

TESTS DE DIVISIBILITÉ: MÉTHODE(S) PROPOSÉ(ES).

de Raymond Simoneau.

A- INTRODUCTION.

Depuis des années, en consultant mes livres de mathématiques au chapitre des critères de divisibilité, j'y constatai quelques lacunes. Par exemple, la règle du 7 y est absente avec une régularité agaçante. J'en ai donc conclu, un peu hâtivement, que cette règle était à découvrir.

Je me suis donc donné pour tâche d'en mettre une au point et y suis parvenu. Je voulais une méthode originale et simple qui soit plus rapide à calculer qu'une division proprement dite. Depuis, avec mon entrée sur internet, il m'a été facile de constater que de tels critères existent bel et bien. Cela n'enlève nullement la valeur de ma méthode. J'ai par conséquent décidé de la publier malgré son manque d'exclusivité puisqu'aucune connaissance nouvelle, si minime soit-elle, n'est à dédaigner.

On trouvera en annexe les autres principaux critères de divisibilité du 7 (qui offrent quelques ressemblances avec le mien tout en étant fondamentalement différents). J'y ai refait des démonstrations plus simples et plus claires que celles trouvées sur la toile. J'ai également trouvé judicieux pour ceux qui seraient peu familiarisés avec ces méthodes d'offrir dans une seconde annexe un panorama des autres critères de divisibilité. Trois petites méthodes qui s'y trouvent (appelées sous-critères du 4, du 8, et du 16) sont d'ailleurs de moi. Je les expose avec démonstrations. Un autre sous-critère du 8 trouvé sur la toile (un peu plus laborieux à effectuer) y est exposé et démontré. Pour les autres critères recensés ici, certaines erreurs trouvées sur les sites internet d'origine ont été corrigées. Je me conteraï de les exposer sans démonstration.

B- EXEMPLE. Exposition de la méthode.

a) Est-ce que 1491 est divisible par 7?

Nous aurons recours, pour répondre à cette question, à un nombre décimal que je baptise *Nombre Séquentiel*. Je construis le début de la séquence par les trois premiers nombres pairs: 2, 4 & 6. Je recommence la séquence en soustrayant 1 à chacun de ses trois premiers chiffres ce qui donne : 2, 4, 6, 1, 3, 5 et on réitère le procédé une dernière fois en faisant précéder le résultat par 0 et une virgule décimale: on obtient 0,246135024. Par soucis didactique, je baptiserai chacune de ces décimales **séquentiel** d'où le nom général de la méthode.

1 4 9 1 Puisque le dernier chiffre du nombre = 1, on va chercher le 1er séquentiel du nombre, soit 2. On supprime le dernier chiffre 1 du nombre 1491, et on soustrait le séquentiel 2 du nouveau nombre ainsi obtenu...

$1\ 4\ 9 - 2 = 1\ 4\ 7$ Si 147 se divise par 7, alors 1491 se divise aussi par 7.

1 4 7 Puisque le dernier chiffre du nombre = 7, on va chercher le 7ième séquentiel du nombre, soit 0. On supprime le 7 de 147 et on soustrait 0 du résultat. On obtient 14.

Si 14 se divise par 7 (ce qui est le cas), alors 1491 se divise par 7 aussi.

Avec un rien de pratique, on peut arriver à appliquer la méthode promptement, ce qui est payant dans le cas de nombres entiers élevés.

b) 2 0 3. 3 correspond au séquentiel 6. $\Rightarrow 20-6 = 14 \Rightarrow 203$ est divisible par 7.
 (on remarquera que la soustraction peut se faire sur plusieurs puissances de dix. Ici, unités et dizaines.)

c) 7 9 0. Le 0 correspond au zéro entier du nombre séquentiel. (Important!)

$79 - 0 = 79$. 9 correspond au séquentiel 4 $\Rightarrow 7 - 4 = 3$. Donc, 790 n'est pas divisible par 7.

C- LE PRINCIPE.

Le nombre Séquentiel 0,246135024 est, en fait, une table. Prenons la table de 7:

<i>Table de 7</i>	<i>Inverse</i>	<i>Réordonné</i>
07	70	07 *
14	41	12
21	12	24
28	82	36
35	53	41
42	24	53
49	94	65
56	65	70
63	36	82
70	07	94

* Peut être remplacée par 0. On notera que la colonne (réordonné) des unités forme en descendant le nombre séquentiel.

Il s'agit donc d'aller rechercher les retenues (i.e. les dizaines de la table du 7) dans les chiffres à puissances élevées du dividende. Le nombre séquentiel, en somme, est une table de retenues faciles à retracer parce que faciles à mémoriser...

PAR EXEMPLE:

Position de la séquence

$$7 \times 13 = 7 \times (10 + 3) = \textcircled{70} + \textcircled{21}$$

+

Séquentiel

=

dans la table

9 1 -> 1 -> le séquentiel 2 -> 2 est la retenue qui s'est ajoutée

donc $9 - 2 = 7$ -> 7 est bien divisible par 7.

D'où le processus général suivant:

1- Prendre le dernier chiffre du nombre. Aller chercher le séquentiel approprié.

Soustraire ce séquentiel du nombre amputé de son dernier chiffre.

2- Répéter le processus jusqu'à ce qu'il soit facile de voir si le nombre obtenu par réduction successive se divise par 7 ou jusqu'à ce qu'il reste 0 ou 7 en poussant le processus jusqu'au bout. Ce processus se met aisément en algorithme.

D- JUSTIFICATION.

Il s'agit de démontrer maintenant que la méthode du séquentiel est toujours valable.

Démonstration: Soient $A, B, C, a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq A \leq 6, 0 \leq C \leq 9$ et $0 \leq a \leq 6$
et soit $10B + C = 7b + a$, le nombre à tester.

[et soit d'autre part $10A + C \in \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\}$
tel que si $C = 1, A = 2$; si $C = 2, A = 4$; si $C = 3, A = 6$; si $C = 4, A = 1$;
si $C = 5, A = 3$; si $C = 6, A = 5$; si $C = 7, A = 0$; si $C = 8, A = 2$; si $C = 9,$
 $A = 4$ et si $C = 0, A = 0$.] (Séquentiel.)

Selon la méthode esquissée plus haut, on ne tient compte que de B pour vérifier la divisibilité de $10B + C$;

$$\text{c'est-à-dire } B - A = \frac{7b + a - C}{10} - A = \frac{7b + a - C - 10A}{10}.$$

[N. B.: A est choisi en fonction de C . {Séquentiel.}]

$$\text{ou } 10(B - A) = 7b + a - C - 10A = 7b + a - (10A + C) \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse, $7b$ et $(10A + C)$ sont multiples de 7 $\Rightarrow 10(B - A)$ ne sera multiple de 7 aussi, que si le reste $a = 0$;

autrement dit, $10(B - A)$, donc $(B - A)$, est multiple de 7 $\Rightarrow 10B + C$ l'est aussi.

C. Q. F. D.

D- CONCLUSION.

Cette méthode est simple et son domaine de définition est \mathbb{N} , contrairement aux autres méthodes exposées dans l'annexe I. Elle pourra donc être enseignée à des élèves plus jeunes, du niveau primaire même. (Vérfifié).

ANNEXE I: AUTRES CRITERES DU 7.

Cet annexe propose un bref examen de deux autres critères de divisibilité que j'ai trouvés sur Internet. Je les expose dans leur essence tels qu'expliqués sur les sites visités, et en offre une preuve personnelle pour chacun. De plus, j'en donne une brève appréciation pour terminer en effectuant une comparaison au plan didactique et pédagogique.

Clé de Pascal : Explication: On divise 1 par 7, et on écrit à chaque étape du calcul les restes successifs. On obtient: ..., 5, 4, 6, 2, 3 et 1, si on en inverse l'ordre. On appelle ce nombre la *clé de Pascal*.

Avec le nombre à tester, on multiplie le chiffre des unités par 1, puis le chiffre des dizaines par 3, puis celui des centaines par 2, etc. Finalement, on additionne les résultats obtenus. Si le résultat se divise par 7, le nombre initial se divise par 7 aussi.

Par exemple, 217 se divise par 7, car $7 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 2 = 14$ qui se divise par 7 aussi...

Démonstration: Si nous effectuons la division de 1 par 7, nous obtenons le nombre 0,142857 et une suite de restes dans la division: 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...

Par exemple, pour les premières décimales de 0,142857, on a

$$7 \times 0 + 1 = 10^0$$

$$7 \times 1 + 3 = 10^1$$

$$7 \times 14 + 2 = 10^2$$

$$7 \times 142 + 6 = 10^3 \text{ etc...}$$

Il s'agit en fait d'une sorte de "pont" entre la base 10 et la base 7.

Soit r_n un reste de cette division pour la $n^{\text{ième}}$ puissance de 10 et d_n , le nombre $1/7$ estimé à n décimales près multiplié par 10^n .

On a $7 \times d_n + r_n = 10^n$ tel que

$$\begin{array}{rcl}
 7 \times 0 + 1 = 10^0 & \backslash & \text{Soit un nombre naturel } m \text{ à } n \text{ chiffres} \\
 7 \times 1 + 3 = 10^1 & \backslash & \text{tel que } m = \\
 \cdot & \backslash & m_n \times 10^n + m_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + m_0 \\
 \cdot & \backslash & \text{où } m_i \in [0, 9] \text{ et } m_i \in \mathbb{N} \dots \\
 \cdot & \backslash & \\
 7 \times d_n + r_n = 10^n & \backslash &
 \end{array}$$

... en appliquant le calcul suggéré par le critère, on obtient

$$\begin{aligned}
 & m_0 (7 \times 0 + 1) + m_1 (7 \times 1 + 3) + \dots + m_n (7 \times d_n + r_n) \\
 & = m_0 + m_1 (7 + 1) + m_1 \times 3 + \dots + 7 m_n d_n + m_n r_n .
 \end{aligned}$$

On peut ignorer les 1^{ers} termes de chaque parenthèse car ils sont multiples de 7.

Si $m_n 10^n + m_{n-1} 10^{n-1} + \dots + 10 m_1 + m_0$ est divisible par 7,

alors $\sum m_i (7 d_i + r_i)$ (qui est égale par hypothèse à l'expression précédente) devra être divisible aussi par 7 pour peu que les $\sum m_i r_i$ le soient aussi.

C. Q. F. D.

Observation: Ce critère est efficace mais un peu lourd. Il est basé sur une propriété intéressante qui se dégage dans le passage de la base 7 à la base décimale. Il utilise une clé

comme le Séquentiel. Mais son côté laborieux limite son utilité (et son sex-appeal!). Il est surtout profitable au cas où on a plusieurs nombres à tester.

Méthode de "Réduction par les unités": Explication: On supprime le chiffre des unités du nombre à tester. On soustrait le nombre obtenu par le double du chiffre supprimé. Si le nombre résultant est divisible par 7, le nombre initial à tester l'était aussi.

Par exemple, pour 217, on retranche 7 qu'on multiplie par 2. et on soustrait du nombre mutilé: $21 - 7 \times 2 = 21 - 14 = 7$.

Démonstration: Soit a_3 , un nombre entier multiple de 100, a_2 un nombre entier multiple de 10 mais inférieur à 100,
 $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $n \in \mathbb{N}$
tels que $a_3 + a_2 + a_1 = 7n$ (i. e. est un multiple de 7.)

$$a_3 + a_2 = 7n - a_1$$

et $\frac{a_3 + a_2}{10} = \frac{7n - a_1}{10}$ est un entier par hypothèse.

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{a_3 + a_2}{10} - 2a_1 &= \frac{7n - a_1}{10} - 2a_1 \\ &= \frac{7n - 21a_1}{10} = \frac{7(n - 3a_1)}{10} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Il ne nous reste qu'à démontrer que $\frac{n - 3a_1}{10} \in \mathbb{Z}$ et on aura fini.

10

Si $7n = a_3 + a_1 + a_2$ alors

$$n = \frac{a_3 + a_1 + a_2}{7} \quad \text{et}$$

$$n - 3a_1 = \frac{a_3 + a_2 + a_1}{7} - 3a_1 =$$

$$\frac{a_3 + a_2 - 20a_1}{7} \in \mathbb{Z} \quad \text{donc est divisible}$$

par 7. Or $a_3 + a_2$ est divisible par 10, d'où $a_3 + a_2 - 20a_1$, l'est aussi. Par conséquent, $n - 3a_1$, est divisible par 10.

C. Q. F. D.

Observation: Ce critère est génial de simplicité. Il réduit le nombre testé par la queue, comme pour la méthode du Séquentiel, mais ne requiert aucun nombre à retenir ou à calculer. Il se base sur un comportement arithmétique des multiples de 7, comme en témoigne la démonstration ci-dessus. C'est définitivement la plus belle des 3 méthodes. Mes sources n'en mentionnent pas l'auteur.

En somme, la première méthode s'appuie sur un phénomène qu'on peut observer pendant un changement de base. La seconde, elle, s'appuie sur un comportement arithmétique particulier. La méthode du séquentiel se base, quant à elle, sur une suite de nombres obtenus par le biais de la table de multiplication du 7.

Le domaine de définition de la méthode de Pascal est \mathbb{Q} , alors que celui de la technique de "Réduction par les unités" est \mathbb{Z} . Le domaine de définition de la méthode du Séquentiel est \mathbb{N} . Si la deuxième méthode est la plus simple et la plus belle, la technique du Séquentiel peut être enseignée à des élèves plus jeune, de niveau primaire. (Vérifié.)

ANNEXE II: AUTRES CRITERES.

Pour ceux qui ne sont guère familiarisés avec les critères de divisibilité, cette section en fait un bref survol et y propose même quelques améliorations non dénuées d'intérêt.

A- CRITERES FONDAMENTAUX.

Les critères de 2 à 9 sont les plus fondamentales étant données que les tables de 2 à 9 sont les seules requises pour maîtriser la multiplication.

Critère du 2: Si le dernier chiffre du nombre initial est pair, alors le nombre initial se divise par 2.

Critère du 3: Si la somme des chiffres du nombre initial se divise par 3, alors ce même nombre initial se divise par 3.
Exemple: $36 \Rightarrow 3 + 6 = 9$ se divise par 3, comme 36.

Critère du 4: Si le nombre formé des deux derniers chiffres du nombre initial se divise par 4, le nombre initial se divise par 4. (N. B. Cette méthode me semble incomplète. Par exemple, si vous avez 92 comme nombre, un arithméticien inexpérimenté pourrait ne pas voir que ce nombre se divise par quatre. J'ai donc imaginé le sous-critère suivant: Prenez le dernier chiffre additionné au double du chiffre des dizaines. Si la somme obtenue se divise par 4, le nombre initial se divise par 4. Au besoin on réitère le processus. Exemple: Pour 92: $9 \times 2 + 2 = 20$. 92, comme 20, se divise par 4 puisque $2 \times 2 + 0 = 4$.) *

Critère du 5: Si le dernier chiffre du nombre initial = 5 ou 0, alors le nombre initial se divise par 5. Exemple: 75 ou 120 se divisent par 5.

Critère du 6: Si le nombre initial se divise à la fois par 2 et 3, alors il se divise par 6. (Utiliser les critères du 2 et du 3.).

Critère du 8: Si le nombre formé par les trois derniers chiffres du nombre initial se divise par 8, le nombre initial se divise par 8. (N. B. On peut appliquer le sous-critère du 4 à ce critère-ci. Si la somme du dernier chiffre, du double du chiffre des dizaines et du quadruple du chiffre des centaines se divise par 8, le nombre des trois derniers chiffres, donc le nombre initial, se divise par 8. Exemple: Pour 384: $4 \times 3 + 2 \times 8 + 4 = 32$. 384, comme 32, se divise par 8. Voir la démonstration ci-bas. *)

De plus, j'ai trouvé sur le Net l'ingénieux sous-critère suivant. Si le chiffre des centaines est pair, et que le nombre formé des deux derniers chiffres se divise par

huit, alors le nombre initial se divise par huit. Si le chiffre des centaines est impair et que le nombre formé des deux derniers chiffres, diminué de 4, se divise par 8, le nombre initial se divise par 8. (Voir la démonstration ci-bas. **)

Critère du 9: Similaire au critère du 3 auquel il est apparenté. Si la somme des chiffres du nombre initial se divise par 9, alors ce nombre initial est divisible par 9.
Exemple: $819 \Rightarrow 8 + 1 + 9 = 18$ et (si nécessaire) $1 + 8 = 9$. 819 se divise par 9.

* Démontrons nos trois sous-critères. (Le critère du 16, démontré ici, se retrouve dans la partie B.)

Les trois sous-critères se démontrent de la même façon.

1. Sous-critère du 4. Pve: (Soient a_0 & $a_1 \in \mathbb{N}$, : $(a_0 + 10a_1) / 4 \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $[(a_0 + 2a_1) / 4] + 2a_1 = (a_0 + 2a_1 + 8a_1) / 4 = (10a_1 + a_0) / 4 \in \mathbb{N}$.) \square

2. Sous-critère du 8. Pve: (Soient a_0, a_1 & $a_2 \in \mathbb{N}$: $(a_0 + 10a_1 + 100a_2) / 8 \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $[(a_0 + 2a_1 + 4a_2) / 8] + a_1 + 12a_2 = (a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_1 + 96a_2) / 8 = (a_0 + 10a_1 + 100a_2) / 8 \in \mathbb{N}$.) \square

3. Sous-critère du 16. Pve: (Soient a_0, a_1, a_2 & $a_3 \in \mathbb{N}$: $(a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3) / 16 \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $[(a_0 - 6a_1 + 4a_2 + 8a_3) / 16] + a_1 + 6a_2 + 62a_3 = (a_0 - 6a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_1 + 96a_2 + 992a_3) / 16 = (a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3) / 16 \in \mathbb{N}$) \square

N. B. : On remarquera que le sous-critère du 4 découle du sous-critère du 8. On ne peut toutefois étendre facilement voire généraliser cette technique.

** Démontrons ces deux autres sous-critères.

Démonstration:

1er cas.) Avec le chiffre des centaines impair, on a $100(2n + 1) + m$, le nombre formé par les trois derniers chiffres du nombre initial, où $n, m \in \mathbb{N}$ et $0 < m < 100$, et $n < 5$. On a $100(2n + 1) + m - 4$.
On obtient $200n + 100 + m - 4 = (200n + 96) + m$. Ce qui montre que la divisibilité du nombre en cause ne dépend que de m , puisque $200n + 96$ est toujours divisible par 8. \square

2ème cas.) Avec les chiffre des centaines pair, on a $100(2n) + m$ où n et m sont définis tels que précédemment. On obtient $200n + m$. Par le même argument qu'au 1er cas, on voit que la division par 8 du nombre étudié ne dépend que de m . (On n'aura, dans ce cas, qu'à appliquer au besoin *mon* sous-critère!) \square

C. Q. F. D.

B- COQUETTERIE MATHEMATIQUE.

Pour finir je n'ai pu m'empêcher de proposer d'autres critères, nullement indispensables pour mon propos, mais que j'ai retenu ici pour leur élégance et leur beauté.

Critère du 10: Si le dernier chiffre du nombre est 0, le nombre se divise par 10.

Critère du 11: a) Si la somme des chiffres en position paire du nombre moins la somme des chiffres en position impaire, se divise par 11, alors le nombre initial se divise par 11. Par exemple: pour $11 \times 11 \times 98 = 11858$. On a $(8 + 8 + 1) - (5 + 1) = 17 - 6 = 11$. Donc, 11858 se divise par onze.

b) Soustraire du nombre initial amputé de son chiffre des unités le chiffre supprimé, et recommencer jusqu'à ce qu'on puisse conclure.
Ex. $11858 \rightarrow 1185 - 8 = 1177 \rightarrow 117 - 7 = 110$. (11×10).

Critère du 12: Si le nombre initial se divise simultanément par 3 et par 4, alors il est un multiple de 12.

Critère du 13: On ampute le nombre initial de son dernier chiffre. Si le nombre ainsi obtenu, additionné du quadruple du chiffre amputé se divise par 13, alors le nombre initial se divise par 13. Répéter simplement le processus.

Ex: 1105. $110 + 5 \times 4 = 130$ qui est multiple de 13. Donc 1105 est un multiple de 13.

1209. $120 + 4 \times 9 = 156$. $156 + 24 = 180 = 13 \times 3$. Donc 1209 se divise par 13.

Critère du 14: Si le nombre initial se divise simultanément par 7 et 2, il se divise par 14.

Critère du 15: Si le nombre initial se divise simultanément par 5 et 3, il se divise par 15.

Critère du 16: Si le nombre formé des 4 derniers chiffres du nombre initial se divise par 16, il se divise en entier par 16. Cette méthode ne veut plus rien dire. Je propose le sous-critère suivant qui découle de ceux du 4 et du 8 et qui est démontrée dans la partie A.* Prenez le chiffre des unités, auquel on soustrait le sextuple du chiffre des dizaines, additionné au

quadruple du chiffre des centaines et à l'octuple du chiffre des milliers. Si le résultat se divise par 16, le nombre initial se divise par 16. Répéter au besoin. Ex: 1776. $6 - 6 \times 7 + 4 \times 7 + 8 \times 1 = 6 - 42 + 28 + 8 = 42 - 42 = 0$ qui se divise par 16. 1776 aussi.

Critère de 17: Si le nombre initial amputé de son dernier chiffre et soustrait du quintuple de ce dernier chiffre se divise par 17, alors le nombre initial se divise par 17.

Ex: 1615. $161 - 5 \times 5 = 136$. $13 - 5 \times 6 = -17$ qui est un multiple de 17 dans \mathbb{Z} .

Critère de 18: Si le nombre initial se divise simultanément par 9 et 2, il se divise par 18.

Critère de 19: Si le nombre initial, amputé de son dernier chiffre et additionné du double de ce même chiffre, se divise par 19, alors il se divise par 19.

Ex: 855 $\rightarrow 85 + 2 \times 5 = 95 \rightarrow 9 + 2 \times 5 = 19$. Donc 855 est multiple de 19.

Critère de 20: Si le nombre initial se divise à la fois par 5 et 4, alors il est multiple de 20.

Critère du 21: Si le nombre initial se divise à la fois par 7 et 3, il se divise par 21.

Critère du 22: Si le nombre initial se divise à la fois par 2 et 11, il se divise par 22.

Critère du 23: Si le nombre formé par le sextuple du chiffre des unités additionné du nombre amputé de ce chiffre se divise par 16, le nombre initial se divise par 16. Répéter. Ex: 276. $27 + 7 \times 6 = 69$ et $69 = 3 \times 23$.

Critère du 24: Si le nombre initial se divise à la fois par 8 et par 3, il se divise par 24.

Critère du 25: Si le nombre formé par les deux derniers chiffres du nombre initial égale 00 ou 25 ou 50 ou 75, alors il se divise par 25.

Etc...

Référence bibliographiques.

- LIVRE.

* Collectif. *Petite Encyclopédie des Mathématiques*. (1980 Ed.) Paris-Londres-Athènes. Editions K. Pagoulatos. Chapitre 1, P. 28-29. [Pour l'ensemble de l'article.] (Plutôt sommaire, mais intéressant pour son approche de synthèse.)

- SITES INTERNET.

* Clarisse Fiol, Professeur, et ses élèves du *Club de Pythagore*. Institution: Collège François-Rabelais de L'Escorène, France. [Pour l'annexe I.] (Excellente revue. Le site me semble dater un peu mais il est en reconstruction.)
Adresse: <http://www.ac-nice.fr/maths/clubs/pythagore/par7.htm>

* Auteur: Non-identifié. Son adresse courriel n'est plus valide. [Pour l'annexe II.] (Le site, assez ancien, semble abandonné. Il est (fut) supporté par TISCALI PAGES PERSO. (Serveur). La compilation qu'on y trouve est toutefois remarquable, malgré certaines erreurs.)
Adresse: <http://www.chez.com/algor/math/divisi.htm>

REMERCIEMENTS SPÉCIAUX:

- M. Marco Bélanger, Professeur de mathématiques au Collège de Brébeuf pour ses conseils et suggestions inestimables.
- M. Alexandre Leroux, pour son assistance technique dans l'établissement du présent site.

© Raymond Simoneau, 2006

ADDENDA: POST-SCRIPTUM MATHEMATIQUE.

M. Marco Bélanger, qui enseigne les mathématiques au Collège Jean-de-Brébeuf, m'a aimablement proposé cette seconde preuve de la méthode du séquentiel. Elle en montre la validité, tout comme ma propre démonstration exposée dans la section D, mais en plus, elle dévoile pourquoi ce procédé fonctionne tout en illustrant brillamment ce que M. Bélanger qualifie avec indulgence «son côté astucieux et son originalité». Un sentiment de paternité légitime m'empêchait de renoncer à la mienne, plus compacte et plus concise, donc d'étude plus simple, mais aussi d'effet plus limité. D'autre part, le côté éblouissant voire spectaculaire de la preuve ci-dessous (je recommande au lecteur le dernier paragraphe en particulier!) de même que son côté pédagogique en fait un élément enrichissant (nonobstant certains principes directeurs communs aux deux démonstrations), voire indispensable à la compréhension du présent article. Je cède donc la plume à M. Bélanger.

« Pour démontrer le mécanisme de la méthode du séquentiel, nous commencerons par démontrer un lemme indispensable pour la suite, avant de passer à la démonstration proprement dite...

Voici donc ce lemme.

Montons que tout multiple de 7 peut s'écrire sous la forme suivante:

$M_0 + 10 M_1 + 10^2 M_2 + \dots + 10^n M_n$ où les $M_i = 0, 7, 14, \dots, 63$. $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ et i est plus petit ou égal à n .

Et soit $K \in \mathbb{N}$.

Tout entier K peut s'écrire d'une manière unique par décomposition selon les puissances de 10.

$K = U_0 + 10 U_1 + 10^2 U_2 + \dots + 10^n U_n$ où les $U_i \in \mathbb{N}$ et U_i prennent les valeurs de 0 à 9.

D'où $7K = 7U_0 + 7 \times 10U_1 + 7 \times 10^2 U_2 + \dots + 7 \times 10^n U_n$.

Or, les $7 U_i = 0, 7, 14, \dots, 63$. On peut donc poser $7U_i = M_i$

et donc $7K = M_0 + 10M_1 + 100M_2 + \dots + 10^n M_n$. Ce qui prouve le lemme.

Et maintenant, passons à la démonstration proprement dite...

La méthode du séquentiel consiste à vérifier si un entier donné correspond à cette décomposition...

Soit un entier positif N tel que $N = A_0 + 10A_1 + 100A_2 + \dots + 10^n A_n$ où les A_i sont des naturels.

Il s'agit de savoir si les A_i sont des multiples de 7 compris entre 0 et 63 inclusivement, c'est-à-dire si les $A_i = M_i$ terme à terme.

Or, $M_i = 10d_i + R_i$ où les d_i correspondent à l'un ou l'autre des chiffres du nombre séquentiel, lesquels d_i sont déterminés par R_i . R_i est un naturel et peut prendre les valeurs de 0 jusqu'à 9.

Avec $N = 10^n A_n + \dots + 100A_2 + 10A_1 + A_0$. Si N est un multiple de 7, on a $N = 10^n(10d_n + R_n) + \dots + 100(10d_2 + R_2) + 10(10d_1 + R_1) + (10d_0 + R_0)$. Si N n'est pas multiple de 7, l'un au moins des facteurs $(10d_i + R_i)$ n'est pas l'un des multiples de 7 compris entre 0 et 63.

Pour un N quelconque, la méthode consiste à réduire la décomposition de la façon suivante, en repérant d'abord le R_0 dans le nombre séquentiel:

$$10^n(10d_n + R_n) + \dots + 100(10d_2 + R_2) + 10(10d_1 + R_1) + (10d_0 + R_0)$$

d'où on obtient

$$10^{n-1}(10d_n + R_n) + \dots + 10(10d_2 + R_2) + (10d_1 + R_1). \quad (\text{Note: Les puissances de 10 ont diminué.})$$

On réitère la réduction en repérant R_1 dans le nombre séquentiel

$\dots + 10(10d_2 + R_2) + (10d_1 + R_1)$ et ainsi de suite, tout au long de ce « train de wagons »...

Si en fin de compte $10d_n + R_n = 0, 7, 14, \dots, 63$, alors N est divisible par 7. »

Note Finale: M. Louis-Philippe Giroux, également enseignant au collège Jean-de-Brébeuf, a mis au point une brillante généralisation de la méthode du séquentiel, laquelle générerait une série de critères de divisibilité, chacun avec son nombre séquentiel. Surveillez le Bulletin de l'AMQ dans lequel devrait paraître éventuellement une note à ce sujet...