizon des constructions mathématiques - notion qui remplace celle d'univers au sens de la théorie des ensembles - est toujours présent, mais inaccessible (littéralement et non métaphoriquement comme dans l'acception ensembliste du terme). Voyons maintenant comment on peut interpréter constructivement les connecteurs et quantificateurs logiques.

Si je peux affirmer A , c'est que A est accessible dans un domaine fini donné D_1 et si je peux affirmer $\neg A$, c'est que l'accessibilité de A dans D_1 est impossible, donc la négation a toujours un caractère local (relatif au domaine D_1); j'ai $A \wedge B$, si ce sont deux énoncés accessibles dans D_1 ou dans $D_1 \cap D_2$ et j'ai $A \vee B$, si l'un ou l'autre est accessible dans D_1 ou dans $D_1 \cup D_2$; $A \rightarrow B$ signifie que l'accessibilité de B dans D_1 découle de l'accessibilité de A , *i.e.* l'accès de B est lié spatialement à l'accès de A , en termes de domaines il y a un "chemin" constructif du domaine D_1 au domaine D_2 , $\forall xA$ signifie que j'ai eu accès à au moins une instance de A dans un domaine D_1

et $\bigwedge xA$ signifie que j'ai fait le tour de toutes les instances de A dans le domaine D_1 (qui correspond évidemment à un ensemble construit).

Avant d'analyser la négation et l'implication constructivement interprétées, qui, à prime abord, sont les plus complexes, je veux revenir brièvement sur la conjonction et la disjonction. René Thom a donné dans un article "Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?" paru dans le numéro 3 de *L'Age de la science* une interprétation géométrique de ces connecteurs qui m'apparaît foncièrement juste. L'interprétation de Thom est fondée sur la contiguïté spatiale ou encore la proximité ou l'éloignement des champs sémantiques. Sans partager toutes les idées de Thom sur la non-pertinence du formel, je suis tout à fait d'accord avec le point de vue local qu'il défend vigoureusement.

Qu'advient-il de la négation et de l'implication dans le contexte géométrique? Thom n'en dit rien, mais c'est la topologie qui vient ici à notre secours. Dans un article sur "Intuitionistic Logic and Local Mathematical Theories" qui doit paraître bientôt dans le *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, j'ai tenté de montrer comment le pseudo-complément relatif dans un espace topologique jouait le rôle de ce que j'appelle la négation locale. Soit un espace topologique X et trois de ses sous-ensembles ouverts A, B, C ,

le pseudo-complément de A relatif à B correspond au plus grand ouvert C tel que $A \cap C \subset B$. Ce pseudo-complément ou cette différence (le pseudo-complément de A peut aussi s'exprimer par $X - A$) n'est pas le complément booléen et l'algèbre qu'il constitue est une algèbre pseudo-booléenne ou de Heyting (ou encore treillis de Brouwer). On a la double négation booléenne

$$\neg\neg A = A$$

qui est évidemment absente dans l'algèbre de Heyting; c'est pourquoi Beth et Scott, parmi d'autres, ont interprété la logique et l'analyse intuitionnistes dans un modèle topologique. Plus récemment, des catégoristes et des logiciens dont Lawvere, Tierney, Kock, Wraith, Joyal et Reyes, ont voulu utiliser la notion de topos créée par Grothendieck et Verdier pour les besoins de la géométrie algébrique. Pour Grothendieck, la notion de topos est essentiellement une généralisation de la notion d'espace topologique: rappelons qu'un topos est équivalent à la catégorie \mathcal{C} des faisceaux sur un petit site et que les préfaisceaux (ou foncteurs contravariants) et les faisceaux, que l'on obtient des préfaisceaux par la bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(X, F) \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, F)$$

pour les préfaisceaux F , un objet X de \mathcal{C} et un crible ou sous-objet R de X , sont définis sur les ouverts d'un espace topologique. La notion de cohérence et surtout de cohérence

locale pour les prétopos et topos (ou topoi) accentue ce caractère local - P. Deligne a démontré qu'un topos localement cohérent possédait un nombre suffisant de points, ce qui équivaut à une condition suffisante d'isomorphie entre un espace topologique et un topos [10]. Grothendieck a d'ailleurs insisté sur le caractère local des constructions toposiques. On sait que les constructions locales sont omniprésentes, de la géométrie différentielle à la topologie différentielle, sans parler des théories mathématiques où n'entre pas la notion d'ouverts d'un espace topologique. Il est intéressant de noter à cet égard comment toute la théorie des catastrophes - les catastrophes se produisent à la frontière, *i.e.* l'ensemble différence $\bar{M} - M$ pour M un ouvert - est une apologie du local. Jusqu'à la cosmologie relativiste qui pour parler d'une singularité ou catastrophe finale de l'univers, n'en élabore pas moins le modèle sur l'exemple "local" du trou noir.

Mais revenons à notre négation locale. L'implication $A \rightarrow B$ se ramène à notre négation locale par la formule

$$\text{In}((X - A) \cup B)$$

où le complément relatif $X - A$ rend la négation $\neg A$ pour In l'ensemble des points intérieurs, nous sommes donc en mesure d'interpréter topologiquement l'implication comme le "chemin intérieur" d'un domaine D_1 à un domaine D_2 la négation $\neg A$ correspondant à la différence $D_1 - A$. Les quanti-

ificateurs ne causent pas de difficulté, puisque le quantificateur universel ne s'applique qu'à un domaine construit et le quantificateur existentiel signifie que je peux avoir accès à une instance de l'énoncé A dans le domaine D_1 [11].

Les notions centrales de l'intuitionnisme, suites de choix, déploiements (spreads) se laissent interpréter "naturellement" dans notre constructivisme "domanial". On n'a qu'à penser à la notion fondamentale de procès qui signifie un parcours, une marche en avant (la notion de méthode a une signification analogue). Ainsi le célèbre théorème de Brouwer "Toute fonction (régulière) d'une variable réelle définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ est uniformément continue" qui utilise le théorème de l'éventail en procédant de proche en proche s'inspire de la logique du local. Remarquons que la topologie intuitionniste est essentiellement équivalente ou équipotente à la topologie classique, si ce n'est pour quelques concepts nouveaux, dont l'utilité n'est pas négligeable *e.g.* la notion d'ensemble ou d'espèce de points "située" (located): un sous-ensemble A d'un espace métrique X est situé si la distance

$$\rho(x,A) \equiv \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$$

est définie pour tous les $x \in X$.

Quant à l'interprétation qu'a proposée Kripke de la logique intuitionniste, elle ne correspond pas à la nôtre, puisque Kripke réintroduit le tiers exclu dans les clauses de

négation et d'implication: pour le triplet $\langle K, R, D \rangle$ où K est un ensemble non vide, R une relation binaire, transitive et réflexive, on a

$$((\phi_a(P) = V) \wedge aRb) \supset (\phi_b(P) = V)$$

pour ϕ une fonction d'interprétation des énoncés P dans $\{V, F\}$ et a un élément de K .

On interprète la négation

$$\phi_a(\neg A) = V, \text{ ssi pour tout } b \in K \text{ tel que } aRb,$$

$$\phi_b(A) = F, \text{ autrement } \phi_a(\neg A) = F$$

et pour l'implication

$$\phi_a(A \supset B) = V, \text{ ssi pour tout } b \in K \text{ tel que } aRb,$$

$$\phi_b(A) = F \text{ ou } \phi_b(B) = V, \text{ autrement } \phi_a(A \supset B) = F.$$

La négation dans le modèle temporel de Kripke n'est pas locale (à cause du "pour tout"), nous avons donc un modèle classique - peut-être en vertu de l'unidimensionnalité ou mieux de l'anisotropie du temps. Notre modèle domanial évite l'écueil d'une négation "éternellement" valide. La négation "domaniale" n'accède à l'universalité que par généralisation sur tous les domaines construits et l'invariance n'est qu'une propriété structurelle locale qui se retrouve dans tous les domaines parcourus. La preuve d'incomplétude ou si l'on préfère la preuve de non-énumérabilité des énoncés valides de la logique des prédicats intuitionniste qu'a donnée Kreisel repose sur l'idée que la validité (intuitionniste) est équivalente à l'énoncé que

tout sentier constructif - suite constructive α - est fini [12]. Sans nous attarder sur cette preuve, on peut voir qu'elle est essentiellement différente de la preuve "classique" de complétude qu'a proposée Kripke. Il n'est pas exagéré, je pense, de la mettre elle aussi au compte de l'esprit local.

On a vu qu'il est possible d'interpréter géométriquement ou topologiquement les connecteurs et les quantificateurs logiques. Est-on autorisé pour autant à penser comme certains logiciens de Montréal, Joyal et Reyes entre autres, que la logique est géométrique, ou encore que la géométrie algébrique est une logique géométrique, comme le dit Lawvere, inspiré par le succès de la théorie des topos logiques. Il ne faut pas trop accentuer, à mon avis, l'intérêt des constructions catégoriques et toposiques. Elle fournissent, il est vrai, un langage qui semble bien adapté aux situations générales en logique et en mathématiques, mais elles n'ont guère fait plus jusqu'ici que de traduire des résultats acquis. Et si certaines structures logiques se moulent parfaitement dans un cadre géométrique, *e.g.* la conjonction et la disjonction, d'autres constructions font appel à une syntaxe qui sous-tend les structures de l'espace [13].

La négation et l'implication (l'équivalence se réduisant comme toujours à une double implication) font intervenir un agent constructeur qui, par-delà les propriétés structurel-

les de l'espace, (*i.e.* visuelles et autres) s'approprie des domaines, mesure des aires, organise des étendues, imagine des dimensions, projette, exfolie, inscrit la mouvance dans l'étendue calme des surfaces. L'espace a besoin d'un géomètre. La syntaxe de ses constructions n'est pas engendrée dans la matrice du monde, selon l'expression employée par Platon, mais est produite dans l'ordonnance des actes d'un agent linguistique, c'est-à-dire d'un agent qui signifie ou crée du sens. Dans cette optique, les relations spatiales, l'architectonique de l'espace sont l'effet d'actes constructeurs qui régissent l'ordonnance de nos rapports avec l'extériorité spatiale. La logique pourrait bien être, en effet, la syntaxe formelle non seulement des langues naturelles et des langages scientifiques, mais aussi bien des connexions spatiales et spatio-temporelles. C'est par l'examen de cette question en liaison avec la problématique pensée-langage en mathématiques que je veux maintenant conclure.

4. CONCLUSION

J'ai fait ailleurs la distinction entre constructivisme et structuralisme en mathématiques, en employant le mot structuralisme dans un sens dérivé de la théorie des structures de Bourbaki pour désigner l'attitude fondationnelle qui se contente d'exploiter au maximum un langage mathématique sans le remettre en question, le critiquer ou le justifier, attitude

que j'attribue au constructivisme. Sont donc structuralistes, de ce point de vue, le formalisme, le positivisme, le conventionalisme tout aussi bien que le réalisme, qui pour admettre la pérennité idéale des êtres mathématiques n'est pas enclin à en expliquer la genèse et à en démonter l'arbitraire. Le constructiviste n'admet aucun langage mathématique qui ne répond pas aux critères de validité constructive. Dira-t-on que ces critères sont supra, ou extra linguistiques, comme le pensait Brouwer? Je pense plutôt que ces critères sont ceux d'un langage bien défini sur lequel doivent s'ajuster les idiomes mathématiques, c'est du moins la prétention du constructiviste. Méthodes de preuve, concepts constructifs, conditions d'existence ou d'admissibilité, tout cela ne fait pas appel à de mystérieux mécanismes ou encore à des opérations intellectuelles qui seraient en droit inaccessibles au langage. Sans vouloir défendre un monisme qui réduise tout au langage, il faut bien reconnaître que la dualité pensée-langage a toutes les vertus d'une thèse traditionnelle, c'est-à-dire une thèse qu'on maintient à défaut d'une véritable théorie explicative. Depuis Wittgenstein et Heidegger, Freud et Lacan, le langage semble devoir occuper toute l'avant-scène philosophique.

Du point de vue mathématique, les notions fondamentales et les concepts opératoires sont les mots ou les énoncés bien définis d'une langue bien faite. On pourra invoquer

l'imagination mathématique pour rendre compte des progrès ou des développements, des sauts qualitatifs d'une théorie, il sera toujours possible de les expliquer par les ressources d'un langage fécond.

Platon disait déjà que la pensée n'était qu'un discours que l'on se tenait à soi-même, privément. Je ne vois aucun inconvénient philosophique à ne faire de l'esprit que l'organe du langage, la caisse de résonance de la parole (ce qui m'apparaît préférable au "ghost in the machine" ou "fantôme dans la machine" de Gilbert Ryle dans son *The Concept of Mind*).

Le thème le plus ambigu dans ce contexte est celui du sujet créateur de l'intuitionnisme. On a taxé l'intuitionnisme de solipsisme pour avoir introduit le sujet créateur dans les mathématiques. Mais une théorie de l'activité mathématicienne doit certainement tenir compte de l'agent ou l'acteur mathématique, comme une théorie de l'activité physicienne ne peut faire abstraction de l'observateur en physique quantique. Il suffit de substituer un agent linguistique au sujet créateur pour faire disparaître la menace du solipsisme, puisque le langage ne peut être privé. La conscience non plus et Husserl l'avait bien compris qui soutenait la thèse que la subjectivité transcendantale était identiquement l'intersubjectivité transcendantale.

Si l'agent constructeur doit être admis dans la des-

cription des mathématiques, ce n'est cependant pas au titre de sujet psychologique. Il ne m'apparaît pas plus pertinent de faire la psychologie du mathématicien que de faire l'économie politique des productions mathématiques; une théorie fondationnelle générale est indispensable. Toutes ces approches doivent s'intégrer dans une vue d'ensemble expansive qui tienne compte de tous les aspects de la problématique. A ce chapitre, le marxisme ne nous a pas encore appris beaucoup; l'histoire des mathématiques, il est vrai, n'est pas moins aléatoire que l'histoire générale des hommes, mais il serait difficile de tirer d'une telle remarque une thèse matérialiste-dialectique. La genèse dialectique des structures ne produit pas à elle seule de nouvelles mathématiques, il faut à ces structures, abstraites ou pas, un constructeur (je serais tenté de dire humain ou pas).

La théorie de l'agent constructeur ne retient pour le sujet aucune des propriétés qu'une certaine philosophie récente s'emploie à déconstruire (paradoxalement ou non, la déconstruction exige un constructeur, peut-être perverti). Ce n'est plus le sujet isolé qui, doté de mystérieuses aptitudes, porte en lui secrètement la gestation des mathématiques les plus ardues. L'agent constructeur fait partie d'une communauté (ou mieux est une communauté) et la mathématique [14], comme la poésie, selon le vœu de Rimbaud, devrait être faite par tous.

L'agent constructeur crée des structures, mais ces constructions n'existent-elles que comme texte, que comme langage autarcique? Quel est le rapport des mathématiques au réel (physique) [15]? Je voudrais esquisser, en terminant, une réponse à cette question fondationnelle.

Ma réponse constructiviste tient en peu de mots. Les mathématiques et la physique ont ultimement le même rôle ou le même but: la construction du continu ou ce qui est la même chose, la construction du discontinu. Je n'ai pas le temps ici de "désembrouiller" cette formule énigmatique, je me contenterai de quelques indications.

Que le réel physique n'est pas vraiment donné, n'est pas un bloc infrangible, la physique a commencé de nous l'enseigner. L'interprétation de Copenhague en mécanique quantique, qu'on peut bien qualifier de constructiviste, n'admet pas de réel physique indépendant - plus précisément d'états quantiques inaccessibles à l'observation. L'application des constructions mathématiques aux constructions physiques, aux structures d'une théorie physique, impose aux théories mathématiques des contraintes de structures bien définies: théorèmes de renormalisation et de superrenormalisation pour les méthodes analytiques, règles de supersélection pour les opérateurs hermétiques dans un espace de Hilbert, etc.; ce sont là des théorèmes de limitation qui restreignent l'applicabilité des mathématiques.

Les contraintes s'accroissent encore si l'on veut descendre jusqu'aux constructions perceptuelles sur lesquelles s'appuient les constructions théoriques de la physique: les formes ne sont pas passivement perçues par nos récepteurs sensoriels, mais il y a construction, structuration. Les mathématiques applicables ici sont surtout qualitatives. Une psychologie génétique à ce niveau peut servir de confirmation à l'hypothèse constructiviste, encore faut-il en corriger l'interprétation épistémologique. Selon le schème constructiviste donc, l'application d'une théorie mathématique constitue un test de sa "constructibilité", parce qu'il doit y avoir imbrication de constructions et de structures à des niveaux multiples.

J'ai voulu présenter quelques idées autour du thème langage et pensée mathématiques. Le point de vue du philosophe ou de l'épistémologue, de l'épistémologue qui s'intéresse à la logique du savoir s'inscrit dans une métathéorie, un regard second. Je fais souvent la boutade que le philosophe est celui "qui pense sans faire ce que les autres font sans penser". Cet innocent jeu de mots n'autorise aucun jugement de valeur sur nos activités respectives, il permet tout au plus de prendre avec un peu plus de légèreté l'entreprise du savoir qui n'est peut-être à la fin qu'un appétit dénaturé.

NOTES DE L'APPENDICE III

- [1] Cf. G. Frege *Nachgelassene Schriften*, Hildesheim (Olms: 1970).
- [2] Cf. L.E.J. Brouwer "Intuitionism and Formalism" in *Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J.: 1964), p. 66-77.
- [3] Le dernier état de la formalisation de l'intuitionnisme se trouve dans *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, ed. par A.S. Troelstra *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 344, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1973).
- [4] M. Dummett "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" in *Logic Colloquium '73*, ed. by H.E. Rose and J.C. Shepherdson, North-Holland (Amsterdam: 1975), p. 5-40. Cette thèse a été reprise par P. Martin-Löf dans *Logic, Methodology and Philosophy of Science V*, North-Holland (Amsterdam), à paraître.
- [5] L. Wittgenstein *Remarks on the Foundations of Mathematics*, ed. by G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, Basil Blackwell (Oxford: 1956).
- [6] Il y a encore, dans l'exposé de Dummett, le problème des conditionnels subjonctifs relié aux notions de preuve intuitionniste et d'énoncé décidable, mais cette question ne nous intéresse pas immédiatement ici.
- [7] En particulier dans "Consciousness, Philosophy and Mathematics" in *Actes du Xe Congrès International de Philosophie*, North-Holland (Amsterdam: 1940), p. 1243-1249.
- [8] Cf. A.S. Troelstra *Principles of Intuitionism* vol. 95 *Lecture Notes in Mathematics*, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1969), chap. 16.

- [9] S. Kripke "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic" in *Formal Systems and Recursive Functions*, ed. by J.N. Crossley and M.A.E. Dummett, North-Holland (Amsterdam: 1965), p. 92-130.
- [10] Pour cette question, nous renvoyons au chapitre IV du présent ouvrage et à M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 269-270, Springer (Berlin-Heidelberg-New York: 1971).
- [11] Evidemment, pour les domaines finis logique classique et logique intuitionniste coïncident. Ce n'est que dans les domaines "effinis" que nous retrouvons le tiers "inclus" et la quantification effinie.
- [12] Voir chapitre II pour cette question.
- [13] A.J. Wheeler, continuateur de la géométrodynamique créée par Einstein, voit dans la logique cette prégéométrie qui serait l'assise de la géométrie. Cette idée féconde est peut-être confirmée par nos travaux. Cf. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler *Gravitation*, Freeman & Co. (San Francisco: 1973).
- [14] Le singulier n'a qu'une valeur stylistique ici. "La" mathématique peut par ailleurs indiquer l'unification "idéale" des actes mathématiques.
- [15] On peut se rendre compte facilement de la non-constructibilité ou de l'"irréalisabilité" de la théorie des ensembles par le paradoxe suivant: l'ensemble des parties d'un ensemble (dénombrablement) infini (*i.e.* 2^{\aleph_0}) représente l'ensemble des combinaisons possibles des éléments d'un univers infini. Mais dans un monde dont l'espace-temps serait infini (*i.e.* \aleph_0), toutes ces possibilités ne pourraient être réalisées, puisqu'il n'y a pas de bijection entre \aleph_0 et 2^{\aleph_0} ; mais l'ensemble des parties d'un en-

semble infini représente la totalité des combinaisons possibles réalisées "simultanément". D'où un nouveau paradoxe ensembliste. L'hypothèse du continu, *i.e.* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ne saurait qu'en souffrir.

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

CONCEPTUELS

1. Analyse conceptuelle (ou critique), Rigueur informelle.
2. Théorie des ensembles (la notion de structure cumulative des rangs) et fondements de la théorie des ensembles (la notion d'ensemble et ses axiomes).
3. Concepts constructivistes (concepts combinatoires, et fondements de la théorie des fonctions récursives et métarécursives, fonctionnelles récursives, computabilité et calculabilité). Concepts intuitionnistes.
4. Concepts métamathématiques (théorie des démonstrations comme théorie de la réflexion).
5. Philosophie des mathématiques et philosophie mathématique.

Fondements métathéorétiques
(Constructivisme)

RECHERCHES FONDATIONNELLES

Les fondements structurels utilisent les structures logiques et mathématiques comme moyens de développer langages et théories logiques et mathématiques.

Les fondements conceptuels analysent les principes et les concepts correspondants afin de trouver une justification (une certification) pour les théories logiques et mathématiques et aussi de les réduire à une théorie fondamentale unificatrice. Les approches diverses en fondements des mathématiques peuvent ainsi être réduites à la dichotomie fondamentale constructivisme — structuralisme.

STRUCTURELS

Théorie des ensembles Transfinis

Théorie des Modèles

Structures Algébriques et Topologiques (A. booléenne)
Logique Algébrique (Polyadique Treillis, Théorie des ensembles (cardinaux) Langages infinitaires.

Logique Mathématique

Théorie de la Récursion et Méta Récursion

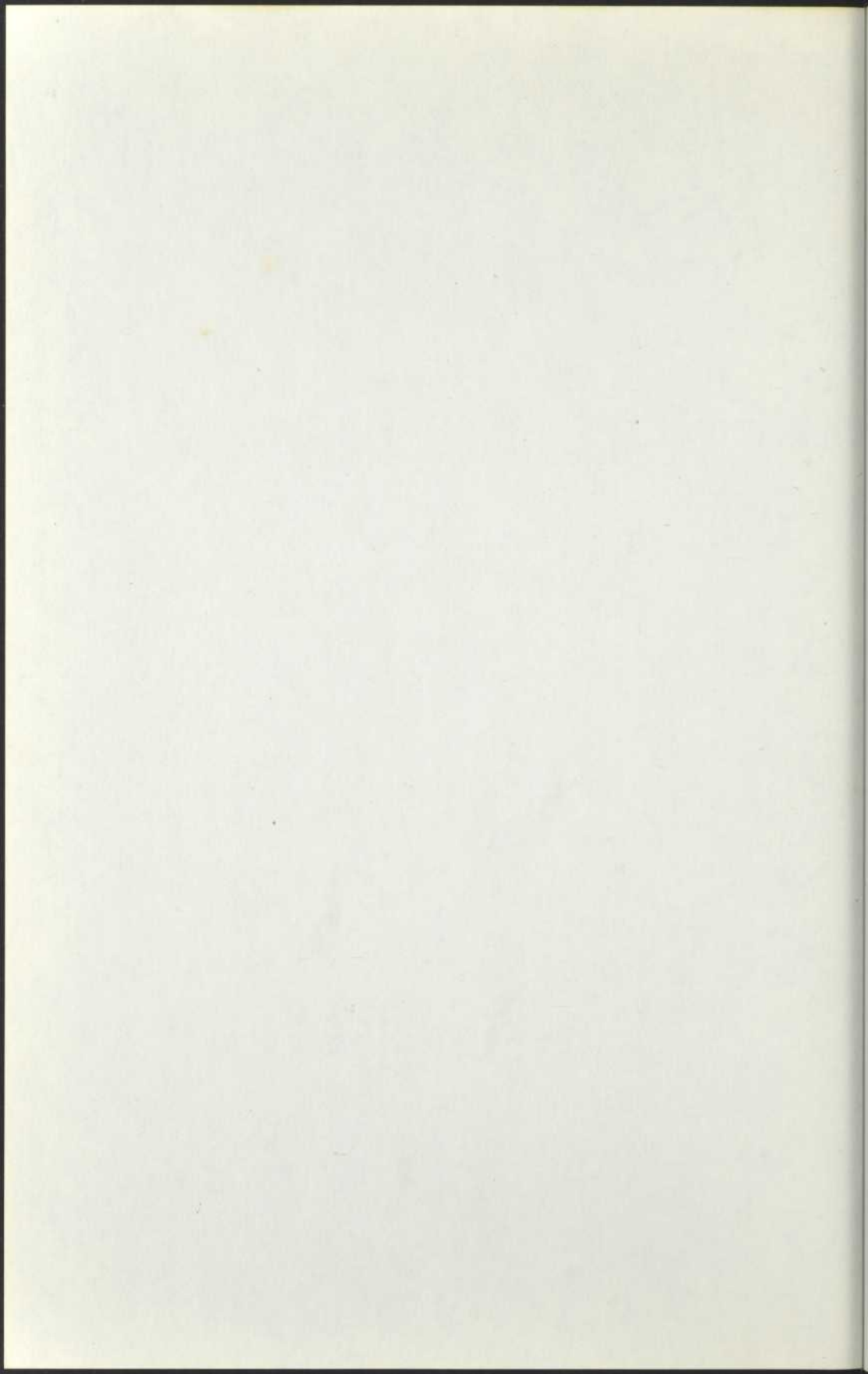
Structures Algébriques et ensembles, topologiques et Arithmétiques. Degrés Hiérarchiques. Théorie descriptive des ensembles Analytiques et projectifs.

Fondements théorétiques
(Structuralisme)

Théorie Catégories & Théorie des Topoi

Théorie des Démonstrations

Sous-systèmes de l'Analyse Classique Structures Arithmétiques (Ordinaux). Définitions inductives Progressions autonomes Hiérarchie Ordinale Formules infinies et Systèmes Formels



Index des symboles

U	30	Υ	99
ϕ	30	Σ	101
ε	31	χ	102
$=$	31, 104	ζ	104
\neq	31	$<$	104
$\text{Rel}(R)$	32	σ	107
$R^{\circ}t$	32	\prod	108
$R \int t$	32	$+$	124
R^{-1}	32	\cdot	124
$D(R)$	32	R^*	124
$C(R)$	32	$*f$	126
$\hat{\mathcal{L}}$	34	dx	126
\mathcal{L}'	39	ω	126
\vdash	50	$L_{\omega\omega}$	126
\parallel	52	Qx	126
Ω	66	μ	129
\vdash	67	A	131
∞	75	Σ^0_n	133
\neg	78	Π^0_n	133
\wedge	78	Π^1_1	133
\vee	78	Σ^1_n	133
\perp	79	Π^1_n	133
λ	81	Δ^0_n, Δ^1_n	133
\mid	82	Δ^1_1	133
$\#$	82		
$*$	87		
\hat{x}	97		
ξ	97		
ξ	97		

Λ	137	C^*	158
Γ	137	C^2	159
E_0	145	$C^1 \wedge C^2$	162
\mathbb{T}	148	C^1	165
\mathbb{F}	149	δ	185
\dagger	150	\oplus	256
C^2	157	\equiv	286
		∇	298

Index des noms propres

- Althusser, L., 343
Anaxagore, 285, 357
Aristote, 351, 358, 360,
365s.
Artin, M., 174
- Bachelard, G., 307, 389
Bachelard, S., 307, 320
Bachmann, F., 175
Badiou, A., 378
Bar-Hillel, Y., 13, 72
Becker, O., 10
Bénabou, J., 155, 162
Bernays, P., 215, 250,
277, 324, 364, 392s.
Beth, E., 82, 177, 241,
345
Bishop, E., 69, 108, 202
Bohm, D., 276
Bourbaki, N., 70, 246,
345, 383, 385, 390
Brouwer, L.E.J., 77, 93,
96, 98, 100, 105, 113,
201s., 212, 286, 334
Brunschvicg, L., 10, 243,
307, 334, 389, 392
- Cantor, G., 9, 29, 38s.,
59s., 64, 67, 189,
204, 278, 280, 389s.
- Carnap, R., 16, 221, 314,
364, 372
Cassirer, E., 334
Cavaillès, J., 10, 72,
245, 307, 310, 320,
388, 390s.
Chang, C.C., 143
Cheng, H., 213
Church, A., 85s., 94,
102s., 128
Cohen, P., 11, 39, 47, 50,
52, 55, 57s., 161,
191s., 226, 228, 279,
313, 315, 387, 391,
395
Combès, J., 13
Couturat, 307
Curry, H., 144
- Davis, P., 143
De Broglie, L., 276
Dedekind, R., 38, 55s.,
189, 321, 389s.
Deleuze, G., 343
Deligne, P., 159, 167
Derrida, J., 306, 308, 343
Desanti, J., 10, 248,
306s., 343, 392
Descartes, R., 305
Dieudonné, J., 272, 330

- Dirichlet-Lejeune, P.G.,
 199s.
 Dragalin, A.G., 214
 Drake, J., 74

 Eilenberg, S., 173, 272
 Einstein, A., 281
 Enderton, H.B., 143
 Erdős, P., 181
 Euclide, 181

 Feferman, S., 154, 240s.,
 251, 254s., 293
 Fermat, P., 180
 Foucault, M., 306, 308, 343
 Fraenkel, A., 13, 36, 312,
 390s.
 Frege, G., 17, 273, 305,
 315, 377
 Freyd, P., 25, 155, 170
 Friedberg, A., 132

 Gauss, C.F., 318
 Gentzen, G., 23, 106, 136s.,
 139, 202, 377
 Gilmore, P.C., 254
 Girard, J.Y., 139
 Gödel, K., 11, 22, 37, 39,
 44s., 59, 66, 69, 106,
 122, 127, 139, 195s.,
 202, 226, 243, 252s.,
 273s., 279s., 293,
 315, 320, 323, 387,
 391, 393, 395
 Godement, R., 177
 Goldbach, C., 180, 185
 Goodman, N., 81
 Goodstein, N., 214
 Grassmann, H.G., 318
 Grothendieck, A., 24, 154,
 157, 159, 165s., 378
 Grzegorzczuk, A., 201

 Haag, R., 177
 Hadamard, J., 345s.
 Halmos, P., 127, 388
 Hasse, H., 181
 Hatcher, W.S., 13, 173

 Hegel, W.F., 171, 350, 375
 Heidegger, M., 306, 317
 Henkin, L., 123, 241, 301,
 320
 Herbrand, J., 341, 374
 Heyting, A., 11, 78, 81,
 164, 166, 183, 241
 Hilbert, D., 22, 70, 106,
 112, 130, 135s., 199,
 214, 221, 227, 234s.,
 273, 319s., 325, 336,
 341, 355, 362s., 387
 Hobson, E.W., 309s.
 Howard, P., 116
 Hume, D., 367
 Husserl, E., 245, 287,
 305s., 317s., 343s.,
 356, 360, 374, 389

 Isbell, J., 154

 Jech, T.J., 75
 Jensen, R.B., 11, 45, 57,
 215
 Joyal, A., 155, 163

 Kan, J., 150
 Kant, E., 189, 305, 334,
 359s., 374
 Karp, C., 49, 215, 395
 Keisler, J., 143
 Kelley, J., 393
 Kleene, S.C., 104, 128,
 134, 241, 303
 Klein, F., 336
 Kline, M., 379
 Kneale, M. & W., 380
 Kock, A., 175
 Kreisel, G., 17s., 29s.,
 51s., 81s., 86, 91,
 99s., 104, 134, 140,
 154, 168, 171, 183,
 193, 196, 221, 229,
 240s., 245, 248, 250,
 252, 255, 273, 286s.,
 289, 291, 293, 313,
 324, 338, 387, 392,
 396

- Kripke, S., 82, 101, 103,
134, 169
Krivine, J.L., 11, 72, 250,
283, 388, 393
Kronecker, L., 334
Kummer, E.E., 136, 199
- Lacan, J., 306, 308, 343,
357
Ladrière, J., 10
Lakatos, I., 262
Lautman, A., 307, 389
Lawvere, W.F., 24s., 147,
151s., 160s., 171,
278, 293, 323, 347
Lebesgue, H., 42
Leibniz, G.W., 215, 361,
374
Levy, I., 40s., 49, 226s.,
249s., 395
Lorenzen, P., 201, 260,
329, 365
Luckhardt, C., 23, 116, 139
Lulle, R., 374
- MacLane, S., 24, 150, 154,
163, 238, 240, 278,
293, 323
Makkai, M., 177
Mallarmé, S., 356
Mao Tsé-Toung, 171
Markov, A., 95, 128, 214
Martin-Löf, P., 139
Marton, A., 58
Marx, K., 171
Matijasevič, A., 131
Mélissos, 259
Mendelson, E., 11
Mints, A., 197
Montague, R., 65, 258
Morse, J., 392s.
Moschovakis, J.R., 292
Mostowski, A., 13, 84, 226,
241, 301
Muchnik, A., 132
Mycielski, A., 72
Myhill, J., 102s., 213,
241, 286, 387, 392
- Nietzsche, F., 363, 370,
375
Noether, E., 389, 391
- Occam, G., 360
- Parménide, 281
Peano, G., 94, 124, 139,
312
Piaget, J., 345, 389
Platek, R., 134
Platon, 305, 374
Poirier, R., 389
Poincaré, H., 255, 307,
334
Polya, G., 346
Post, E., 128, 132, 134
Pozsgay, I., 62s.
Prachtar, K., 197
Prawitz, D., 19, 135, 137,
139
Putnam, H., 75, 179s.,
189s., 193, 246,
360s.
- Quine, W.v.O., 253, 360s.,
364, 392
- Ramsey, F.P., 16
Rasiowa, H., 164
Raymond, P., 378
Reinhardt, W.N., 66s.
Reyes, G., 25, 155, 161,
163
Riemann, B., 318, 389
Robinson, A., 143, 241,
277
Rogers, H., 143, 259
Rowbottom, R., 58
Rudin, W., 74, 114
Russell, B., 16, 253s.,
273, 315, 317, 360,
366, 392
- Sacks, G., 134
Šanin, N.A., 214
Scholz, H., 244
Schütte, K., 213

- Scott, D., 44, 57, 163s.,
227, 229, 292
Selberg, A., 181
Serre, J.P., 178, 199
Shoenfield, J.R., 11, 59,
143, 255, 302
Sikorski, R., 164
Silver, J., 58
Skolem, T., 144, 200, 214,
392
Smullyan, R.M., 143, 258
Solovay, R., 55, 57s., 210
Spector, C., 79, 107, 139,
195
Steenrod, R., 272
Stegmüller, W., 377
Steinhaus, R., 72
Street, R., 155
Strong, 134
Szabo, E., 365
Sze-Tsen Hu, 329

Tait, W., 116
Takeuti, G., 65
Tarski, A., 41, 121s., 127,
227, 241, 246, 249,
252, 313, 359
Thom, R., 353
Tierney, E., 25, 155, 160

Troelstra, A.S., 11, 98s.,
104, 109, 178, 286s.,
289, 291, 387
Trotzky, L., 176
Turing, A., 128, 132

Vaught, J., 249
Verdier, J.L., 157, 165s.
Vesley, J., 104, 214,
291s.
Vinogradov, N., 185
Volger, H., 155
von Neumann, J., 295, 390,
392
Vuillemin, J., 308

Wagner, H., 134
Weierstrass, K., 125
Weil, A., 198
Weyl, H., 195, 201, 212,
255, 295, 334, 350s.
Wilder, F., 13, 330
Wittgenstein, L., 221, 317
Wraith, J., 175

Yessenin-Volpin, A., 214

Zermelo, E., 30, 34, 36,
124, 253, 312, 390s.

Index des sujets

- Adjonction, 150, 156s.
Algèbre abstraite, 334
 de Boole, 164s.
 de Heyting, 164
Analyse des nombres réels,
 321
Application bijective, 384
 injective, 87, 384
 inverse, 384
 surjective, 384
 universelle, 386
Arithmétique de Heyting,
 183
Automorphisme, 56
Axiome d'accessibilité, 394
 d'associativité, 148
 d'extensionnalité, 30,
 37
 de compréhension, 33s.,
 87s., 124, 157, 187
 de compréhension du
 second ordre, 254
 de constructibilité,
 44s.
 de fondation ou de
 régularité, 35s., 394s.
 de la paire, 31
 de l'ensemble des
 parties, 45, 208
 de l'infini, 35s., 394s.
- Axiome de mesurabilité,
 44, 282
 de séparation, 34
 de substitution ou
 de remplacement, 32s.,
 37, 157, 207
 des univers, 154s.
 du choix (AC), 34s.,
 37, 46s., 53s., 69,
 87s., 384, 387, 393s.
 du second ordre, 33,
 279, 393
 fort d'infinité, 39s.
- Calculabilité, 233s.
Cardinal, 38s., 41, 53s.,
 281s., 390, 393
 compact, 43
 constructible, 47
 fini, 56
 inaccessible, 39
 mesurable, 39, 282
 supercompact, 43
 transfini, 394
Catégorie, 147s., 238s.
 des catégories, 151s.
 des ensembles, 151s.
 des faisceaux d'ensem-
 bles, 166s.

- Classe des fonctionnelles, 93
 universelle, 394
 Classificateur de sous-objets, 160
 Cofinalité d'un cardinal, 41
 Complétude syntaxique, 319s.
 Computabilité, 233s.
 Concept "absolu par complé-
 tion", 189
 construit, 188s.
 Conceptualisme, 363s.
 Cône, 205
 Conjecture de Goldbach, 180, 182, 191
 Construction analytique, 352
 transcendantale, 352
 Constructivisme, 64, 112, 191, 194, 277, 280, 291, 328, 333s., 341, 347, 353s., 363s., 369s., 375s., 387s.
 effinitiste, 342
 génétique (psychologi-
 que), 345
 Contenant universel, 283s.
 Continu, 201s., 298
 Continuité extensionnelle, 96
 intensionnelle, 95
 uniforme, 90
 Conventionalisme, 353s., 363s.
 Coupures de Dedekind, 203s.
 Crible, 158s., 167
 Définition formelle, 340
 imprédicative, 340
 informelle, 340
 Dérivation normale, 138
 Deuxième théorème d'incom-
 plétude de Gödel, 234s.
 Dialectique, 172, 351, 369s.
 Dixième problème de Hilbert, 130
 Domaine dominant, 290
 Domaine dominé, 290
 Effectivité, 342
 Effini, 106s.
 Effinitisme, 342
 Égalité extensionnelle, 87
 intensionnelle, 87
 Égologie transcendantale, 360
 Empirisme, 363s., 369
 Ensemble, 29s., 55, 61, 152, 154, 223s., 391
 complémenté, 202s.
 constructible, 53
 dénombrable, 390
 de définition, 384
 de points dérivés, 390
 de tous les ensembles finis, 338s.
 de valeurs du graphe, 384
 des nombres entiers, 390
 des nombres naturels, 243
 des nombres rationnels, 390
 des parties d'un ensem-
 ble, 187
 fini, 38, 56, 59, 338, 363
 générique, 50, 54, 56
 infini, 38s., 338, 363
 non dénombrable, 390
 transitif, 48
 Epistémologique, 371
 Équation différentielle partielle, 350
 Espace de Baire, 133, 289
 de Hilbert, 219
 Espèce décidable, 88
 Faisceau, 158, 165s.
 Fini, 106s.
 Finitisme, 22, 334
 Foncteur adjoint, 171s.
 contravariant, 158
 Fonction, 32

- Extension de Kan, 150s.
- Fonction constante, 128
 constructive, 98s., 183
 d'identité, 128
 récursive générale, 129s.
 récursive primitive,
 128s.
 de successeur, 128
- Fonctionnelle de type fini,
 195s.
- Fondement combinatoire,
 231s.
 constructiviste, 274s.
 de la physique, 324
 sémantique, 222s.
 structurel, 274s.
- Formalisme, 353s., 362s.
- Formule restreinte, 49
- Générateur de nombre réel,
 90
- Géométrie algébrique, 334s.,
 343s.
 différentielle, 335
- Hiérarchie cumulative, 251s.
 transfinie, 251s.
- Homéomorphisme, 175
- Homomorphisme, 57
- Hypersphère, 205
- Hypothèse du continu, 39,
 46, 53s., 69, 191s.,
 229s., 280, 285, 390s.
 généralisée du continu
 (HGC), 39, 47, 387, 395
- Idéalisme, 348s., 363s.,
 391
 constructif, 243s.
 minimal, 349
- Idéalité mathématique,
 309s., 392
- Imprédictivité, 88, 392
- Induction mathématique,
 338s.
 transfinie, 338
- Infini, 60
- Infinitésimal, 125s., 361
- Intégrale de Daniell, 213
- Interprétation topologique
 163s.
- Intuition géométrique, 336
- Intuitionnisme, 21, 62s.,
 77, 80s., 84, 103s.,
 107s., 141, 163s.,
 171, 221, 230, 236,
 273, 277, 286, 333,
 353, 363, 387
- Langage du premier ordre,
 58, 122s.
 infinitaire, 43
- Lemme de Yoneda, 175
 de Zorn, 34, 393
- Limite inductive, 385
 projective, 385
- Logicisme, 353s., 363s.
- Logique algébrique, 127
 classique, 94, 137
 des topoi, 162
 du second ordre, 123s.,
 139
 infinitaire, 126
 intuitionniste, 78, 80,
 137, 163s., 167s.
 mathématique, 121,
 219s., 333
 philosophique, 219
 quantique, 295
 transcendantale, 359
- Loi de déploiement, 97
 d'éventail, 97
- Machine de Turing, 183
- Marxisme, 369
- Méta-intuition, 392
- Métalogique, 373
- Métamathématique, 246s.,
 314, 325, 355
- Métaphysique, 325s., 368s.
- Métastase, 186, 196
- Métathéorétique, 9s.,
 325s., 356s., 370s.
- Métathéorie, 325, 333,
 355s.

- Métathéorie de la logique
et des mathématiques,
347
- Méthode de disjonction,
339s.
de la constante auxiliai-
re, 340
de l'hypothèse auxiliaire,
339s.
de preuve, 340
de preuve indirecte, 339
de réduction, 339
mécanique, 128
- Modèle constructible de
Gödel, 44s.
du second ordre, 210s.
générique de Cohen, 49s.
non standard, 124
- Monade, 208s.
- Morphisme, 386
- Multiplicité continue, 318s.
définie, 319s.
discrète, 318s.
- Nombres de Gödel, 286
- Nominalisme, 277, 353s.,
360s.
- Objectivité, 359s.
- Omniscience, 69
- Ontologie réaliste, 179s.
- Ordinal, 37s., 52s., 68,
283, 390s.
- Ordre virtuel, 104
- Paire, 31, 151
ordonnée, 31, 148
- Période, 290s.
- Perspectivisme, 367s.
- Physique expérimentale,
351s.
mathématique, 351s.
- Postulat de Peano, 322
d'induction, 94, 187,
322
d'induction du second
ordre, 339
- Potentialité, 182
- Pragmatisme, 363s., 369
- Praxis, 370
- Prédicativité, 88, 255,
391
- Préfaïceau, 158, 165
- Principe combinatoire de
réflexion, 252s.
de construction, 162
de construction mathé-
matique, 275s.
de récurrence, 339
de réflexion, 39s., 48,
65s., 155, 207, 286s.
de réflexion coordina-
le ou symétrique univer-
selle, 299
de réflexion d'après
Kreisel, 250
de réflexion d'après
Krivine, 250
de réflexion (illimité)
de Montague, 263
de réflexion globale,
252
de réflexion locale,
252s.
de réflexion uniforme,
252s.
de réflexion universel-
le, 156s.
des données analytiques
289
du tiers exclu, 192s.
ensembliste de réflex-
ion, 249s.
- Procédé de définition, 340
- Procès, 106s., 182, 184,
186
de génération, 206s.
défini, 186
effectif, 337s.
effini, 182s.
expansif, 290
fini, 184
mathématique, 286
récursif primitif, 207s
transarithmétique,
256s., 282s., 338

- Programme de Hilbert, 320
 Projection première, 384
 seconde, 384
- Quantification effinie, 60
- Raisonnement inductif, 339
- Rationalisme, 363s.
- Rayon, 205
- Réalisme, 353s., 361
 ensembliste, 221
 ontologique, 190s.
- Règle d'inférence, 79
- Relation de contrainte,
 50s.
 fonctionnelle, 31
- Relativisation, 46
- Relativisme, 367s.
- Représentation, 170, 174s.
- Schème de Kripke, 101, 103,
 288, 292
 de réflexion, 283
 de Vesley, 291
- Segment, 298
 sphérique, 205
- Sémantique ensembliste, 58
 formelle, 324
- Singleton, 31
- Site, 157s., 165s.
- Sous-ensemble, 282
- Sphère, 284s.
- Suite de choix, 89, 95s.,
 fondamentale, 204
 irrégulière, 88, 91s.
 mathématique stricte,
 103
 régulière, 88s., 94s.
- Stase, 106s., 184, 186,
 237s.
- Structuralisme, 271s.
- Structure, 385s.
 algébrique, 364, 385s.
 cumulative des rangs,
 283s.
 d'ordre, 364, 385s.
 finale, 386
 initiale, 386
- Structures mères, 364,
 385s.
 topologique, 364, 385s.
- Suites de Cauchy, 203s.
- Sujet créateur, 100, 286
- Syntaxe formelle, 324
- Système axiomatique, 312
 intuitionniste de Klee-
 ne, 292
- Théorème de Bolzano-Weier-
 strass, 105, 125, 341
 de complétude, 123,
 320s.
 de Cantor, 38
 de Cantor-Bernstein, 38
 de Dirichlet, 180s.
 de Fermat, 180, 191s.
 de finitude ou de com-
 pacité, 123
 de la barre, 93., 209
 de l'éventail (Brouwer)
 85, 97s., 209
 de Löwenheim-Skolem,
 47s., 123, 297, 394
 de Mostowski, 48
 de normalisation, 139
 de Tarski, 122
 de Zermelo, 34, 393
 d'équivalence, 390
 d'éliminabilité de la
 coupure de Gentzen, 340
 d'énumération, 129s.
 d'incomplétude de Gödel
 139s., 320
 d'inséparabilité, 84s.
 du bon ordre, 341
 s-m-n, 129s.
 sur l'absence de coupu-
 re, 138s.
 sur les nombres pre-
 miers, 181s.
- Théorétique logico-mathé-
 matique, 248s.
- Théorie axiomatique des
 champs, 167

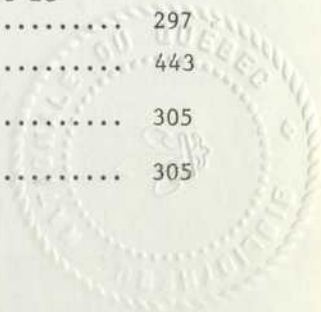
- Théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel (Z-F), 20, 30, 37, 44, 124, 154, 220, 223s., 228, 276, 298s., 324, 393
- descriptive des ensembles, 58, 161
- des catégories, 24, 162, 166, 238s., 323, 333
- des classes de von Neumann-Bernays-Gödel, (N-B-G), 20, 36s., 49, 226s., 361
- des démonstrations, 324s.
- des équations différentielles, 335
- des équations différentielles non linéaires, 352s.
- des équations différentielles ordinaires, 352s.
- des espaces de Hilbert, 350
- des fonctions analytiques, 350
- Théorie des fonctions elliptiques, 352s.
- des fonctions récursives, 131s.
- des groupes finis, 334
- des hiérarchies arithmétiques, 132s.
- des modèles, 121s., 135, 141, 324, 333
- des probabilités, 335s.
- des topos (ou topoi), 24, 163s., 333
- des types de Russell, 20, 276, 392
- des types (Girard), 139
- de la démonstration, 135s., 234s.
- de la récursion, 127s., 333
- Thèse de Church, 94, 102s. 128, 183, 292, 337
- Topologie différentielle, 335
- Topos, 159s., 166
- de Heyting, 166
- élémentaire, 160s.
- Transfini, 60, 390

Table des matières

AVANT-PROPOS	9
INTRODUCTION - LA PROBLEMATIQUE DES FONDEMENTS DES MATHE- MATIQUES	17
<p>Le problème des fondements. La philosophie des mathématiques et les fondements des mathématiques. La logique mathématique. Les mathématiques et leurs fondements: esquisse historique de la problématique.</p>	
PREMIERE PARTIE - FONDEMENTS CRITIQUES DE LA THEORIE DES ENSEMBLES ET DE L'INTUITIONNISME	27
CHAPITRE I - FONDEMENTS CRITIQUES DE LA THEORIE DES EN- SEMBLES	29
1. La notion d'ensemble	29
2. La théorie axiomatique des ensembles	30
3. Le principe de réflexion et les axiomes forts d'infinité; cardinaux inaccessibles et mesu- rables	39
4. Consistance relative et indépendance de l'a- xiome du choix et de l'hypothèse du continu .	44
A) Le modèle constructible de Gödel	44
B) Le modèle générique de Cohen	49
5. Critique de la théorie des ensembles	59
CHAPITRE II - FONDEMENTS CRITIQUES DE L'INTUITIONNISME ...	77
1. La logique intuitionniste et la notion de suite	78
2. Suites irrégulières (ou absolument libres) ..	91
3. Suites de choix	95
4. Le sujet créateur	100
5. Critique de l'intuitionnisme	106

DEUXIEME PARTIE - FONDEMENTS DES MATHEMATIQUES, LOGIQUE MATHEMATIQUE ET PHILOSOPHIE DES MA- THEMATIQUES	119
CHAPITRE III - LA SIGNIFICATION FONDATIONNELLE DE LA LO- GIQUE MATHEMATIQUE	121
1. La théorie des modèles	121
2. La théorie de la récursion	127
3. La théorie des démonstrations	135
CHAPITRE IV - LA THEORIE DES CATEGORIES ET LA THEORIE DES TOPOI COMME LANGAGES FONDATIONNELS	147
1. La notion de catégorie	147
2. La catégorie des catégories	151
3. La notion de topos en géométrie algébrique ..	157
4. La notion de topos logique	160
5. Intuitionnisme et théorie des topoi	163
6. Critique de la théorie des catégories et de la théorie des topoi	170
7. Sources bibliographiques	177
CHAPITRE V - PROBLEMES FONDATIONNELS DE LA THEORIE DES NOMBRES	179
1. Quelques problèmes de la théorie des nombres (distribution des nombres premiers)	179
2. La notion d'effini	182
3. La notion de stase	185
4. Concepts construits ou constructifs et con- cepts structurés ou structurels	188
5. Le dernier théorème de Fermat et l'épistémo- logie empiriste	191
6. Postscript	195
CHAPITRE VI - SUR LA STRUCTURE OU LA CONSTRUCTION DU CONTINU	201
1. La tradition constructiviste et le continu ..	201

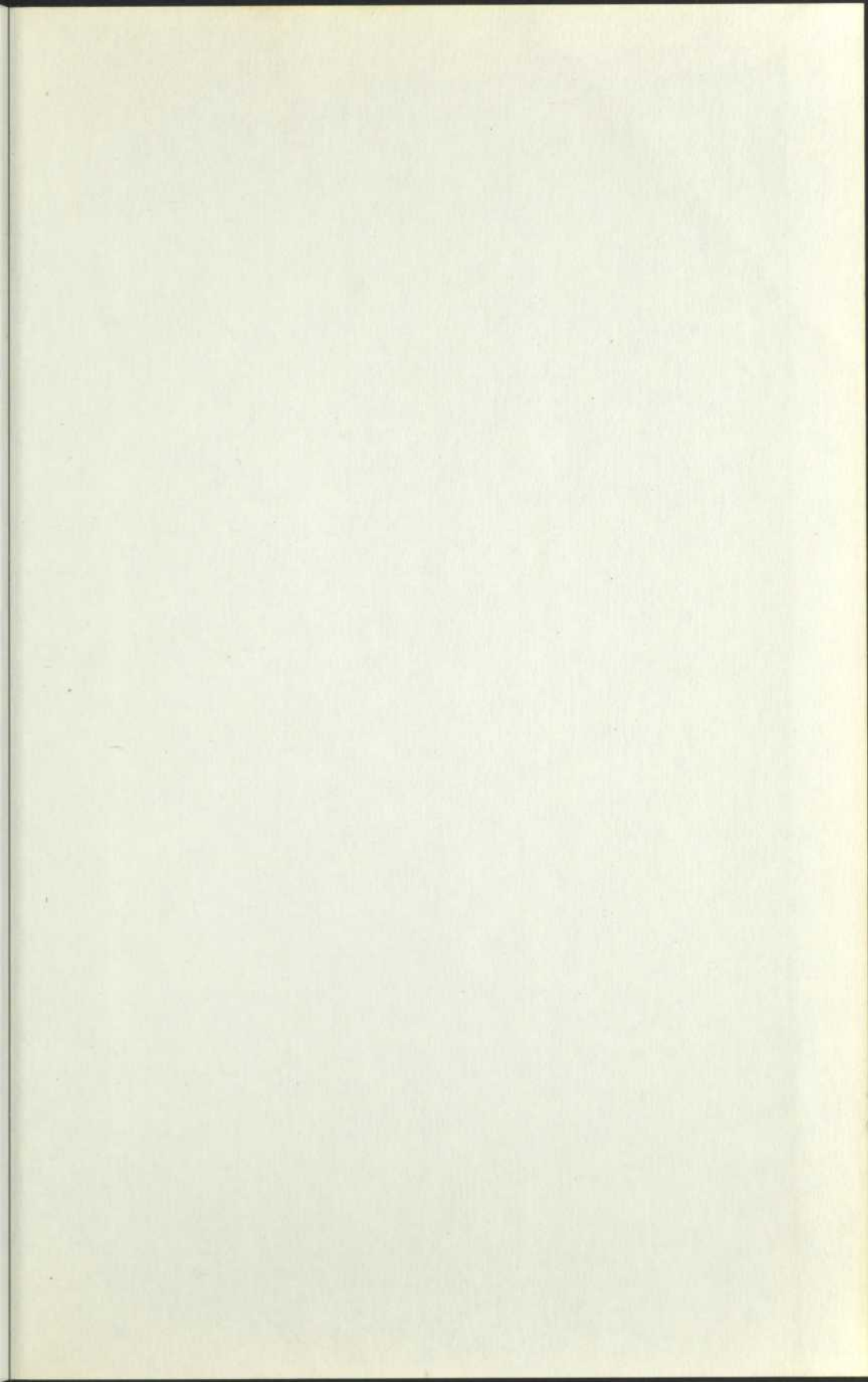
2. Approche axiomatique du continu constructi- viste	204
3. Modèles "fluctuants" du continu	209
CHAPITRE VII - LOGIQUE MATHÉMATIQUE ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES	217
1. Logique mathématique et logique symbolique ..	217
2. Logique mathématique et fondements des mathématiques	219
A) Les fondements sémantiques	222
B) Les fondements combinatoires	231
C) La théorie des catégories et les fonde- ments des mathématiques	238
3. Fondements des mathématiques et philosophie des mathématiques	241
4. Appendices. I. Le principe de réflexion ..	249
II. La notion d'attribut ou de propriété	253
III. Le procès transarithmétique	256
5. Sources bibliographiques	264
CHAPITRE VIII - CONSTRUCTIVISME ET STRUCTURALISME DANS LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES	271
1. La question des fondements	271
2. Fondements constructivistes et fondements structurels	274
3. Fondements structurels de la théorie des ensembles	277
4. Fondements constructivistes de l'intuition- nisme	286
5. La problématique fondationnelle	293
6. Appendice. L'hypothèse du continu et le schème de réflexion	297
7. Tableau	443
CHAPITRE IX - PHÉNOMÉNOLOGIE ET MATHÉMATIQUES	305
1. Le cadre phénoménologique	305

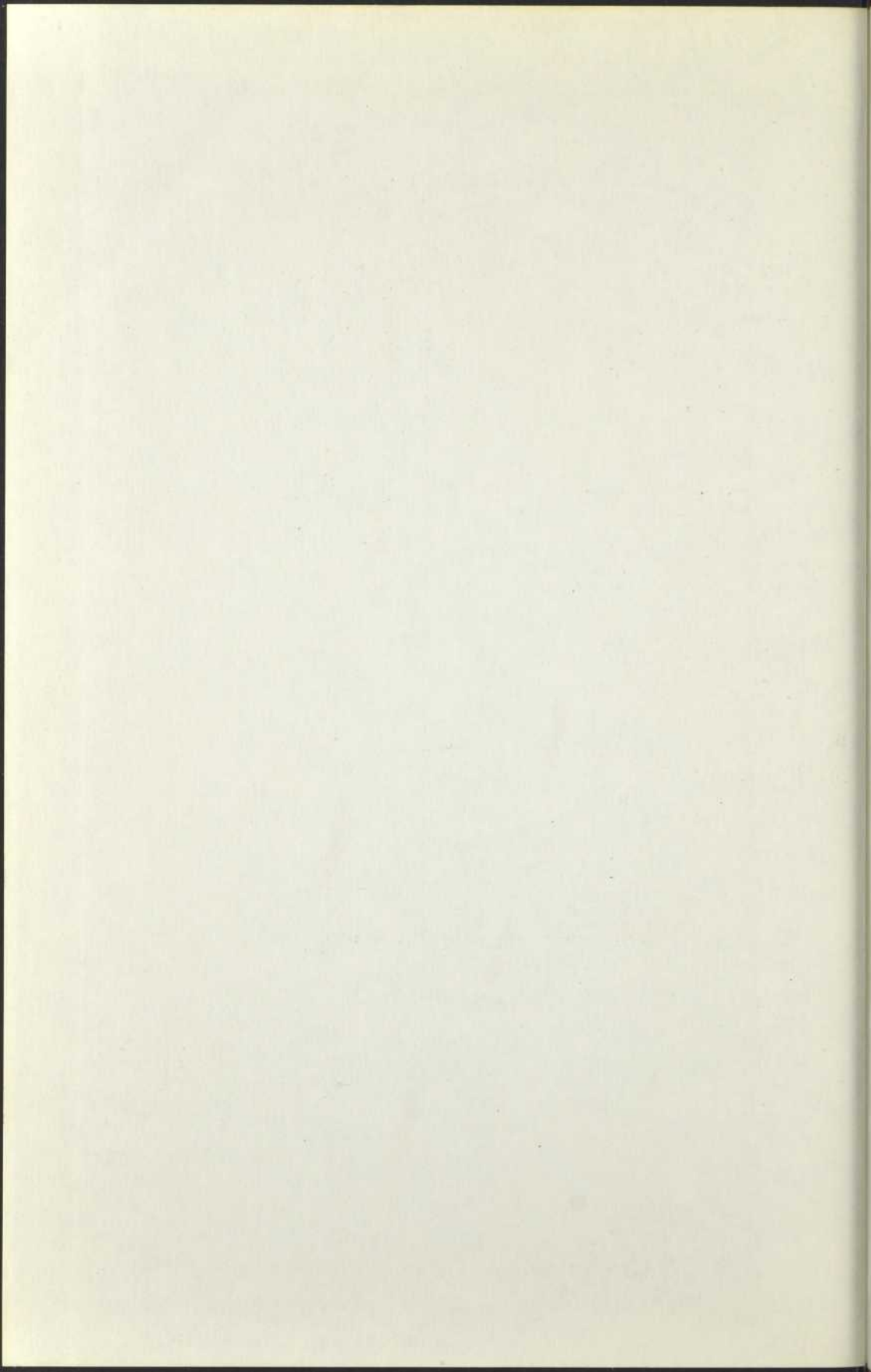


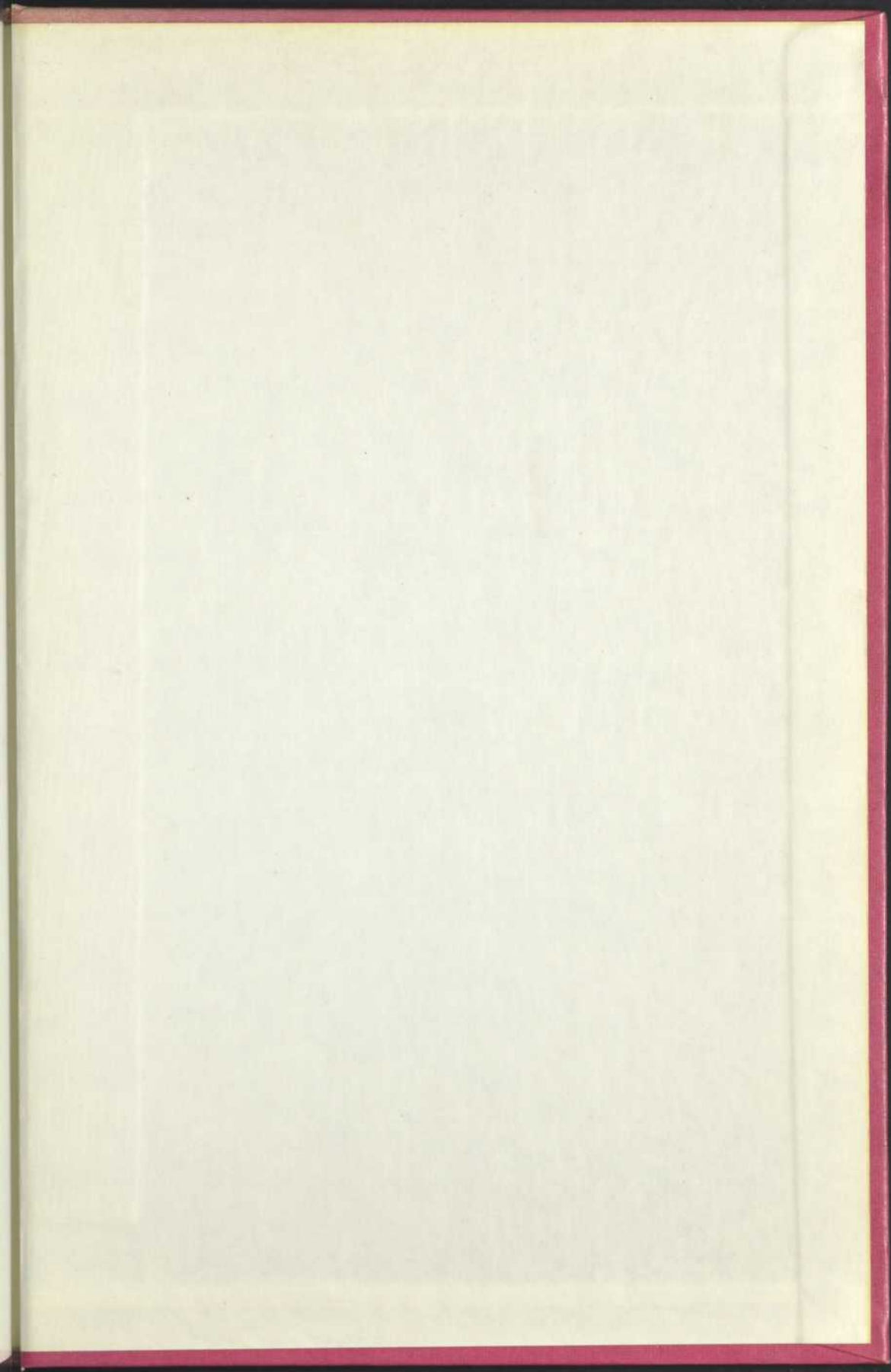
2. Les idéalités mathématiques	309
3. La problématique logico-mathématique	314
4. La théorie de toutes les théories possibles est-elle possible?	317
CONCLUSION - LE SENS PHILOSOPHIQUE DES FONDEMENTS DES MATHEMATIQUES	
1. Constructivisme et pratique mathématique	333
2. Constructions, démonstrations et existence mathématique	337
3. L'agent linguistique constructeur	342
4. L'applicabilité des mathématiques	349
5. Philosophie et fondements des mathématiques .	353
6. Logique, mathématiques et métathéorétique ...	357
APPENDICE I - DE LA THEORIE DES ENSEMBLES DE BOURBAKI A LA THEORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES	
383	
APPENDICE II - CONSTRUCTIVISME ET MATHEMATIQUES CONTEMPO- RAINES	
397	
1. Introduction	397
2. Critique de la théorie axiomatique des ensembles	401
3. Le constructivisme contemporain	409
4. Conclusion	414
APPENDICE III - LANGAGE ET PENSEE DANS LE CONSTRUCTIVISME CONTEMPORAIN	
421	
1. Introduction	421
2. Fondements de la logique intuitionniste	423
3. Interprétation "domaniale" de la logique constructiviste	426
4. Conclusion	434
INDEX DES SYMBOLES	445
INDEX DES NOMS PROPRES	447
INDEX DES SUJETS	451

Achévé d'imprimer à Montréal.

Le 28 septembre 1976 par l'Imprimeur Jacques-Cartier Inc.







BNQ



000 422 035

$\epsilon R^{\gamma}(\beta)$

