Québec

NOTE DE RECHERCHE FORESTIÈRE N° 36, 1989

DISTRIBUTION DES TIGES PAR CLASSE DE DIAMÈTRE DANS UNE FORÊT INÉQUIENNE: ASPECT MATHÉMATIQUE

Yvon Grenier[1]

O.D.C. 542--015.5(047.3)(714)
L.C. SD 387 .B5

RÉSUMÉ

Cette note présente le développement mathématique des formules pour calculer des distributions théoriques de tiges par classe de diamètre dans une forêt inéquienne. Une équation permet de calculer le "q" d'une distribution tandis qu'une autre donne le nombre de tiges par classe de diamètre pour les valeurs choisies de "q" de la surface terrière et du d.h.p. maximal. Deux autres équations accessoires permettent d'évaluer les constantes qui apparaissent dans l'équation du nombre de tiges par classe de diamètre. À l'aide de ce jeu d'équations, tout utilisateur peut dresser les tableaux de distribution des tiges dont il a besoin.

ABSTRACT

This note presents the mathematical steps involved to calculate diameter distributions in uneven-aged forests. An equation is used to calculate "q", and another for determine the number of trees by class diameter with fixed "q", basal area and maximum d.b.h. Two other equations are also given helping in calculation of constants appearing in number of trees per diameter class equation. With this set of equations, any user can construct the requested distribution tables.

---

[1] Ingénieur forestier, assistant de recherche en écologie forestière

INTRODUCTION

Majcen *et al.* (1989) ont publié un mémoire traitant d'une méthode de marquage pour la coupe de jardinage. Ce document contient, en annexe, des tableaux de distribution des tiges en fonction de leur diamètre pour des surfaces terrières variant de 16 à 34 m^2/ha, par intervalle d'un m^2/ha, pour des d.h.p. maximaux s'étendant de 60 à 45 cm, par intervalle de 5 cm et pour différentes valeurs de "q".

L'utilisation de ces tableaux est utile, voire nécessaire, pour calculer la quantité de tiges à couper par classe de diamètre pour tendre vers une structure équilibrée de la forêt inéquienne. Cependant, il y a une infinité de combinaisons possibles pour élaborer de tels tableaux. Les auteurs en ont présentés quelques-uns, mais ils ont aussi fourni des équations pour en construire d'autres.

Cette note de recherche est voulue comme un développement des équations présentées par Majcen *et al.* (1989), accompagné de quelques exemples.

NOMBRE DE TIGES DANS UNE CLASSE DE DIAMÈTRE

La distribution des tiges suit une loi hyperbolique. L'équation générale qui définit le nombre de tiges dans une certaine classe de diamètre s'écrit comme suit:

$$N_D = \int_{D_i}^{D_s} Ke^{-aD}\, dD$$ (Meyer, 1952; Meyer et Stevenson, 1943).

où:

- N_D = nombre de tiges dans la classe de diamètre D
- D = classe de diamètre D
- D_i = limite inférieure de la classe diamètre D
- D_s = limite supérieure de la classe diamètre D
- a et K = constantes
- e = nombre népérien
- dD = différentielle de D.

La solution générale de cette intégrale s'effectue comme suit:

$$N_D = K \int_{D_i}^{D_s} e^{-aD} \, dD$$

$$N_D = K \left[\frac{e^{-aD}}{-a} \right]_{D_i}^{D_s}$$

$$N_D = \frac{-K}{a} \left(e^{-aD_s} - e^{-aD_i} \right)$$

$$N_D = \frac{K}{a} \left(e^{-aD_i} - e^{-aD_s} \right) \qquad \text{équation 1}$$

Pour résoudre cette équation, il faut évaluer les constantes "a" et "K", ce qui s'effectue en deux étapes.

Estimation de "a"

Les tableaux de Majcen *et al.* (1989) sont présentés avec différentes valeurs de "q" variant de 1,06 à 1,17 pour les classes de diamètre de 2 cm. Le facteur "q" est un coefficient de diminution. Il est défini comme le quotient entre le nombre de tiges d'une classe de diamètre et le nombre de tiges de la classe de diamètre suivante. La constante "a" est reliée à "q" comme nous allons le démontrer (la façon de calculer "q" sera vue plus loin). Prenant comme exemple les classes de diamètre de 4 et 6 cm, dont les limites sont de 3,05 à 5,05 cm et 5,05 à 7,05 cm respectivement et un q = 1,09, l'égalité suivante peut être posée:

$$\frac{N_4}{N_6} = 1{,}09 = \frac{\frac{K}{a}\left(e^{-3{,}05a} - e^{-5{,}05a}\right)}{\frac{K}{a}\left(e^{-5{,}05a} - e^{-7{,}05a}\right)}$$

$$1{,}09 = \frac{e^{-3{,}05a} - e^{-5{,}05a}}{e^{-5{,}05a} - e^{-7{,}05a}}$$

$$1{,}09 = \frac{e^{-3{,}05a}\,(1 - e^{-2a})}{e^{-5{,}05a}\,(1 - e^{-2a})}$$

$$1{,}09 = \frac{e^{-3{,}05a}}{e^{-5{,}05a}}$$

$$1{,}09 = e^{-3{,}05a + 5{,}05a}$$

$$1{,}09 = e^{2a}$$

$$\ln 1{,}09 = \ln e^{2a}$$ où ln = logarithme népérien

$$\ln 1{,}09 = 2a$$

$$\ln \frac{1{,}09}{2} = a$$

$$a = 0{,}0430888$$

Règle générale, il est plus simple de formuler l'égalité suivante:

$$a = \frac{\ln q}{D_s - D_i} = \frac{\ln q}{h} \qquad \text{équation 2}$$

où:

$$h = D_s - D_i$$

Estimation de "K"

La constante "a" étant maintenant connue, il faut évaluer la constante "K" qui est reliée au diamètre maximal et à la surface terrière. Nous allons maintenant évaluer "K" à l'aide d'un exemple où la surface terrière utilisée est 24 m^2/ha (240 000 cm^2/ha) et le d.h.p. maximal est fixé à 60 cm. Il est à noter que les tiges plus petites que 9,05 cm ne comptent pas dans le calcul de la surface terrière.

$$S.T. = \sum_{D=9,05}^{D=61,05} N_D \times S_D$$

où:

$S.T.$ = surface terrière (cm^2/ha)

N_D = nombre de tiges par hectare dans une classe de diamètre D

S_D = surface terrière d'une tige de diamètre D (cm^2) $= \pi D^2/4$

D = diamètre (cm)

$$S.T. = \int_{9,05}^{61,05} K e^{-aD} \frac{\pi D^2}{4} dD$$

La solution de cette intégrale s'effectue comme suit:

$$S.T. = \frac{\pi K}{4} \int_{9,05}^{61,05} D^2 e^{-aD} \, dD$$

$$S.T. = \frac{\pi K}{4} \left(\frac{D^2 e^{-aD}}{-a} - \frac{2}{a} \int_{9,05}^{61,05} De^{-aD} \, dD \right)$$

$$S.T. = \left[\frac{\pi K}{4} \left(\frac{D^2 e^{-aD}}{-a} + \frac{2}{a} \left[\frac{e^{-aD}}{(-a)^2} (-aD - 1) \right] \right) \right]_{9,05}^{61,05}$$

$$S.T. = \left[\frac{\pi K e^{-aD}}{4a} \left(\frac{D^2}{-1} + \frac{2 (-aD - 1)}{a^2} \right) \right]_{9,05}^{61,05}$$

$$S.T. = \left[\frac{-\pi K}{4a} \left(e^{-aD} D^2 + \frac{2 (aD + 1)}{a^2} \right) \right]_{9,05}^{61,05} \qquad \text{équation 3}$$

$$K = \frac{-4 \times a \times S.T.}{\pi \left[e^{-aD} \left(D^2 + \frac{2 (aD + 1)}{a^2} \right) \right]_{9,05}^{61,05}} \qquad \text{équation 4}$$

$K = 25,368868$

Une fois "a" et "K" connues, on peut résoudre l'équation 3 pour toutes classes de diamètre désirées en fixant les bornes appropriées.

<u>Estimation du quotient "q" (Leak, 1963)</u>

En traçant la courbe de distribution des tiges en fonction des diamètres sur du papier semi-logarithmique en base 10, on obtient une droite de régression Y = c + bX, où la variable expliquée, "Y", représente le logarithme de la fréquence (ou distribution) et la variable explicative, "X", le diamètre. Le premier coefficient, "c", est l'ordonnée à l'origine de la droite et le second coefficient, "b", (qui dans ce cas est négatif) est la pente de cette droite. On peut toujours obtenir graphiquement la valeur approximative de la pente, mais il est préférable de la calculer en utilisant une calculatrice programmée, ou munie des fonctions statistiques et de régression. Le quotient "q" de la distribution est obtenu par l'expression suivante:

$$q = \left(10^{-b}\right)^{h} = 10^{-bh}$$

où "h" est l'étendue de chaque classe de d.h.p. Si h = 2 cm, alors $q = 10^{-2b}$. Si la calculatrice que vous possédez ne permet pas de faire des régressions, la méthode des moindres carrés, quoique plus longue, donnera le même résultat. Voici un exemple:

Classes de d.h.p. X	Fréquence f	Classes de d.h.p. X	Fréquence f
10	82	40	8
12	59	42	9
14	53	44	8
16	45	46	7
18	37	48	5
20	29	50	5
22	27	52	3
24	28	54	2
26	18	56	1
28	26	58	3
30	19	60	2
32	15	62	2
34	16	64	4
36	18	66	1
38	9		

a) Estimation de "q" à partir de l'équation Y = c + bX (fait avec une calculatrice possédant les fonctions statistiques et de régression)

$$Y = c + bX$$
$$Y = \log f = 2{,}16 - 0{,}03058X$$
$$b = -0{,}03058$$
$$-b = 0{,}03058$$
$$10^{-b} = 1{,}07296$$
$$q = (10^{-b})^2 = 1{,}15$$

b) Estimation de "q" selon la méthode détaillée des moindres carrés

Nombre de classe de diamètre = Z = 29

$$\Sigma X = 10 + 12 + \ldots + 64 + 66 = 1102$$
$$\Sigma(X^2) = 10^2 + 12^2 + \ldots + 66^2 = 49996$$
$$\Sigma Y = \Sigma \log f = \log 82 + \log 59 + \ldots + \log 1 = 28{,}9728$$
$$\Sigma XY = 10 \log 82 + 12 \log 59 + \ldots + 66 \log 1 = 852{,}63$$
$$\Sigma x^2 = \Sigma (X^2) - [(\Sigma X)^2/Z] = 49996-[(1102)^2/29] = 8120$$
$$\Sigma xy = \Sigma XY - (\Sigma X \times \Sigma Y/Z) = 852{,}63-(1102\times 28{,}9728/29) = -248{,}34$$

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{-248{,}34}{8120} = -0{,}03058$$

$$-b = 0{,}03058$$
$$10^{-b} = 1{,}07296$$
$$q = (1{,}07296)^2 = 1{,}15$$

CONCLUSION

Voici en résumé, les formules développées dans cette note.

$$N_D = \frac{K}{a}\left(e^{-aD_i} - e^{-aD_s}\right) \qquad \text{équation 1}$$

$$a = \frac{\ln q}{h} \qquad \text{équation 2}$$

$$S.T._D = \frac{-\pi K}{4a}\left[e^{-aD}\left(D^2 + \frac{2\,(aD+1)}{a^2}\right)\right]_{D_i}^{D_s} \qquad \text{équation 3}$$

$$K = \frac{-4 \times a \times S.T._{totale}}{\pi\left[e^{-aD}\left(D^2 + \frac{2\,(aD+1)}{a^2}\right)\right]_{9,05}^{D_{max}}} \qquad \text{équation 4}$$

où:

N_D = nombre de tiges dans une classe de diamètre D
K = constante
a = constante
D_s = limite supérieure de la classe de diamètre
D_i = limite inférieure de la classe de diamètre
e = nombre népérien
h = intervalle entre deux classes de diamètre
$S.T._D$ = surface terrière d'une classe de diamètre (en cm^2/ha)

$$q = 10^{-\left[\frac{\Sigma XY \quad - \; (\Sigma X . \Sigma Y \; \div \; Z)}{\Sigma (X^2) \; - \; [(\Sigma X)^2 \; \div \; Z)]}\right] h}$$ équation 5

où:

q = quotient du nombre de tiges d'une classe de diamètre divisé par le nombre de tiges de la classe de diamètre suivante

Σ = sommation de

X = diamètre

Y = logarithme en base 10 de la fréquence du diamètre

Z = nombre de classes de diamètre

h = intervalle entre 2 classes de diamètre

Vous disposez maintenant des outils pour établir toutes les distributions de diamètres désirées.

RÉFÉRENCES

MAJCEN, Z., Y. RICHARD,M. MÉNARD et Y. GRENIER, 1989. *Choix des tiges à marquer pour* le *jardinage d'érabliéres inéquiennes. Guide technique.* Gouv. du Québec, min. Éner. et Ress., Dir. rech. et dév., Serv. rech. appl. Mémoire n° 96, 88 p.

LEAK, W.B., 1963. *Calculation of "q" by the least squares method.* Journal of forestry. 61: 227-228.

MEYER, H.A., 1952. *Structure, growth and drain in balanced unvenaged forests.* Journal of forestry. 50: 85-92.

MEYER, H.A. et D.D. STEVENSON, 1943. *The structure and growth of virgin beech-birch-maple-hemlock forests in northern Pennsylvania.* Journal of agricultural research. 67(12): 465-484.

Gouvernement du Québec
Ministère de l'Énergie
et des Ressources (Forêts)
Direction de la recherche
et du développement