

GÉNÉRALISATION DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL

I

Nous voyons dans les traités d'Algèbre supérieure une formule due au mathématicien de Moivre (voir Hall & Knight Higher Algebra, p. 389) qui permet de calculer le coefficient de x^p dans le développement du polynôme

$$(1) (x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^m$$

Il est remarquable que l'on puisse, très facilement, former des tableaux donnant les mêmes coefficients. Ces tableaux que l'on peut appeler *Trapèzes arithmétiques* ont une grande analogie avec le triangle arithmétique de Pascal, dont les termes, comme on le sait, sont les coefficients du développement d'un binôme quelconque.

La règle qu'il faut appliquer pour former un tableau des coefficients du polynôme (1) s'énonce ainsi :

RÈGLE : Écrire l'unité n fois sur une première rangée.

1 1 1 1 1 1 1

Un terme quelconque du tableau est ensuite formé par la somme de n termes de la ligne précédente commençant avec le terme au dessus de celui que l'on cherche et ajoutant à ce terme les $(n-1)$ termes qui le précèdent.

La première rangée de ce tableau donnera les coefficients de la 1ère puissance du polynôme donné, tous égaux à l'unité. La seconde rangée donnera les coefficients de la 2ème puissance, la troisième rangée ceux de la 3ème puissance, etc. Les termes de la m ème rangée du tableau seront les coefficients de la m ème puissance du polynôme.

Si l'on applique cette règle à un binôme, on obtient, comme cas particulier, le triangle arithmétique de Pascal.

1 1
 1 2 1
 1 3 3 1

Le trinôme $(x^1 + x^2 + x^3)^m$ aura pour coefficients

1 1 1
 1 2 3 2 1
 1 3 6 7 6 3 1

Le quadrinôme $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$ donnera

1 1 1 1
 1 2 3 4 3 2 1
 1 3 6 10 12 10 6 3 1

Le développement de l'hexanôme $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^m$ donnera lieu au tableau suivant :

1 1 1 1 1 1
 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1
 1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6
 1 4 10 20 35 56 80 104 125 140 146 140 125 104

Si l'on représente par ${}_n K_m^P$ le coefficient de x^P dans $\sum_{i=1}^n (x^i)^m$, la règle ci-dessus peut s'exprimer par la formule

$${}_n K_{m+1}^P = \sum_{i=1}^n {}_n K_m^{P-i}$$

Les termes du dernier tableau, celui de l'hexanôme, ont une certaine importance dans le calcul des probabilités, au jeu de dés.

La probabilité d'amener le point 12, par exemple, avec 4 dés, est une fraction dont le numérateur est le coefficient de x^{12} dans le développement du polynôme.

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$$

C'est le 9ème terme de la 4ème rangée du dernier tableau : 125.

Cette probabilité est :

$$P = \frac{125}{6^4}$$

II

La règle pour la formation des trapèzes arithmétiques est très facile à démontrer par la méthode d'induction. Cette règle excessivement simple, permet de résoudre les questions de probabilités aux jeux de hasard avec une très grande facilité. Elle montre l'évidence de certaines relations très utiles qu'il serait difficile d'apercevoir à l'aide des formules classiques.

Pour donner un exemple de l'utilité de cette méthode, posons le problème suivant :

Combien faut-il de faces à un dé pour qu'il y ait la même probabilité d'obtenir les points 24 et 28 en 4 coups ?

Les trapèzes arithmétiques montrent les propriétés suivantes :

1° Les coefficients des termes à égales distances des extrêmes sont égaux.

2° Le terme ou les deux termes du milieu ont des coefficients maxima.

3° La somme des exposants de x , dans les termes équidistants des extrêmes est constante pour une même puissance et égale à $n(m + 1)$.

Pour résoudre ce problème, il faut déterminer n dans l'expression

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n)^4$$

pour que les termes en x^{24} et x^{28} soient équidistants des deux extrêmes. Les coefficients de ces termes seront alors égaux et les probabilités de ces points seront égales. La somme constante des exposants de x est donc dans ce cas $4n + 4$. Il faut donc

$$\begin{aligned} 4n + 4 &= 52 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Un dé dodécaédrique donnerait le résultat demandé.

Un grand nombre de problèmes variés peuvent être résolus à l'aide de cette méthode avec une très grande facilité, et qu'il serait très difficile de résoudre par les formules actuelles. Le lecteur n'a qu'à l'essayer pour s'en convaincre.

III

Je crois que la remarque n'a jamais été faite, du moins je ne l'ai jamais vue nulle part, que le triangle arithmétique de Pascal puisse être appliqué au développement des puissances négatives d'un binôme.

Il est très curieux de constater que si l'on prolonge le triangle de Pascal au dessus de la première rangée, en employant, pour former les nouveaux termes, une règle facile à déduire de celle que l'on observe pour former les termes en descendant, on obtient les coefficients des séries infinies qui sont les développements des puissances négatives du binôme.

| | | | | | | | |
|------------------|---|----|---|-----|----|---|---|
| $(1 + x)^{-3}$: | 1 | -3 | 6 | -10 | 15 | . | . |
| $(1 + x)^{-2}$: | 1 | -2 | 3 | -4 | 5 | . | . |
| $(1 + x)^{-1}$: | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | . | . |
| $(1 + x)^0$: | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | . | . |
| $(1 + x)^1$: | 1 | 1 | | | | | |
| $(1 + x)^2$: | 1 | 2 | 1 | | | | |

Remarquons que les coefficients du développement de $(1 + x)^{-m}$ sont les nombres figurés du m^{ème} ordre alternativement positifs et négatifs.

De même, les trapèzes arithmétiques peuvent être prolongés vers le haut, comme le triangle de Pascal, pour obtenir les coefficients des termes des séries infinies qui donnent le développement des puissances négatives des polynômes.

$$(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^{-m}$$

Comme dans le cas du triangle arithmétique, la règle à suivre pour former le tableau en montant se déduit facilement de celle que l'on observe en descendant.

Pour le trapèze du trinôme on obtient.

| | | | | | |
|------------------------|---|----|---|---|----|
| $(1 + x + x^2)^{-2}$: | 1 | -2 | 1 | 2 | -4 |
| $(1 + x + x^2)^{-1}$: | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $(1 + x + x^2)^0$: | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(1 + x + x^2)^1$: | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $(1 + x + x^2)^2$: | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

Althéod TREMBLAY,
professeur à l'École d'Arpentage
et de Génie forestier.