

**LOIS DE HALPHEN : MÉTHODES
D'ESTIMATION MIXTES ET
COMPARAISON**

Rapport de recherche R-994

30 août 2008

Lois de Halphen : méthodes d'estimation mixtes et comparaison

Par:

**Fateh Chebana
Salaheddine El Adlouni
Bernard Bobée**

Institut National de la Recherche Scientifique, INRS-ETE

Chaire en Hydrologie Statistique

490, rue de la couronne (Québec), Canada G1K 9A9

Rapport de recherche R-994

30 août 2008

ISBN : 978-2-89146-579-3

Résumé

La famille des lois de Halphen constitue un système complet et flexible pour l'ajustement des séries d'observations indépendantes et identiquement distribuées. En raison de l'existence de statistiques conjointement exhaustives, l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (MV) est optimale, i.e., de variance minimum quelle que soit la taille de l'échantillon. Cependant, la méthode MV nécessite des approximations numériques conduisant à des valeurs approchées. Par contre, les estimateurs de la méthode des moments (MM) sont explicites. Leur calcul est rapide et ils mènent à de bons résultats. Deux nouvelles méthodes mixtes qui combinent les avantages du MV (optimalité) et de MM (efficacité et rapidité de calculs) sont proposées dans le présent travail. L'une des deux méthodes mixtes est directe (MMD) et l'autre est itérative (MMI). Une comparaison globale des quatre méthodes d'estimation (MV, MM, MMD et MMI) est effectuée par simulation de Monte Carlo pour les trois distributions de Halphen. Bien qu'en hydrologie on s'intéresse surtout aux quantiles, nous avons présenté également les résultats concernant les paramètres. Pour estimer les quantiles, l'étude effectuée conduit aux recommandations suivantes : pour HA, malgré la ressemblance des quatre méthodes au niveau des résultats, la méthode MMI est la plus adéquate du point de vue théorique alors que sur le plan pratique c'est la méthode MM qui peut être recommandée. Pour HB, les méthodes MMI et MMD peuvent être recommandées respectivement dans les cas des plus faibles et d'asymétries moyennes. Par contre pour HIB, la méthode MMD peut être recommandée pour les cas des plus faibles asymétries et la méthode MMI est la appropriée pour les autres cas.

1. INTRODUCTION

L'objectif principal de l'analyse fréquentielle des événements extrêmes, et en particulier des débits de crue, est l'estimation de la probabilité $\Pr(X \geq x_T)$ qu'un événement x_T de période de retour T soit dépassé. Cette estimation est obtenue par ajustement d'une loi de probabilité F à une série d'observations de débit maximum annuel, indépendantes et identiquement distribuées issues d'une variable aléatoire X . L'événement x_T , associé à une période de retour T , correspond au quantile de probabilité au dépassement $p = 1/T = \Pr(X \geq x_T)$, d'où l'on peut déduire la probabilité au non-dépassement $\Pr(X \leq x_T) = F(x_T; \underline{\theta}) = 1 - 1/T$ et le quantile $x_T = F^{-1}(1 - 1/T; \underline{\theta})$; où $\underline{\theta}$ est le vecteur des paramètres et $p = 1/T$ correspond au risque hydrologique.

Plusieurs distributions ont été proposées pour l'ajustement des variables hydrométéorologiques et elles sont recommandées dans certains pays, comme la loi Lognormale (LN) en Chine (Bobée, 1999); la distribution des Valeurs Extrêmes Généralisée (GEV) au Royaume-Uni, pour l'analyse fréquentielle locale des crues (NERC, 1975) et aux Etats-Unis pour les précipitations (Willeke *et al.*, 1995); et la loi Log-Pearson type 3 (LP3) aux États-Unis (US Water Resources Council, 1981). Halphen (1941) a introduit la loi de Halphen de type A (HA) afin de modéliser une grande variété de données et d'obtenir une flexibilité additionnelle en comparaison avec d'autres distributions utilisées à cette époque. En effet, la loi HA qui a une queue plus légère que celle de la loi Lognormale, très utilisée alors pour l'ajustement des séries hydrologiques (Morlat, 1951). D'après Morlat (1956) : « une constatation s'est imposée assez vite: les lois du type A se montraient adéquates dans beaucoup de cas, mais un nombre non négligeable de séries d'observations nécessitaient des formes nouvelles, qui prolongeraient les lois A en représentant en particulier, au

voisinage de l'origine, des comportements asymptotiques différents ». C'est ainsi que Halphen a introduit la distribution de type B (HB). Pour compléter le système des distributions de Halphen, la loi de Halphen de type inverse B (HIB) a été proposée par Larcher comme l'indique Morlat (1956). Ce dernier auteur a présenté également quelques propriétés statistiques et mathématiques de ces distributions, qui ont été détaillées et complétées par Perreault *et al.* (1999a).

Perreault *et al.* (1997) ont présenté une revue détaillée concernant les lois de Halphen et leurs cas limites (lois Gamma et Gamma Inverse) et ont étudié en détail leurs propriétés mathématiques et statistiques. On peut montrer (Perreault *et al.*, 1997) que les lois de Halphen appartiennent à la famille exponentielle des fonctions de densité de probabilité à trois paramètres et qu'elles admettent donc un triplet de statistiques conjointement exhaustives. Une statistique exhaustive est une fonction des observations qui, à elle seule, résume toute l'information relative à l'état du paramètre à estimer. Les estimateurs basés sur des statistiques exhaustives sont efficaces, i.e. ils ont une variance minimale quelle que soit la taille de l'échantillon. Il s'agit donc d'une propriété très importante particulièrement dans le cas des petits échantillons rencontrés en hydrologie. De plus, ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais. Les lois de Halphen sont les seules lois à trois paramètres utilisées en hydrologie à posséder cette propriété enviable.

Estimer de manière adéquate les paramètres $\underline{\theta}$ d'une distribution $F(.,\underline{\theta})$ est l'un des plus importants problèmes de l'inférence statistique, en particulier en analyse fréquentielle. Plusieurs lois à trois paramètres utilisées en hydrologie (LN, LP3, P3, GEV, etc) ont un paramètre d'origine et l'intervalle de définition de la variable dépend de ce paramètre. Il en résulte qu'il ne peut y avoir d'estimation optimale dans ce cas pour une taille donnée d'échantillon. En effet, la fonction de densité de probabilité ne peut être factorisée (mise sous la forme d'une distribution appartenant à la classe exponentielle, cf., par exemple l'équation D1 page 131 de Perreault *et al.*, 1997) et l'on ne peut trouver trois statistiques conjointement exhaustives. Les propriétés des estimateurs du

maximum de vraisemblance (MV) sont alors seulement asymptotiques comme cela a été montré par Bobée (1979) dans le cas des lois Pearson type 3 et Log-Pearson type 3. Les lois de Halphen sont de la forme $f(x; m, \alpha, \nu)$ et comprennent trois paramètres : deux paramètres de forme α et ν , un paramètre d'échelle m mais n'ont pas de paramètre d'origine. On peut alors montrer (Perreault *et al.*, 1997) que chacune des distributions de Halphen possède trois statistiques conjointement exhaustives. Il en résulte que l'on peut obtenir pour ces distributions une estimation optimale des paramètres par la méthode du MV quelle que soit la taille de l'échantillon.

Dans le Tableau 1, nous présentons les différentes statistiques exhaustives pour chacune des trois lois de Halphen. Les moyennes IQ^{-1} , H^{-1} , $\ln G$, A et Q correspondent respectivement aux moments non-centrés de l'échantillon d'ordre -2, -1, 0, 1 et 2. Le moment d'ordre quasi-zero (0) d'une variable aléatoire positive X est donné par $\mu'_0 = \exp\{E[\ln X]\}$; il correspond à la moyenne géométrique (cf. Bobée and Ashkar, 1991, pp. 102 ou Bobée *et al.*, 1993, pp. 51). Morlat (1956) a présenté un diagramme (Figure 1) permettant de représenter les trois lois de Halphen dans le plan des rapports de moments $\delta_1 = \ln(A/G)$ et $\delta_2 = \ln(G/H)$. Sur le même diagramme on peut représenter la loi Harmonique (cas particulier de la loi HA) et les distributions Gamma et Gamma Inverse qui sont des cas limites des lois de Halphen (Morlat, 1956). D'autres lois peuvent également être représentées dans le plan (δ_1, δ_2) , par exemple LP3, LN et Gamma généralisée (Bobée *et al.*, 1993). Cette représentation dans le plan (δ_1, δ_2) montre que les lois de Halphen forment un système complet pour l'ajustement de séries d'observations indépendantes et identiquement distribuées. En effet, à chaque point du plan, il correspond une seule distribution théorique du système des lois de Halphen ou de leurs cas limites. Ce diagramme est analogue à celui de Pearson ($\beta_1 = Cs^2$, $\beta_2 = Ck - 3$) où Cs est le coefficient d'asymétrie et Ck est le coefficient

d'aplatissement. La famille des distributions de Pearson représente un système complet dans le plan (β_1, β_2) , voir e.g. Bobée *et al.* (1993).

L'utilisation des distributions de Halphen a cependant été limitée en pratique en raison des problèmes de calcul numérique des fonctions de normalisation : la fonction de Bessel modifiée de second espèce (Abramowitz et Stegun, 1972) pour la loi HA et la fonction exponentielle factorielle (Halphen, 1955) pour les lois HB et HIB. Cependant, ces difficultés ont été considérées par Perreault *et al.* (1999a,b) et les trois lois de Halphen et leurs cas limites : les lois Gamma et Gamma Inverse ont été intégrées dans le logiciel HYFRAN. Le logiciel HYFRAN a été développé par l'équipe de la chaire en hydrologie statistique (CHS, 2002) pour effectuer une analyse fréquentielle complète à partir d'une vingtaine de lois couramment utilisées en hydrologie.

Afin d'estimer les paramètres de chacune des lois de Halphen, la résolution du système du MV est complexe car elle nécessite le calcul des dérivées des fonctions de normalisation (Bessel et exponentielle factorielle). Pour résoudre de manière efficiente le système du MV, une méthode numérique a été présentée par Perreault *et al.* (1999b). Cette méthode a été implémentée dans le logiciel HYFRAN (CHS, 2002). Notons que l'estimation par la méthode MV est basée sur des approximations numériques conduisant donc à des valeurs approchées des estimateurs. De plus, la combinaison d'une variance minimum avec un biais asymptotiquement nul des estimateurs de MV peut conduire à une valeur élevée de l'erreur quadratique moyenne dans le cas d'échantillon de taille réduite. Il en résulte que malgré les propriétés d'exhaustivité des estimateurs du MV, il est alors pertinent de considérer les estimateurs obtenus par d'autres méthodes pour les échantillons rencontrés en hydrologie qui sont généralement de taille réduite. Fitzgerald (2000) a proposé une méthode des moments (MM) pour estimer les paramètres de la loi HA en utilisant une relation de récurrence de la fonction de Bessel et en considérant quatre moments. Un avantage de la méthode

des moments est la forme explicite des expressions des paramètres en fonction des moments, ce qui facilite leur estimation et rend les calculs plus rapides. Comme une extension naturelle du travail de Fitzgerald (2000), Chebana *et al.* (2008) ont développé une méthode des moments pour estimer les paramètres des lois HB et HIB. La méthode des moments pour HB et HIB est basée sur une formule itérative de la fonction factorielle exponentielle et sur l'expression des moments.

Dans l'application de la méthode MV pour chacune des trois lois de Halphen $f(x; m, \alpha, \nu)$, Perreault *et al.* (1997) effectuent une maximisation partielle de la fonction log-vraisemblance conditionnelle $\ln L(\nu | \alpha(\nu), m(\nu))$ ce qui conduit à déterminer par un processus itératif la valeur optimale de ν et à en déduire ensuite les estimateurs de α et m . Afin d'accélérer les calculs, nous proposons deux nouvelles méthodes mixtes qui combinent les avantages de MV (optimalité) et de MM (rapidité des calculs) :

- La première directe, est notée MMD (pour méthode mixte directe) : dans cette méthode, on détermine la valeur de ν estimée par MM qui est voisine de la valeur optimale et on détermine ensuite les estimateurs de α et m à partir des deux équations du MV correspondantes.
- La seconde méthode mixte MMI est itérative. Elle consiste à faire varier ν en partant de son estimateur obtenu par MM, et de s'arrêter à la valeur de ν qui correspond à la maximisation de la fonction log-vraisemblance conditionnelle $\ln L(\nu | \alpha(\nu), m(\nu))$; on estime ensuite α et m à partir des deux équations du MV correspondantes.

D'autre part :

- l'estimation par MM a été développée par Fitzgerald (2000) pour la loi HA; cependant, les performances de cette méthode n'ont pas été évaluées et elle n'a pas été comparée avec MV.
- Chebana *et al.* (2008) ont fait une comparaison entre l'estimation par MM et MV pour les lois HB et HIB.

C'est pourquoi dans le présent travail nous effectuons une comparaison complète des quatre méthodes proposées (MM, MV, MMD et MMI) pour les trois distributions de Halphen (HA, HB et HIB). Nous présentons dans ce rapport les étapes suivantes :

- Les principales propriétés des lois de Halphen sont présentées dans la section 2.
- Les quatre méthodes d'estimation sont présentées dans la section 3.
- Une comparaison, basée sur des simulations de Monte Carlo, des différentes méthodes d'estimation est présentée dans la section 4.
- Les résultats de cette étude de simulation sont analysés dans la section 5
- Les conclusions de l'étude sont présentées dans la section 6.

2. PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES LOIS DE HALPHEN

Perreault *et al.* (1999a) ont présenté une revue détaillée des propriétés mathématiques et statistiques des lois de Halphen HA, HB et HIB.

2.1 LA LOI DE HALPHEN TYPE A (HA)

La fonction de densité de probabilité de la loi HA est donnée par :

$$f_{HA}(x; m, \alpha, \nu) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} x^{\nu-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right], x > 0 \quad (1)$$

où $m > 0$ est un paramètre d'échelle, $\alpha > 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$ sont des paramètres de forme. La fonction $K_\nu(\cdot)$ correspond à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce (Watson, 1996).

Les moments non-centrés d'une variable aléatoire X suivant une loi HA peuvent être déterminés à l'aide de la fonction caractéristique. Ils existent pour toute valeur réelle de ν , $\alpha > 0$ et r entier, et sont donnés par :

$$[\mu_r']_{HA} = E[X^r] = m^r \frac{K_{\nu+r}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2)$$

On en déduit donc les expressions de la moyenne et de la variance de X :

$$E[X] = m \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (3)$$

$$Var[X] = \frac{m^2}{K_\nu^2(2\alpha)} (K_\nu(2\alpha)K_{\nu+2}(2\alpha) - K_{\nu+1}^2(2\alpha)) \quad (4)$$

2.2 LA LOI DE HALPHEN DE TYPE B (HB)

La fonction de densité de probabilité de la loi HB est donnée par :

$$f_{HB}(x; m, \alpha, \nu) = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} x^{2\nu-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \alpha\left(\frac{x}{m}\right)\right], \quad x > 0 \quad (5)$$

où $m > 0$ est un paramètre d'échelle, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\nu > 0$ sont des paramètres de forme. La fonction de normalisation $ef_{\nu}(\cdot)$, appelée fonction exponentielle factorielle, a été définie par Halphen (1955) et est donnée par :

$$ef_{\nu}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \exp(-x^2 + \alpha x) dx, \quad \text{pour } \nu > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Les moments de la loi HB d'ordre r sont donnés par :

$$\left[\mu_r' \right]_{HB} = E[X^r] = m^r \frac{ef_{\nu+r/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (7)$$

Puisque l'indice ν de la fonction $ef_{\nu}(\cdot)$ doit être strictement positif, ces moments existent si $(\nu + r/2) > 0$ et pour toute valeur de α . Les moments non-centrés d'ordre r sont donc définis pour r supérieur à $r_0 = \lceil -2\nu \rceil$ (où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière). On en déduit la moyenne et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi HB :

$$E[X] = m \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (8)$$

$$Var[X] = \frac{m^2}{ef_{\nu}^2(\alpha)} (ef_{\nu}(\alpha) ef_{\nu+1}(\alpha) - ef_{\nu+1/2}^2(\alpha)) \quad (9)$$

2.3 LA LOI DE HALPHEN TYPE INVERSE B (HIB)

La fonction de densité de probabilité de la loi HIB est donnée par :

$$f_{HIB}(x; m, \alpha, \nu) = \frac{2}{m^{-2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} x^{-2\nu-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{m}{x}\right)\right], \quad x > 0 \quad (10)$$

où $m > 0$ est un paramètre d'échelle, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\nu > 0$ sont des paramètres de forme.

La densité de probabilité de la loi HIB (équation 10) peut être déduite de celle de HB (équation 5) en considérant la relation de symétrie suivante :

Si une variable aléatoire X suit une distribution $f_{HB}(x; m, \alpha, \nu)$ alors $Y = 1/X$ suit une distribution $f_{HIB}(y; m^{-1}, \alpha, \nu)$.

Par conséquent, les moments non-centrés de HIB peuvent être déduits à partir de l'équation (7) en changeant m en m^{-1} et r en $-r$; ils sont donc donnés par:

$$\left[\mu_r'\right]_{HIB} = E[X^r] = m^r \frac{ef_{\nu-r/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (11)$$

Ces moments existent pour $\nu - r/2 > 0$ (i.e., $r < 2\nu$), ils sont donc définis jusqu'à l'ordre $r_0 = \lceil 2\nu \rceil$. Le moment d'ordre r de la loi HIB de paramètre d'échelle m correspond au moment d'ordre $-r$ de la loi HB de paramètre d'échelle m^{-1} . On en déduit la moyenne et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi HIB :

$$E[X] = m \frac{ef_{\nu-1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)}, \quad \nu > 1/2 \quad (12)$$

$$Var[X] = \frac{m^2}{ef_{\nu}^2(\alpha)} (ef_{\nu}(\alpha) ef_{\nu-1}(\alpha) - ef_{\nu-1/2}^2(\alpha)), \quad \nu > 1 \quad (13)$$

3. PRÉSENTATION DES MÉTHODES D'ESTIMATION

Dans cette section les quatre méthodes d'estimation des paramètres des trois lois de Halphen sont présentées. Dans la suite, on note par θ_{xx} l'estimateur d'un paramètre θ par la méthode XX.

3.1 MÉTHODE DES MOMENTS (MM)

La méthode des moments permet d'obtenir des expressions explicites des estimateurs des paramètres. Nous donnons dans cette section les expressions des estimateurs pour les trois lois de Halphen. Cette approche correspond à la méthode des moments généralisée (Bobée et Ashkar, 1988).

3.1.1 La méthode MM pour la loi HA

Pour la loi HA les estimateurs par MM ont été proposés par Fitzgerald (2000). Les équations obtenues sont basées, d'une part, sur l'équation différentielle satisfaite par la fonction de Bessel et sa formule récurrente :

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 K_\nu(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial K_\nu(\alpha)}{\partial \alpha} - (\alpha^2 + \nu^2) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^\nu K_\nu(\alpha)) = -\alpha^{\nu-1} K_{\nu-1}(\alpha) \quad (15)$$

et d'autre part, sur l'expression des moments pour tout ordre r qui sont donnés par l'équation (2).

On obtient les estimateurs suivants pour les trois paramètres :

$$m^2 = \frac{E(X^{-1}) \text{Var}(X) - E(X) (E(X) E(X^{-1}) - 1)}{E(X) \text{Var}(X^{-1}) - E(X^{-1}) (E(X) E(X^{-1}) - 1)} \quad (16a)$$

$$\alpha = \frac{m^{-1}E(X) - mE(X^{-1})}{m^{-2}\text{Var}(X) - m^2\text{Var}(X^{-1})} \quad (16b)$$

$$\nu = \frac{\left(m^{-1}E(X) - mE(X^{-1})\right)^2}{m^{-2}\text{Var}(X) - m^2\text{Var}(X^{-1})} \quad (16c)$$

Il est à noter qu'une autre expression de l'estimateur de ν , indépendante de m , est donnée dans la section 3.3 (cf. équation 35).

Dans les expressions (16a,b,c), les moments théoriques sont généralement inconnus. Afin d'obtenir les estimateurs $\hat{m}, \hat{\alpha}$ et $\hat{\nu}$, ces moments doivent être remplacés par leurs estimateurs à partir de l'échantillon $x_1, \dots, x_n$ de taille n , i.e. $E(X^r)$ est remplacé par $n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^r$.

3.1.2 La méthode MM pour la loi HB

La méthode MM pour les lois HB et HIB a été proposée par Chebana *et al.* (2008). La fonction de normalisation $ef_\nu(\cdot)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$ef_{\nu+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} ef_{\nu+1/2}(\alpha) + \nu ef_\nu(\alpha), \quad \nu > 0 \quad (17)$$

Une forme plus générale de l'équation (17) est donnée par:

$$ef_{\nu+r}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} ef_{\nu+r-1/2}(\alpha) + (\nu+r-1) ef_{\nu+r-1}(\alpha), \quad (\nu+r) > 1 \quad (18)$$

Cette équation combinée avec l'expression (7) donnant les moments non-centrés de HB permet d'obtenir:

$$E\left(\frac{X^{2r}}{m^{2r}}\right) = \frac{\alpha}{2} E\left(\frac{X^{2r-1}}{m^{2r-1}}\right) + (\nu+r-1) E\left(\frac{X^{2r-2}}{m^{2r-2}}\right), \quad (\nu+r) > 1 \quad (19)$$

Une utilisation de cette dernière équation avec $r = 1/2; 1; 3/2$ conduit aux estimateurs suivants :

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{E(X)E(X^{-1}) \left[E(X^3)E(X) - (E(X^2))^2 \right] - \text{Var}(X)(E(X))^2}{\left[1 - E(X)E(X^{-1}) \right] \left[(E(X^2))^2 - E(X^3)E(X) \right] - (\text{Var}(X))^2} \quad (20a)$$

$$m^2 = \frac{2\text{Var}(X)}{2\nu \left[1 - E(X)E(X^{-1}) \right] + E(X)E(X^{-1})} \quad (20b)$$

$$\alpha = \frac{m \left[2\nu (E(X) - E(X^2)E(X^{-1})) + E(X^2)E(X^{-1}) \right]}{\text{Var}(X)} \quad (20c)$$

Comme pour la loi HA, afin d'obtenir les estimateurs $\hat{m}, \hat{\alpha}$ et $\hat{\nu}$, les moments théoriques doivent être remplacés par leurs estimateurs dans les expressions (20a,b,c).

3.1.3 La méthode MM pour la loi HIB

Pour obtenir les estimateurs des paramètres de la distribution HIB par la méthode MM, on peut suivre les mêmes étapes que celles utilisées pour HB en considérant l'équation (18) combinée avec l'expression (11) donnant les moments non-centrés de HIB. On peut également, et plus simplement, utiliser la relation de symétrie entre les distributions HB et HIB (cf. section 2.3) pour obtenir les estimateurs de HIB directement à partir de ceux de HB. Ainsi les estimateurs de m, α et ν s'obtiennent en remplaçant X^r par Y^{-r} et m par m^{-1} dans les formules (20a,b,c) et l'on obtient respectivement:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{E(Y)E(Y^{-1}) \left[E(Y^{-3})E(Y^{-1}) - (E(Y^{-2}))^2 \right] - \text{Var}(Y^{-1})(E(Y^{-1}))^2}{\left[1 - E(Y)E(Y^{-1}) \right] \left[(E(Y^{-2}))^2 - E(Y^{-3})E(Y^{-1}) \right] - (\text{Var}(Y^{-1}))^2} \quad (21a)$$

$$m^2 = \frac{2\nu \left[1 - E(Y)E(Y^{-1}) \right] + E(Y)E(Y^{-1})}{2\text{Var}(Y^{-1})} \quad (21b)$$

$$\alpha = \frac{2\nu \left[E(Y^{-1}) - E(Y^{-2})E(Y) \right] + E(Y^{-2})E(Y)}{m\text{Var}(Y^{-1})} \quad (21c)$$

De même que pour les lois HA et HB, les moments théoriques doivent être remplacés par leurs estimateurs dans les expressions (21a,b,c) afin d'obtenir les estimateurs $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\nu}$.

3.2 MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE (MV)

Nous présentons dans ce qui suit les éléments essentiels de la méthode MV pour chacune des trois lois de Halphen. Pour plus de détails on peut se référer à Perreault *et al.* (1997). En résumé, la méthode consiste à estimer, dans un premier temps, les paramètres α et m pour des valeurs fixes de ν dans un intervalle donné. Ensuite, la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L(\nu | \alpha(\nu), m(\nu))$ est maximisée pour obtenir un estimateur $\hat{\nu}$ de ν . Enfin, ce dernier estimateur est substitué dans les équations correspondantes du système du MV pour obtenir les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$ de α et m respectivement. Les propriétés des estimateurs MV ont été également étudiées par Chebana *et al.* (2006) en se basant sur des simulations afin d'évaluer leurs performances sur des échantillons de taille finie.

3.2.1 La méthode MV pour la loi HA

En ce qui concerne l'estimation des paramètres de la loi HA, le système d'équations du MV est donné par :

$$m \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_{\nu}(2\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = A \quad (22a)$$

$$\frac{1}{m} \frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_{\nu}(2\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{1}{H} \quad (22b)$$

$$\ln m + \frac{\partial K_\nu(2\alpha)/\partial \nu}{K_\nu(2\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln G \quad (22c)$$

où A , H et G sont respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne harmonique et la moyenne géométrique. Ce système fait apparaître les trois statistiques exhaustives de la loi HA (cf. Tableau 1).

Pour résoudre ce système d'équations non linéaires et déterminer les estimateurs du MV des paramètres, on procède en trois étapes (Perreault *et al.*, 1997):

- a)** les paramètres α et m sont déterminés pour ν fixe, et sont notés $\alpha(\nu)$ et $m(\nu)$.
- b)** la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L_{HA}(\nu | \alpha(\nu), m(\nu))$ est maximisé pour déterminer l'estimateur $\hat{\nu}$ de ν .
- c)** en substituant $\hat{\nu}$ dans $\alpha(\nu)$ et $m(\nu)$, on obtient les estimateurs $\hat{\alpha} = \alpha(\hat{\nu})$ et $\hat{m} = m(\hat{\nu})$ de α et m respectivement.

Pour ν fixe, $\alpha(\nu)$ et $m(\nu)$ sont solutions du système des équations (22a,b) qui s'écrivent :

$$D_A(\alpha(\nu), \nu) = \frac{A}{H} \quad (23a)$$

$$m(\nu) = \frac{A}{R_A(\alpha(\nu), \nu)} \quad (23b)$$

où

$$D_A(\alpha, \nu) = \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)K_{\nu-1}(2\alpha)}{[K_\nu(2\alpha)]^2} \quad (23c)$$

et

$$R_A(\alpha, \nu) = \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (23d)$$

Si on pose $U = AH^{-1} / [AH^{-1} - 1]$, ($U > 1$ car $H \leq A$), les estimateurs du MV des paramètres α et m sont solutions de (23a,b) si et seulement si ν est dans l'intervalle $] -U; U[$. Si $\nu \geq U$ alors l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma; et si $\nu \leq -U$ alors l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma Inverse.

Afin de déterminer l'intervalle dans lequel appartient ν , on détermine les signes de $l'_{HA}(U)$ et $l'_{HA}(-U)$ où $l'_{HA}(\nu)$ est la dérivée de la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L_{HA}$, on obtient :

$$l'_{HA}(-U) = n \left[\ln \left(\frac{G}{H} \frac{1}{U} \right) + \Psi(U) \right] \text{ et } l'_{HA}(U) = n \left[\ln \left(\frac{G}{A} U \right) - \Psi(U) \right] \quad (24)$$

où $\Psi(z) = \partial [\ln \Gamma(z)] / \partial z$ désigne la fonction digamma.

- Si $l'_{HA}(U) > 0$ et $l'_{HA}(-U) > 0$, la valeur de ν maximisant $\ln L_{HA}(\nu | \alpha, m)$ est plus grande que U , et dans ce cas l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma;
- Si $l'_{HA}(U) < 0$ et $l'_{HA}(-U) < 0$, la valeur de ν maximisant $\ln L_{HA}$ est plus petite que $-U$, et dans ce cas l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma Inverse.
- Si $l'_{HA}(U) < 0$ et $l'_{HA}(-U) > 0$, la valeur de ν maximisant $\ln L_{HA}$ est dans l'intervalle $] -U; U[$; et les estimateurs du MV sont solutions du système (23a,b). Dans ce cas la fonction log-vraisemblance partielle est donnée par :

$$\ln L_{HA}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{G^{\nu-1}}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \right] - \frac{\alpha [K_{\nu+1}(2\alpha) + K_{\nu-1}(2\alpha)]}{K_\nu(2\alpha)} \right\} \quad (25)$$

3.2.2 La méthode MV pour la loi HB

Le système des équations des estimateurs MV pour la loi HB est le suivant :

$$m \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = A \quad (26a)$$

$$m^2 \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = Q \quad (26b)$$

$$\ln m + \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha) / \partial \nu}{2ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln G \quad (26c)$$

où A , Q et G sont respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne quadratique et la moyenne géométrique. Ces moments représentent les statistiques exhaustives pour la loi HB (cf. Tableau 1).

De façon similaire à la loi HA, ce système peut être résolu par la même approche numérique. Les trois étapes a), b) et c) de la loi HA restent les mêmes.

Pour ν fixe, $\alpha(\nu)$ et $m(\nu)$ sont solutions du système suivant déduit des équations (26a,b) :

$$D_B(\alpha(\nu), \nu) = \frac{Q}{A^2} \quad (27a)$$

$$m(\nu) = \frac{A}{R_B(\alpha(\nu), \nu)} \quad (27b)$$

avec

$$D_B(\alpha, \nu) = \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)ef_{\nu}(\alpha)}{[ef_{\nu+1/2}(\alpha)]^2} \quad (27c)$$

et

$$R_B(\alpha, \nu) = \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (27d)$$

Si on pose $V = 1 / \left[2 \left(Q / A^2 - 1 \right) \right]$, les estimateurs du MV des paramètres α et m sont solutions de (27a,b) si et seulement si ν est dans l'intervalle $]0; V[$. Si $\nu \geq V$, alors l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma.

Afin de déterminer l'intervalle dans lequel appartient ν , on détermine le signe de $l'_{HB}(V)$ où $l'_{HB}(\nu)$ est la dérivée de la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L_{HB}$, on obtient :

$$l'_{HB}(V) = 2n \left[\ln \left(\frac{G}{A} 2V \right) - \Psi(2V) \right] \quad (28)$$

- Si $l'_{HB}(V) \geq 0$, le maximum de la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L_{HB}$ par rapport à ν est plus grand que V . Dans ce cas, la loi Gamma est plus appropriée pour représenter l'échantillon;
- Si $l'_{HB}(V) < 0$, alors le maximum de la fonction $\ln L_{HB}$ par rapport à ν appartient à l'intervalle $]0; V[$. Dans ce cas la fonction log-vraisemblance est donnée par :

$$\ln L_{HB}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{2G^{2\nu-1}}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} \right] - \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} + \hat{\alpha} \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \right\} \quad (29)$$

3.2.3 La méthode MV pour la loi HIB

Comme il a été indiqué précédemment (cf. section 2.3), la loi HIB peut être déduite directement de la loi HB par une relation de symétrie. Ainsi, le système des équations pour HIB peut être obtenu à partir du système des équations (26a,b,c) de HB en substituant m par m^{-1} et x par x^{-1} . Explicitement, les estimateurs MV sont solutions du système des équations suivant :

$$\frac{1}{m} \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{1}{H} \quad (30a)$$

$$\frac{1}{m^2} \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{IQ} \quad (30b)$$

$$\ln m - \frac{\partial ef_{\nu}(\alpha)/\partial \nu}{2ef_{\nu}(\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln G \quad (30c)$$

où H , IQ et G sont respectivement la moyenne harmonique, la moyenne inverse quadratique et la moyenne géométrique. De même que les distributions HA et HB, ce système fait apparaître les statistiques exhaustives pour HIB (cf. Tableau 1).

Afin de trouver les estimateurs MV pour HIB, la même procédure suivie pour les lois HA et HB peut être utilisée. Les trois étapes a), b) et c) de la loi HA restent les mêmes.

Pour ν fixe, $\alpha(\nu)$ et $m(\nu)$ sont solutions du système suivant déduit des équations (30a,b) :

$$D_B(\alpha(\nu), \nu) = \frac{H^2}{IQ} \quad (31a)$$

$$m(\nu) = HR_B(\alpha(\nu), \nu) \quad (31b)$$

où les fonctions D_B et R_B sont données respectivement par les expressions (27c,d).

Si on pose $W = 1/\left[2\left(H^2 IQ^{-1} - 1\right)\right]$, les estimateurs du MV des paramètres α et m sont solutions de (31a,b) si et seulement si ν est dans l'intervalle $]0; W[$. Si $\nu \geq W$, alors l'échantillon est représenté plus adéquatement par une loi limite Gamma Inverse.

Afin de déterminer l'intervalle dans lequel appartient ν , on détermine le signe de $l'_{HIB}(W)$ où $l'_{HIB}(\nu)$ est la dérivée de la fonction log-vraisemblance partielle $\ln L_{HIB}$, avec :

$$l'_{HIB}(W) = 2n \left[\ln \left(\frac{H}{G} 2W \right) - \Psi(2W) \right] \quad (32)$$

- Si $l'_{HIB}(W) \geq 0$, le maximum de la fonction log-vraisemblance $\ln L_{HIB}$ par rapport à ν est plus grand que W . Dans ce cas, la loi Gamma Inverse est plus appropriée pour représenter l'échantillon;
- Si $l'_{HIB}(W) < 0$, alors le maximum de la fonction $\ln L_{HIB}$ par rapport à ν appartient à l'intervalle $]0;W[$. Dans ce cas la fonction log-vraisemblance est donnée par :

$$\ln L_{HIB}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{2m^{2\nu}}{G^{2\nu+1} ef_{\nu}(\alpha)} \right] - \frac{ef_{\nu+1}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} + \hat{\alpha} \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \right\} \quad (33)$$

Les principales étapes de la méthode MV, avec l'approche de résolution numérique précédente, pour les trois lois de Halphen sont illustrées dans la Figure 2.

3.3 MÉTHODE MIXTE DIRECTE (MMD)

Cette méthode est une combinaison des deux méthodes précédentes MM et MV. Elle consiste à estimer ν par la méthode MM et ensuite estimer α et m en utilisant le système des équations de la méthode MV. Dans la méthode MM, pour les lois HB et HIB, le paramètre de forme ν est estimé en premier. Donc, on peut substituer cette estimation directement dans les estimateurs de α et de m provenant de MV. Ce qui revient, pour la loi HB, à substituer l'estimateur (20a) dans les équations (27a,b) et pour HIB, à substituer l'estimateur (21a) dans les équations (31a,b). En ce qui concerne la loi HA, on obtient l'expression explicite de l'estimateur de ν en remplaçant celle de m , exprimée par (16a), dans (16c). En effet, l'expression (16c) peut s'écrire sous la forme :

$$\nu = \frac{\left(E(X) - m^2 E(X^{-1}) \right)^2}{\text{Var}(X) - m^4 \text{Var}(X^{-1})} \quad (34)$$

En substituant la valeur de m^2 donnée par la formule (16a) dans le numérateur et le dénominateur de ν (équation 34), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \left(E(X) - m^2 E(X^{-1})\right)^2 &= \left(\frac{(E(X))^2 \text{Var}(X^{-1}) - (E(X^{-1}))^2 \text{Var}(X)}{E(X) \text{Var}(X^{-1}) - E(X^{-1})[E(X)E(X^{-1}) - 1]} \right)^2 \\ \text{Var}(X) - m^4 \text{Var}(X^{-1}) &= \frac{\left[(E(X))^2 \text{Var}(X^{-1}) - (E(X^{-1}))^2 \text{Var}(X) \right] \left[\text{Var}(X) \text{Var}(X^{-1}) - [E(X)E(X^{-1}) - 1]^2 \right]}{\left[E(X) \text{Var}(X^{-1}) - E(X^{-1})[E(X)E(X^{-1}) - 1] \right]^2} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression explicite de ν par la méthode MM pour HA est donnée par :

$$\nu = \frac{(E(X))^2 \text{Var}(X^{-1}) - (E(X^{-1}))^2 \text{Var}(X)}{\text{Var}(X) \text{Var}(X^{-1}) - [E(X)E(X^{-1}) - 1]^2} \quad (35)$$

Comme on l'a mentionné précédemment (cf. section 3.1), les moments théoriques doivent être remplacés par leurs estimateurs dans (35) afin d'obtenir l'estimateur $\hat{\nu}$.

Ainsi, pour la distribution HA, les estimateurs par la méthode MMD s'obtiennent à partir de (35) pour ν , et en remplaçant cette estimation de ν dans les équations (23a) et (23b) on estime respectivement α et m .

Cette méthode combinée permettra d'améliorer la résolution du système du MV, en particulier en termes de temps de calcul. En effet, le fait d'estimer ν directement à partir de la méthode MM permet d'éviter la maximisation partielle de la fonction log-vraisemblance par rapport à ν qui peut nécessiter un grand nombre d'itérations. La valeur de l'estimateur ν_{MM} est voisine de l'optimum et sa valeur est donnée explicitement. Par conséquent, la méthode MMD permet de prendre en compte les avantages des deux méthodes, à savoir la rapidité des calculs, la formulation explicite des estimateurs de MM, et l'exhaustivité des statistiques du MV pour l'estimation de m et α . Toutefois, il est à noter que dans MMD, les fonctions log-vraisemblance partielles (équations 25,

29 et 33 correspondants respectivement aux lois HA, HB et HIB) ne sont pas utilisées de manière explicite. De plus, la valeur de ν_{MM} ne correspond pas exactement à l'optimum de ν . La comparaison (section 4) a précisément pour but de vérifier si cette méthode conduit à des résultats satisfaisants.

3.4 MÉTHODE MIXTE ITÉRATIVE (MMI)

Dans le but d'accélérer la résolution numérique du système du maximum de vraisemblance, dans cette méthode l'intervalle de variation dans lequel on trouve la valeur optimale de ν qui maximise $\ln L(\nu | \alpha, m)$ est réduit. Par conséquent, du point de vue théorique, cette méthode est optimale comme la méthode du MV, mais moins coûteuse en temps de calcul.

Dans la méthode MV, on fait varier ν dans un intervalle prédéfini, à savoir $]-U;U[$ pour HA (cf. section 3.2.1), $]0;V[$ pour HB (cf. section 3.2.2) et $]0;W[$ pour HIB (cf. section 3.2.3). Alors que dans la méthode MMD, la valeur de ν_{MM} obtenue par MM est prise directement comme étant l'estimateur de ν . Dans cette méthode itérative (MMI), l'estimateur ν_{MM} est utilisé comme valeur initiale du processus itératif. Puis, la direction de la variabilité de ν est déterminée selon le signe de la variabilité de la fonction log-vraisemblance partielle. En effet, à partir du point initial, on incrémente les valeurs de ν avec un pas fixe (positif ou négatif) et on évalue la fonction log-vraisemblance après avoir estimé α et m . Le changement de signe de la dérivée de la fonction log-vraisemblance, ou celui de la différence $\Delta_k - \Delta_{k-1}$ (cf. algorithme ci-après), indique l'arrêt des itérations ; il correspond en effet à l'obtention du maximum de la fonction log-vraisemblance. A titre d'exemple, pour la loi HA, la Figure 3 illustre l'intervalle de variation de ν considéré pour cette méthode et pour celle du MV. De manière plus explicite, l'algorithme suivant montre le fonctionnement de cette méthode :

1. Définir un pas s : par exemple prendre la même valeur utilisée pour MV, à savoir $s = 0.1$.
Cette valeur est généralement adéquate pour les cas rencontrés en hydrologie.
2. Etape initiale :
 - a. Obtenir $\hat{\nu}_0 = \nu_{MM}$: obtenu par les équations (35), (20a) et (21a) respectivement pour HA, HB et HIB.
 - b. Calculer $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{m}_0$: par substitution de $\hat{\nu}_0$ correspondant dans les équations (23a,b) pour HA, (27a,b) pour HB et (31a,b) pour HIB.
 - c. Calculer la fonction log-vraisemblance partielle $L_0 = \ln L(\hat{\nu}_0 | \hat{\alpha}_0, \hat{m}_0)$.
3. Prendre $\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_0 + s$:
 - a. Calculer $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{m}_1$ qui corresponde à $\hat{\nu}_1$ en utilisant les mêmes équations que dans l'étape initiale (2.b).
 - b. Calculer la fonction log-vraisemblance partielle $L_1 = \ln L(\hat{\nu}_1 | \hat{\alpha}_1, \hat{m}_1)$.
 - c. Calculer la différence entre L_1 et L_0 , notée $\Delta_1 = L_1 - L_0$.
4. Pour l'étape k ($k = 1, 2, \dots$) :
 - a. Si Δ_1 est positive :

Tant que $\Delta_k = L_k - L_{k-1}$ est positive, alors prendre $\hat{\nu}_k = \hat{\nu}_{k-1} + s$ et les $\hat{\alpha}_k$ et $\hat{m}_k$ correspondants pour évaluer $L_k = \ln L(\hat{\nu}_k | \hat{\alpha}_k, \hat{m}_k)$. Quand Δ_k devient négative le maximum est atteint. Si l'on souhaite davantage de précision, on peut prendre des pas s plus petits que $s = 0,1$.
 - b. Si Δ_1 est négative :

Tant que $\Delta_k = L_k - L_{k-1}$ est négative, alors prendre $\hat{\nu}_k = \hat{\nu}_{k-1} - s$ et les $\hat{\alpha}_k$ et $\hat{m}_k$ correspondants pour évaluer $L_k = \ln L(\hat{\nu}_k | \hat{\alpha}_k, \hat{m}_k)$.

5. Enfin, les estimateurs sont $\hat{\nu}_{MMI} = \hat{\nu}_{k^*-1}$, $\hat{\alpha}_{MMI} = \hat{\alpha}_{k^*-1}$ et $\hat{m}_{MMI} = \hat{m}_{k^*-1}$ où k^* représente l'étape finale, c'est-à-dire celle qui correspond au changement de signe de la dérivée de la fonction log-vraisemblance partielle.

Puisque l'intervalle de variation de ν est réduit dans cette méthode, il est possible de se rapprocher autant que l'on veut de l'optimum en prenant des valeurs plus petites du pas s . Il est à noter que pour des fins de comparaisons, la valeur de s considérée dans ce travail pour MV et MMI est identique.

Remarques d'ordre numériques relatives à la méthode MMI :

Lors de l'implémentation de l'algorithme de la méthode MMI, pour toutes les distributions de Halphen, il y a trois points à considérer :

- L'estimateur ν_{MM} , malgré qu'il appartient à l'intervalle de variation de ν , il ne fait pas nécessairement partie des points de la grille des valeurs de ν qu'on considère pour MV. Il est probable que ν_{MM} se trouve entre deux points de cette grille.
- Dans l'algorithme de MMI, la valeur de ν de la dernière itération ne correspond pas au maximum de la fonction log-vraisemblance partielle. Elle correspond au changement de signe des variations de la fonction log-vraisemblance partielle. Par conséquent, la valeur de ν maximisant la fonction log-vraisemblance partielle est celle associée à l'avant dernière itération.
- Il faut s'assurer qu'à l'itération k la valeur de m correspond bien à la valeur de α obtenue à la même itération k qui à son tour correspond à la valeur de ν obtenue toujours à l'itération k .

Ces points sont illustrés dans les exemples de l'annexe C.

4. COMPARAISON DES MÉTHODES D'ESTIMATION AVEC DES SIMULATIONS

La comparaison des méthodes d'estimation permet d'évaluer les erreurs d'estimation en fonction de la taille de l'échantillon et de la période de retour. Cette comparaison est effectuée par simulation de Monte Carlo pour les trois lois de Halphen. Pour chacune des trois lois on compare les quatre méthodes d'estimation MM, MV, MMD et MMI.

La sélection des cas d'étude est basée sur les valeurs des coefficients C_v et C_s . Ces coefficients peuvent être obtenus à partir des formules des moments et sont données par (Perreault *et al.*, 1999a) :

$$\begin{aligned}
 C_{v_{HA}} &= \frac{\sqrt{K_v(2\alpha)K_{v+2}(2\alpha) - K_{v+1}^2(2\alpha)}}{K_{v+1}(2\alpha)}, & C_{s_{HA}} &= \frac{K_v^2(2\alpha)K_{v+3}(2\alpha) - 3K_v(2\alpha)K_{v+1}(2\alpha)K_{v+2}(2\alpha) + 2K_{v+1}^3(2\alpha)}{(K_v(2\alpha)K_{v+2}(2\alpha) - K_{v+1}^2(2\alpha))^{3/2}} \\
 C_{v_{HB}} &= \frac{\sqrt{ef_v(\alpha)ef_{v+1}(\alpha) - ef_{v+1/2}^2(\alpha)}}{ef_{v+1/2}(\alpha)}, & C_{s_{HB}} &= \frac{ef_v^2(\alpha)ef_{v+3/2}(\alpha) - 3ef_v(\alpha)ef_{v+1/2}(\alpha)ef_{v+1}(\alpha) + 2ef_{v+1/2}^3(\alpha)}{(ef_v(\alpha)ef_{v+1}(\alpha) - ef_{v+1/2}^2(\alpha))^{3/2}} \\
 C_{v_{HIB}} &= \frac{\sqrt{ef_v(\alpha)ef_{v-1}(\alpha) - ef_{v-1/2}^2(\alpha)}}{ef_{v-1/2}(\alpha)}, & C_{s_{HIB}} &= \frac{ef_v^2(\alpha)ef_{v-3/2}(\alpha) - 3ef_v(\alpha)ef_{v-1/2}(\alpha)ef_{v-1}(\alpha) + 2ef_{v-1/2}^3(\alpha)}{(ef_v(\alpha)ef_{v-1}(\alpha) - ef_{v-1/2}^2(\alpha))^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{36}$$

La Figure 4 illustre les régions du plan définies par les coefficients C_v et C_s ainsi que les relations entre ces deux coefficients pour les trois lois de Halphen et pour les distributions limites Gamma et Gamma Inverse.

Pour déterminer la région d'étude sur le plan (C_v, C_s), nous avons considéré les séries de débit maximum annuel de 30 stations situées sur des rivières du monde. Ces séries ont été tirées du site Internet de l'UNESCO (http://www.unesco.org/water/ihp/db/index_fr.shtml) et sont relativement longues (période d'observation supérieure à 70 ans). Des tests statistiques pour vérifier la propriété iid (indépendantes et identiquement distribuées) de ces séries ont été effectués par El Adlouni *et al.*

(2007a, 2008). Par ailleurs, pour un échantillon $x_1, \dots, x_n$ de taille n , le coefficient C_s peut être estimé par :

$$\hat{C}_s = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}} \quad (37)$$

Il est bien connu que cet estimateur est biaisé (Kirby, 1974). Une correction classique est donnée par (cf. Bobée and Ashkar, 1991, page 68):

$$\tilde{C}_s = \hat{C}_s \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \left(1 + \frac{8.5}{n} \right) \quad (38)$$

La Figure 5 illustre sur le diagramme (C_v, C_s) la position des cas considérés pour l'étude, les séries observées ainsi que celles des séries observées avec la correction du C_s . Nous pouvons constater que le biais de C_s n'a pas d'impact sur le choix des cas à étudier, car la taille des échantillons est élevée (en effet pour $n = 70$, le coefficient de correction $\sqrt{n(n-1)}(1 + 8.5/n)/(n-2)$ vaut 1.146). Sur la Figure 5, les points obtenus pour chacune des séries de l'UNESCO avec et sans correction de biais sont sur une droite verticale (même valeur de C_v).

Les valeurs de (C_v, C_s) des cas considérés sont présentées dans le Tableau 2 avec les valeurs correspondantes des paramètres pour chacune des lois. Etant donné que la majorité des points des séries observées se trouve dans la zone relative à HA dans le plan (C_v, C_s) , neuf cas ont été considérés pour HA et quatre cas pour chacune des distributions HB et HIB. Notons que le paramètre d'échelle m est fixé à $m=100$ pour effectuer les calculs ; étant donné que les expressions des coefficients C_v et C_s ne dépendent pas de m (cf. équations (36)), ce choix arbitraire n'a aucune influence.

La procédure de simulation qui suit est similaire à celle proposée par Chebana *et al.* (2008). En effet, elle est basée sur la génération de $N = 1000$ échantillons de taille $n = 50$ et $n = 100$. Pour effectuer ces simulations nous avons utilisé les algorithmes proposés par El Adlouni et Bobée (2007b) pour générer des variables distribuées suivant des lois de Halphen. Ces algorithmes sont basés sur la méthode d'acceptation-rejet avec une loi Gamma comme loi instrumentale dont le support contient celui de la loi de Halphen à générer.

Les performances des estimateurs sont évaluées en utilisant le biais relatif (BR) et la racine de l'erreur quadratique moyenne relative (REQMR), (ces critères sont notés en anglais respectivement RB et RRMSE). Pour un paramètre θ_0 estimé par une suite d'estimateurs $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N$, les critères BR et REQMR sont donnés respectivement par:

$$BR = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{\theta}_i - \theta_0}{\theta_0} \right) \quad (39)$$

$$REQMR = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{\theta}_i - \theta_0}{\theta_0} \right)^2} \quad (40)$$

Bien que l'objectif principal de l'analyse fréquentielle des crues soit l'estimation des quantiles correspondants à des périodes de retour données, nous présentons également les résultats relatifs à l'estimation des paramètres. Dans cette étude on s'intéresse aux quantiles Q_T pour $T = 10, 100$ et 200 ans pour chacune des trois lois HA, HB et HIB. La comparaison concerne les quatre méthodes d'estimation; à savoir la méthode des moments (MM), la méthode du maximum de vraisemblance (MV) et les deux méthodes mixtes directe et itérative (MMD et MMI).

5. RÉSULTATS

Les résultats des simulations sont présentés dans les Tableaux 3, 4 et 5 respectivement pour les distributions HA, HB et HIB. Dans la suite de cette section, on présente l'analyse détaillée des résultats concernant d'abord les paramètres puis les quantiles pour chacune des lois de Halphen. Des considérations générales, valables pour les trois distributions, ainsi qu'un résumé des résultats sont présentés dans la sous-section 5.4. Il est important de souligner que les valeurs de C_v et C_s sont relatives à une distribution de Halphen donnée, ainsi (cf. Figure 4) une faible valeur de C_s pour HIB est importante pour HB (e.g. HIB1 et HB4).

5.1 LOI HA

Les résultats de l'estimation des paramètres pour la loi HA sont présentés dans le Tableau 3.a. Pour l'estimation du paramètre m , on observe que les BR et REQMR par les quatre méthodes sont du même ordre de grandeur. De plus, on constate une similarité entre les résultats de MV et MMI d'une part et de MM et MMD d'autre part sauf dans le cas 4. Pour les cas de faible asymétrie, les résultats de MMI ou MV sont les meilleurs alors que pour les cas de forte asymétrie, c'est MV qui a les meilleurs résultats. On observe, pour toutes les quatre méthodes, une variation de BR et REQMR d'un cas à l'autre mais avec aucun comportement de monotonie par rapport à C_s . On observe également que les résultats ne s'améliorent pas nécessairement si la taille n augmente. Donc, d'une manière générale, les meilleures estimations du paramètre m sont obtenues par la méthode MV ou la méthode MMI.

Concernant l'estimation du paramètre α , on remarque que les valeurs des critères sont moins élevées que celles obtenues pour m . Pour chacun des cas, les erreurs obtenues par les quatre

méthodes sont du même ordre de grandeur et les résultats de MMI et MV sont d'une grande similarité. Les résultats obtenus par ces dernières méthodes sont légèrement les meilleurs, sauf dans les cas 3 et 8. Les valeurs négatives et élevées du BR sont atteintes dans les cas dont les valeurs de α sont élevées (aucun lien de monotonie avec C_v et C_s). Donc, dans ces cas, le REQMR est dû principalement au biais et non pas à la variance (puisque le REQMR combine le biais et la variance de l'estimateur). Quand la taille de l'échantillon augmente, on observe une stabilité ou une légère amélioration des résultats des quatre méthodes. On conclut que dans la majorité des cas étudiés, l'estimation de α est meilleure par MV ou MMI, cependant les différences avec les autres méthodes ne sont pas très significatives.

Pour l'estimation du paramètre ν , les quatre méthodes mènent à des résultats très semblables et les écarts ne sont pas significatifs notamment au niveau du REQMR dans les cas 3 et 8 quand $n = 100$. On constate une baisse importante du biais en fonction de la taille de l'échantillon n . Rappelons que pour MV, le biais est asymptotiquement nul. Donc, quand la taille de l'échantillon n augmente le biais diminue. Notons que le BR de l'estimation de ν est généralement négatif. La Figure 6 est produite, à titre illustratif, en générant 100 échantillons de loi HA de taille $n = 100$ avec les paramètres du cas 6. Notons que le nombre d'échantillons générés pour le calcul des critères BR et REQMR est 1000. Cette figure montre l'intervalle de variation des estimateurs de ν par rapport aux bornes de l'intervalle $] -U; U[$ défini dans la méthode MV. On observe que l'étendue de cet intervalle est large et que pour chaque échantillon, tous les estimateurs de ν sont presque confondus. Par conséquent, l'intervalle de variation de ν par la méthode itérative MMI est très étroit puisque l'estimateur ν_{MM} est très proche de l'optimum. Ce qui peut expliquer l'importante différence entre les méthodes MV et MMI au niveau du nombre moyen d'itérations nécessaires pour atteindre l'optimum (en moyenne 4 et 172 itérations sont respectivement nécessaires pour MMI et MV dans le cas de la Figure 6). On en déduit que l'une ou l'autre des quatre méthodes peut

être utilisée pour estimer ν . Cependant, la méthode MMI est la plus adéquate grâce à ses propriétés théoriques (la même propriété d'optimalité que la méthode MV) et en terme du nombre d'itérations, elle est plus rapide que MV à cause de la gamme restreinte des valeurs de ν (en moyenne, 45 fois plus rapide que la méthode MV).

À partir des résultats de l'estimation des paramètres, nous constatons deux éléments pour un cas et une taille n donnés : (i) il y a au moins un paramètre dont le BR est de signe différent des deux autres, et (ii) les REQMR des trois paramètres ne sont pas du même ordre de grandeur. Ces deux éléments expliquent l'effet de compensation des erreurs qui affectent l'estimation des quantiles. Pour avoir un choix qui tient compte de l'efficacité d'estimation des trois paramètres, il faudrait comparer les estimateurs des quantiles, sachant qu'en analyse fréquentielle on s'intéresse à ces derniers.

Le problème d'estimation des paramètres est connu pour toutes les distributions à plus de trois paramètres produisant l'effet de compensation. Pour toutes les distributions à trois paramètres, il y a une grande instabilité dans l'estimation des paramètres mais l'estimation des quantiles est beaucoup plus précise en raison de l'effet de compensation. En effet, dans tous les cas étudiés, les erreurs en termes des critères BR et REQMR des quantiles sont faibles en comparaison avec celles des paramètres. Cette remarque n'est pas exclusive à la famille de lois de Halphen, elle généralement observée en analyse fréquentielle avec les distributions à trois paramètres. Cet effet peut s'expliquer par la compensation des erreurs des paramètres. En effet, pour un cas et une taille n donnés, les résultats montrent que les BR des trois paramètres n'ont pas le même signe, de plus l'ordre de grandeur des REQMR n'est pas le même.

Les résultats concernant l'estimation des quantiles de la loi HA sont présentés dans le Tableau 3.b. Pour la période de retour $T = 10$ ans, toutes les méthodes mènent à des résultats très semblables

dans tous les cas étudiés en particulier au niveau du REQMR. On remarque que les valeurs de BR et de REQMR diminuent par rapport à n . De plus, le BR de Q_{10} varie entre -2,93% et 3,25%, alors que son REQMR a une légère variation par rapport à C_s et à n fixe, il s'étend de 3,47% à 12,11%. On observe que, sauf dans les cas 5 et 9 qui correspondent aux valeurs les plus élevées du coefficient C_v , le quantile Q_{10} est surestimé et ce par toutes les méthodes.

Quand $T = 100$ ans, les résultats des quatre méthodes sont également très similaires. On remarque que les valeurs de BR et de REQMR sont décroissantes avec n . Le BR varie entre -5,30% et 6,57% et le REQMR entre 5,58% et 19,78% et ne dépendent pas de manière monotone de C_v ou C_s . De plus, les quatre méthodes surestiment Q_{100} , sauf dans les deux derniers cas correspondants aux plus grandes valeurs du coefficient C_s .

Pour $T = 200$ ans, on observe également une similarité entre les résultats des quatre méthodes en particulier entre MV et MMI. Le REQMR ainsi que le BR n'ont pas de tendance de monotonie par rapport à C_s , ils varient respectivement entre -5,34% et 7,88% et entre 6,39 et 22,50%. On remarque, quand n passe de 50 à 100, une amélioration du REQMR ainsi qu'une légère amélioration du BR. De plus, comme pour $T = 100$ ans, le quantile Q_{200} est surestimé par toutes les méthodes excepté dans les cas 8 et 9.

En tenant compte de ces résultats, on déduit que pour l'estimation des quantiles de la loi HA, les quatre méthodes sont très similaires. Par ailleurs, la méthode MMI peut être recommandée puisqu'elle combine optimalité théorique, bons résultats numériques et rapidité de calcul. Cependant, la méthode MM est la plus rapide, la plus simple et elle mène aux résultats très proches de ceux de MMI.

5.2 LOI HB

Les résultats relatifs à l'estimation des paramètres de la loi HB sont présentés dans le Tableau 4.a. Pour l'estimation du paramètre m , les résultats de MV et MM sont respectivement proches de ceux obtenus pour MMI et MMD. On observe que, sauf dans le cas 2, la méthode MMD mène aux meilleurs résultats alors que MMI a le plus grand REQMR. Dans le cas 2, les quatre méthodes ont des erreurs du même ordre de grandeur. Cependant, la méthode MV performe mieux au niveau du REQMR. L'écart le plus élevé entre les résultats des méthodes est observé dans le cas 1 pour $n = 50$ au niveau du BR et dans le cas 4 pour $n = 100$ au niveau du REQMR. D'une façon générale, la méthode MMD est la plus adéquate pour estimer m .

Dans le cas du paramètre α également, sauf dans le cas 2, les résultats de MMD sont les meilleurs et ils sont suivis de ceux de MM. Dans le cas 2, c'est MV qui a le plus faible REQMR et suivit par celui de MMD. Les résultats de MMI et MV devient plus proches quand n augmente. Les plus importants écarts entre les méthodes sont observés dans le cas 4 pour $n = 100$. On en déduit que MMD est généralement meilleure pour estimer α .

Quant à l'estimation de ν , notons que les estimateurs de MM et MMD sont identiques et que les méthodes MMI et MV sont théoriquement identiques et les différences entre ces dernières sont d'ordre numérique (voir annexe C pour plus de détails et des exemples). En effet, on observe une grande similarité entre les résultats obtenus par MV et MMI. Comme pour m et α , les résultats de MMD sont les meilleurs sauf dans le cas 2. Dans ce dernier cas, c'est MMI ou MV qui ont les meilleurs résultats mais qui sont du même ordre de grandeur que ceux de MM et MMD en particulier au niveau du REQMR. Notons que l'estimation de ν a un effet sur l'estimation de α et m puisque ν est estimé en premier lieu puis injecté dans les expressions conduisant à l'estimation de α et m . La Figure 7 est produite de la même manière que la Figure 6. Elle concerne le cas 2 de

la loi HB. On peut constater que l'intervalle $]0;V[$ est beaucoup plus large pour contenir les variations de ν . Par contre, l'intervalle de variation pour MMI est très étroit puisque les estimateurs par MM et MMI sont très voisins. Par conséquent, la méthode MMI nécessite moins d'itérations que MV (en moyenne 2 et 29 itérations sont respectivement nécessaires pour MMI et MV dans le cas de la Figure 7). On en déduit alors que l'estimation de ν est généralement meilleure par MM ou MMD dont les résultats sont identiques.

Concernant l'effet de compensation des erreurs, les deux éléments constatés pour l'estimation des paramètres de HA restent valables pour HB.

Concernant l'estimation des quantiles de la loi HB, les résultats sont présentés dans le Tableau 4.b. Observons que pour chacun des cas le signe du BR est le même par les quatre méthodes. Il est positif dans le cas 1 et négatif dans les autres cas. Pour les trois périodes de retour considérées, les résultats des quatre méthodes sont très proches et identiques dans certains cas et ce en particulier si $n = 100$ et $T = 10$ ou 100 . De plus, les valeurs des critères résultants de MV et MMI sont très semblables, néanmoins, certains écarts sont importants pour des grandes valeurs de C_s et de T . Observons d'une manière générale que les BR et REQMR sont croissants par rapport à C_s et légèrement décroissants par rapport à n . Par ailleurs, les quatre méthodes d'estimation sous-estiment les quantiles de HB à l'exception du cas 1.

Pour $T = 10$ ans, les BR et REQMR varient respectivement entre -3,09% et 0,57% et entre 2,93% et 8,97%. Pour $T = 100$ ans, les similarités entre les méthodes diminuent en comparaison à celles associées à $T = 10$ ans. Cependant, les résultats restent comparables surtout pour le REQMR. Le BR varie entre -8,85% et 1,12% et le REQMR entre 3,62 et 12,25%. Quand $T = 200$ ans, les BR et REQMR de toutes les méthodes sont du même ordre de grandeur. Par ailleurs, dans les deux derniers cas, les écarts entre les résultats deviennent plus importants, en particulier au niveau du

REQMR. Dans ces deux cas (asymétries les plus élevées), les deux méthodes MM et MMD mènent aux plus faibles BR mais accompagnés des plus grands REQMR. La variation du BR est entre les bornes -9,87% et 1,33% tandis que pour le REQMR, les bornes sont 3,80% et 29,45%.

A partir de ces résultats, la méthode MMD peut être recommandée sauf dans les cas des plus fortes asymétries (correspond aux cas 3 et 4, i.e., $C_s > 0.5$) pour estimer des quantiles de grandes périodes de retour où on recommande MMI.

5.3 LOI HIB

Le Tableau 5.a représente les résultats relatifs à l'estimation des paramètres de la loi HIB. Pour l'estimation du paramètre m , on observe une similarité des résultats, en particulier, entre le BR de MV et MMI d'une part et de MM et MMD d'autre part. Par contre, les quatre méthodes donnent des résultats voisins en ce qui concerne le REQMR. Dans les deux premiers cas, sauf si $n = 100$ pour le cas 2, les résultats de MM et MMD sont les meilleurs. Dans les deux derniers cas, la méthode MV conduit à de meilleurs résultats. On observe que les variations des critères ne sont pas significatives d'un cas à l'autre. En général, les résultats s'améliorent quand n passe de 50 à 100. Donc, pour estimer m dans les cas des plus faibles asymétries, les méthodes MM ou MMD peuvent être recommandées alors que pour les cas de plus forte asymétrie, c'est la méthode MV qui conduit aux meilleurs résultats.

Les résultats obtenus pour l'estimation de α montrent des différences significatives entre MM et MMD et les deux autres méthodes surtout pour le biais. Le REQMR correspondant à MMI est le plus élevé. Sauf dans le cas 1 pour $n = 50$ et dans le cas 2, les résultats de MV sont les meilleurs et ceux de MM et MMD sont proches. Les résultats s'améliorent si la taille n augmente mais très peu pour le REQMR. De plus, le REQMR a peu de variation par rapport à C_s pour les quatre méthodes.

On en déduit que pour estimer α dans les cas de faibles asymétries, les méthodes MM ou MMD peuvent être recommandées alors que pour les cas de forte asymétrie, c'est la méthode MV.

Les mêmes éléments remarqués pour α se reproduisent pour l'estimation de ν , néanmoins avec de différentes valeurs des BR et REQMR. La Figure 8 est analogue aux Figures 6 et 7, et elle est relative au cas 3 de la loi HIB. Comme pour HA et HB, l'intervalle $]0;W[$ est très large et donc l'estimation par MV nécessite un nombre important d'itérations comparé à celui de MMI (en moyenne 10 et 98 itérations respectivement pour MMI et MV dans le cas de la Figure 8). On en déduit que pour les trois paramètres, dans les cas de fortes asymétries, MV est la meilleure méthode alors qu'il vaut mieux utiliser MM ou MMD dans les cas de faibles asymétries.

Comme c'est le cas pour HA et HB, la remarque sur la compensation des erreurs reste vraie pour l'estimation des paramètres de HIB.

Pour l'estimation des quantiles, les résultats sont présentés dans le Tableau 5.b. Pour $T = 10$ ans, les résultats des quatre méthodes sont très proches particulièrement en terme de REQMR sauf dans le cas 1 pour MMI. Cette exception est due à l'estimation des paramètres pour ce cas. Le BR a de très faibles valeurs variant entre 0,08% et 1,42% et il n'a aucune tendance de monotonie par rapport à Cs ou Cv. Le REQMR varie entre 2,64% et 6,79% avec une légère croissance par rapport à Cs.

Quand $T = 100$, les résultats de MV sont proches de ceux de MMI, sauf dans le cas 1. En comparaison avec Q_{10} (sauf pour le cas 1), les différences deviennent plus grandes entre les résultats de MM et MMD d'une part et de MV et MMI d'autre part. Une tendance de croissance du biais est observée seulement par les méthodes MM et MMD. Le BR varie entre les bornes -0,01% et 6%. Sauf quelques exceptions, pour chacune des méthodes, on observe une croissance du REQMR par rapport à Cs avec une variation de 4,58% à 17,60%.

Les résultats de l'estimation de Q_{200} sont très similaires à ceux de Q_{100} au niveau des tendances. En effet, dans les trois derniers cas, les résultats de MV et MMI sont similaires et sont meilleurs que ceux de MM et MMD. Dans le premier cas, c'est la méthode MV qui mène aux plus faibles valeurs de BR et REQMR. Le BR varie entre -0,17% et 9,57% et le REQMR varie entre 5,23% et 25,84%.

On en déduit que pour les petites périodes de retour, les quatre méthodes ont des performances similaires sauf MMI pour les plus faibles asymétries. Pour les moyennes et grandes périodes de retour, dans le cas de très faibles asymétries, la méthode MMD est recommandée alors que pour les autres cas la méthode MMI peut être recommandée en tenant compte des résultats et du temps de calcul.

Le Tableau 6 présente un résumé des valeurs maximales et minimales des BR et REQMR pour l'estimation des quantiles par chacune des lois de Halphen.

5.4 DISCUSSION GÉNÉRALE

Dans cette partie nous présentons quelques éléments communs à toutes les distributions ainsi qu'un résumé des résultats. Généralement les erreurs diminuent quand la taille de l'échantillon n augmente pour l'estimation des paramètres et des quantiles. Ce résultat est attendu car le BR est décroissant avec n . En outre, concernant l'estimation des quantiles, les valeurs des critères augmentent avec la période de retour T . Pour chacun des cas d'une distribution de Halphen donnée, l'écart entre les résultats de l'estimation des quantiles des quatre méthodes augmente par rapport à la période de retour mais il reste faible en général. De plus, pour chacune des trois distributions, les résultats obtenus par les quatre méthodes d'estimation sont homogènes en termes de comportement.

Dans tous les cas étudiés et pour les trois distributions, les erreurs en termes des critères BR et REQMR des quantiles sont faibles en comparaison avec celles des paramètres et ce en utilisant chacune des quatre méthodes d'estimation. Cette caractéristique généralement observée en analyse fréquentielle avec les distributions à trois paramètres. La compensation des erreurs des paramètres peut expliquer cet effet. En effet, dans la présente étude, les résultats montrent que les BR des trois paramètres n'ont pas le même signe, de plus leurs REQMR ne sont pas du même ordre de grandeur.

Au niveau de la simplicité des calculs et la rapidité, les quatre méthodes sont ordonnées de en commençant par la méthode la plus simple et la plus rapide comme suit : MM, MMD, MMI et MV. Sur le plan de l'optimalité théorique, en se basant sur le nombre des statistiques exhaustives employées, on peut les ordonner comme suit : MV et MMI d'une part, MMD et MM d'autre part. À performance similaire, cette hiérarchie est utile quant au choix des méthodes. Les résultats de l'étude comparative peuvent être résumés de la manière suivante :

- Pour la loi HA :
 - Paramètres : d'une manière générale, m est mieux estimé par MV ou MMI. Dans la majorité des cas étudiés, l'estimation de α est meilleure par MV ou MMI et les autres méthodes sont aussi acceptables. Pour estimer ν , toutes les méthodes mènent approximativement aux mêmes résultats. En revanche, incluant de plus les aspects théoriques d'optimalité et pratique de rapidité, la méthode MMI peut être recommandée pour estimer les paramètres de la loi HA.
 - Quantiles : malgré les similarités des quatre méthodes, la méthode MMI peut être recommandée puisqu'elle combine optimalité théorique, bons résultats numériques et rapidité de calcul. Néanmoins, sur le plan pratique et ayant les mêmes performances, la méthode MM, qui donne des résultats très voisins de ceux obtenus par MMI, peut être recommandée, grâce à sa simplicité.

– Pour la loi HB :

- Paramètres : pour estimer les trois paramètres de la loi HB, la méthode MMD pourrait être généralement recommandée.
- Quantiles : à partir des résultats obtenus pour les quantiles et en concordance avec l'estimation des paramètres, la méthode MMD peut être recommandée sauf dans les cas des plus fortes asymétries ($C_s > 0.5$) pour estimer des quantiles de grandes périodes de retour où la méthode MMI peut être recommandée.

Pour la loi HIB :

- Paramètres : pour les trois paramètres, dans les cas de fortes asymétries, la méthode MV est la meilleure alors que dans les cas des plus faibles asymétries ($C_s < 1.2$), il vaut mieux utiliser MM ou MMD.
- Quantiles : pour les petites périodes de retour, les quatre méthodes ont des performances similaires sauf MMI pour les plus faibles asymétries. Pour les moyennes et grandes périodes de retour, dans le cas de très faibles asymétries ($C_s < 1.2$), la méthode MMD est recommandée alors que pour les autres cas la méthode MMI peut être recommandée en tenant compte des résultats, sa relative simplicité et du temps de calcul.

Concernant les quantiles, la Figure 9 résume et illustre les méthodes d'estimation recommandées pour chacune des lois de Halphen. Elle concerne en particulier l'estimation des quantiles de périodes de retour $T = 100$ et 200 ans. Les estimations pour $T = 10$ ans étaient très similaires pour les différentes méthodes.

6. CONCLUSIONS

Le présent rapport concerne l'estimation des paramètres et des quantiles des trois lois de Halphen. Deux nouvelles méthodes mixtes sont présentées et développées. Du point de vue théorique, la méthode MV est optimale (variance minimale) mais avec un biais qui peut être important pour des échantillons de petite taille ; par conséquent, le REQMR (qui combine biais et variance) peut être important. Néanmoins, la méthode MV est basée sur des approximations numériques pour la résolution d'un système non linéaire (équations 22a,b,c pour HA, 26a,b,c pour HB et 30a,bc pour HIB). De plus, la maximisation partielle de la fonction log-vraisemblance nécessite un nombre important d'itérations. Par contre, la méthode des moments donne des expressions explicites des estimateurs. Cependant, bien qu'elle mène à de bons résultats, elle n'est pas optimale théoriquement vu qu'elle n'est pas basée sur les statistiques exhaustives des lois de Halphen. Les deux méthodes mixtes proposées, l'une directe MMD et l'autre itérative MMI, combinent les avantages des méthodes MM et MV.

Une comparaison des performances des quatre méthodes d'estimation couvrant les trois distributions de Halphen a été faite via des simulations de Monte Carlo. Les résultats de cette comparaison au niveau des quantiles montrent pour la distribution HA : une grande similarité des quatre méthodes, la méthode MMI est la plus adéquate du point de vue théorique et précision des résultats. Néanmoins, sur le plan pratique et ayant les mêmes performances, la méthode MM peut être recommandée. Pour HB, la méthode MMD peut être recommandée sauf dans les cas de fortes asymétries pour estimer des quantiles de grandes périodes de retour où la méthode MMI peut être recommandée. Pour HIB, dans le cas de très faibles asymétries, la méthode MMD est

recommandée alors que pour les autres cas la méthode MMI peut être recommandée en tenant compte des résultats et du temps de calcul.

NOTE : les programmes pour les quatre méthodes d'estimations des paramètres des trois lois de Halphen sont disponibles sur demande auprès des auteurs.

Remerciements

Les auteurs remercient le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour son soutien financier.

Références

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972) *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York. 1006 p.
- Bobée, B. (1979) Comment on: The log-Pearson type 3 distribution: The T-year event and its asymptotic standard error by maximum likelihood theory. *Water Resources Research*, **15**, 189-190.
- Bobée, B. (1999) Extreme flood events valuation using frequency analysis: a critical review. *Houille Blanche*, **54** (7-8), 100-105.
- Bobée, B. and Ashkar, F. (1988) Generalized Method of Moments Applied to LP3 Distribution. *Journal of Hydraulic Engineering (ASCE)*, **114**, 899-909.
- Bobée, B. and Ashkar, F. (1991) *The Gamma Family and Derived Distributions Applied in Hydrology*. Littleton, Colorado: Water Resources Publications. 203 p.
- Bobée, B.; Ashkar, F. and Perreault, L. (1993) Two kinds of moment ratio diagrams and their applications in hydrology. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **7**, 41-65.
- Chebana, F.; El Adlouni, S. et Bobée, B. (2006) Propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres et quantiles des lois de Halphen. [French] *Research report*, I 219. INRS-ETE, Québec, Canada.
- Chebana, F.; El Adlouni, S. and Bobée, B. (2008) Method of moments of the Halphen distribution parameters. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, doi 10.1007/s00477-007-0184-4. **22** (6), 749-757.
- CHS, Chaire en Hydrologie Statistique (2002) HYFRAN: Software for frequency analysis in hydrology. [French] *Technical report*. INRS-Eau, Quebec, Canada.

- El Adlouni, S. ; Bobée, B. and T. B.M.J. Ouarda (2007a) Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues. [French] *Research report*, R-929. INRS-ETE, Québec, Canada. 72 pages.
- El Adlouni, S. and Bobée, B. (2007b) Sampling techniques for Halphen distributions. *Journal of Hydrologic Engineering*, **12**(6), 592-604.
- El Adlouni, S.; Bobée, B. and Ouarda, T. B.M.J. (2008) On the tails of extreme event distributions in Hydrology. *Journal of Hydrology*, **355**, 16-33.
- Fitzgerald, D. L. (2000) Statistical aspects of Tricomi's function and modified Bessel functions of the second kind. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **14**, 139-158.
- Halphen, E. (1941) Sur un nouveau type de courbe de fréquence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **213**, 633-635. Publié sous le nom de "Dugué" en raison des contraintes de la guerre.
- Halphen, E. (1955) Les fonctions factorielles. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, Vol. **IV**, Fascicule I. 21-39.
- Kirby, W (1974) Algebraic boundedness of sample statistics. *Water Resour. Res.*, **10**(2), 220–222.
- Morlat, G. (1951) Note sur l'estimation des débits de crues. *La Houille Blanche*, No spécial B, pp. 663-681.
- Morlat, G. (1956) Les lois de probabilité de Halphen. *Revue de Statistique Appliquée*, **3**, 21-43.
- NERC, Natural Environment Research Council (1975) *Flood Studies Report*, vol. 1, London.
- Perreault, L. ; Bobée, B. et Rasmussen, P.F. (1997) Les lois de Halphen. *Rapport de Recherche* N° R-498, INRS-Eau, Université de Québec.
- Perreault, L.; Bobée, B. and Rasmussen, P.F. (1999a) Halphen Distribution System. I: Mathematical and Statistical Properties. *Journal of Hydrologic Engineering*, **4**, 189- 199.
- Perreault, L.; Bobée, B. and Rasmussen, P.F. (1999b) Halphen Distribution System. II: Parameter and quantile Estimation. *Journal of Hydrologic Engineering*, **4**, 200-208.

U.S. Water Resources Council (1981) Guidelines for Determining Flood Flow Frequency. *Bull. 17B*, Washington DC.

Watson, G.N. (1996) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press. 812 pages.

Willeke, G.E., Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Guttman, N.B. (1995) The national drought atlas (draft), *IWR Rep. 94-NDS-4*, U.S. Army Corps of Eng., Fort Belvoir, Va.

Liste des Tableaux et Figures :

Tableau 1 : Statistiques exhaustives des lois de Halphen (type A, type B et type B inverse)

Tableau 2 : Cas considérés pour la comparaison des méthodes d'estimation

Tableau 3.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HA par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 3.b: BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HA par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 4.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HB par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 4.b: BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HB par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 5.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HIB par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 5.b : BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HIB par les quatre méthodes d'estimation

Tableau 6: Valeurs maximales et minimales des BR and REQMR (%) pour les lois de Halphen correspondant à l'estimation des quantiles par les quatre méthodes

Figure 1 : Les lois de Halphen dans le diagramme (δ_1, δ_2) avec $\delta_1 = \ln(A/G)$ et $\delta_2 = \ln(G/H)$ (tirée de Morlat, 1956)

Figure 2 : Diagramme pour l'estimation des paramètres des lois Halphen par la méthode du MV

Figure 3 : Illustration des intervalles de variation de ν pour les méthodes MV et MMI concernant la loi HA

Figure 4 : Relations entre les coefficients de variation (Cv) et d'asymétrie (Cs) pour les lois de Halphen (la notation $a:c:b$ signifie un intervalle $[a, b]$ avec un pas c)

Figure 5 : Coefficient de variation et d'asymétrie des cas étudiés et des séries de l'UNESCO

Figure 6 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HA (cas 6 et $n = 100$)

Figure 7 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HB (cas 2 et $n = 100$)

Figure 8 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HIB (cas 3 et $n = 100$)

Figure 9 : résumé des conclusions concernant les méthodes d'estimation des quantiles pour les lois de Halphen

Tableau 1 : Statistiques exhaustives des lois de Halphen (type A, type B et type B inverse)

Lois de Halphen	Statistiques exhaustives		
HA	$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$	$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$	$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
HB	$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$	$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$
HIB	$\frac{1}{IQ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$	$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$	$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$

Tableau 2 : Cas considérés pour la comparaison des méthodes d'estimation

		<i>m</i>	<i>α</i>	<i>ν</i>	<i>Cv</i>	<i>Cs</i>	<i>Q10</i>	<i>Q100</i>	<i>Q200</i>
HA									
Cas 1	(HA1)	100	3,20	10,90	0,27	0,59	507,46	655,25	694,33
Cas 2	(HA2)	100	7,00	-6,00	0,26	0,88	92,67	122,04	130,33
Cas 3	(HA3)	100	1,22	2,82	0,51	1,14	466,13	715,58	785,89
Cas 4	(HA4)	100	4,00	-6,00	0,33	1,20	77,40	110,45	120,35
Cas 5	(HA5)	100	1,40	0,40	0,58	1,58	231,65	389,92	437,28
Cas 6	(HA6)	100	2,40	-3,90	0,43	1,59	83,92	132,61	147,99
Cas 7	(HA7)	100	2,00	-1,50	0,50	1,63	131,62	216,03	242,11
Cas 8	(HA8)	100	1,20	-5,00	0,50	2,25	43,63	75,89	87,28
Cas 9	(HA9)	100	1,00	-1,00	0,71	2,31	152,52	297,21	344,88
HB									
Cas 1	(HB1)	100	4,00	1,20	0,28	0,10	317,83	388,86	405,92
Cas 2	(HB2)	100	2,00	0,90	0,43	0,32	218,18	287,82	304,67
Cas 3	(HB3)	100	1,00	0,70	0,56	0,58	166,62	235,02	251,70
Cas 4	(HB4)	100	0,50	0,60	0,65	0,76	141,20	208,56	225,10
HIB									
Cas 1	(HIB1)	100	6,00	4,00	0,17	1,09	32,16	40,33	42,85
Cas 2	(HIB2)	100	4,00	3,60	0,22	1,42	43,70	58,49	63,34
Cas 3	(HIB3)	100	3,20	3,00	0,26	1,80	53,79	76,48	84,36
Cas 4	(HIB4)	100	3,00	2,40	0,31	2,38	62,26	94,18	105,99

Tableau 3.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HA par les quatre méthodes d'estimation

	$n = 50$								$n = 100$							
	BR				REQMR				BR				REQMR			
	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1	Cs = 0,59; Cv = 0,27 $m = 100; \alpha = 3, 20; \nu = 10, 9$															
m	954,12	690,31	840,46	500,39	4497,01	3160,82	2660,24	1454,61	372,64	260,77	379,32	206,79	1686,74	1911,14	1781,63	886,64
α	-55,00	-44,00	-55,26	-46,75	56,35	46,66	56,59	48,36	-53,52	-42,98	-53,75	-45,94	54,84	45,43	55,05	47,41
V	-39,51	-40,46	-39,51	-40,14	97,34	95,71	97,34	96,20	-11,69	-13,21	-11,69	-12,70	70,16	68,86	70,16	69,33
cas 2	Cs = 0,88; Cv = 0,26 $m = 100; \alpha = 7, 00; \nu = -6, 00$															
m	419,08	362,74	424,57	261,25	747,71	1020,24	776,38	556,09	580,09	396,99	582,74	311,25	1105,04	984,99	1064,87	492,98
α	-80,35	-73,39	-80,44	-75,03	80,62	73,88	80,70	75,26	-80,76	-72,21	-80,86	-74,59	81,03	72,73	81,12	74,78
V	-57,32	-59,01	-57,32	-58,64	241,17	237,16	241,17	238,63	-14,40	-17,00	-14,40	-16,21	244,72	240,12	244,72	242,04
cas 3	Cs = 1,14; Cv = 0,51 $m = 100; \alpha = 1, 22; \nu = 2, 82$															
m	109,68	97,55	111,49	97,10	292,47	199,14	311,73	195,47	52,09	52,51	51,95	52,53	110,14	107,73	110,90	107,54
α	8,95	10,34	7,93	10,33	30,90	30,80	30,88	30,76	9,32	9,76	8,73	9,84	30,80	31,46	30,71	31,35
V	-51,16	-51,64	-51,16	-51,59	91,23	88,59	91,23	88,58	-32,19	-33,22	-32,19	-33,25	65,91	65,25	65,91	65,20
cas 4	Cs = 1,20; Cv = 0,33 $m = 100; \alpha = 4, 00; \nu = -6, 00$															
m	221,48	152,55	221,23	132,42	446,06	479,72	420,18	276,53	330,09	216,69	304,89	185,52	1133,54	548,05	496,94	296,96
α	-66,52	-57,59	-66,78	-58,57	67,34	58,65	67,60	59,43	-67,33	-57,51	-67,55	-58,65	68,17	58,60	68,38	59,53
V	-39,53	-41,82	-39,53	-41,65	155,28	151,69	155,28	152,32	11,19	7,53	11,19	7,86	125,34	121,50	125,34	122,27
cas 5	Cs = 1,58; Cv = 0,58 $m = 100; \alpha = 1, 40; \nu = 0, 40$															
m	40,43	35,04	42,03	35,75	191,78	122,66	204,68	134,10	18,87	15,90	19,52	15,98	84,23	67,15	87,79	67,56
α	-9,99	-9,73	-10,90	-9,69	24,19	24,26	24,76	24,20	-7,60	-6,96	-8,42	-6,97	20,44	18,96	20,91	18,98
V	-54,34	-56,07	-54,34	-56,71	488,22	470,72	488,22	470,38	-17,45	-19,30	-17,45	-19,17	407,39	385,03	407,39	385,06
cas 6	Cs = 1,59; Cv = 0,43 $m = 100; \alpha = 2, 40; \nu = -3, 90$															
m	82,81	56,12	85,48	58,67	202,55	134,31	211,32	148,73	141,71	91,32	144,59	95,05	257,58	152,97	262,27	171,33
α	-41,70	-36,52	-42,32	-36,54	44,74	39,83	45,33	39,90	-43,55	-36,89	-44,09	-36,91	46,97	40,46	47,46	40,55
V	-26,32	-29,03	-26,32	-29,03	123,33	119,59	123,33	119,58	20,28	15,21	20,28	15,17	89,49	85,45	89,49	85,44
cas 7	Cs = 1,63; Cv = 0,50 $m = 100; \alpha = 2, 00; \nu = -1, 50$															
m	43,21	29,94	45,14	31,42	189,32	125,34	197,59	134,73	53,35	36,07	55,33	38,49	175,49	110,91	182,91	144,15
α	-26,72	-25,24	-27,25	-25,27	31,90	30,16	32,43	30,24	-23,55	-21,41	-24,17	-21,41	29,03	26,15	29,60	26,19
V	-43,52	-45,09	-43,52	-44,93	205,96	199,92	205,96	199,89	-4,67	-9,25	-4,67	-9,33	184,40	176,23	184,40	176,21
cas 8	Cs = 2,25; Cv = 0,50 $m = 100; \alpha = 1, 20; \nu = -5, 00$															
m	-19,74	-26,05	-18,54	-24,31	66,53	61,87	68,03	71,44	5,92	-16,13	7,72	-14,5	103,61	52,27	108,22	62,52
α	17,16	23,57	15,78	23,53	35,85	39,6	35,25	39,81	12,66	22,8	11,53	22,69	36,6	38,25	36,32	38,47
V	-37,44	-39,67	-37,44	-39,7	72,58	71,35	72,58	71,37	-14,39	-18,25	-14,39	-18,24	41,61	41,36	41,61	41,35
cas 9	Cs = 2,31; Cv = 0,71 $m = 100; \alpha = 1, 00; \nu = -1, 00$															
m	9,14	2,69	11,98	3,47	88,24	77,5	95,87	85,49	8,62	3,48	10,56	4,16	77,55	64,59	83,05	74,49
α	-0,98	-0,19	-3,01	-0,18	28,46	27,01	28,89	27,06	0,58	0,75	-0,99	0,74	22,35	20,88	22,72	20,95
V	-49,2	-52,77	-49,2	-52,89	163,41	154,48	163,41	154,47	-26,24	-29,47	-26,24	-29,59	121,14	114,79	121,14	114,83

Tableau 3.b : BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HA par les quatre méthodes d'estimation

	$n = 50$								$n = 100$							
	BR				REQMR				BR				REQMR			
	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1	$C_s = 0,59; C_v = 0,27$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 3,20; \nu = 10,9$															
10	1,79	1,82	1,80	1,82	5,13	5,15	5,14	5,15	0,69	0,72	0,70	0,71	3,47	3,48	3,47	3,48
100	4,74	4,78	4,75	4,77	9,26	9,20	9,28	9,22	1,70	1,78	1,71	1,76	5,58	5,58	5,59	5,59
200	5,65	5,67	5,67	5,67	10,87	10,7	10,9	10,77	2,02	2,10	2,03	2,08	6,41	6,39	6,42	6,40
cas 2	$C_s = 0,88; C_v = 0,26$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 7,00; \nu = -6,00$															
10	2,20	2,22	2,20	2,21	5,44	5,45	5,44	5,45	0,63	0,64	0,64	0,64	3,71	3,71	3,71	3,71
100	4,61	4,54	4,62	4,56	10,45	10,32	10,46	10,36	2,07	1,99	2,08	2,02	7,55	7,44	7,56	7,48
200	5,46	5,33	5,47	5,37	12,28	12,07	12,29	12,13	2,69	2,57	2,70	2,61	8,99	8,82	8,99	8,87
cas 3	$C_s = 1,14; C_v = 0,51$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 1,22; \nu = 2,82$															
10	1,07	1,26	1,21	1,26	8,14	8,16	8,15	8,16	1,06	1,15	1,13	1,15	6,00	6,01	6,01	6,01
100	6,12	6,34	6,38	6,33	14,35	14,28	14,57	14,29	3,84	4,01	3,95	4,02	9,91	9,95	9,99	9,94
200	7,58	7,78	7,88	7,78	16,70	16,51	17,00	16,51	4,59	4,79	4,72	4,79	11,19	11,23	11,30	11,22
cas 4	$C_s = 1,20; C_v = 0,33$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 4,00; \nu = -6,00$															
10	1,96	2,01	1,98	2,01	6,68	6,71	6,70	6,71	1,08	1,12	1,10	1,12	4,85	4,86	4,86	4,86
100	4,23	4,07	4,28	4,09	12,80	12,61	12,85	12,62	4,04	3,82	4,08	3,84	10,07	9,85	10,10	9,86
200	5,17	4,91	5,23	4,93	15,04	14,73	15,10	14,74	5,25	4,90	5,30	4,94	11,99	11,64	12,03	11,66
cas 5	$C_s = 1,58; C_v = 0,58$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 1,40; \nu = 0,40$															
10	-0,06	0,21	0,17	0,21	9,98	10,07	10,07	10,06	-0,50	-0,24	-0,29	-0,24	7,26	7,27	7,27	7,27
100	2,28	2,71	2,73	2,72	16,20	16,46	16,62	16,46	0,71	1,06	1,09	1,06	11,91	11,91	12,15	11,90
200	3,22	3,67	3,73	3,68	18,50	18,80	19,04	18,80	1,24	1,58	1,67	1,58	13,58	13,52	13,90	13,51
cas 6	$C_s = 1,59; C_v = 0,43$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 2,40; \nu = -3,90$															
10	3,10	3,25	3,20	3,25	9,23	9,33	9,31	9,33	1,25	1,37	1,33	1,37	6,02	6,07	6,06	6,07
100	6,35	6,24	6,57	6,24	16,24	16,13	16,44	16,12	5,45	5,15	5,63	5,15	11,52	11,36	11,65	11,36
200	7,57	7,33	7,83	7,32	18,66	18,43	18,89	18,42	7,09	6,59	7,31	6,59	13,61	13,30	13,78	13,30
cas 7	$C_s = 1,63; C_v = 0,50$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 2,00; \nu = -1,50$															
10	2,47	2,62	2,58	2,62	9,08	9,15	9,14	9,16	1,74	1,92	1,89	1,92	6,68	6,71	6,72	6,72
100	4,67	4,76	4,92	4,77	15,02	14,96	15,24	14,96	4,45	4,43	4,76	4,43	11,80	11,64	11,99	11,63
200	5,53	5,56	5,82	5,57	17,31	17,14	17,61	17,15	5,50	5,36	5,85	5,35	13,85	13,54	14,11	13,53
cas 8	$C_s = 2,25; C_v = 0,50$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 1,20; \nu = -5,00$															
10	2,24	2,46	2,41	2,46	9,17	9,32	9,30	9,32	0,58	0,75	0,70	0,75	6,32	6,38	6,36	6,37
100	-0,12	-0,17	0,22	-0,17	13,06	13,01	13,27	13,01	-0,87	-1,17	-0,62	-1,17	9,19	9,17	9,25	9,17
200	-1,09	-1,27	-0,70	-1,28	14,43	14,29	14,64	14,29	-1,44	-1,96	-1,15	-1,95	10,14	10,09	10,20	10,10
cas 9	$C_s = 2,31; C_v = 0,71$															
$T =$	$m = 100; \alpha = 1,00; \nu = -1,00$															
10	-2,93	-2,26	-2,37	-2,26	12,11	12,10	12,10	12,10	-2,72	-2,15	-2,22	-2,15	8,58	8,57	8,57	8,57
100	-5,30	-4,61	-4,19	-4,62	19,43	19,48	19,78	19,48	-4,37	-3,79	-3,39	-3,80	14,21	14,11	14,54	14,12
200	-5,34	-4,75	-4,07	-4,76	21,91	21,90	22,50	21,91	-4,37	-3,88	-3,27	-3,88	16,22	16,01	16,72	16,01

Tableau 4.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HB par les quatre méthodes d'estimation

	$n = 50$								$n = 100$							
	BR				REQMR				BR				REQMR			
	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1	Cs = 0,10; Cv = 0,28 m = 100; $\alpha = 4,00$; $\nu = 1,20$															
m	5.51	11.50	4.75	14.39	15.92	19.09	15.74	26.93	4.05	7.47	3.67	8.53	14.05	15.22	13.96	19.00
α	-11.73	-32.92	-11.26	-40.51	38.66	50.01	39.15	70.88	-10.18	-22.39	-9.93	-25.22	38.02	42.12	38.27	52.21
ν	18.13	61.20	18.13	70.13	82.56	104.65	82.56	126.73	16.79	42.33	16.79	45.64	77.47	84.78	77.47	94.75
cas 2	Cs = 0,32; Cv = 0,43 m = 100; $\alpha = 2,00$; $\nu = 0,90$															
m	-7.12	-4.76	-5.74	-3.70	17.11	14.93	16.46	19.36	-4.10	-3.44	-3.09	-2.64	13.79	12.54	13.16	16.58
α	29.57	18.89	25.13	15.31	60.71	51.90	57.96	67.26	15.14	12.81	12.00	10.21	48.93	45.17	46.81	58.14
ν	-16.34	-10.36	-16.34	-9.05	42.46	41.50	42.46	46.08	-6.90	-7.06	-6.90	-6.14	33.44	33.77	33.44	37.06
cas 3	Cs = 0,58; Cv = 0,56 m = 100; $\alpha = 1,00$; $\nu = 0,70$															
m	-15.07	-17.04	-11.59	-16.43	20.30	20.65	17.57	23.13	-9.63	-12.48	-7.23	-11.22	14.47	15.91	12.48	20.98
α	78.27	100.80	58.95	97.58	106.40	120.99	88.78	133.27	46.40	73.94	34.04	66.98	70.37	93.02	59.19	119.33
ν	-6.46	-20.41	-6.46	-19.99	21.53	32.57	21.53	33.76	-2.60	-15.70	-2.60	-14.61	15.43	25.27	15.43	27.81
cas 4*	Cs = 0,76; Cv = 0,65 m = 100; $\alpha = 0,50$; $\nu = 0,60$															
m	-22.68	-27.05	-18.61	-26.71	25.60	28.77	21.69	29.38	-16.79	-21.65	-14.08	-19.28	19.37	23.42	16.50	29.70
α	201.72	292.03	155.20	286.98	229.75	311.21	180.36	324.43	144.40	232.55	115.81	206.35	163.14	251.25	131.90	320.37
ν	-0.60	-24.05	-0.60	-23.50	14.04	32.08	14.04	34.39	-0.66	-19.67	-0.66	-17.74	10.62	25.56	10.62	29.79

*le dernier cas est fait sur N = 1000 échantillons alors que pour les autres cas N = 5000

Tableau 4.b : BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HB par les quatre méthodes d'estimation

		$n = 50$								$n = 100$							
		BR				REQMR				BR				REQMR			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		$C_s = 0,10; C_v = 0,28$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 4,00; \nu = 1,20$															
10		0.57	0.25	0.09	0.22	4.19	4.14	4.12	4.16	0.20	0.07	-0.03	0.05	2.96	2.94	2.93	2.96
100		1.02	1.09	0.48	1.12	5.07	5.07	4.95	5.13	0.46	0.57	0.20	0.56	3.67	3.66	3.62	3.71
200		1.14	1.29	0.58	1.33	5.31	5.32	5.16	5.43	0.55	0.69	0.26	0.70	3.90	3.85	3.80	3.96
cas 2		$C_s = 0,32; C_v = 0,43$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 2,00; \nu = 0,90$															
10		-0.56	-0.71	-0.77	-0.70	5.97	5.91	5.94	5.92	-0.52	-0.60	-0.60	-0.61	4.25	4.21	4.23	4.21
100		-1.80	-1.47	-1.64	-1.43	7.20	6.89	7.10	6.93	-1.30	-1.18	-1.13	-1.16	5.31	5.07	5.18	5.09
200		-2.00	-1.62	-1.79	-1.57	7.50	7.14	7.38	7.18	-1.44	-1.29	-1.22	-1.21	5.57	5.29	5.41	6.32
cas 3		$C_s = 0,58; C_v = 0,56$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 1,00; \nu = 0,70$															
10		-1.72	-2.01	-1.78	-2.02	7.67	7.66	7.63	7.67	-1.11	-1.29	-1.10	-1.30	5.42	5.43	5.39	5.44
100		-4.90	-5.18	-4.03	-5.17	9.60	9.42	9.08	9.45	-3.13	-3.55	-2.51	-3.50	6.79	6.80	6.42	6.83
200		-5.38	-5.63	-3.80	-5.63	11.65	11.90	19.81	12.43	-3.23	-3.98	-2.59	-3.81	12.91	7.15	11.25	10.23
cas 4*		$C_s = 0,76; C_v = 0,65$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 0,50; \nu = 0,60$															
10		-2.68	-3.08	-2.72	-3.09	8.91	8.96	8.88	8.97	-1.73	-1.96	-1.71	-2.01	6.63	6.65	6.59	6.70
100		-8.00	-8.84	-6.85	-8.85	11.94	12.22	11.11	12.25	-5.60	-6.52	-4.84	-6.45	8.85	9.26	8.23	9.32
200		-6.86	-9.86	-7.11	-9.87	29.45	12.99	18.05	13.03	-5.92	-6.63	-3.62	-6.69	14.84	18.75	23.97	15.71

*le dernier cas est fait sur $N = 1000$ échantillons alors que pour les autres cas $N = 5000$

Tableau 5.a: BR (%) et REQMR (%) des paramètres de la loi HIB par les quatre méthodes d'estimation

	$n = 50$								$n = 100$							
	BR				REQMR				BR				REQMR			
	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1	Cs = 1,09; Cv = 0,17 $m = 100; \alpha = 6,00; \nu = 4,00$															
m	-5,65	-14,67	-4,81	-17,43	14,07	17,94	13,84	21,88	-3,48	-9,84	-3,06	-10,99	12,02	14,09	11,96	16,69
α	-19,47	-63,16	-18,87	-78,39	46,03	74,04	46,20	98,22	-13,03	-42,12	-12,70	-47,05	43,47	56,37	43,58	66,98
ν	23,68	91,02	23,68	105,32	82,80	123,15	82,80	147,90	13,97	61,29	13,97	64,16	71,66	87,91	71,66	96,01
cas 2	Cs = 1,42; Cv = 0,22 $m = 100; \alpha = 4,0; \nu = 3,60$															
m	0.51	-7.28	1.41	-8.70	13.92	14.44	14.15	16.97	3.15	-2.20	3.61	-2.41	13.19	11.77	13.38	13.11
α	8.71	-34.23	9.54	-44.61	51.64	58.74	52.37	83.15	14.15	-14.06	14.58	-16.40	53.74	50.55	54.13	61.68
ν	-16.86	24.14	-16.86	29.78	55.98	57.64	55.98	71.42	-18.02	10.48	-18.02	11.11	55.12	49.09	55.12	55.52
cas 3	Cs = 1,80; Cv = 0,26 $m = 100; \alpha = 3,20; \nu = 3,00$															
m	3.96	-3.61	4.84	-5.42	15.17	13.34	15.64	17.06	5.36	0.39	5.78	-0.00	14.16	11.65	14.41	13.41
α	22.30	-21.58	23.11	-36.81	61.72	56.99	62.78	95.44	24.88	-2.79	25.25	-6.73	61.36	51.51	61.85	68.31
ν	-22.36	13.16	-22.36	19.61	54.72	48.80	54.72	64.64	-22.18	1.13	-22.18	2.26	51.58	42.43	51.58	50.05
cas 4	Cs = 2,38, Cv = 0,31 $m = 100; \alpha = 3,00; \nu = 2,40$															
m	3.51	-3.72	4.34	-5.06	15.49	13.41	15.94	16.68	4.76	0.26	5.15	-0.05	13.97	11.61	14.24	13.99
α	18.96	-20.74	19.64	-32.83	58.54	53.05	59.51	89.50	20.49	-3.01	20.77	-7.21	58.65	49.41	59.19	71.14
ν	-20.39	13.40	-20.39	18.48	52.72	46.78	52.72	62.24	-20.10	0.48	-20.10	1.26	51.46	40.84	51.46	50.12

Tableau 5.b: BR (%) et REQMR (%) des quantiles de la loi HIB par les quatre méthodes d'estimation

		$n = 50$								$n = 100$							
		BR				REQMR				BR				REQMR			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		$C_s = 1,09; C_v = 0,17$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 6,00; \nu = 4,00$															
10		0,47	0,76	0,86	1,05	4,08	4,04	4,07	7,30	0,20	0,31	0,38	0,66	2,66	2,64	2,66	5,39
100		1,42	0,64	1,68	1,32	7,60	7,02	7,46	17,60	0,61	-0,01	0,73	0,78	4,86	4,58	4,80	12,51
200		1,75	0,52	1,97	1,33	8,83	7,98	8,64	21,01	0,76	-0,17	0,85	0,83	5,64	5,23	5,55	16,14
cas 2		$C_s = 1,42; C_v = 0,22$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 4,0; \nu = 3,60$															
10		1.12	1.27	1.42	1.20	5.00	4.96	5.04	5.00	0.14	0.19	0.28	0.18	3.32	3.30	3.32	3.31
100		3.75	2.04	3.83	1.84	10.49	8.91	10.29	9.01	1.40	0.36	1.44	0.36	6.75	6.11	6.64	6.21
200		4.90	2.27	4.88	2.05	12.84	10.29	12.49	10.44	2.03	0.45	2.03	0.48	8.23	7.13	8.05	7.31
cas 3		$C_s = 1,80; C_v = 0,26$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 3,20; \nu = 3,00$															
10		0.87	0.96	1.12	0.84	5.98	5.91	5.96	5.95	0.08	0.12	0.22	0.10	4.07	4.06	4.08	4.07
100		4.76	2.00	4.62	1.68	14.47	11.65	13.71	12.01	2.21	0.70	2.22	0.71	8.93	7.97	8.79	8.15
200		7.15	2.46	6.60	2.14	21.27	13.85	18.20	14.47	3.40	1.03	3.35	1.10	11.33	9.51	11.08	9.85
cas 4		$C_s = 2,38; C_v = 0,31$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 3,00; \nu = 2,40$															
10		0.92	0.98	1.18	0.84	6.73	6.72	6.79	6.73	0.43	0.46	0.56	0.41	4.56	4.54	4.58	4.53
100		6.00	2.08	5.75	1.83	17.11	13.16	16.31	13.52	3.76	1.42	3.69	1.48	11.61	9.31	11.23	9.65
200		9.57	2.57	8.69	2.40	25.84	15.67	22.54	16.40	6.01	1.97	5.76	2.19	16.36	11.33	15.41	12.01

Tableau 6: Valeurs maximales et minimales des BR and REQMR (%) pour les lois de Halphen correspondant à l'estimation des quantiles par les quatre méthodes

		RB			RRMSE		
		HA	HB	HIB	HA	HB	HIB
Minima	$T = 10$	-2,93	-3,09	0,08	3,47	2,93	2,64
	$T = 100$	-5,30	-8,85	-0,01	5,58	3,62	4,58
	$T = 200$	-5,34	-9,87	-0,17	6,39	3,80	5,23
Maxima	$T = 10$	3,25	0,57	1,42	12,11	8,97	6,79
	$T = 100$	6,57	1,12	6,00	19,78	12,25	17,60
	$T = 200$	7,88	1,33	9,57	22,50	29,45	25,84

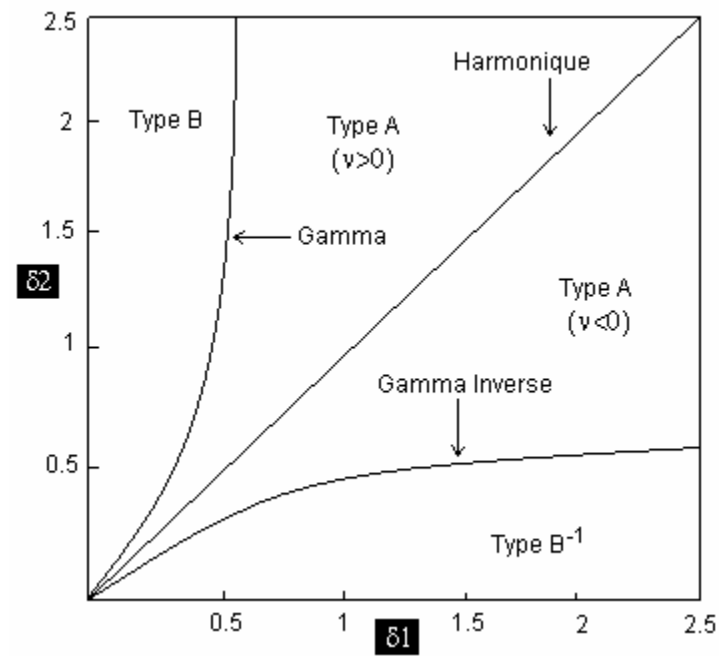


Figure 1 : Les lois de Halphen dans le diagramme (δ_1, δ_2) avec $\delta_1 = \ln\left(\frac{A}{G}\right)$ et $\delta_2 = \ln\left(\frac{G}{H}\right)$ (tirée de Morlat, 1956)

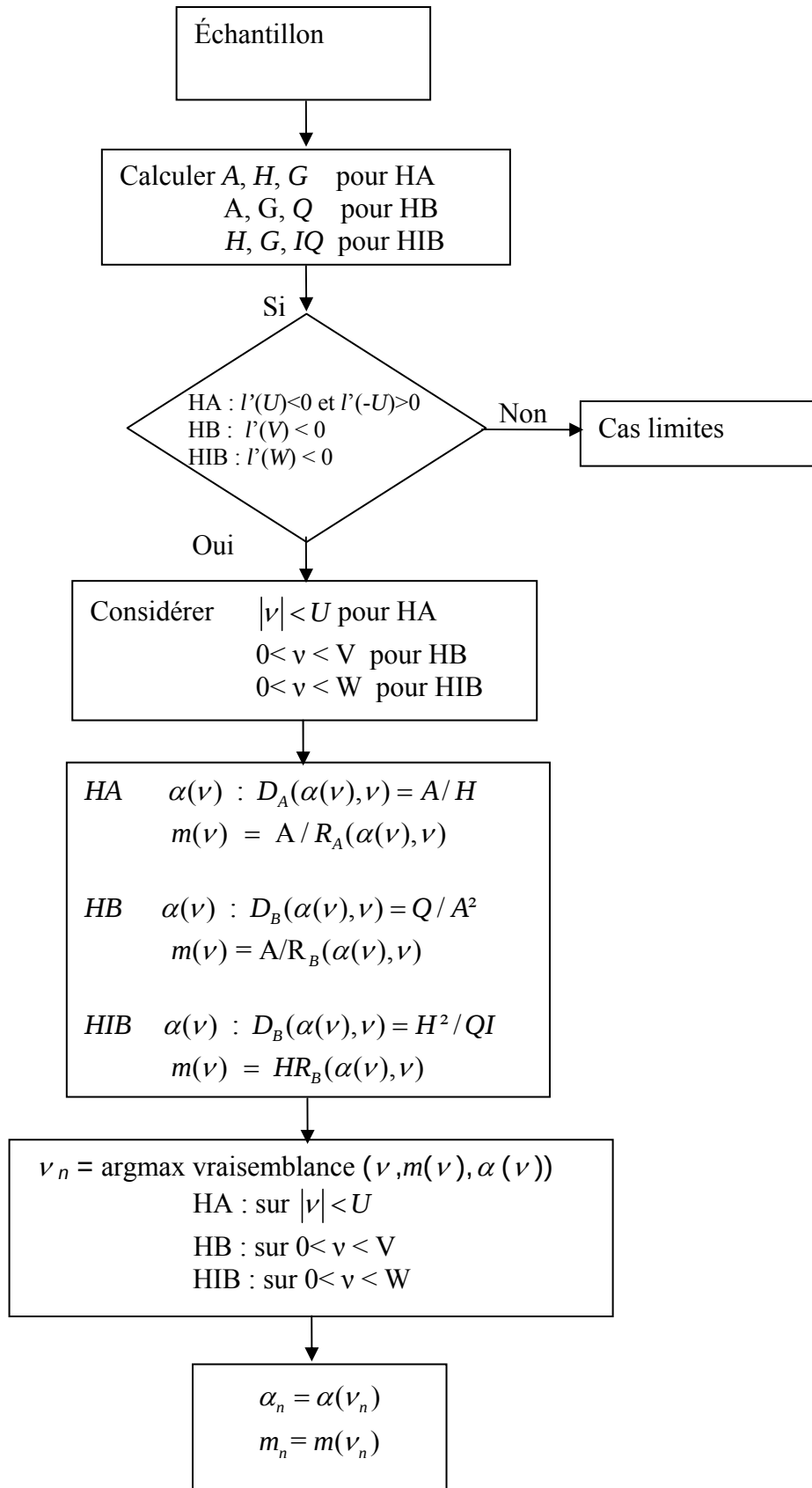


Figure 2 : Diagramme pour l'estimation des paramètres des lois Halphen par la méthode du MV

$$\ln L_{HA}(\nu | \alpha, m)$$

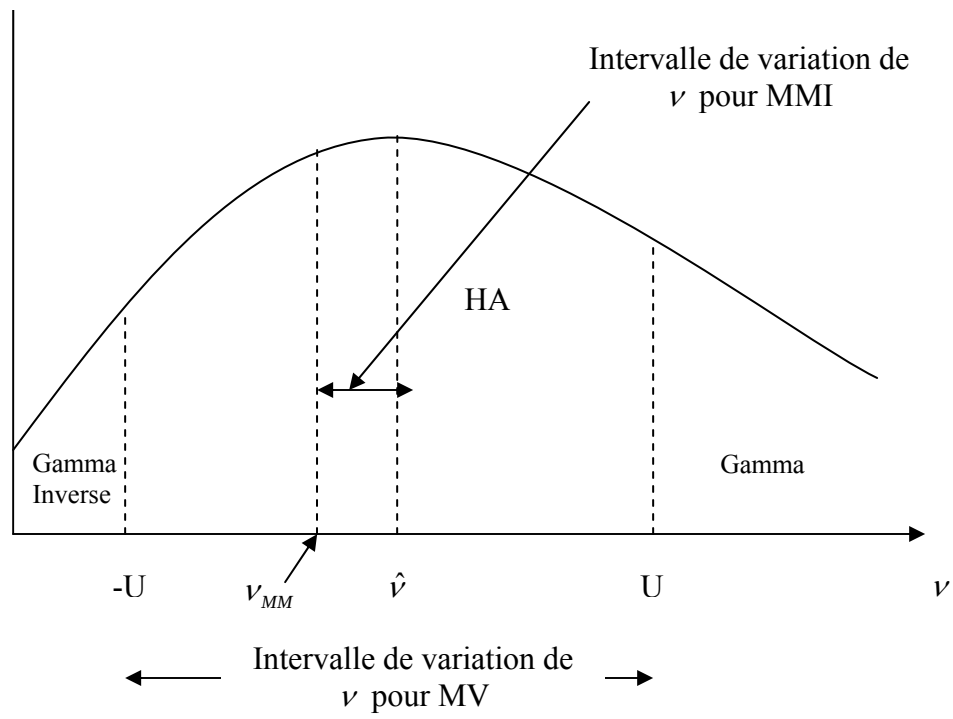


Figure 3 : Illustration des intervalles de variation de ν pour les méthodes MV et MMI concernant la loi HA

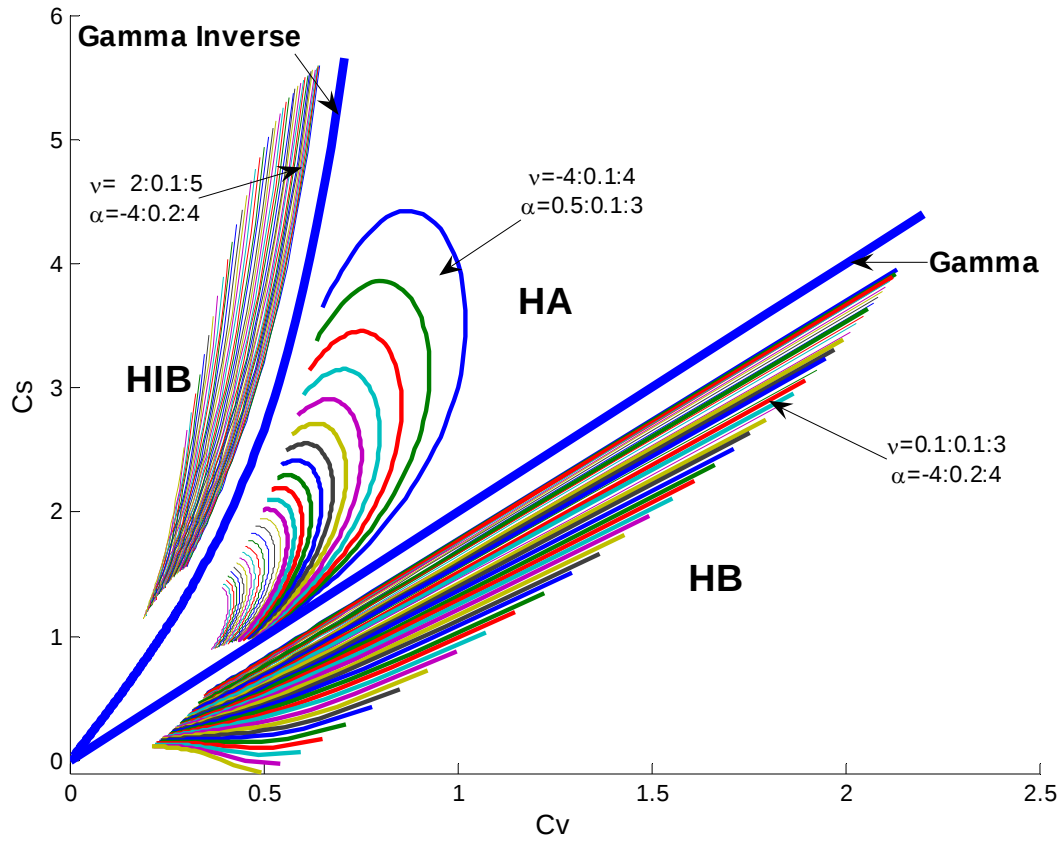


Figure 4 : Relations entre les coefficients de variation (C_v) et d'asymétrie (C_s) pour les lois de Halphen (la notation $a:c:b$ signifie un intervalle $[a, b]$ avec un pas c)

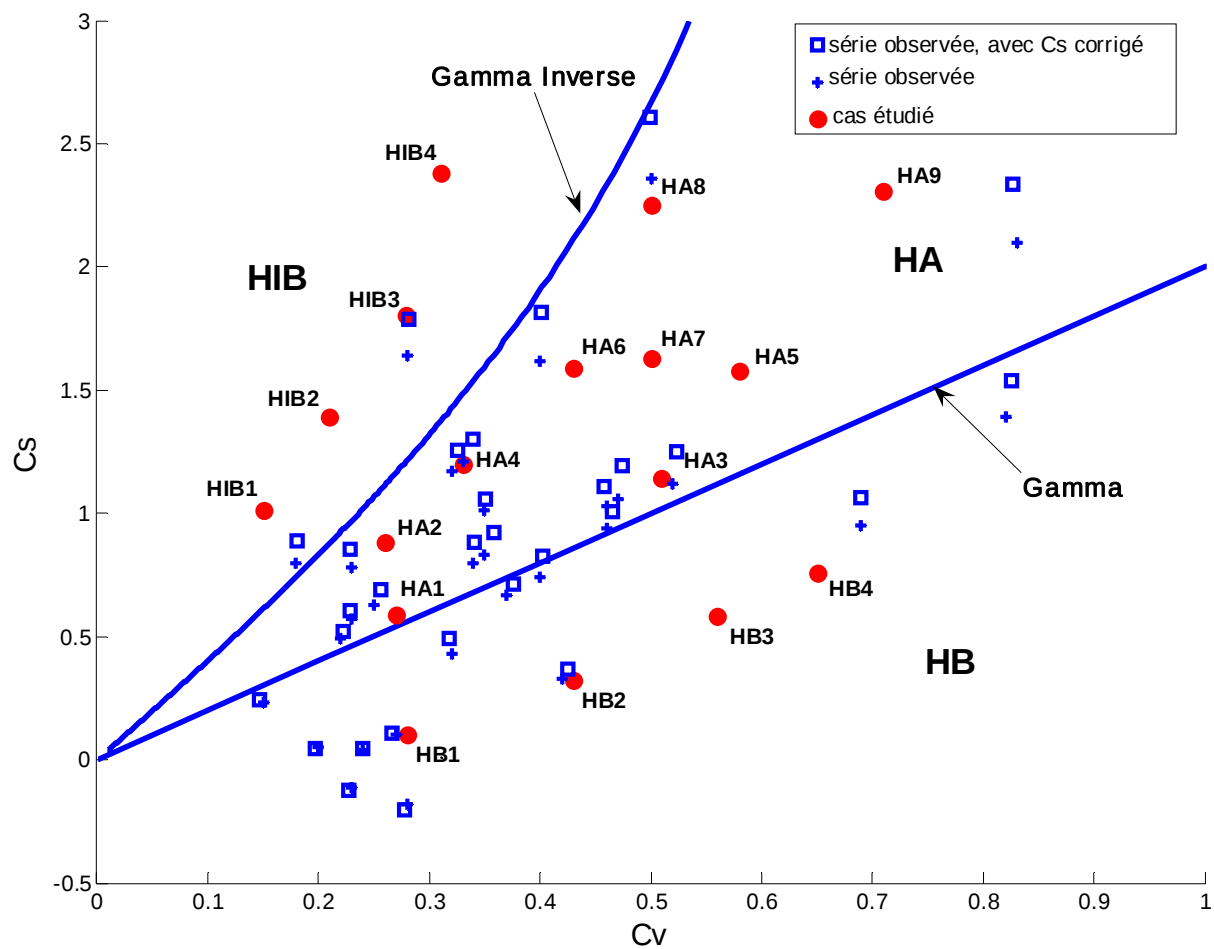


Figure 5 : Coefficient de variation et d'asymétrie des cas étudiés et des séries de l'UNESCO

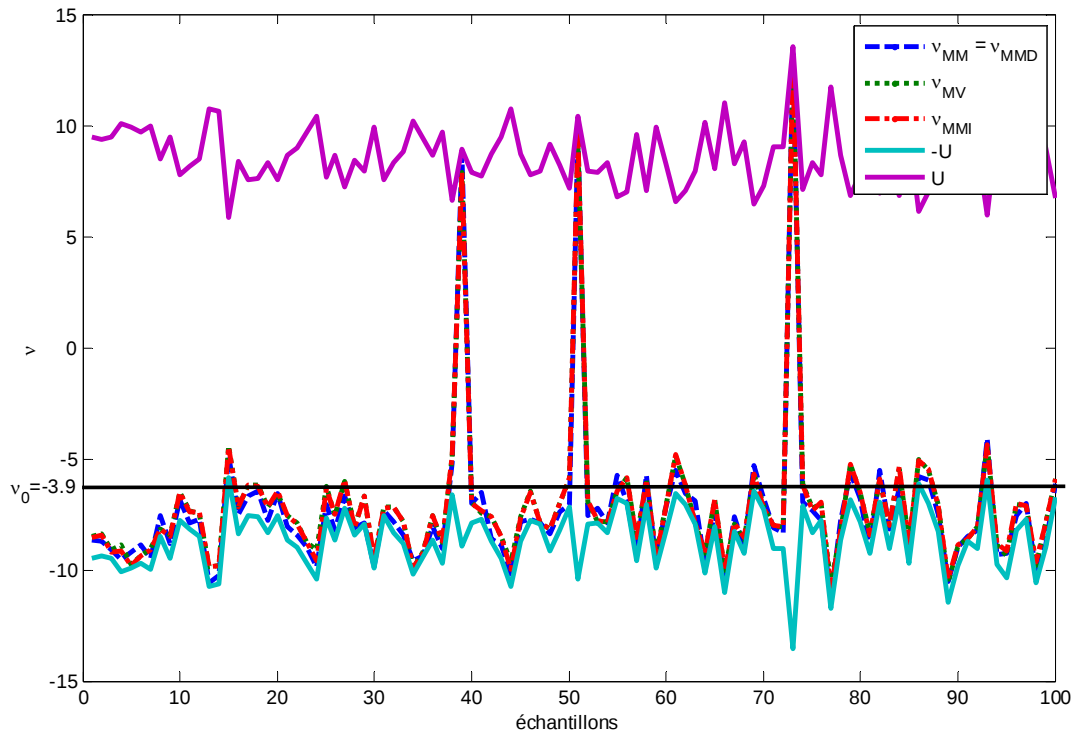


Figure 6 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HA (cas 6 et $n = 100$)

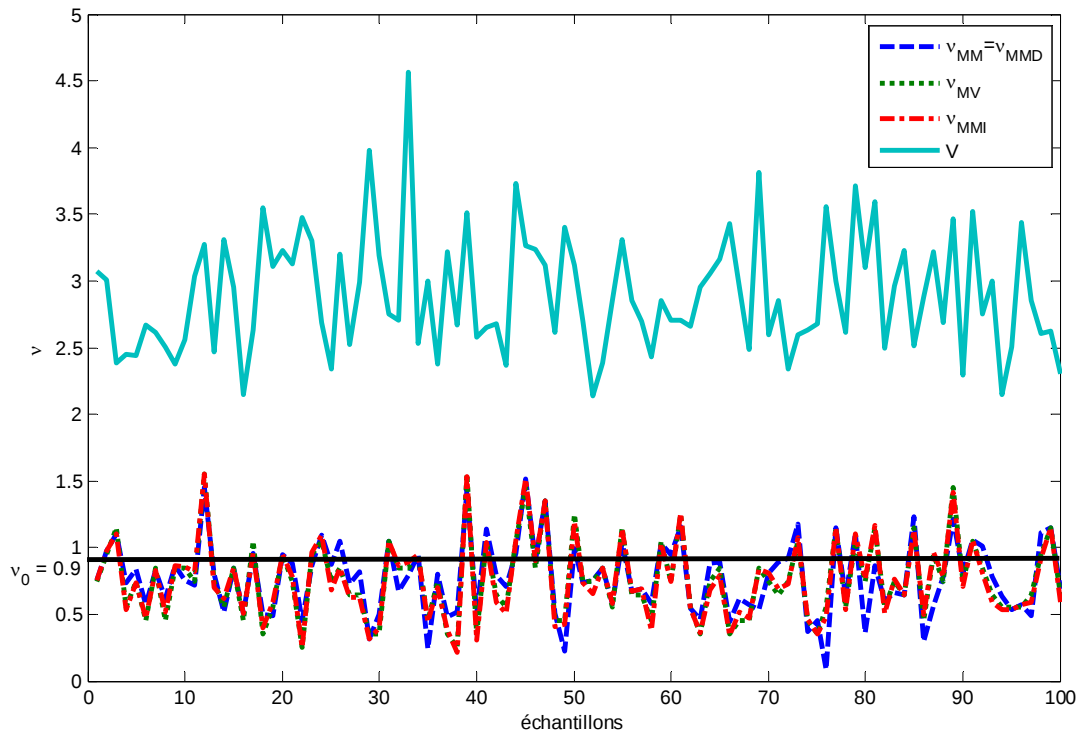


Figure 7 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HB (cas 2 et $n = 100$)

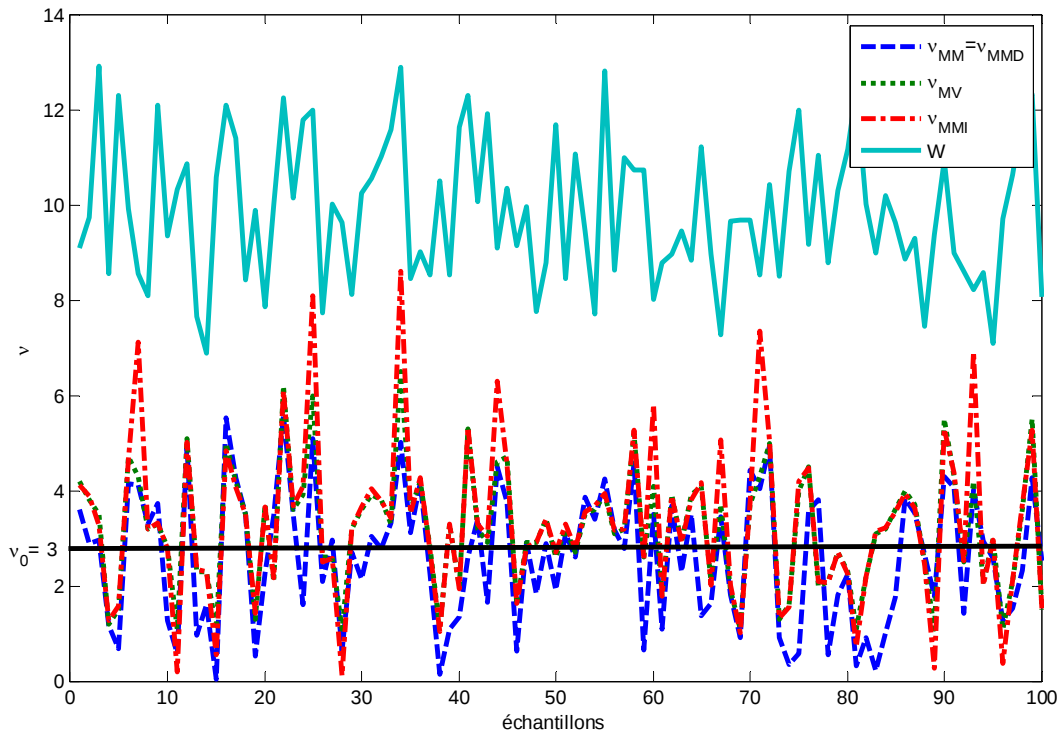


Figure 8 : Estimation de ν et son intervalle de variation empirique pour la loi HIB (cas 3 et $n = 100$)

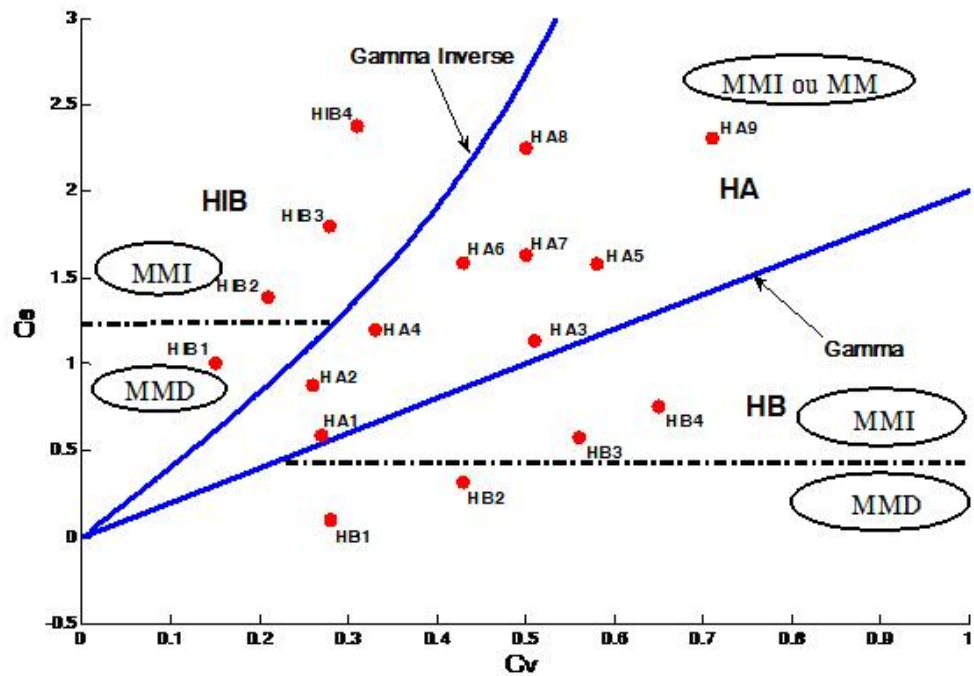


Figure 9 : Résumé des conclusions concernant les méthodes d'estimation des quantiles pour les lois de Halphen

Annexes :

Annexe A : Tableaux des valeurs réelles des quantiles et des paramètres, valeurs moyennes et écart-type pour les trois distributions de Halphen

Annexe B : Remarques sur les fonctions log-vraisemblance utilisées

Annexe C : Exemples illustratifs pour les étapes de l'algorithme de MMI et comparaison détaillée entre MV et MMI

Tableau A1 : Valeurs réelles des quantiles, valeurs moyennes et écart-type pour HA

		$n = 50$								$n = 100$							
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1	Q_T	$C_s = 0,59; C_v = 0,27$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 3,20; \nu = 10,9$															
10	507,5	516,5	516,7	516,6	516,7	24,4	24,4	24,4	24,4	511,0	511,1	511,0	511,1	17,3	17,3	17,2	17,3
100	655,2	686,3	686,6	686,4	686,5	52,1	51,5	52,2	51,7	666,4	666,9	666,5	666,8	34,8	34,7	34,9	34,8
200	694,3	733,6	733,7	733,7	733,7	64,5	63,3	64,6	63,6	708,4	708,9	708,4	708,8	42,2	41,9	42,3	42,0
cas 2		$C_s = 0,88; C_v = 0,26$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 7,00; \nu = -6,00$															
10	92,7	94,7	94,7	94,7	94,7	4,6	4,6	4,6	4,6	93,3	93,3	93,3	93,3	3,4	3,4	3,4	3,4
100	122,0	127,7	127,6	127,7	127,6	11,4	11,3	11,5	11,4	124,6	124,5	124,6	124,5	8,9	8,7	8,9	8,8
200	130,3	137,4	137,3	137,5	137,3	14,3	14,1	14,3	14,2	133,8	133,7	133,8	133,7	11,2	11,0	11,2	11,0
cas 3		$C_s = 1,14; C_v = 0,51$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 1,22; \nu = 2,82$															
10	466,1	471,1	472,0	471,8	472,0	37,6	37,6	37,6	37,6	471,1	471,5	471,4	471,5	27,5	27,5	27,5	27,5
100	715,6	759,4	760,9	761,2	760,9	92,9	91,6	93,7	91,7	743,1	744,3	743,8	744,3	65,4	65,2	65,7	65,1
200	785,9	845,5	847,0	847,8	847,0	116,9	114,4	118,4	114,4	822,0	823,5	823,0	823,5	80,2	79,8	80,7	79,7
cas 4		$C_s = 1,20; C_v = 0,33$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 4,00; \nu = -6,00$															
10	77,4	78,9	79,0	78,9	79,0	4,9	5,0	5,0	5,0	78,2	78,3	78,2	78,3	3,7	3,7	3,7	3,7
100	110,4	115,1	114,9	115,2	115,0	13,3	13,2	13,4	13,2	114,9	114,7	115,0	114,7	10,2	10,0	10,2	10,0
200	120,3	126,6	126,3	126,6	126,3	17,0	16,7	17,0	16,7	126,7	126,2	126,7	126,3	13,0	12,7	13,0	12,7
cas 5		$C_s = 1,58; C_v = 0,58$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 1,40; \nu = 0,40$															
10	231,7	231,5	232,1	232,0	232,1	23,1	23,3	23,3	23,3	230,5	231,1	231,0	231,1	16,8	16,8	16,8	16,8
100	389,9	398,8	400,5	400,6	400,5	62,5	63,3	63,9	63,3	392,7	394,1	394,2	394,1	46,4	46,3	47,2	46,2
200	437,3	451,4	453,3	453,6	453,4	79,7	80,6	81,6	80,6	442,7	444,2	444,6	444,2	59,1	58,7	60,3	58,7
cas 6		$C_s = 1,59; C_v = 0,43$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 2,40; \nu = -3,90$															
10	83,9	86,5	86,7	86,6	86,7	7,3	7,3	7,3	7,3	85,0	85,1	85,0	85,1	4,9	5,0	5,0	5,0
100	132,6	141,0	140,9	141,3	140,9	19,8	19,7	20,0	19,7	139,8	139,4	140,1	139,4	13,5	13,4	13,5	13,4
200	148,0	159,2	158,8	159,6	158,8	25,2	25,0	25,4	25,0	158,5	157,7	158,8	157,7	17,2	17,1	17,3	17,1
cas 7		$C_s = 1,63; C_v = 0,50$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 2,00; \nu = -1,50$															
10	131,6	134,9	135,1	135,0	135,1	11,5	11,5	11,5	11,6	133,9	134,2	134,1	134,2	8,5	8,5	8,5	8,5
100	216,0	226,1	226,3	226,7	226,3	30,8	30,6	31,2	30,6	225,6	225,6	226,3	225,6	23,6	23,3	23,8	23,2
200	242,1	255,5	255,6	256,2	255,6	39,7	39,3	40,2	39,3	255,4	255,1	256,3	255,1	30,8	30,1	31,1	30,1
cas 8		$C_s = 2,25; C_v = 0,50$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 1,20; \nu = -5,00$															
10	43,6	44,6	44,7	44,7	44,7	3,9	3,9	3,9	3,9	43,9	44,0	43,9	44,0	2,7	2,8	2,8	2,8
100	75,9	75,8	75,8	76,1	75,8	9,9	9,9	10,1	9,9	75,2	75,0	75,4	75,0	6,9	6,9	7,0	6,9
200	87,3	86,3	86,2	86,7	86,2	12,6	12,4	12,8	12,4	86,0	85,6	86,3	85,6	8,8	8,6	8,8	8,6
cas 9		$C_s = 2,31; C_v = 0,71$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 1,00; \nu = -1,00$															
10	152,5	148,1	149,1	148,9	149,1	17,9	18,1	18,1	18,1	148,4	149,2	149,1	149,2	12,4	12,7	12,6	12,7
100	297,2	281,5	283,5	284,8	283,5	55,6	56,3	57,5	56,2	284,2	285,9	287,1	285,9	40,2	40,4	42,0	40,4
200	344,9	326,5	328,5	330,8	328,5	73,3	73,7	76,3	73,8	329,8	331,5	333,6	331,5	53,9	53,6	56,6	53,6

Tableau A2 : Valeurs réelles des quantiles, valeurs moyennes et écart-type pour HB

		$n = 50$								$n = 100$								
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type				
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	
cas 1 $T =$	Q_T	Cs = 0,10; Cv = 0,28																
		$m = 100; \alpha = 4,00; \nu = 1,20$																
	10	317,8	319,6	318,6	318,1	318,5	13,2	13,1	13,1	13,2	318,5	318,1	317,7	318,0	9,4	9,3	9,3	9,4
	100	388,9	392,8	393,1	390,7	393,2	19,3	19,3	19,2	19,5	390,6	391,1	389,6	391,0	14,2	14,1	14,1	14,3
	200	405,9	410,5	411,2	408,3	411,3	21,1	21,0	20,8	21,4	408,2	408,7	407,0	408,8	15,7	15,4	15,4	15,8
cas 2 $T =$		Cs = 0,32; Cv = 0,43																
		$m = 100; \alpha = 2,00; \nu = 0,90$																
	10	218,2	217,0	216,6	216,5	216,7	13,0	12,8	12,9	12,8	217,0	216,9	216,9	216,8	9,2	9,1	9,1	9,1
	100	287,8	282,6	283,6	283,1	283,7	20,1	19,4	19,9	19,5	284,1	284,4	284,6	284,5	14,8	14,2	14,5	14,3
	200	304,7	298,6	299,7	299,2	299,9	22,0	21,2	21,8	21,3	300,3	300,7	301,0	301,0	16,4	15,6	16,1	18,9
cas 3 $T =$		Cs = 0,58; Cv = 0,56																
		$m = 100; \alpha = 1,00; \nu = 0,70$																
	10	166,6	163,8	163,3	163,7	163,3	12,5	12,3	12,4	12,3	164,8	164,5	164,8	164,5	8,8	8,8	8,8	8,8
	100	235,0	223,5	222,9	225,6	222,9	19,4	18,5	19,1	18,6	227,7	226,7	229,1	226,8	14,2	13,6	13,9	13,8
	200	251,7	238,2	237,5	242,1	237,5	26,0	26,4	48,9	27,9	243,6	241,7	245,2	242,1	31,5	15,0	27,6	23,9
cas 4 $T =$		Cs = 0,76; Cv = 0,65																
		$m = 100; \alpha = 0,50; \nu = 0,60$																
	10	141,2	137,4	136,9	137,4	136,8	12,0	11,9	11,9	11,9	138,8	138,4	138,8	138,4	9,0	9,0	9,0	9,0
	100	208,6	191,9	190,1	194,3	190,1	18,5	17,6	18,2	17,7	196,9	195,0	198,5	195,1	14,3	13,7	13,9	14,0
	200	225,1	209,7	202,9	209,1	202,9	64,5	19,0	37,3	19,1	211,8	210,2	217,0	210,0	30,6	39,5	53,3	32,0

Tableau A3 : Valeurs réelles des quantiles Q_T , valeurs moyennes et écart-type pour HIB

		$n = 50$								$n = 100$							
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		$Cs = 1,09; Cv = 0,17$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 6,00; \nu = 4,00$															
10	32,2	32,3	32,4	32,4	32,5	1,3	1,3	1,3	2,3	32,2	32,3	32,3	32,4	0,9	0,8	0,8	1,7
100	40,3	40,9	40,6	41,0	40,9	3,0	2,8	2,9	7,1	40,6	40,3	40,6	40,6	1,9	1,8	1,9	5,0
200	42,9	43,6	43,1	43,7	43,4	3,7	3,4	3,6	9,0	43,2	42,8	43,2	43,2	2,4	2,2	2,4	6,9
cas 2		$Cs = 1,42; Cv = 0,22$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 4,0; \nu = 3,60$															
10	43,7	44,2	44,3	44,3	44,2	2,1	2,1	2,1	2,1	43,8	43,8	43,8	43,8	1,4	1,4	1,4	1,4
100	58,5	60,7	59,7	60,7	59,6	5,7	5,1	5,6	5,2	59,3	58,7	59,3	58,7	3,9	3,6	3,8	3,6
200	63,3	66,4	64,8	66,4	64,6	7,5	6,4	7,3	6,5	64,6	63,6	64,6	63,6	5,1	4,5	4,9	4,6
cas 3		$Cs = 1,80; Cv = 0,26$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 3,20; \nu = 3,00$															
10	53,8	54,3	54,3	54,4	54,2	3,2	3,1	3,1	3,2	53,8	53,9	53,9	53,8	2,2	2,2	2,2	2,2
100	76,5	80,1	78,0	80,0	77,8	10,5	8,8	9,9	9,1	78,2	77,0	78,2	77,0	6,6	6,1	6,5	6,2
200	84,4	90,4	86,4	89,9	86,2	16,9	11,5	14,3	12,1	87,2	85,2	87,2	85,3	9,1	8,0	8,9	8,3
cas 4		$Cs = 2,38; Cv = 0,31$															
$T =$		$m = 100; \alpha = 3,00; \nu = 2,40$															
10	62,3	62,8	62,9	63,0	62,8	4,2	4,1	4,2	4,2	62,5	62,5	62,6	62,5	2,8	2,8	2,8	2,8
100	94,2	99,8	96,1	99,6	95,9	15,1	12,2	14,4	12,6	97,7	95,5	97,7	95,6	10,3	8,7	10,0	9,0
200	106,0	116,1	108,7	115,2	108,5	25,4	16,4	22,0	17,2	112,4	108,1	112,1	108,3	16,1	11,8	15,1	12,5

La moyenne et l'écart-type sont obtenus en utilisant les équations suivantes :

$$Moyenne = \frac{Q_T(BR + 1)}{100}$$

$$Ecart - type = \frac{Q_T \sqrt{REQMR^2 - BR^2}}{100}$$

Tableau A4 : Valeurs réelles des paramètres, valeurs moyennes et écart-type pour HA

		n = 50								n = 100							
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		Cs = 0,59; Cv = 0,27															
<i>m</i>	100	1054,12	790,31	940,46	600,39	4394,63	3084,52	2523,99	1365,83	472,64	360,77	479,32	306,79	1645,06	1893,27	1740,78	862,19
α	3,2	1,44	1,79	1,43	1,70	0,39	0,50	0,39	0,40	1,49	1,82	0,18	1,73	0,38	0,47	0,38	0,37
<i>V</i>	10,9	6,59	6,49	6,59	6,52	9,70	9,45	9,70	9,53	9,63	9,46	9,63	9,52	7,54	7,37	7,54	7,43
cas 2		Cs = 0,88; Cv = 0,26															
<i>m</i>	100	519,08	462,74	524,57	361,25	619,23	953,58	650,00	490,90	680,09	496,99	682,74	411,25	940,54	901,45	891,27	382,30
α	7	1,38	1,86	1,37	1,75	0,46	0,59	0,45	0,41	1,35	1,95	0,08	1,78	0,46	0,61	0,45	0,37
<i>V</i>	-6	-2,56	-2,46	-2,56	-2,48	-14,06	-13,78	-14,06	-13,88	-5,14	-4,98	-5,14	-5,03	-14,66	-14,37	-14,66	-14,49
cas 3		Cs = 1,14; Cv = 0,51															
<i>m</i>	100	209,68	197,55	211,49	197,10	271,13	173,61	291,11	169,65	152,09	152,51	151,95	152,53	97,04	94,07	97,98	93,84
α	1,22	1,33	1,35	1,32	1,35	0,36	0,35	0,36	0,35	1,33	1,34	0,38	1,34	0,36	0,36	0,36	0,36
<i>V</i>	2,82	1,38	1,36	1,38	1,37	2,13	2,03	2,13	2,03	1,91	1,88	1,91	1,88	1,62	1,58	1,62	1,58
cas 4		Cs = 1,20; Cv = 0,33															
<i>m</i>	100	321,48	252,55	321,23	232,42	387,19	454,82	357,22	242,76	430,09	316,69	404,89	285,52	1084,41	503,39	392,42	231,88
α	4	1,34	1,70	1,33	1,66	0,42	0,44	0,42	0,40	1,31	1,70	0,13	1,65	0,43	0,45	0,42	0,41
<i>V</i>	-6	-3,63	-3,49	-3,63	-3,50	-9,01	-8,75	-9,01	-8,79	-6,67	-6,45	-6,67	-6,47	-7,49	-7,28	-7,49	-7,32
cas 5		Cs = 1,58; Cv = 0,58															
<i>m</i>	100	140,43	135,04	142,03	135,75	187,47	117,55	200,32	129,25	118,87	115,90	119,52	115,98	82,09	65,24	85,59	65,64
α	1,4	1,26	1,26	1,25	1,26	0,31	0,31	0,31	0,31	1,29	1,30	0,28	1,30	0,27	0,25	0,27	0,25
<i>V</i>	0,4	0,18	0,18	0,18	0,17	1,94	1,87	1,94	1,87	0,33	0,32	0,33	0,32	1,63	1,54	1,63	1,54
cas 6		Cs = 1,59; Cv = 0,43															
<i>m</i>	100	182,81	156,12	185,48	158,67	184,85	122,02	193,26	136,67	241,71	191,32	244,59	195,05	215,09	122,72	218,81	142,55
α	2,4	1,40	1,52	1,38	1,52	0,39	0,38	0,39	0,38	1,35	1,51	0,22	1,51	0,42	0,40	0,42	0,40
<i>V</i>	-3,9	-2,87	-2,77	-2,87	-2,77	-4,70	-4,52	-4,70	-4,52	-4,69	-4,49	-4,69	-4,49	-3,40	-3,28	-3,40	-3,28
cas 7		Cs = 1,63; Cv = 0,50															
<i>m</i>	100	143,21	129,94	145,14	131,42	184,32	121,71	192,36	131,02	153,35	136,07	155,33	138,49	167,18	104,88	174,34	138,92
α	2	1,47	1,50	1,46	1,49	0,35	0,33	0,35	0,33	1,53	1,57	0,25	1,57	0,34	0,30	0,34	0,30
<i>V</i>	-1,5	-0,85	-0,82	-0,85	-0,83	-3,02	-2,92	-3,02	-2,92	-1,43	-1,36	-1,43	-1,36	-2,77	-2,64	-2,77	-2,64
cas 8		Cs = 2,25; Cv = 0,50															
<i>m</i>	100	80,26	73,95	81,46	75,69	63,53	56,12	65,45	67,18	105,92	83,87	107,72	85,50	103,44	49,72	107,94	60,82
α	1,2	1,41	1,48	1,39	1,48	0,38	0,38	0,38	0,39	1,35	1,47	0,43	1,47	0,41	0,37	0,41	0,37
<i>V</i>	-5	-3,13	-3,02	-3,13	-3,02	-3,11	-2,97	-3,11	-2,97	-4,28	-4,09	-4,28	-4,09	-1,95	-1,86	-1,95	-1,86
cas 9		Cs = 2,31; Cv = 0,71															
<i>m</i>	100	109,14	102,69	111,98	103,47	87,77	77,45	95,12	85,42	108,62	103,48	110,56	104,16	77,07	64,50	82,38	74,37
α	1	0,99	1,00	0,97	1,00	0,28	0,27	0,29	0,27	1,01	1,01	0,27	1,01	0,22	0,21	0,23	0,21
<i>V</i>	-1	-0,51	-0,47	-0,51	-0,47	-1,56	-1,45	-1,56	-1,45	-0,74	-0,71	-0,74	-0,70	-1,18	-1,11	-1,18	-1,11

Tableau A5 : Valeurs réelles des paramètres, valeurs moyennes et écart-type pour HB

		<i>n</i> = 50								<i>n</i> = 100							
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		Cs = 0,10; Cv = 0,28															
<i>m</i>	100	105,51	111,50	104,75	114,39	14,94	15,24	15,01	22,76	104,05	107,47	103,67	108,53	13,45	13,26	13,47	16,98
<i>α</i>	4	3,53	2,68	3,55	2,38	1,47	1,51	1,50	2,33	3,59	3,10	2,10	2,99	1,47	1,43	1,48	1,83
<i>V</i>	1,2	1,42	1,93	1,42	2,04	0,97	1,02	0,97	1,27	1,40	1,71	1,40	1,75	0,91	0,88	0,91	1,00
cas		Cs = 0,32; Cv = 0,43															
<i>m</i>	100	92,88	95,24	94,26	96,30	15,56	14,15	15,43	19,00	95,90	96,56	96,91	97,36	13,17	12,06	12,79	16,37
<i>α</i>	2	2,59	2,38	2,50	2,31	1,06	0,97	1,04	1,31	2,30	2,26	1,47	2,20	0,93	0,87	0,90	1,14
<i>V</i>	0,9	0,75	0,81	0,75	0,82	0,35	0,36	0,35	0,41	0,84	0,84	0,84	0,84	0,29	0,30	0,29	0,33
cas		Cs = 0,58; Cv = 0,56															
<i>m</i>	100	84,93	82,96	88,41	83,57	13,60	11,66	13,21	16,28	90,37	87,52	92,77	88,78	10,80	9,87	10,17	17,73
<i>α</i>	1	1,78	2,01	1,59	1,98	0,72	0,67	0,66	0,91	1,46	1,74	1,22	1,67	0,53	0,56	0,48	0,99
<i>V</i>	0,7	0,65	0,56	0,65	0,56	0,14	0,18	0,14	0,19	0,68	0,59	0,68	0,60	0,11	0,14	0,11	0,17
cas		Cs = 0,76; Cv = 0,65															
<i>m</i>	100	77,32	72,95	81,39	73,29	11,87	9,80	11,14	12,24	83,21	78,35	85,92	80,72	9,66	8,93	8,60	22,59
<i>α</i>	0,5	1,51	1,96	1,28	1,93	0,55	0,54	0,46	0,76	1,22	1,66	1,63	1,53	0,38	0,48	0,32	1,23
<i>V</i>	0,6	0,60	0,46	0,60	0,46	0,08	0,13	0,08	0,15	0,60	0,48	0,60	0,49	0,06	0,10	0,06	0,14

Tableau A6 : Valeurs réelles des paramètres, valeurs moyennes et écart-type pour HIB

		<i>n</i> = 50								<i>n</i> = 100							
		Moyenne				Écart-type				Moyenne				Écart-type			
		MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI	MM	MV	MMD	MMI
cas 1		Cs = 1,09; Cv = 0,17															
<i>m</i>	100	94,35	85,33	95,19	82,57	12,89	10,33	12,98	13,23	96,52	90,16	96,94	89,01	11,51	10,08	11,56	12,56
<i>α</i>	6	4,83	2,21	4,87	1,30	2,50	2,32	2,53	3,55	5,22	3,47	3,10	3,18	2,49	2,25	2,50	2,86
<i>V</i>	4	4,95	7,64	4,95	8,21	3,17	3,32	3,17	4,15	4,56	6,45	4,56	6,57	2,81	2,52	2,81	2,86
cas 2		Cs = 1,42; Cv = 0,22															
<i>m</i>	100	100,51	92,72	101,41	91,30	13,91	12,47	14,08	14,57	103,15	97,80	103,61	97,59	12,81	11,56	12,88	12,89
<i>α</i>	4	4,35	2,63	4,38	2,22	2,04	1,91	2,06	2,81	4,57	3,44	3,22	3,34	2,07	1,94	2,09	2,38
<i>V</i>	3,6	2,99	4,47	2,99	4,67	1,92	1,88	1,92	2,34	2,95	3,98	2,95	4,00	1,88	1,73	1,88	1,96
cas 3		Cs = 1,80; Cv = 0,26															
<i>m</i>	100	103,96	96,39	104,84	94,58	14,64	12,84	14,87	16,18	105,36	100,39	105,78	100,00	13,11	11,64	13,20	13,41
<i>α</i>	3,2	3,91	2,51	3,94	2,02	1,84	1,69	1,87	2,82	4,00	3,11	3,53	2,98	1,79	1,65	1,81	2,18
<i>V</i>	3	2,33	3,39	2,33	3,59	1,50	1,41	1,50	1,85	2,33	3,03	2,33	3,07	1,40	1,27	1,40	1,50
cas 4		Cs = 2,38; Cv = 0,31															
<i>m</i>	100	103,51	96,28	104,34	94,94	15,09	12,88	15,34	15,89	104,76	100,26	105,15	99,95	13,13	11,61	13,28	13,99
<i>α</i>	3	3,57	2,38	3,59	2,02	1,66	1,46	1,69	2,50	3,61	2,91	3,02	2,78	1,65	1,48	1,66	2,12
<i>V</i>	2,4	1,91	2,72	1,91	2,84	1,17	1,08	1,17	1,43	1,92	2,41	1,92	2,43	1,14	0,98	1,14	1,20

La moyenne et l'écart-type sont obtenus en utilisant les équations suivantes :

$$\text{Moyenne} = \frac{\theta(BR + 1)}{100}$$

$$\text{Ecart - type} = \frac{\theta \sqrt{REQMR^2 - BR^2}}{100}$$

Annexe B : Remarques sur les fonctions log-vraisemblance utilisées

La fonction log-vraisemblance de la méthode MV utilise la forme théorique des moments (cf. Équations 25, 29 et 33) alors que dans la méthode MMI elle utilise la forme empirique de ces moments (indiquée ci-dessous). Cette dernière est plus explicite et n'utilise pas d'approximation des fonctions exponentielle factorielle ou de Bessel. Dans cette annexe nous montrons les différences entre les deux approches.

Pour la distribution HA, la méthode MV telle que définie dans Perreault et al. (1997) est basée sur la fonction log-vraisemblance donnée par l'équation (25) qui correspond à l'équation (3.30) dans Perreault *et al.* (1997). Par contre la méthode MMI proposée dans ce rapport est basée sur la forme empirique suivante :

$$\ln L_{HA}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{G^{\nu-1}}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} \right] - \alpha \left(\frac{A}{m} + \frac{m}{H} \right) \right\} \quad (B1)$$

qui correspond à l'équation (3.28) dans Perreault *et al.* (1997).

De même pour HB, la méthode MV dans Perreault *et al.* (1997) est basée sur la fonction donnée par l'équation (29) et correspond à l'équation (4.27) dans Perreault *et al.* (1997). La méthode MMI est basée sur la forme empirique suivante :

$$\ln L_{HB}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{2G^{2\nu-1}}{m^{2\nu} e f_\nu(\alpha)} \right] - \frac{Q}{m^2} + \alpha \frac{A}{m} \right\} \quad (B2)$$

qui correspond à l'équation (4.26) dans Perreault *et al.* (1997).

De façon similaire à HA et HB, pour HIB la fonction log-vraisemblance servant à définir la méthode MV est donnée par l'équation (33) (correspond à l'équation 5.21 dans Perreault *et al.*, 1997) et celle utilisée pour la méthode MMI est donnée par :

$$\ln L_{HIB}(\nu | \alpha, m) = n \left\{ \ln \left[\frac{2m^{2\nu}}{G^{2\nu+1} ef_{\nu}(\alpha)} \right] - m^2 \frac{1}{IQ} + \alpha m \frac{1}{H} \right\} \quad (B3)$$

qui correspond à l'équation (5.20) dans Perreault *et al.* (1997).

Bien que la forme empirique de la fonction log-vraisemblance est la plus plausible, des simulations montrent que les résultats de la méthode MV basée sur l'une ou l'autre des deux fonctions sont quasi-identiques en particulier au niveau de l'estimation des quantiles. A titre d'exemple, on a considéré les cas 1 et 4 de HB pour des simulation de $N=1000$ échantillons dont les résultats sont présentés dans la Table B1.

Table B1 : BR (%) et REQME (%) des paramètres et quantiles de la loi HB avec la méthode MV basée sur les fonctions (29) et (B2)

		n=50				n=100			
		BR		REQME		BR		REQME	
		MV (efact)	MV (emp.)	MV (efact)	MV (emp.)	MV (efact)	MVE (emp.)	MV(efact)	MV (emp.)
Cas1									
Cs = 0,10; Cv = 0,28									
m = 100; $\alpha = 4,00$; $\nu = 1,20$									
m		11.58	11.58	19.01	19.02	7.61	7.58	15.01	14.94
α		-32.87	-32.85	49.57	49.52	-24.55	-24.48	43.56	43.40
ν		60.16	60.13	101.74	101.65	48.81	48.72	90.88	90.66
Q10		0.26	0.26	4.08	4.08	-0.08	-0.08	2.85	2.84
Q100		1.13	1.13	5.02	5.02	0.39	0.39	3.50	3.50
Q200		1.32	1.32	5.26	5.26	0.50	0.50	3.68	3.68
Cas 4									
Cs = 0,76; Cv = 0,65									
m = 100; $\alpha = 0,50$; $\nu = 0,60$									
m		-27.34	-27.33	29.03	29.03	-21.45	-21.45	23.13	23.13
α		290.43	290.32	310.16	310.12	228.99	228.88	248.12	248.05
ν		-23.22	-23.20	31.70	31.70	-19.55	-19.53	25.48	25.46
Q10		-3.44	-3.44	9.13	9.13	-2.09	-2.09	6.36	6.36
Q100		-9.22	-9.21	12.49	12.49	-6.56	-6.56	9.03	9.03
Q200		-10.23	-10.23	13.27	13.27	-7.09	-7.08	12.96	12.95

MV(efact) et MV(emp.) représentent les méthodes MV basées respectivement sur les fonctions log-vraisemblance (29) et (B2)

Annexe C : Exemples illustratifs

Dans cette annexe nous présentons en détails les résultats des méthodes MV et MMI sur un seul échantillon. Pour chacune des lois de Halphen, les échantillons sont générés avec les paramètres appropriés.

L'échantillon de HA avec $n = 100$ et paramètres du cas 5 ($\nu = 0,4$; $\alpha = 1,4$ et $m = 100$)

[87.4744 172.3700 258.4238 232.0816 76.7386 60.8630 134.9708 49.7754 91.6140 212.4227 107.3653 65.9166 59.1395 167.1368 220.9797 159.8605 35.0660 112.4570 122.9242 273.0957 189.4379 87.4265 113.2004 271.8790 125.0113 92.1476 139.7605 56.7102 169.7091 137.2213 38.4489 186.7733 194.8787 101.0898 64.8725 32.2349 70.1402 165.0278 66.5217 85.1087 141.8603 110.0860 121.0671 113.9778 156.4082 145.4230 52.6261 159.5154 43.2255 117.7985 336.5367 112.5985 149.6070 340.8644 101.6988 285.6039 146.5215 127.4530 155.0371 113.1586 65.9294 30.0765 165.8768 116.1398 113.7146 99.8673 127.1732 62.0902 41.3235 420.9106 109.7810 169.9864 143.8717 126.6109 64.1618 167.6902 104.5571 83.2454 52.0438 52.5971 223.2742 159.7803 120.2837 96.1661 113.7906 62.9253 83.1711 58.8833 133.6421 83.6819 206.0287 101.6792 129.4789 358.6560 55.1456 55.5811 48.1984 43.6318 108.6859 242.8571]

Les bornes de l'intervalle de variation de ν pour MV sont -3,5678 et 3,6678. Notons que la première valeur de $\nu = -3,6678$ ne permet pas d'obtenir une valeur de α . Les estimateurs par la méthode des moments sont :

$$\nu_{MM} = 0,3752 ; \alpha_{MM} = 1,3564 \text{ et } m_{MM} = 97,9736.$$

	ν	α	m	log-vraisemblance
a)	-3,5678	0,2916	1160,4000	-5,585321
	-3,4678	0,4132	804,0000	-5,583568
	...	...	...	...
	..	...	...	...
	0,1322	1,3466	105,7000	-5,552355
	0,2322	1,3447	102,4000	-5,552227
	0,3322	1,3416	99,2000	-5,552136
	0,4322	1,3375	96,1000	-5,552083
	0,5322	1,3322	93,0262	-5,552067
	0,6322	1,3259	90,1000	-5,552089
	0,7322	1,3184	87,2000	-5,552149
	...	...	...	...
	..	...	...	...
	3,5322	0,3400	12,3000	-5,570780
	3,6322	0,1739	6,2000	-5,572185
b)	0,2322	1,3447	102,3944	-5,552263
	0,3322	1,3416	99,1871	-5,552171
	0,4322	1,3375	96,0660	-5,552117
	0,5322	1,3322	93,0248	-5,552100
	0,6322	1,3259	90,0579	-5,552121
c)	0,3752	1,3400	97,8341	-5,552143
	0,4752	1,3354	94,7481	-5,552105
	0,5752	1,3296	91,7396	-5,552104
	0,6752	1,3228	88,8029	-5,552142

Table C1 : Les étapes de la méthode MV et MMI pour l'échantillon précédent: a) MV avec 72 itérations, b) MMI avec une valeur initiale de ν faisant partie de la grille des points utilisés dans MV et c) MMI avec une valeur initiale de ν égale à $\nu_{MM} = 0,3752$ qui ne fait pas partie de la grille des points utilisés dans MV. Les valeurs en gras représentent les estimateurs respectifs.

L'échantillon de HB avec $n = 99$ et paramètres du cas 1 ($\nu = 1,2$; $\alpha = 4,0$ et $m = 100$)

[228.3822 188.4217 161.9861 281.7217 121.2402 210.0405 54.2632 244.3935 339.6433 195.1980 341.9216 329.0542 133.2630 317.7982 186.4910 188.1255 267.2036 263.3163 257.0279 307.2999 130.9550 259.1106 231.4528 227.1515 273.2846 288.1237 273.0206 178.1462 122.0477 228.7780 289.1755 220.6757 212.9758 198.7759 151.2403 261.2134 209.1465 273.1257 309.4039 308.6319 156.1430 194.2265 110.3412 303.9581 170.2411 319.0253 450.2478 248.5494 187.4536 276.9101 133.3239 222.0434 164.6793 216.4860 292.1788 196.4304 115.9225 265.1182 334.4114 139.6624 323.3085 227.8913 170.1938 173.1291 197.9541 221.3584 217.4062 132.2721 291.2179 293.1416 308.4715 230.9981 223.3216 320.2448 220.4603 373.5746 419.8440 340.3027 259.2353 238.5690 164.2153 221.9277 135.6396 206.3818 161.3671 311.5640 263.7669 310.9888 211.6430 236.5693 301.4626 236.9744 180.1766 94.7956 216.2574 213.2666 130.2434 215.0242 312.7777]

Les bornes de l'intervalle de variation de ν pour MV sont 0,05 et 2,65. Notons que la borne théorique est $V = 5,2302$. Les valeurs de ν entre 2,70 et V ne permettent pas de calculer α ou conduisent à des valeurs négatives de α ce qui cause des problèmes numériques au niveau des calculs des quantiles. Les estimateurs par la méthode des moments sont : $\nu_{MM} = 1,5654$, $\alpha_{MM} = 2,6553$ et $m_{MM} = 120,072$.

	ν	α	m	log-vraisemblance
a)	0,05	5,4208	93,4983	-5,708117
	0,15	5,1605	96,6128	-5,701197
	...	...	...	...
	..	...	...	...
	1,25	3,2596	113,9212	-5,692127
	1,35	3,0750	115,6471	-5,691984
	1,45	2,8865	117,4294	-5,691895
	1,55	2,6940	119,2733	-5,691857
	1,65	2,4971	121,1838	-5,691867
	1,75	2,2954	123,1667	-5,691923
	1,85	2,0888	125,2280	-5,692022
	...	...	...	...
	..	...	...	...
	2,55	0,4643	142,4977	-5,693789
	2,65	0,2001	145,4911	-5,694179
b)	1,35	3,0750	115,6471	-5,691979
	1,45	2,8865	117,4294	-5,691890
	1,45	2,8865	117,4294	-5,691890
	1,55	2,6940	119,2733	-5,691853
	1,65	2,4971	121,1838	-5,691863
c)	1,5654	2,6640	119,5623	-5,691851
	1,6654	2,4664	121,4836	-5,691868
	1,5654	2,6640	119,5623	-5,691851
	1,4654	2,8572	117,7086	-5,691881

Table C2 : Les étapes de la méthode MV et MMI pour l'échantillon précédent : a) MV avec 37 itérations, b) MMI avec une valeur initiale de ν faisant partie de la grille des points utilisés dans MV et c) MMI avec une valeur initiale de ν égale à $\nu_{MM} = 1,5654$ qui ne fait pas partie de la grille des points utilisés dans MV. Les valeurs en gras représentent les estimateurs respectifs

L'échantillon de HIB avec $n = 100$ et paramètres du cas 4 ($\nu = 2,4$; $\alpha = 3,0$ et $m = 100$)

[60.9207 40.5963 54.0875 46.8124 75.6537 35.5787 44.5491 41.6954 30.1627 26.2059 39.7377 52.0898 32.4866 49.0869 63.6566 40.1469 51.2245 36.6210 47.4219 52.8581 115.4969 32.0347 56.5047 42.9765 36.4249 35.4711 51.0092 65.1795 45.5395 32.2586 30.7626 44.3978 30.6708 41.3372 30.1745 32.8854 37.4800 55.9476 42.0727 55.2327 116.0231 42.8191 48.2426 28.5739 43.9449 34.2715 80.3985 64.1380 53.4929 94.6015 47.4657 47.7347 50.4868 31.5877 59.4911 71.1327 29.9674 52.7075 42.9728 45.9859 35.1620 44.8633 48.5448 29.5622 49.3399 52.3423 71.6478 54.2115 71.5975 32.1532 75.1476 34.1064 35.3800 34.7294 43.8705 34.5291 38.5580 58.1975 42.0349 36.3868 48.3101 45.4852 48.0264 39.5570 50.7162 104.0084 69.4574 44.5204 30.0278 82.5275 44.9987 48.0138 36.7149 71.7438 32.3266 45.6559 52.3865 49.2287 56.6869 69.7486]

Les bornes de l'intervalle de variation de ν pour MV sont 1,10 et 3,10. Notons que la borne théorique est $W = 6,0415$. Les valeurs de ν entre 3,20 et W ne permettent pas d'obtenir α ou conduisent à des valeurs négatives de α ce qui cause des problèmes numériques au niveau des calculs des quantiles. Les estimateurs par la méthode des moments sont : $\nu_{MM} = 1,347$; $\alpha_{MM} = 3,6121$ et $m_{MM} = 99,0108$.

	ν	α	m	log-vraisemblance
a)	1,10	3,9863	101,8197	-4,058208
	...	...	...	...
	...	...	...	...
	1,60	3,1602	95,6758	-4,057228
	1,70	2,9861	94,4374	-4,057133
	1,80	2,8086	93,1935	-4,057067
	1,90	2,6275	91,9434	-4,057030
	2,00	2,4426	90,6862	-4,057020
	2,10	2,2537	89,4211	-4,057036
	...	...	...	...
	...	...	...	...
	3,00	0,3223	77,5515	-4,058240
	3,10	0,0750	76,1630	-4,058481
b)	1,60	3,1602	95,6758	-4,057047
	1,70	2,9861	94,4374	-4,056956
	1,80	2,8086	93,1935	-4,056895
	1,90	2,6275	91,9434	-4,056863
	2,00	2,4426	90,6862	-4,056857
	2,10	2,2537	89,4211	-4,056878
c)	1,347	3,5867	98,7905	-4,057419
	1,447	3,4204	97,5617	-4,057246
	1,547	3,2511	96,3299	-4,057108
	1,647	3,0787	95,0940	-4,057001
	1,747	2,9031	93,8532	-4,056924
	1,847	2,7239	92,6064	-4,056876
	1,947	2,5411	91,3531	-4,056857
	2,047	2,3543	90,0923	-4,056864

Table C3 : Les étapes de la méthode MV et MMI pour l'échantillon précédent: a) MV avec 21 itérations, b) MMI avec une valeur initiale de ν faisant partie de la grille des points utilisés dans MV et c) MMI avec une valeur initiale de ν égale à $\nu_{MM} = 1,347$ qui ne fait pas partie de la grille des points utilisés dans MV. Les valeurs en gras représentent les estimateurs respectifs.