L'AXIOMATIQUE

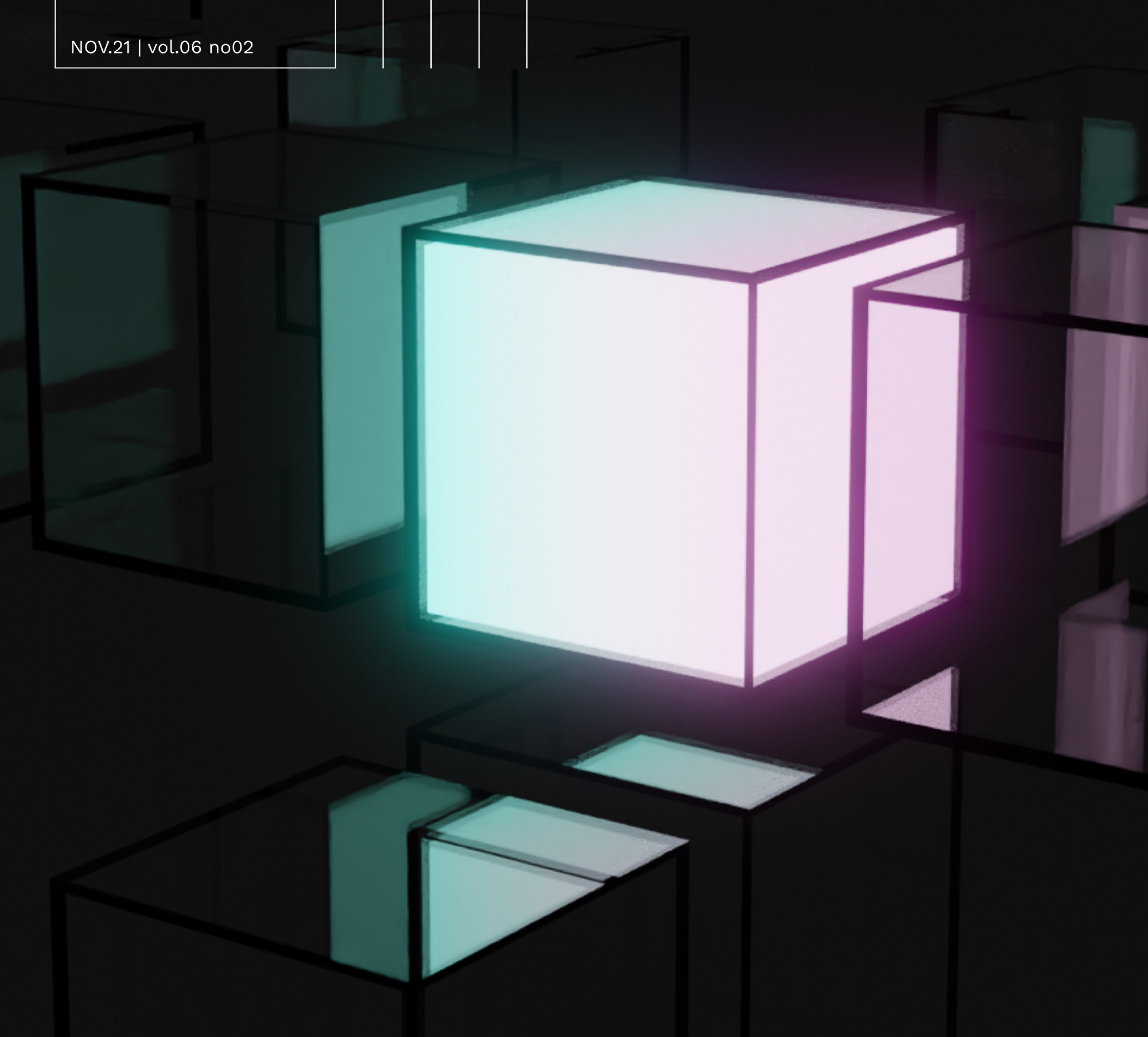
NOV.21 | vol.06 no02

PROMATHATION

6 QUESTIONS À M. PHILIPPE GAGNON

L'IA ET LES RISQUES

ENSEMBLE DE CANTOR



ÉQUIPE

RÉDACTEUR EN CHEF
PIERRE-OLIVIER PRUD'HOMME

GRAPHISME
PIERRE-ALEXANDRE MAILHOT
LEON CARLOS NAVARRO CAMPILLO

CHRONIQUES
EVENSON AUGUSTE
ANNE CLÉROUX
JONATHAN GODIN
BÉATRICE HAJJAR
JULIEN HÉBERT-DOUTRELOUX
SIMON LUANGXAY
ÉLOI MARTIN
BLANCHE MONGEON
MATHIEU PINEAULT

CONTACT

COURRIEL
LAXIOMATIQUE@GMAIL.COM

SITE WEB
LAXIOMATIQUE.COM

FACEBOOK
FACEBOOK.COM/LAXIOMATIQUE

SOMMAIRE

CETTE ÉDITION EST RÉALISÉE GRÂCE À L'APPUI FINANCIER REÇU DE

LA FÉDÉRATION DES ASSOCIATIONS ÉTUDIANTES DU CAMPUS DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FAÉCUM

| LE MOT DE LA RÉDACTION

EH OUI C'EST DÉJÀ LA FIN...

Nononon pas la fin du journal!

Mais la fin de mon implication dans le journal. Ce projet de Linda, que j'ai repris avec une toute petite équipe au départ, maintenant ne cesse de croître. Cela fait maintenant deux ans que ce projet me rend fier. Fier des étudiantes et des étudiants que j'ai eu la chance de lire et de découvrir. Fier de leur curiosité, de leur implication, de leur désir de s'améliorer, de leur désir de vous partager ce qui les passionnent, de leur ouverture. Ce projet m'a ouvert les yeux sur tout plein d'aspects liés, de près ou de loin, aux mathématiques. Je voulais juste remercier tout ceux et celles qui ont participé au journal.

Vous m'avez fait *trippé*.

C'est Simon qui va reprendre le journal. Je vous laisse entre de très bonnes mains. Je sais que Simon va faire ça comme un champion. J'espère que vous allez encore plus apprécier le journal.

Bonne continuation et bonne lecture!

PIERRE-OLIVIER PRUD'HOMME,
RÉDACTEUR EN CHEF

| CLUBMATH DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FIN SEPTEMBRE ET OCTOBRE 2021 AU CLUBMATH

Le dernier mois a été occupé au Clubmath alors que trois superbes conférences nous ont été présentées. Si Christian Côté avait ouvert le bal en septembre en nous expliquant le côté mathématique de la jonglerie, c'est Christiane Rousseau qui a enchaîné en nous parlant de partage équitable. Bien que l'idée puisse sembler simple – partager un bien à l'amiable, sans jalousie et équitablement – la réalité est en fait plus complexe que cela et fait appel au fameux lemme de Sperner. Élise Davignon a ensuite poursuivi en nous présentant les treize livres des Éléments d'Euclide, soit le texte qui a fondé les mathématiques comme on les connaît aujourd'hui.

Puis, c'est François Lalonde qui, le 6 octobre, nous a fait une histoire concise et conceptuelle des mathématiques. Il nous a présenté les grandes contributions de Descartes qui agit comme élément de rupture dans l'évolution de la discipline mathématique; avant Descartes, il y avait les mathématiques. Après Descartes, il y avait la mathématique. Lalonde s'est ensuite concentré sur Zénon d'Élée et ses paradoxes, et sur Eudoxe et le calcul infinitésimal. Finalement, il a abordé le sujet d'Archimède et de ses deux lois, et de Galilée qui a démontré que la vitesse de chute d'un objet est indépendante de sa masse dans le vide. Il va sans dire que ce retour en arrière nous a fait encore plus apprécier la discipline des mathématiques et le riche héritage de ceux et celles qui l'ont étudiée avant nous.

Nous vous avons prévu, pour le mois de novembre, des conférences qui s'annoncent des plus intéressantes. Le 3 novembre, c'est Florian Maire, professeur adjoint au Département de mathématiques et de statistique, qui se joindra à nous. Il abordera le sujet de l'apprentissage en ligne, soit l'apprentissage lorsque, à chaque instant, un seul bit d'information est disponible et tout ce qui est arrivé avant a disparu. Il discutera entre autres de l'approximation stochastique et des algorithmes que cette technique permet de construire. Le 17 novembre, ce sera au tour de Mia Brunetti, étudiante au doctorat en mathématiques appliquées au DMS, de venir nous voir. Elle parlera de l'application des mathématiques dans la recherche contre le cancer et présentera des exemples de modèles mathématiques fréquemment utilisés. Une chose est sûre : ces conférences sont à ne pas manquer!

On vous rappelle que les conférences ont lieu les mercredis de 12h30 à 13h30 au 1140 André-Aisenstadt, et qu'il vous est possible d'apporter votre propre lunch si vous désirez manger. Si jamais il vous est impossible de vous déplacer, sachez que toutes les conférences sont aussi disponibles en écoute différée sur notre chaîne YouTube. De plus, chaque semaine, la bibliothécaire sélectionne des livres portant sur le sujet de la conférence et les mets à la disposition des étudiant.e.s à l'entrée de la bibliothèque de mathématiques et d'informatique. Allez y jeter un coup d'œil!

dms.umontreal.ca/~clubmath/
www.facebook.com/clubmath.dms/
www.youtube.com/channel/UCpv-KeFLlZiMTqqx0ErcFMw

BLANCHE MONGEON, AU NOM DU COMITÉ ORGANISATEUR DU CLUBMATH

QUESTIONS À M. PHILIPPE GAGNON

Comment avez-vous entendu parler de l'actuariat et pourquoi avez-vous choisi ce domaine pour vos études de 1er cycle?

C'est un peu drôle et paradoxal, car, à la base, je ne pensais pas poursuivre mes études jusqu'au doctorat. Au CÉGEP, j'aimais bien les mathématiques, la statistique et la physique, surtout la physique. Cependant, je voyais que pour faire quelque chose qui m'intéresserait en physique, j'allais devoir faire de longues études, ce qui ne m'intéressait vraiment pas à ce moment-là. Finalement, j'ai choisi l'actuariat, car les opportunités d'emploi arrivaient plus rapidement dans le parcours, mais j'ai quand même fait un doctorat.

Qu'est-ce qui vous a mené à la recherche et l'enseignement?

J'ai commencé le baccalauréat et j'ai continué à aimer les cours de mathématiques et de statistique. Ensuite, j'ai fait un stage et j'ai réalisé que, sur le marché du travail en actuariat, on pouvait faire des tâches qui ressemblent à de l'administration. Puis, je me suis posé la question suivante : «Est-ce que je suis prêt à mettre de côté tout ce que j'aime du Bacc. et à aller sur le marché du travail?» La réponse était non. Je voulais me trouver un emploi qui me permettrait de faire plus de math et plus de statistique, j'ai donc continué à la maîtrise. Après la maîtrise, le constat était resté inchangé quant aux possibilités sur le marché du travail. Avec une maîtrise en statistique, par exemple, les gens vont peut-être faire davantage des analyses avec des logiciels : ça ne me convenait pas non plus. J'ai donc continué au doctorat.

Quels sont vos projets de recherche actuels?

Présentement, je me concentre sur deux axes de recherche ayant en commun la statistique bayésienne. Plus précisément, je m'intéresse à des méthodes numériques, soit celles de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC en anglais), et à la robustesse de modèles face aux valeurs aberrantes. En ce qui concerne le premier axe, dans la vraie vie, on ne peut pas vraiment faire les choses à la main. Donc, ces méthodes en statistique bayésienne permettent de trouver des solutions numériques aux problèmes d'estimation. D'ailleurs, j'avais fait un Club-Math à l'automne 2020 à ce sujet. Quoique ces deux concentrations de recherches sont assez différentes, les connaissances acquises dans l'une servent dans l'autre et vice-versa. En effet, dans la partie robustesse, on a besoin d'estimer les modèles, donc mes connaissances en MCMC sont utiles pour cela et, dans la partie MCMC, j'utilise les exemples théoriques de l'autre axe pour venir supporter les méthodes développées.

Comment pensez-vous que vos travaux de recherche impacteront la pratique?

En actuariat, je travaille sur un projet actuellement avec une étudiante à la maîtrise, Yuxi Wang. Nous travaillons sur des versions robustes des modèles linéaires généralisés (GLM en anglais). Plus précisément, nous considérons que les variables à modéliser suivent une distribution gamma, c'est ce qu'on appelle un modèle GLM gamma. Le problème avec ce type de distribution réside dans les ailes : celles-ci tendent rapidement vers 0. Donc, le modèle n'est pas adapté pour les valeurs aberrantes : il trouve un juste milieu entre celles-ci et la majorité des valeurs, ce qui donne un résultat qui ne représente pas vraiment les données. En fait, nous travaillons à modifier les ailes de la distribution tout en conservant la majeure partie du modèle gamma, ce qui permet d'inclure la possibilité d'avoir des valeurs extrêmes. Il existe des résultats théoriques intéressants concernant ce type de modèle, entre autres, cette modélisation permet d'éliminer ces valeurs aberrantes, ce qui est souhaitable en pratique. Par exemple, on peut utiliser un modèle GLM gamma pour représenter les valeurs des montants de réclamation d'assurance. Supposons qu'il y ait des valeurs extrêmes dans ce jeu de données. Si l'on n'utilise pas le modèle robuste, la réponse obtenue ne serait pas nécessairement cohérente, alors que si l'on utilise un modèle robuste, comme celui qu'on propose, la réponse sera cohérente.

Très peu d'étudiant.e.s en actuariat optent pour une carrière en recherche, croyez-vous que c'est problématique? Comment cette proportion pourrait-elle être augmentée?

Je ne crois pas nécessairement que c'est problématique si c'est ce que les étudiant.e,s veulent. Si s'attarder longtemps et en profondeur à un problème n'est pas ce qui les intéresse, il n'y a pas de mal à ça. Cependant, la problématique, je crois qu'elle vient plutôt de la faible exposition des étudiant.e.s à la recherche. Comment faire pour savoir si la recherche ne t'intéresse pas si tu ne sais pas ce que c'est la recherche en statistique ou en actuariat ? Par exemple, j'aimerais ça en parler davantage, mais à l'intérieur d'un cours, je réalise que je n'ai pas suffisamment le temps d'en parler. Le Club-Math peut être très intéressant pour vous exposer à divers domaines de recherche. J'ai l'impression que les gens en actuariat et en statistique ont peut-être un moins bon a priori du Club-Math, mais, à mon avis, ça peut être très intéressant pour les étudiant.e.s.

Avez-vous une liste de choses à faire que vous recommanderiez aux étudiant.e.s?

Je n'ai pas vraiment une liste de choses à faire. Il y a une chose que je recommande de faire régulièrement. C'est de prendre le temps de s'arrêter et de se demander ce qu'on aime réellement. Vous faites des cours et des cours : prenez le temps, par exemple, une fois par année avant l'été, pour vous demander ce que vous avez aimé de votre dernière année, profondément. Quels cours vous ont fait trippé? L'actuariat, comme plusieurs domaines, est assez vaste, essayez de réfléchir à ça, car je trouve ça dommage de faire 3 ans ou plus d'études et de travailler fort pour se rendre sur le marché du travail et finalement, ne pas aimer ça. Je crois que l'université est un bel endroit pour réfléchir à ce genre de questions pour trouver quelque chose qui vous intéresse.

PIERRE-OLIVIER PRUD'HOMME, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN ACTUARIAT

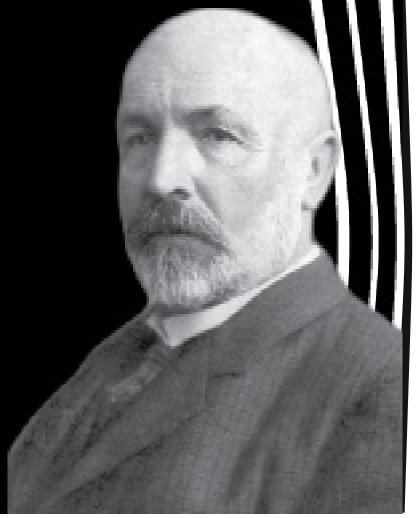
UNE TERMINOLOGIE HUMBLE

DÉFINITION. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent.

Les espaces de Banach furent développés dans le livre Opérations linéaires écrit par Stephan Banach (1892-1945). À l'époque, il avait donné à ceux-ci le nom d'«espaces de type (B)». Étant donné qu'aucun «espace de type (A)» n'apparait dans le même livre, on pourrait croire que Banach espérait, qu'un jour, ces espaces porteraient son nom. Plus tard, Maurice René Fréchet appela ces derniers «espaces de Banach», un nom qu'on utilise encore aujourd'hui. Dans un de ses livres, Norbert Wiener tenta de donner le nom d'«espace de Banach-Wiener» aux espaces vectoriels normés complets. Cette terminologie n'a jamais été reprise.

PIERRE-ALEXANDRE MAILHOT, ÉTUDIANT AU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

ENSEMBLE DE CANTOR



D'abord, qu'est-ce que l'ensemble de Cantor? C'est un sous-ensemble fermé de l'intervalle $[0,1]$ avec des propriétés bien remarquables. On le construit comme suit:

1. On pose $C_1 = [0,1]$ un intervalle simple.

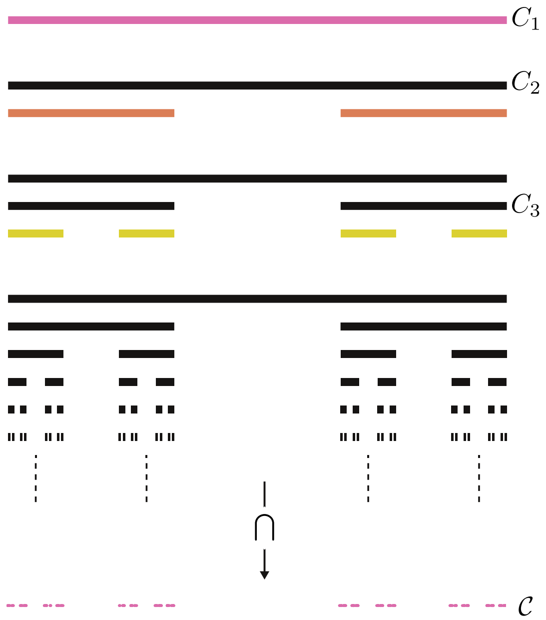
2. On enlève le tiers du milieu, (⅓,⅔), donc on pose $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Il y a deux intervalles.

3. Par récurrence, on définit C_n comme l'ensemble obtenu lorsqu'on retire le tiers du milieu de chaque sous-intervalle de C_{n-1}. Il y aura 2^n intervalles.

4. On pose

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

qui est l'ensemble de Cantor. On l'appelle aussi la poussière de Cantor, comme on peut le voir (ou non!) sur l'image.



L'ensemble que l'on obtient est non vide, puisque 0 y appartient. En fait, l'ensemble de Cantor est indénombrable! Une des raisons qu'il est si intéressant, c'est qu'il est également négligeable. Autrement dit, si on pige un nombre au hasard dans [0,1], on a probabilité 0 que ce nombre soit dans $\mathcal{C}$.

Que peut-on dire de son caractère fractal? Si l'on considère les deux applications

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

alors l'ensemble de Cantor satisfait à $\mathcal{C} = f_1(\mathcal{C}) \cup f_2(\mathcal{C})$. Il jouit ainsi d'une propriété d'auto-similarité semblable à celle remarquée pour la courbe du dragon. Sa dimension fractal est $\log_3(2) \approx 0{,}631$.

Cet ensemble a bien d'autres propriétés topologiques qui en font un exemple intéressant. Il est compact et il n'a que des points d'accumulation. Il ne contient aucun sous-intervalle ouvert (on dit que son intérieur est vide). Finalement, il est amusant de considérer $\mathcal{C} \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est sur la figure à droite.

JONATHAN GODIN, Ph.D EN MATHÉMATIQUES
ET CHARGÉ DE COURS

UNE HALLOWEEN MATHÉMATIQUE

Le mois d'octobre vient de se terminer et avec sa fin s'envolent les décorations, les festivités déguisées et les friandises, mais si vous n'êtes pas rassasié, cette chronique est pour vous. Le langage mathématique que nous utilisons est rempli de vocabulaire inusité. Il n'est donc pas très étonnant que l'on puisse trouver des concepts ayant un nom qui peut nous rappeler l'Halloween, en voici quelques-uns!

LES NOMBRES VAMPIRES

Un nombre v est un nombre vampire s'il possède un nombre pair de chiffres m et qu'il se décompose en un produit de deux facteurs de même longueur $m/2$, x et y, appelé les crocs, qui ensemble contiennent tous les chiffres de v. En d'autres mots, on a $v = x \times y$ où chaque chiffre du côté gauche de l'équation se retrouve du côté droit de l'équation, peu importe l'ordre d'apparition (donc une permutation des chiffres de v donne xy). On ajoute à cela la condition de ne pas avoir de zéro en trop comme dans le cas $v00 = x0 \times y0$. Par exemple, le plus petit nombre vampire est $1260 = 21 \times 60$. Il existe même des nombres vampires ayant plusieurs paires de crocs comme $125460 = 204 \times 615 = 246 \times 510$ ou encore plus impressionnant, des nombres dont les crocs sont eux-mêmes des nombres vampires, des nombres doubles vampires, tels que $1047527295416280 = 25198740 \times 41570622 = (2940 \times 8571) \times (5601 \times 7422)$. Une chose est certaine cependant, ils ne vous mordront pas au cou.

LES NOMBRES SURNATURELS

Soyez sans crainte, les nombres surnaturels ne viendront pas vous hanter la nuit, ils sont plutôt une généralisation des nombres naturels. Par le théorème fondamental de l'arithmétique, nous savons que tout naturel m se décompose comme un produit de nombres premiers

$$m = \prod_p p^{n_p}$$

où les p sont premiers et les exposants n_p sont 0 ou naturels. Pour les nombres surnaturels, on rajoute la possibilité que soit infini et la possibilité d'avoir une infinité de nombres premiers dans le produit. L'addition n'est pas bien définie pour ceux-ci, mais la multiplication se fait simplement comme avant c'est-à-dire.

$$\prod_p p^{n_p} \cdot \prod_p p^{m_p} = \prod_p p^{n_p+m}$$

Les notions de pgcd et de ppcm peuvent aussi être généralisées pour les surnaturels en prenant le supremum ou l'infimum de chaque exposant. Ces nombres ont été utilisés pour la première fois en 1910 par le mathématicien Ernst Steinitz en théorie axiomatique des corps commutatifs.

LA SORCIÈRE D'AGNESI

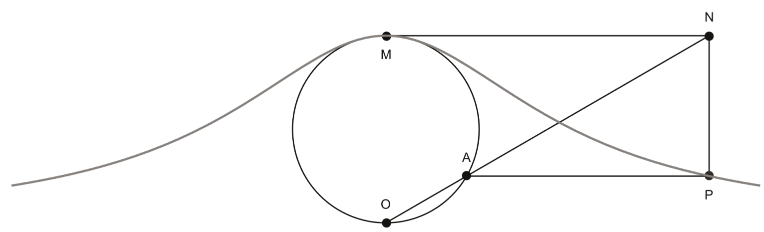
La sorcière d'Agnesi est une courbe du plan qui a été étudiée par la mathématicienne italienne Maria Gaetana Agnesi. Son nom étrange est en fait dû à une erreur de traduction de son nom italien original *versiera* que le traducteur a interprété comme avversiera qui signifie sorcière. Sa construction se fait de la façon suivante : prenons un point O d'un cercle et son antipode M ainsi qu'un point différent arbitraire du cercle A. Nous pouvons donc tracer la droite OA qui intersecte la tangente du cercle en M à un certain point N. Il suffit enfin de tracer la droite parallèle à MN passant par A et de trouver son intersection à la droite perpendiculaire à MN passant par N pour obtenir un point P. La sorcière d'Agnesi est la courbe définie par tous les points P possibles dépendant du point A. Son équation est simplement

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

sous forme cartésienne ou bien

$$x = a \tan \theta, y = a \cos^2 \theta$$

sous forme polaire si a est le diamètre du cercle utilisé dans la construction.



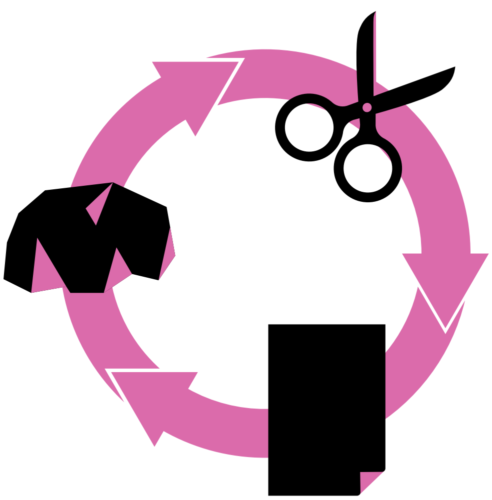
Bref, ces idées mathématiques effrayantes simplement par leur nom intrigant (ou inquiétant) ont de quoi piquer notre curiosité. Enfin, pour finir ce lugubre article, voici un dernier fait intéressant : en anglais, le symbole de petit carré utilisé pour terminer une preuve, signifiant «ce qu'il fallait démontrer», est parfois appelé pierre tombale (*tombstone*).

Joyeuse Halloween (en retard) à toute la communauté aisenstadtienne!

MATHIEU PINEAULT, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT
EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Le mois dernier, nous nous sommes demandé s'il existait un mode de scrutin qui soit à la fois indépendant aux alternatives non pertinentes et résistant au dilemme du vote utile. En d'autres mots, on veut un mode de scrutin dont le résultat ne change pas si on ajoute ou enlève des candidats peu intéressants aux yeux des électeurs et où les électeurs ont intérêt à voter selon leurs vraies préférences. Nous avons étudié le scrutin de Condorcet qui semblait bien répondre à ces deux critères. Cependant, nous nous sommes butés au problème où aucun candidat n'est préféré par la majorité à tous les autres candidats. Nous avons alors besoin de modifier ce scrutin pour qu'il remplisse quand même nos deux critères.

LE SCRUTIN DE CONDORCET RANDOMISÉ



Le critère de Condorcet indique que s'il existe un candidat préféré à tous les autres en duel, il devrait être élu. Mais s'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet? On constate qu'un candidat qui gagne en duel contre tous sauf un est quand même un candidat plus intéressant pour la majorité que celui qui perd contre tous. Pourquoi donc ne pas élire celui qui gagne le plus de duels? Parce que cela inciterait certains électeurs à ne pas voter selon leurs vraies préférences et cela ne règle pas les problèmes où plusieurs candidats gagnent le même nombre de duels. L'introduction du hasard à cette étape-ci est le seul moyen de résoudre le problème tout en respectant nos deux critères. En gardant en tête l'idée selon laquelle plus un candidat a gagné de duels, plus il est intéressant pour la majorité, présentons le scrutin randomisé de Condorcet.

Imaginons que deux joueurs font une partie de chifoumi (aussi appelé «roche, papier, ciseaux»). Cependant, les coups sont remplacés par les candidats à une élection. Un joueur gagne s'il joue un candidat qui bat celui de l'autre en duel. Les deux joueurs connaissent le graphe des duels, ce qui leur permet de faire un choix éclairé. Par le théorème minimax, qui ne sera pas présenté ici, il existe toujours une unique stratégie optimale à ce jeu, peu importe le graphe des duels. On dit d'une solution qu'elle est optimale si elle permet au joueur qui l'emploie d'avoir une probabilité de victoire de 50% ou plus, peu importe la stratégie utilisée par l'adversaire. Cela revient à dire que le graphe des stratégies admet toujours un vainqueur de Condorcet. Une stratégie bat une autre en duel si sa probabilité de victoire est plus grande. La stratégie optimale consiste à jouer toutes les options selon une certaine loi de probabilité. Par exemple, celle du jeu roche, papier, ciseaux consiste à jouer chacun des objets avec probabilité 1/3. Constatons que les options ayant une plus grande probabilité d'être jouées selon la stratégie optimale sont celles qui gagnent le plus de duels. En effet, pour remporter au chifoumi selon un certain graphe des duels, on a intérêt à jouer les candidats qui gagnent en duel la plupart du temps et qui sont donc préférés par la majorité. Pour résoudre le paradoxe de Condorcet, on pige un candidat au hasard selon la loi de probabilité correspondante à la stratégie optimale du jeu décrit ci-haut. En bref, le scrutin randomisé de Condorcet peut se résumer à deux étapes:

1. D'après les résultats d'une élection, on construit le graphe des duels et on établit la stratégie optimale S.

2. Le candidat élu est ainsi pigé parmi tous les candidats. La probabilité de tirer un certain candidat est la probabilité de jouer celui-ci selon S.

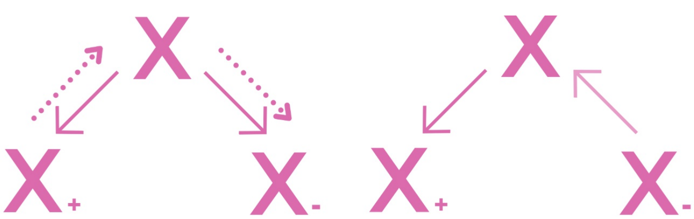
THÉORÈME. S'il existe un vainqueur de Condorcet, alors le scrutin de Condorcet randomisé élira toujours ce vainqueur.

PREUVE. Dans le contexte du jeu décrit plus haut, où deux joueurs gagnent si le candidat qu'ils ont choisi bat l'autre candidat en duel, il existe un coup qui bat tous les autres. En effet, jouer le vainqueur de Condorcet garantit la victoire. Par l'unicité d'un tel vainqueur, ce coup est le seul qui bat tous les autres. La stratégie optimale ici est donc de jouer avec probabilité 100% le vainqueur de Condorcet et 0% les autres. En tirant un candidat selon la stratégie optimale, on a donc 100% de chance de tirer le vainqueur de Condorcet. Celui-ci est donc toujours élu.

Il a été prouvé dans l'article du mois dernier que le scrutin de Condorcet est indépendant aux alternatives non pertinentes. De plus, dans les situations où il existe un vainqueur de Condorcet, il incite aussi les électeurs à voter selon leurs vraies préférences et donc à ne pas voter «stratégique».

THÉORÈME. Le scrutin randomisé de Condorcet, quand il existe un vainqueur de Condorcet, résiste au dilemme du vote utile.

IDÉE DE PREUVE. Seulement l'intuition derrière la preuve sera expliquée ici. Soit un graphe des duels où il existe X un vainqueur de Condorcet. Soit un électeur E qui préfère certains candidats à X, notons-les X+ et qui aime moins certains candidats X- que X. On commence par constater que si E ment sur ses préférences et affirme qu'il préfère X à X+, alors il abonde dans le même sens que la majorité. Cela aboutit au même graphe des duels et rien n'a changé. Donc si X veut avoir une chance de changer le graphe des duels et ainsi de manipuler le scrutin à son avantage, il peut seulement mentir sur les préférences qu'il a en commun avec la majorité. En d'autres mots, il peut seulement inverser les flèches avec lesquelles il est d'accord. Dans la figure suivante, le graphe de gauche est le graphe d'origine où les préférences de E sont en pointillé et celui de droite est celui qui a été manipulé par E.



On voit que les seuls vainqueurs de Condorcet potentiels se trouvent parmi X-. Donc par les propriétés du scrutin de Condorcet randomisé, X- a une probabilité de victoire supérieure ou égale à X+. En mentant sur ses préférences, l'électeur E est perdant, car il vient d'augmenter la probabilité de victoire des options qu'il aime moins que X. Un électeur a donc toujours avantage à ne pas mentir sur ses préférences. Pour avoir la preuve complète, vous pouvez consulter l'article de Lê Nguyên Hoang, Strategy-proofness of the randomized Condorcet voting system, qui est la principale source utilisée pour écrire le présent texte.

Dans son article, Lê Nguyên Hoang prouve aussi que le scrutin de Condorcet randomisé est le seul à avoir cette propriété. En effet, il montre que de tout scrutin respectant le critère de Condorcet et utilisant le graphe des duels, les préférences de la majorité pour chaque duel, le scrutin randomisé de Condorcet est le seul qui soit résistant au dilemme du vote utile.

Il a été montré que le paradoxe de Condorcet peut être surmonté en utilisant le scrutin randomisé. Toutefois, en pratique, toutes les élections semblent avoir un vainqueur de Condorcet. Il reste quand même une part d'incertitude dans cette affirmation, car les modes de scrutin actuels ne permettent pas tous de construire le graphe de duels avec certitude. Des projections basées sur les sondages doivent donc être utilisées. Il reste quand même curieux qu'un vainqueur de Condorcet semble toujours exister. Dans le prochain article, on se penchera sur les raisons pour lesquelles c'est le cas.

BÉATRICE HAJJAR, ÉTUDIANTE AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

P R O M A T H A T I O N

Combien de langage comprenez-vous? Au vu du titre, il n'est évidemment pas question d'un système de signes vocaux tel le français, mais bien de langages de programmation tel Python. On retrouve ce dernier en mathématiques comme dans nombre d'autres domaines. En particulier, c'est dans le traitement et l'analyse de donnée que Python excelle et est employé. Encore une fois, le sujet ne concerne ni les bases du langage ni les notions élémentaires d'analyse numérique. Le présent article porte sur la compréhension de certains objets, de certains concepts et de certaines méthodes d'un point de vue mathématique pure.

ANALYSE RÉELLE

Débutons alors par quelque chose de simple. Soit f une application de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $f = x^2$. Déterminons la nature injective de f. L'on sait que pour qu'une fonction soit injective, il faut absolument que pour chaque image, une seule préimage y soit associée. Autrement dit, que chaque flèche distincte tirée d'un archer atteigne une cible différente. Il est assez aisé de concevoir un petit programme qui exécuterait une boucle pour déterminer si une fonction simple est injective. L'on pourrait commencer par vouloir définir cette dite fonction.

```python
domaine = range(-3,4)
f = lambda x: x**2
graph = [(x,f(x)) for x in domaine]

def preimageSearch(graph, image):
  preimage = []
  for point in graph:
    if point[1] == image:
      preimage.append(point[0])
  return preimage

print(preimageSearch(graph, 4))
```

Une autre application est créée pour trouver les préimages associées à une image. Il suffit maintenant de vérifier que le nombre d'éléments dans la liste retourné est 1 pour conclure que sur le graphe la fonction est injective.

ALGÈBRE

Dans le tout le spectre de l'algèbre et de ces nombreuses ramifications l'on retrouve le concept de groupe. Brièvement, un groupe est un ensemble d'éléments muni d'une opération et respectant quatre propriétés. Nommément, loi de composition interne, associativité, l'existence d'un élément neutre et l'existence d'un élément inverse. Une fois qu'un groupe est bien formalisé, l'on peut commencer à trouver des sous-groupes héritant de toutes les propriétés du groupe dont il est tiré tout en ayant des propriétés distinctes intrinsèques à lui-même (le sous-groupe). L'on pourrait donc vouloir, par exemple, trouver un sous-groupe normal ayant de facto la commutativité. L'un des quatre principes importants de la programmation orientée objet est l'héritage. Seulement, formaliser un groupe en Python est somme toute assez difficile. Je tenterais tout de même d'illustrer le concept d'héritage. L'exemple le plus simple d'héritage est bien celui de la génétique, mais considérons seulement les objets `Parent` et `Enfant` considérant seulement les noms.

```python
class Parent:
  def __init__(self, prenom, nom):
    self.prenom = prenom
    self.nom = nom

  def enfant(self, prenom):
    return Enfant(prenom=prenom, nom=self.nom)
```

Si l'on crée une instance de la classe Enfant, on aura qu'elle hérite des méthodes et des attributs de la classe Parent. Il suffit d'appeler help sur la classe Enfant pour le constater.

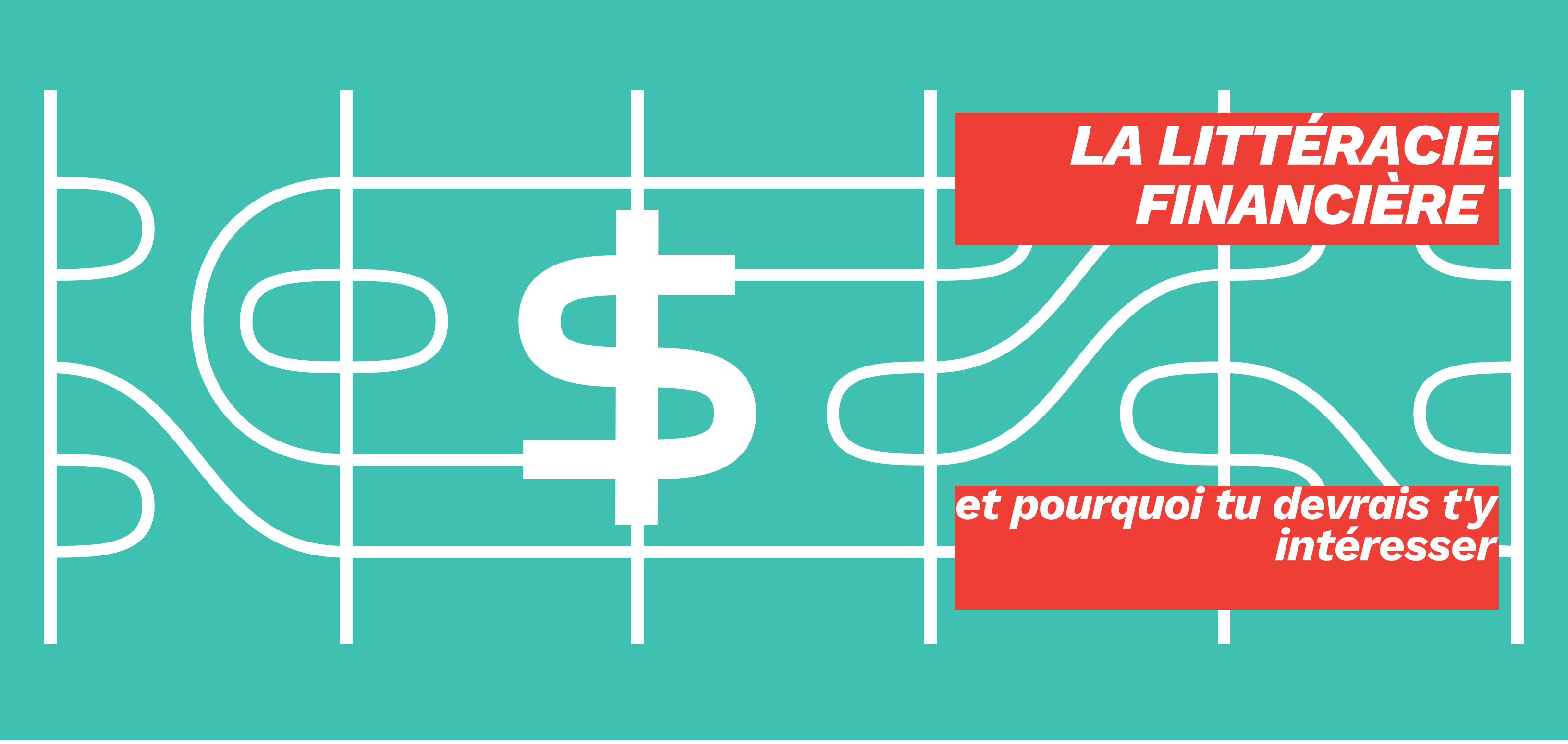
```
Help on class Enfant in module __main__:

class Enfant(Parent)
 |  Enfant(prenom, nom)
 |
 |  Method resolution order:
 |      Enfant
 |      Parent
 |      builtins.object
 |
 |  Methods defined here:
 |
 |  __init__(self, prenom, nom)
 |      Initialize self.  See help(type(self))\
 |      for accurate signature.
 |
 |
    ----------------------------------------------
 |  Methods inherited from Parent:
 |
 |  enfant(self, prenom)
 |
 |
    ----------------------------------------------
 |  Data descriptors inherited from Parent:
 |
 |  __dict__
 |      dictionary for instance variables (if
    defined)
 |
 |  __weakref__
 |      list of weak references to the object (if
    defined)
```

Alors l'analogie avec l'algèbre est l'héritage des opérations au sein d'un même objet tel l'héritage des méthodes au sein des sous-classes d'une classe mère.

Ces petits exemples montrent d'un certain point de vue l'étroite relation que possèdent l'informatique et les mathématiques théoriques. Naturellement, tout n'est pas représentable en informatique, les groupes sont difficiles à généraliser en Python, mais le concept d'héritage est simple à mettre en \oe uvre. Bien d'autres exemples auraient pu être utilisés pour montrer le concept d'héritage, mais le cas présenté plus haut est d'école et très simple à comprendre sans pour autant connaitre les principes de programmations qui y sont utilisés.

JULIEN HÉBERT-DOUTRELOUX, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES



LA LITTÉRACIE FINANCIÈRE

et pourquoi tu devrais t'y intéresser

À quand remonte ta dernière discussion dont le sujet était l'argent? J'ose supposer que ce n'est pas à hier. D'ailleurs, ma question t'as peut-être mis mal-à-l'aise: "Discussion par rapport à l'argent? Je n'aime pas vraiment parler d'argent..." Si c'était ça ta réaction, je te comprends parfaitement, l'argent est un sujet tabou dans notre société comme dans bien d'autres endroits dans le monde. Je crois cependant que cela ne devrait pas être le cas et qu'on pourrait tous bénéficier d'améliorer notre littératie financière.

La littératie financière décrit l'ensemble des connaissances et compétences entourant la gestion de notre argent et de nos finances personnelles. Selon le gouvernement canadien, c'est « le fait de disposer des connaissances, des compétences et de la confiance en soi nécessaires pour prendre des décisions financières responsables. » En pratique cela comprend avoir des connaissances en comptabilité, en droit, en investissements dans les divers marchés financiers (p. ex. la bourse, le marché immobilier, etc.) et ça inclut avoir une bonne compréhension du crédit, ainsi qu'une connaissance des programmes gouvernementaux pertinents. Je crois cependant qu'il n'est pas nécessaire de devenir un expert dans chacun de ces domaines. Il suffit en fait d'avoir les connaissances et compétences qui seraient utiles dans ta situation, et idéalement un petit peu au-delà de ça pour être conscient des opportunités qui existent et qui pourraient t'intéresser. C'est d'ailleurs pourquoi la définition de littératie financière est aussi large, avoir une "bonne" littératie financière est quelque chose de relatif et c'est toi la meilleure personne pour déterminer qu'est-ce que cela signifie dans ta situation.

Malgré nos particularités, une des raisons pour lesquelles je crois que tu devrais t'intéresser à la littératie financière est le fait que beaucoup d'entre nous vivront des défis similaires, simplement par le fait d'être humain.e.s. Par exemple, nous avons tous et toutes besoin d'un toit au-dessus de nos têtes et certaines personnes pourraient être intéressées à faire l'acquisition d'une maison ou d'un condo. Cependant, avec le prix moyen des maisons vendues dans la région métropolitaine de Montréal ayant augmenté de plus de 10% dans la dernière année seulement, l'achat d'une propriété devient un projet de plus en plus complexe qu'il faut planifier bien en avance. Également importante est la planification de la retraite, c'est quelque chose que nous devons tous faire, mais combien d'argent avons-nous vraiment besoin de mettre de côté pour nous soutenir financièrement pendant cette période de nos vies? Un dernier exemple particulièrement sournois est celui de l'inflation. Notre monnaie perd son pouvoir d'achat d'année en année, donc chaque dollar que nous mettons de côté aujourd'hui verra sa valeur diminuée l'année prochaine relativement à ce qu'il nous permettra d'acheter. Ce changement est

Améliorer notre littératie financière pourrait nous permettre de continuer à faire ce qu'on aime et ce qui nous passionne en se souciant un peu moins du salaire.

minime à courte échelle puisque l'inflation annuelle se tient généralement aux alentours de 2%. À long terme, en revanche, cela peut grandement diminuer la valeur relative de nos épargnes. L'inflation est d'ailleurs une des principales raisons pour lesquelles il est important de considérer investir son argent, que ce soit à la bourse, dans le marché immobilier, ou ailleurs.

Par expérience personnelle, je trouve que les carrières en mathématiques ne sont pas parmi celles le plus mises en avant lors de nos études pré-universitaires. Les cégepien.ne.s étaient encouragé.e.s à suivre une carrière en médecine, pharmacie ou encore génie, des carrières au parcours bien tracé et qui offrent certains des meilleurs salaires. Ma perception est que beaucoup d'étudiant.e.s en mathématiques et statistiques ont choisi une voie qui, malgré que moins populaire, s'enlignait mieux avec leurs intérêts et passions. Améliorer notre littératie financière pourrait, par exemple, nous permettre de continuer à faire ce qu'on aime et ce qui nous passionne en se souciant un peu moins du salaire, peut-être que le retour sur nos investissements pourrait couvrir une partie de nos frais de vie? Ou encore peut-être qu'avoir plus d'argent de côté nous permettrait de prioriser davantage notre vie familiale ou nos passions en dehors du travail plutôt que notre carrière sans se soucier autant des retombées financières de cette décision?

Finalement, je crois qu'améliorer notre littératie financière nous offre de la liberté. Lorsque nous sommes capables de créer un plan financier réaliste et enligné avec nos besoins et nos rêves, et si nous l'exécutons correctement, nous pouvons réellement ne pas nous soucier de l'argent en sachant que nos besoins fondamentaux sont couverts. Cela libère l'espace, le temps et l'énergie pour se concentrer sur ce qui est réellement important pour nous.

Si tu as apprécié cet article, tu as des questions concernant la littératie financière ou bien tu aimerais juste discuter davantage de ce sujet n'hésite pas à m'écrire à stefan.horoi@umontreal.ca !

STEFAN HOROI, ÉTUDIANT AU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

L'IA ET LES RISQUES

| À VOS RISQUES!

L'Intelligence Artificielle fait beaucoup parler d'elle. Ce n'est plus de la science-fiction. Depuis les années 2000, elle se développe à grande vitesse dans de nombreux secteurs industriels. Cependant son invention ne date pas d'hier. Depuis qu'ont été inventés les ordinateurs dans les années 40, on a attendu des machines qu'elles égalent les humains en intelligence générale, c'est-à-dire en capacité d'apprendre, de raisonner, de se confronter à tout un ensemble de défis, de traiter des informations complexes dans des domaines matériels comme abstraits. A l'époque, on prévoyait que de telles machines seraient réalisées d'ici une vingtaine d'années. Herbert Simon, prix Nobel d'économie et pionner de l'intelligence artificielle, a déclaré en 1965 : « La machine sera capable dans les vingt ans à venir de faire tout ce que l'homme sait faire ». Marvin Lee Minsky, scientifique américain et cofondateur avec John McCarthy du groupe d'intelligence artificielle du MIT, a déclaré en 1967 : « Dans une génération... nous aurons résolu le problème de la création d'une intelligence artificielle ». On n'en est toujours pas là aujourd'hui, mais l'IA a déjà réussi à dépasser l'intelligence humaine dans de nombreux domaines. Les progrès de l'IA sont loin de faire l'unanimité et soulèvent de nombreuses questions. Pour certaines personnes, elle est inquiétante et, pour d'autres, elle ouvre la voie à de nombreuses applications positives. Les personnes qui s'inquiètent sont comme Scronkfinkle dans la fable inachevée des moineaux*.

On la définit comme étant la théorie et la conception de systèmes ayant la capacité d'accomplir des tâches qui nécessitent habituellement l'intelligence humaine. L'un des domaines dans lesquels l'IA joue un rôle aujourd'hui, et qui implique des enjeux considérables et très compétitifs est le marché financier global : 'les systèmes d'automatisation des transactions sont utilisés par les grands investisseurs. Là où certains de ces systèmes ne sont que des manières simples de réaliser automatiquement l'exécution d'ordres d'achat ou de vente donnés par un gestionnaire de fonds humain, d'autres développent des stratégies commerciales compliquées qui s'adaptent aux fluctuations du marché. Des systèmes analytiques recourent à une variété de techniques d'extraction de données et d'analyse de séries chronologiques pour rechercher des modèles et des tendances du marché des valeurs mobilières ou pour corréler l'historique de fluctuation des cotisations avec des variables externes comme des mots-clés sur les nouveaux télescripteurs'.

L'IA est experte dans un tas d'autres domaines dont ceux de l'assurance. Du point de vue des experts, grâce aux technologies de l'IA, l'exploitation des données a permis aux actuaires non seulement de gagner en productivité, mais également de transformer les données en un savoir stratégique les amenant à mieux s'adapter aux conditions de leurs clients et à celles d'un marché en évolution continue. Les actuaires étant des 'datavores' aspirent des masses croissantes d'informations sur l'ascendance, la santé, le mode de vie et le lieu d'habitation pour prendre des décisions optimales en matière de tarification. L'IA et le 'Big Data' apportent une contribution importante en élargissant la capacité de recueillir et d'analyser les informations pertinentes et de les traiter à des vitesses inimaginables. L'IA est de plus en plus utilisée par les assureurs pour gérer les relations clients. Des agents conversationnels (chatbots) sont mis en place pour intervenir auprès des assurés avant ou après la vente, dans différentes circonstances de la vie d'un contrat : soumission, déclaration de sinistre, etc. (Dubois, 2020). Certains fournisseurs d'assurance affirment ne plus recourir à aucun courtier; ils utilisent des agents conversationnels intelligents pour répondre aux demandes des clients ou traiter leurs réclamations (Riley, 2020). C'est le cas de Lemonade, une entreprise new-yorkaise spécialisée dans les technologies financières d'assurance. Elle permet à ses clients de se procurer une assurance locataire ou une assurance habitation en seulement quelques minutes et en communiquant uniquement avec Maya, l'agente conversationnelle de l'entreprise (Gambrill, 2017). Ces chatbots sont des interfaces de discussion dont le fonctionnement repose sur l'exploitation des données de l'entreprise combinée à la technique de traitement du langage naturel et à l'apprentissage automatique en vue de fournir aux clients les informations qu'ils recherchent (Riikkinen et coll., 2018). Les technologies de l'IA sont largement utilisées dans le secteur des assurances et de l'actuariat pour effectuer des analyses visant à affiner la connaissance du risque et à améliorer la prédictibilité des modèles (Dubois, 2020). L'IA présente une nouvelle approche théorique à l'égard des questions courantes relatives aux assurances cependant les actuaires ont leur rôle à jouer dans cette démarche. L'article 'L'éthique et la réglementation de l'IA en assurance : une situation gagnante pour les actuaire' par Joel Li, FICA, Rolly Molisho, AICA, et Harrison Jones, membres de la commission de l'ICA sur la modélisation prédictive, présente le rôle des actuaires en ce qui concerne l'éthique et la réglementation en matière d'IA.

Les entreprises qui font usage de l'IA devront tenir compte de considérations d'ordre éthique. Les algorithmes auxquels ont recours les assureurs ont une incidence pour les consommateurs et les actionnaires. Les algorithmes de tarification, par exemple, influencent le montant des primes que doivent payer les consommateurs. Ces algorithmes pourraient être injustement discriminatoires s'ils étaient biaisés à l'égard de certains groupes démographiques d'une manière qui serait considérée, selon les méthodes traditionnelles, comme une forme inacceptable de discrimination. Les assureurs fondent depuis toujours leurs affaires sur le concept de « discrimination équitable » en établissant la tarification des titulaires de police en fonction de variables qui différencient leurs risques de manière acceptable. Les sociétés d'assurances qui optent pour le recours aux algorithmes d'IA se lancent actuellement dans une situation susceptible d'être jugée contraire à l'éthique.

Dans un monde de plus en plus incertain, avec de plus en plus de risques et une quantité incroyable de données, l'IA facilite le travail des actuaires en augmentant leur productivité et leur efficacité.

LA FABLE INACHEVÉE DES MOINEAUX

Préface de Superintelligence de Nick Bostrom

Il était une fois, à la saison où les oiseaux font leur nid, des moineaux qui se reposaient tranquillement, en gazouillant au crépuscule, après de longs, très longs jours de travail.

– Nous sommes si petits et si faibles, comme la vie nous serait facile si nous avions une chouette pour nous aider à construire tous ces nids.
– C'est sûr, lui répondit son voisin, elle nous aiderait aussi à prendre soin de nos parents et de nos enfants,
– Elle nous donnerait des conseils, et elle surveillerait le chat du coin, ajouta le suivant.

Alors Pastus, le doyen de la troupe, dit ceci : «Envoyons des éclaireurs dans toutes les directions pour tenter de trouver une jeune chouette ou même un œuf. Un petit corbeau ferait aussi l'affaire, ou même une petite belette. Ce serait sans doute la meilleure chose qui nous soit jamais arrivée, au moins depuis l'ouverture de la Boutique des Graines à Volonté là-bas derrière».

Ils se mirent tous à rire et, partout, des moineaux commencèrent à gazouiller à plein poumons. Seul **Scronkfinkle**, un moineau borgne et râleur, n'était pas du tout convaincu par ce projet. «Ce sera sûrement notre perte, dit-il... nous devrons réfléchir à la manière de domestiquer les chouettes et de les dresser, avant d'introduire chez nous une telle créature...»

Pastus répliqua alors: «Dresser une chouette... voilà qui semble bien délicat. Ce sera déjà assez difficile de trouver un œuf. Commençons par là et quand nous serons parvenus à avoir un bébé chouette, nous pourrons réfléchir à la manière de le dresser».

«Il y a quelque chose qui ne va pas dans ce projet», s'exclama **Scronkfinkle**; mais ses protestations restèrent sans écho, la troupe s'était déjà mise à l'œuvre pour faire ce qu'avait proposé Pastus. Seuls deux ou trois moineaux restèrent là. Ils commencèrent à réfléchir à ce qu'il faudrait faire pour dresser et domestiquer une chouette. Ils se rendirent vite compte que Pastus avait raison : c'était un défi trop grand, surtout qu'aucune chouette n'était là pour leur dire comment faire. Pourtant, ils y réfléchir comme ils purent, craignant à tout moment que la troupe revienne avec un œuf de chouette avant qu'ils aient trouvé une solution à leur problème.

On ne sait pas comment ça a fini. Mais l'auteur dédie ce livre à **Scronkfinkle** et à ceux qui l'ont écouté.

EVENSON AUGUSTE, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN ACTUARIAT

| QUOI DE NEUF DANS L'UNIVERS MATHÉMATIQUE?

DES COUPLES D'ENTIERS PARTICULIERS

Deux chercheurs en mathématique de l'Université de Hawaï, Jon Grantham et Xander Faber, ont récemment mis sur pied un algorithme permettant de générer des couples d'entiers avec une propriété particulière : leur produit et leur somme sont l'opposé l'un de l'autre dans une base donnée. Lorsqu'on parle d'opposé ici, on veut dire que leur produit correspond à leur somme lue de droite à gauche. Les chercheurs Grantham et Faber sont tous les deux des mathématiciens qui apprécient une approche algorithmique des mathématiques.

En base 10, les nombres 2 et 47 génèrent des produit/somme inverses un de l'autre, de même que 2 et 497, 2 et 4997, et ainsi de suite. On a

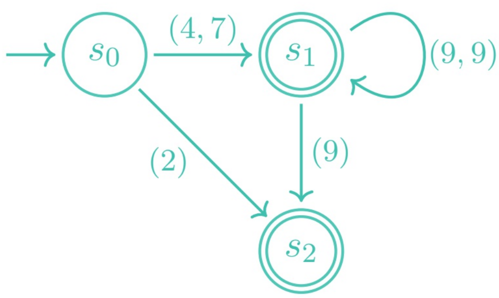
$$\begin{aligned} &2*47 = 94 \\ &2+47 = 49 \\ &2*497 = 994 \\ &2+497 = 499 \\ &\dots \end{aligned}$$

À partir de ce point, il devient facile de trouver un algorithme permettant de générer ces couples. Il s'agit d'itérer sur le 9 central en gardant le 2 comme premier élément du couple (en base 10) pour trouver un nombre infini d'autres couples qui respectent : le produit doit être l'opposé de la somme.

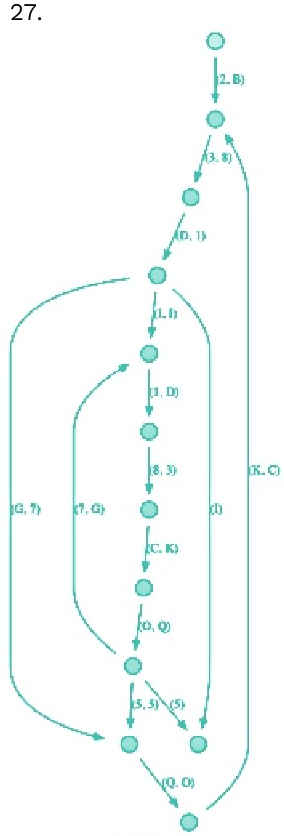
On note également que le premier nombre du couple, a, doit toujours être significativement plus petit que b (le deuxième) afin que les couples fonctionnent. C'est vrai dans toutes les bases.

La généralisation aux autres bases est l'étape la plus ardue du problème. Pour certaines bases (les bases 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15 et 21), il n'existe pas de paires d'entiers $[a,b]$ tels que $a*b$ et $a+b$ sont des nombres opposés. Également, il est à noter que trouver un algorithme permettant de générer des tels couples ne suffit pas – il faut aussi prouver que ces couples sont les seuls pour cette base.

L'article mentionne explicitement que l'exercice de trouver tous les couples qui donnent des produits et sommes opposés est fondamentalement algorithmique. Pour chaque base, on cherche en effet les bons a,b qui en input permettent d'atteindre des «accepting states» (dont le produit et la somme sont l'opposé l'un de l'autre). Pour la base 10, cet algorithmepeutêtrefacilementreprésenté:



Cependant il devient étonnamment complexe en base 27.



L'idée demeure la même : on cherche quelle(s) boucle(s) d'itération permettent de produire les couples recherchés.

Pour le code python:
https://github.com/rationalpoint/reverse

ANNE CLÉROUX, ÉTUDIANTE AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES

| ÉNIGMES ET JEUX MATHÉMATIQUES

I Un club de gentlemen se réunit chaque semaine. Selon les règles du club, ils doivent laisser leur chapeau au vestiaire. Mais en sortant, après avoir bu quelques verres de scotch, ils sont capables de faire la différence entre leur chapeau et celui des autres, et il n'est pas rare qu'ils prennent les mauvais chapeau. Cette semaine, trois membres étaient présents et la probabilité qu'aucun d'entre eux ne ressorte avec le bon chapeau était de 1/3. La semaine prochaine, quatre membres sont attendus. La probabilité que personne ne ressorte avec le bon chapeau sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

II Compléter le carré 3x3 suivant avec les chiffres de 2 à 9 de sorte que la somme de chaque ligne et de chaque colonne soit égale à un même nombre.

1		

Pour un carré n x n, quelle doit être la somme ?

ÉLOI MARTIN, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOLUTIONS

I La probabilité sera plus grande.

II

1	8	6
5	3	7
9	4	2

La somme de n colonnes doit être égale à la somme de tous les nombres de 1 à n^2, c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)^2}{2}$$

Alors la somme d'une seule colonne doit être

$$\frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

BOLS & BOLLES

NE MANQUEZ PAS LES JOUTES DE BOLS ET BOLLES !

Pour participer, contactez votre association étudiante.

Restez à l'affût de nos publications sur les réseaux sociaux pour connaître les dates et les détails.

FAECUM.QC.CA

FAÉCUM