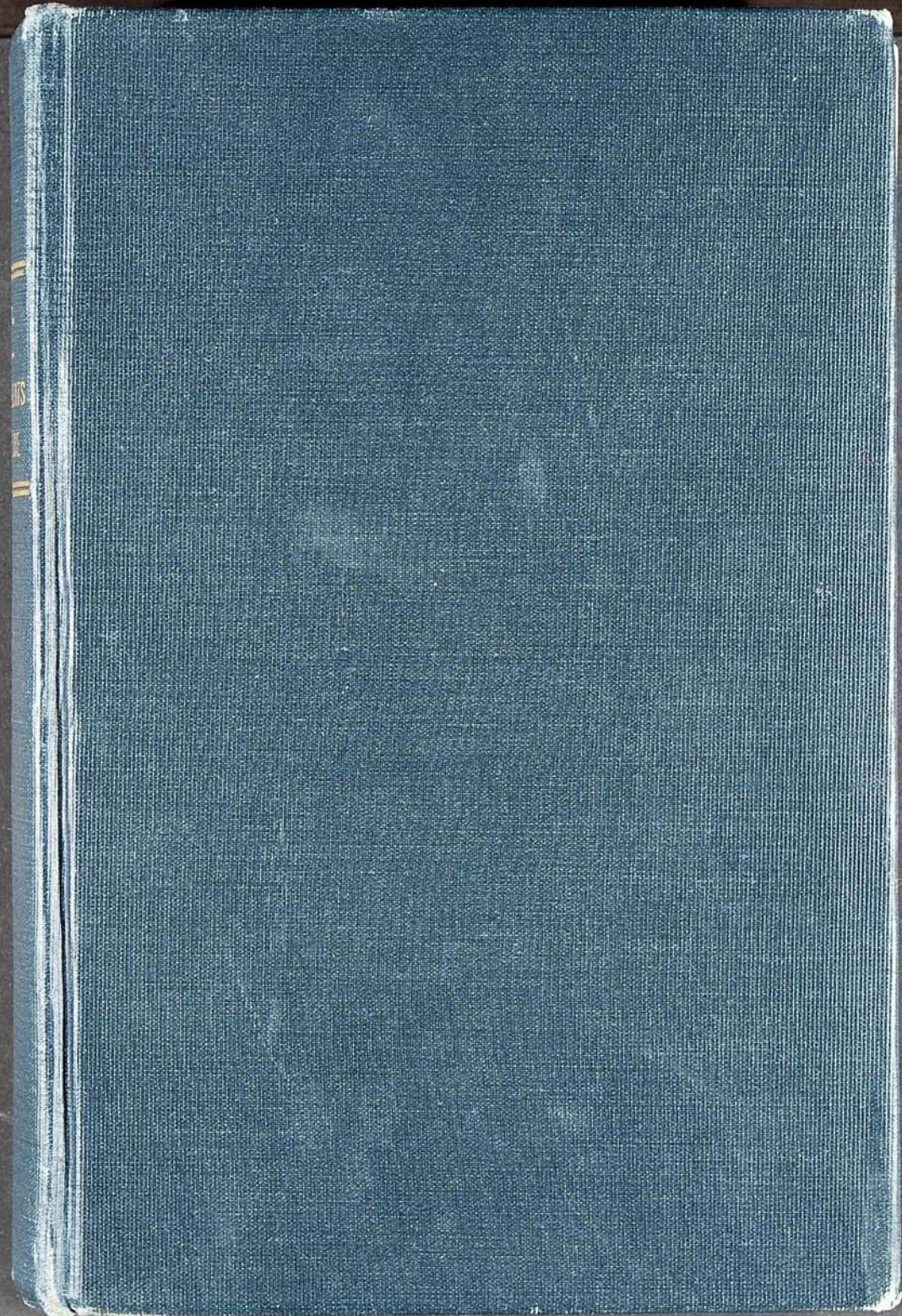
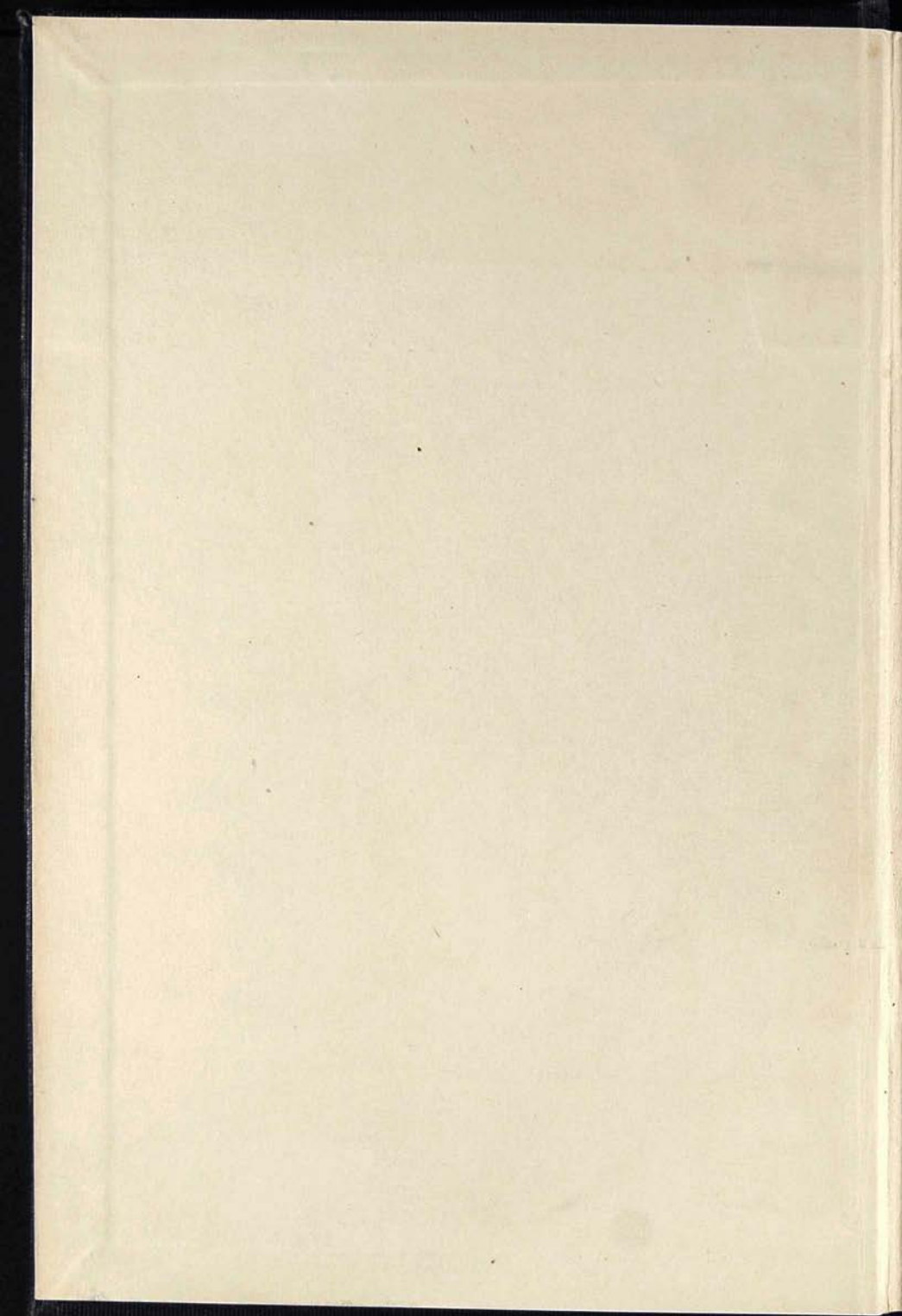
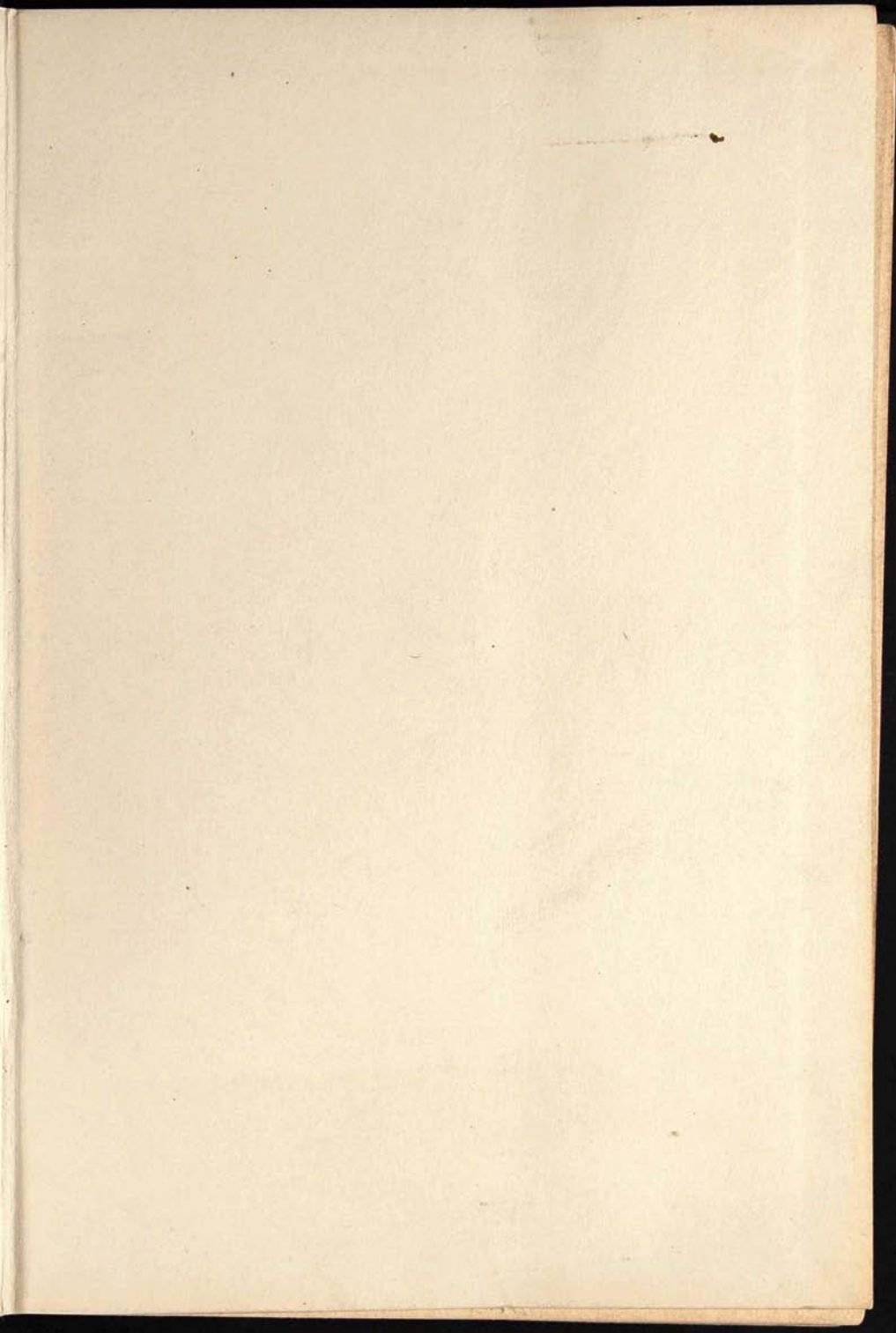
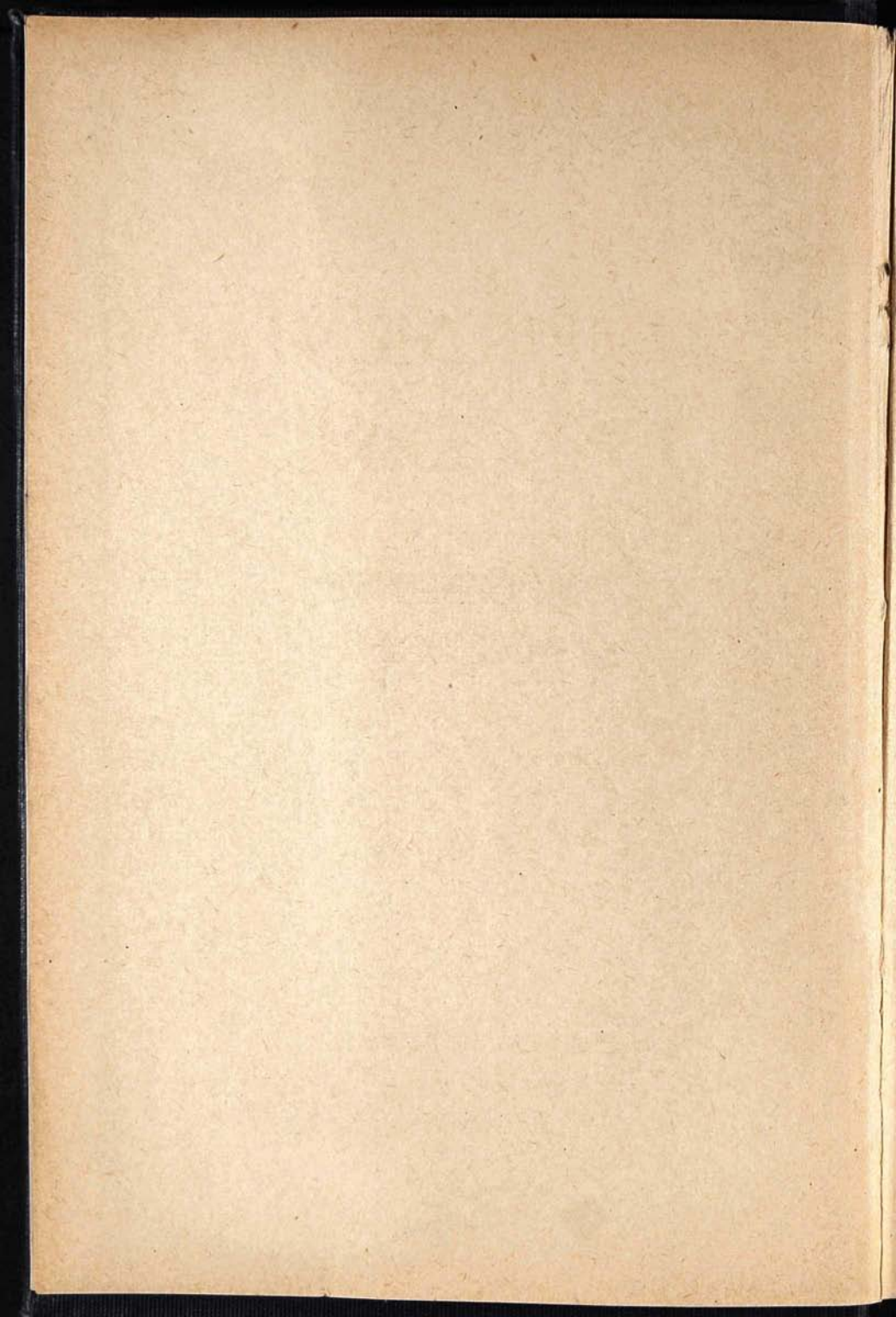










COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE

*Glavin
Gaudette*

par

Les Frères des Écoles chrétiennes

3^E ÉDITION

IMPRIMERIE DE LA-SALLE

949, RUE CÔTÉ

MONTREAL

1944

Droits réservés,
Canada, 1944,
par
Les Frères des Écoles chrétiennes.

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

INTRODUCTION

Il existe un grand nombre d'ouvrages français sur les matières qui font l'objet de ce travail ; dans ces traités excellents, la présentation des sujets est essentiellement théorique et les exercices y sont à la fois difficiles et peu nombreux. Les ouvrages anglais similaires contiennent, au contraire, de nombreux exercices intéressants et faciles, mais l'exposition diffère de celle des mathématiciens français auxquels nous aimons nous rattacher.

Il nous a semblé utile de tenter la fusion des deux manières en présentant un ouvrage suffisamment rigoureux et contenant de nombreuses applications sous forme de problèmes accessibles aux étudiants. Nous avons essayé de développer le programme que l'Ecole Polytechnique de Montréal exige pour l'admission en Seconde année. Rédigé en vue d'un programme précis interprété un peu largement, ce volume est encore le produit de plusieurs années d'enseignement pratique. Les exercices ont été soumis aux auditeurs des cours et, sauf dans des cas rares, ils ne dépassent pas les forces du jeune étudiant actif et curieux.

Dans l'exposé ultra-classique des matières de ce traité, il était interdit de chercher l'originalité, mais nous nous sommes efforcé d'être clair et d'atteindre une certaine rigueur indispensable à l'éducation scientifique. Afin d'amener l'élève à raisonner sur des exemples concrets, il nous a semblé utile d'introduire les éléments du calcul graphique et la construction des courbes simples qui offrent un genre de manipulations mathématiques intéressantes et faciles.

Pour ne pas allonger outre mesure cet ouvrage nous avons dû omettre un grand nombre de questions importantes mais d'application moins immédiate, telles que les fractions continues,

les théorèmes de Sturm et de Descartes et toute la théorie des racines fractionnaires des équations numériques.

Nous avons démontré quelques propositions par des raisonnements intuitifs et accepté des notions (celle d'aire par exemple) et certaines définitions ou principes que la science précise a remplacés par des axiomes plus généraux : il n'est peut-être pas à propos d'imposer aux débutants la logique impeccable des théories mathématiques modernes dont l'admirable rigueur ne peut être goûtée que par un esprit suffisamment préparé.

Aucun ordre rigide ne rattache les uns aux autres les principaux chapitres de cet ouvrage. Toutes les théories exposées sont nécessaires pour résoudre un grand nombre de problèmes et permettre la poursuite d'études supérieures en mathématiques, en physique, en chimie et même en sciences naturelles.

Montréal, le 15 octobre 1930.

Troisième édition.

Cette troisième édition diffère des précédentes par quelques développements théoriques nouveaux. Des notes historiques aussi précises que possible ont été distribuées dans le texte. Enfin plusieurs exercices ont été ajoutés surtout dans les "Exercices de revue" qui terminent le volume.

Montréal, octobre 1944.

FRÈRE ROBERT, F. É. C.

LICENCIÉ ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

UNIVERSITÉ DE LILLE

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I. **POLYNÔMES ENTIERS.** I. Polynômes entiers. II. Polynômes identiquement nuls — Polynômes équivalents. III. Méthode des coefficients indéterminés. IV. Décomposition des fractions rationnelles. V. Loi de récurrence ou Induction mathématique. VI. Divisibilité par $(x-a)$. p. 7.

Chapitre II. **FORMES INDÉTERMINÉES.** I. Notion de limite ; infiniment petit, infiniment grand. II. Théorèmes sur les limites. III. Étude de quelques formes indéterminées remarquables. p. 33.

Chapitre III. **CONSTRUCTION DE COURBES SIMPLES ET CALCUL GRAPHIQUE.** I. Construction par points. II. Construction de la droite. III. Résolution graphique des équations. IV. Étude du système de deux équations du premier degré à deux inconnues. V. Courbes du second degré. VI. Résolution graphique des équations du second degré et du troisième degré. p. 49.

Chapitre IV. **INÉGALITÉS.** I. Définitions. II. Propositions générales. III. Inégalités simultanées du premier degré. IV. Inégalités à deux inconnues. V. Inégalités du second degré. VI. Inégalités de degrés supérieurs au second. VII. Propositions sur les inégalités. p. 58.

Chapitre V. **ANALYSE INDÉTERMINÉE.** I. Équations indéterminées. II. Solutions entières de l'équation $ax+by=c$. III. Recherche d'une solution de $ax+by=c$. IV. Système de deux équations à trois inconnues. V. Équation indéterminée du second degré. p. 77.

Chapitre VI. **ANALYSE COMBINATOIRE.** I. Définitions. II. Arrangements. III. Permutations. IV. Combinaisons. V. Propriétés particulières des combinaisons. VI. Permutations circulaires. VII. Permutations avec répétitions. VIII. Arrangements avec répétitions. IX. Combinaisons avec répétitions. X. Probabilités. XI. Problème des dés. p. 90.

Chapitre VII. **BINÔME DE NEWTON.** I. Formule du binôme. II. Terme général. III. Loi de formation des termes. IV. Coefficient maximum. V. Somme des coefficients du binôme. VI. Développement de $(1+z)^n$. p. 116.

Chapitre VIII. **SÉRIES.** I. Définitions. II. Conditions générales de convergence ou de divergence. III. Règles de d'Alembert et de Cauchy. IV. Séries alternées. V. Série harmonique. VI. Série μ . VII. Série de Newton. p. 130.

Chapitre IX. DÉTERMINANTS. I. Historique — Définition. II. Développement élémentaire d'un déterminant. III. Théorèmes généraux. IV. Déterminants mineurs. V. Développement d'un déterminant quelconque. VI. Propriétés des déterminants. VII. Application à la résolution des équations du premier degré. VIII. Étude des équations homogènes du premier degré. IX. Équations de courbes obtenues par les déterminants. p. 150.

Chapitre X. FONCTION EXPONENTIELLE. I. Variation de a^x . II. a^x , fonction continue et croissante de x . III. Logarithmes. IV. Systèmes de logarithmes. V. Logarithmes népériens. VI. Série e . VII. Développement de e^x et de a^x . VIII. Construction des tables de logarithmes. p. 175.

Chapitre XI. IMAGINAIRES. I. Définition. II. Calcul algébrique des imaginaires. III. Calcul géométrique des imaginaires. IV. Formule de Moivre. V. Applications de la formule de Moivre. p. 196.

Chapitre XII. NOTIONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL. 1. Notion de fonction. II. Fonctions continues. III. Fonctions discontinues. IV. Notion de dérivée. V. Différentielle. VI. Dérivées des fonctions élémentaires. VII. Propriétés de la dérivée. VIII. Maximum et minimum d'une fonction. IX. Dérivée seconde. X. Construction des courbes. XI. Équation d'une courbe expérimentale. XII. Fonctions circulaires. XIII. Fonctions implicites. p. 226.

Chapitre XIII. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES. I. Racines entières. II. Racines égales. III. Première méthode d'approximation. IV. Formule de Newton. V. Méthode en "spirale ou en escalier". VI. Méthode graphique. p. 254.

Chapitre XIV. ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ ET DU QUATRIÈME DEGRÉ. I. Forme générale de l'équation. II. Réduction à la forme $x^3 + px + q = 0$. III. Conditions de réalité des racines. IV. Résolution de l'équation réduite. V. Discussion. VI. Vérification. VII. Équation du quatrième degré. p. 264.

Chapitre XV. NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL. I. Préliminaires. II. Fonctions primitives. III. Notion d'intégrale définie. IV. Intégration. V. Calcul graphique des intégrales définies. p. 286.

Chapitre XVI. RÈGLE À CALCUL. I. Historique. II. Construction. III. Multiplications et divisions. IV. Carrés et racines carrées. V. Cubes et racines cubiques. VI. Logarithmes des nombres. VII. Fonctions circulaires. VIII. Précision des calculs faits à la règle. IX. Échelles Log—Log. X. Curiosités. p. 295.

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

CHAPITRE I

POLYNÔMES ENTIERS — POLYNÔMES IDENTIQUES INDUCTION MATHÉMATIQUE

Sommaire. 1. Polynômes entiers. II. Polynômes identiquement nuls — Polynômes équivalents. III. Méthodes des coefficients indéterminés. IV. Décomposition des fractions rationnelles. V. Loi de récurrence ou Induction mathématique. VI. Divisibilité par $(x-a)$.

I. POLYNÔMES ENTIERS EN x .

1. Définition. *Un polynôme est entier en x , lorsque cette lettre n'est pas en dénominateur et qu'elle n'est affectée que d'exposants entiers et positifs.*

Ainsi : $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8$
est un polynôme entier en x . Il en est ainsi de :

$$x^5 - 4x^3y + 5xy^4$$

bien que les coefficients des puissances de x renferment la lettre y qui peut elle-même être une variable.

2. La quantité x ne peut figurer en dénominateur puisque les exposants de x ne peuvent être que positifs ; mais un polynôme entier en x admet d'autres quantités en dénominateurs.

$$x^4 - 4x^3 + \frac{3x^2}{a-1} + 5x + 9$$

est un polynôme entier en x tandis qu'il n'en serait pas ainsi

de l'expression : $3x^2 + x + \frac{1}{x+2}$

3. En général : $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m$ est un polynôme entier en x pourvu que les coefficients A_n soient des quantités indépendantes de x . Le degré d'un polynôme est celui de son terme du plus haut degré : le polynôme $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots$ est du degré m .

4. Afin de simplifier l'écriture, un polynôme entier en x est souvent désigné par le symbole : $P(x)$, que l'on prononce : P de x .

$$\text{On aura : } P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 7x + 8$$

Lorsque dans un polynôme on remplace x par une valeur quelconque a , le symbole $P(a)$ indique le résultat obtenu. Si $P(x)$ désigne le polynôme précédent,

$$P(2) = 2^5 - 4 \times 2^4 + 3 \times 2^2 - 7 \times 2 + 8 = -26$$

EXERCICE 1

1-1. Soit $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x - 9$, calculer $P(1)$, $P(-1)$ $P(4)$.

1-2. Dans le polynôme entier en x : $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + bx + c$, que doivent être b et c pour que $P(-2)$ et $P(1)$ soient tous deux nuls ?

1-3. Soit un polynôme entier en x : $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + c$, calculer c de façon que $P(2) = 0$.

1-4. Déterminer b, c, d de façon que $y = bx^2 + cx + d$ prenne les valeurs 5, 11, 19 pour $x = 1, 2, 3$.

II. POLYNÔMES IDENTIQUEMENT NULS — POLYNÔMES ÉQUIVALENTS

5. Un polynôme est identiquement nul lorsqu'il est nul pour toutes les valeurs de x . Par convention, le caractère d'identité est marqué par trois traits horizontaux superposés $\equiv$. Le polynôme $P(x)$ identiquement nul sera donc écrit symboliquement :

$$P(x) \equiv 0$$

Il est évident que $P(x) \equiv 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ est nul pour toute valeur de x . Nous verrons que tout polynôme identiquement nul doit avoir cette forme.

6. Deux polynômes sont équivalents lorsqu'ils prennent des valeurs égales pour toutes les valeurs attribuées à x . Il sera démontré que deux polynômes entiers en x sont équivalents lorsqu'ils sont identiques, c'est-à-dire lorsque les termes de l'un sont les mêmes que les termes de l'autre.

7. THÉORÈME. Si un polynôme entier en x n'a pas de terme indépendant de x , il est possible d'attribuer à x une valeur positive suffisamment petite pour que la valeur du polynôme devienne inférieure à tout nombre positif β , donné à l'avance, si petit soit-il.

a. Soit le polynôme $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ qui ne contient pas de terme indépendant de x . Le théorème revient à dire que si l'on remplace x par un nombre très petit, la valeur du polynôme est voisine de 0.

Si les coefficients, m, n, p, q sont inégaux, on augmentera la valeur de $P(x)$ en remplaçant chaque coefficient par la valeur absolue du plus grand d'entre eux que nous désignerons par 1 :

$$P(x) < lx^4 + lx^3 + lx^2 + lx.$$

Si les coefficients sont égaux et positifs comme dans $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$, nous prendrons le coefficient commun que nous désignerons encore par 1.

$$P(x) = lx^4 + lx^3 + lx^2 + lx.$$

b. Le nombre x étant positif et inférieur à l'unité, on a évidemment : $x > x^2 > x^3 > x^4$.

Donc, en remplaçant chaque puissance de x , par x à la première puissance, la valeur de $P(x)$ augmente. Il s'en suit que :

$$P(x) < lx + lx + lx + lx = 4lx \text{ dans tous les cas.}$$

c. Soit un nombre positif β aussi petit que l'on voudra, on peut toujours choisir x de façon que $4lx$ soit plus petit

$$\text{que } \beta, \text{ car il suffit de prendre : } x < \frac{\beta}{4l}.$$

Mais puisque $P(x)$ est plus petit que $4lx$ dès que x est plus petit que l'unité, pour $x < \frac{\beta}{4l}$ on aura : $P(x) < 4lx < \beta$, ou $P(x) < \beta$; ce qu'il fallait démontrer.

Donc x peut être choisi suffisamment petit pour que $P(x)$ soit plus petit que tout nombre donné.

8. PROBLÈME. Pour quelles valeurs de x le polynôme $x^4 - 3x^2 - 7x$ sera-t-il certainement inférieur à 0.01 en valeur absolue ?

Reprenant le raisonnement précédent :

$$P(x) < 7x^4 + 7x^2 + 7x.$$

Puis, lorsqu'on a : $x < 1$

$P(x) < 7x + 7x + 7x = 21x$. Donc $P(x) < 21x$, pour $x < 1$.

Si l'on prend $21x < .01$ ou $x < \frac{1}{2100}$, on aura :

$$P\left(\frac{1}{2100}\right) < 21 \times \frac{1}{2100} \text{ ou } .01 ;$$

la relation $x^4 - 3x^2 - 7x < .01$ est donc vérifiée dès que $x < \frac{1}{2100}$ en valeur absolue.

EXERCICE II

1-5. Pour quelles valeurs de x le polynôme : $x^5 - 7x^4 - x^3 + 17x^2 - 100x$ sera-t-il sûrement plus petit que .001 ?

1-6. Dans la fraction $\frac{3}{x^4 + 7x^3 - 10x}$, trouver les valeurs de x pour lesquelles cette fraction est sûrement plus grande que 3 000.

9. Théorème. Si un polynôme entier en x est identiquement nul, tous ses coefficients sont nuls.

Un polynôme identiquement nul est nul quelle que soit la valeur de x (§5).

Soit le polynôme $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, identiquement nul.

a. Il faut que r soit nul, car $P(0)$ devant être nul : $P(0) = 0$, or $P(0) = r$, donc $r = 0$.

b. Il reste : $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$, où x peut être mis en facteur :

$$P(x) = x(mx^3 + nx^2 + px + q). \text{ Il faut } q = 0.$$

Si q est différent de 0, x peut être choisi assez petit pour que le polynôme $mx^3 + nx^2 + px$, qui ne contient pas de terme indépendant de x , ait une valeur numérique plus petite que q en valeur absolue (§7) ; x ainsi choisi, on ne peut avoir $mx^3 + nx^2 + px + q = 0$, puisque $mx^3 + nx^2 + px$ est plus petit que q .

Mais $P(x)$ qui est égal au produit de x (qui n'est pas nul) par le polynôme précédent qui ne s'annule pas, ne peut être nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc il faut : $q = 0$.

c. Il reste : $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 = x^2 (mx^2 + nx + p)$
On démontrerait comme précédemment que p doit être nul, puis que n et m doivent être nuls également.

Donc : tous les coefficients d'un polynôme entier en x , identiquement nul, doivent être nuls.

10. Théorème. *Deux polynômes entiers en x équivalents, sont identiques.*

Soient les deux polynômes : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, et $mx^3 + nx^2 + px$ équivalents, c'est-à-dire, qui prennent des valeurs égales pour toutes les valeurs de x (§6) ; je dis que ces polynômes sont identiques.

Quel que soit x , on doit avoir :

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = mx^3 + nx^2 + px$
ou, en faisant passer tous les termes à gauche, et réduisant les termes semblables :

$P(x) = ax^4 + x^3(b-m) + x^2(c-n) + x(d-p) + e = 0$,
égalité qui doit être vraie quel que soit x .

$P(x)$ est identiquement nul, il faut donc que tous ses coefficients soient nuls (§9), ce qui suppose :

$a = 0$; $b = m$; $c = n$; $d = p$; $e = 0$; et les deux polynômes, ayant les mêmes coefficients, sont identiques.

III. MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

Les propriétés des polynômes identiques permettent de résoudre un certain nombre de problèmes de types divers.

11. *Effectuer une division par la méthode des polynômes entiers identiques ou par les coefficients indéterminés.*

Soit à diviser $x^5 + x^4 - x^3 - 12x + 5$ par $x^2 + 2x - 1$.
Le quotient sera un polynôme du troisième degré, et le reste, un polynôme du premier degré. Le quotient sera donc de la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d$, et le reste, de la forme $mx + n$.
Nous aurons l'identité suivante :

$$\text{dividende} \equiv \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}.$$

$$x^5 + x^4 - x^3 - 12x + 5 \equiv (x^2 + 2x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (mx + n)$$

ou, effectuant les opérations :

$$x^5 + x^4 - x^3 - 12x + 5 \equiv ax^5 + (2a + b)x^4 + (2b + c - a)x^3 + (2c + d - b)x^2 + (2d + m - c)x + (n - d)$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x , puisque les deux polynômes sont identiques, nous obtenons :

$$a = 1 ; 2a + b = 1 ; 2b + c - a = -1$$

$$2c + d - b = 0 ; 2d + m - c = -12 ; n - d = 5.$$

$$\text{D'où : } a = 1, b = -1 ; c = 2 ; d = -5, m = 0, n = 0.$$

Le quotient est $x^3 - x^2 + 2x - 5$; le reste est nul.

EXERCICE III

Par la méthode des coefficients indéterminés, effectuer les divisions suivantes :

1-7. $2x^4 - 13x^3b + 31x^2b^2 - 38xb^3 + 24b^4$ par $2x^4 - 3xb + 4b^2$

1-8. $6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 13x + 2$ par $2x^2 - 3x + 2$

1-9. $14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4$ par $2a^2 - 3ab + 2b^2$

1-10. Déterminer a et b pour que $x^3 + ax^2 + bx - 3$ soit divisible par $x^2 - x + 1$

1-11. Quelle doit être la valeur de m pour que :

$$2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ma^4 \text{ soit divisible par } x - a ?$$

1-12. Si le polynôme : $x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$ est divisible par $x-a$, que doit être m ? $m = 3$

1-13. Déterminer m et n de telle sorte que le polynôme :

$$x^4 - 3x^3 + 2mx + 2n$$

soit divisible par $x^2 - 2x + 4$.

1-14. Quelle valeur faut-il donner à m pour que

$$x^4 - ma^2x^2 + a^4$$

soit divisible par $x^2 - ax + a^2$?

1-15. Déterminer n pour que $y^3 - nay^2 + na^2y - a^3$ soit divisible par $y^2 - ay + a^2$.

12. La méthode des coefficients indéterminés permet d'effectuer certains développements *en série*; elle établit entre les coefficients des relations qui permettent de calculer aisément ces coefficients.

Soit à développer l'expression suivante suivant les puissances croissantes de x : $\frac{1+2x}{1-3x}$.

Écrivons :

$$1+2x \equiv (1-3x) (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 \dots)$$

En effectuant les opérations, nous obtiendrons :

$$1+2x \equiv C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 \dots \\ -3C_0x -3C_1x^2 -3C_2x^3 -3C_3x^4 \dots$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x , nous trouvons les relations :

$$C_0 = 1 ; 2 = C_1 - 3C_0 ; 0 = C_2 - 3C_1 ;$$

$$C_3 - 3C_2 = 0 ; C_4 - 3C_3 = 0 \dots C_k - 3C_{k-1} = 0$$

D'où, facilement : $C_0 = 1 ; C_1 = 5 ; C_2 = 15$.

$$C_3 = 45 ; \dots C_k = 3 C_{k-1}.$$

Le développement cherché est donc :

$$1 + 5x + 15x^2 + 45x^3 + 135x^4 \dots$$

Remarque. Nous avons trouvé le développement suivant :

$$\frac{1+2x}{1-3x} = 1 + 5x + 15x^2 + 45x^3 + 135x^4 \dots$$

mais les deux expressions ne sont pourtant pas identiques, sauf dans certaines régions. La série du second membre (§180) est convergente pour

$x < \frac{1}{3}$, en valeur absolue ; pour ces valeurs de x , les deux membres sont identiques, mais l'identité n'existe pas pour les autres valeurs de x .

Comme vérification, donnons à x la valeur 0.1, par exemple. Le membre de droite vaut l'unité augmentée d'une progression géométrique décroissante dont la raison est 0.3 et dont la somme est, par conséquent :

$$\frac{.5}{1-.3} \text{ ou } \frac{5}{7}, \text{ d'après la formule } \frac{a}{1-q} = s;$$

la valeur du membre de droite est donc : $\frac{12}{7}$. Celle du membre de gauche est également $\frac{12}{7}$.

Mais il n'en est plus ainsi pour $x = 1$, par exemple. A gauche, nous avons $\frac{1+2}{1-3}$ ou $-\frac{3}{2}$; tandis qu'à droite, nous trouvons $1+5+15+45 \dots$ et l'on aurait l'absurdité suivante :

$$-\frac{3}{2} = 1 + 5 + 15 + 45 + 135 \dots$$

Il y a donc lieu de chercher les valeurs pour lesquelles les développements considérés sont valables, ce qui souvent ne peut se faire par des méthodes élémentaires.

EXERCICE IV

Appliquer la méthode précédente au développement des expressions suivant les puissances croissantes de x :

$$1-16. 1) \frac{1-2x}{1-3x}$$

$$1-17. 2) \frac{1+2x}{1-x-x^2}$$

$$1-18. 3) \frac{1-x}{1-3x-2x^2}$$

$$1-19. 4) \frac{1}{1+2x^2+3x^4}$$

13. La méthode des coefficients indéterminés permet encore de trouver les développements des racines de certaines expressions. La racine est identifiée avec une suite de puissances croissantes de x à coefficients indéterminés ; en élevant cette suite de termes au carré ou au cube et en identifiant, on obtient des relations qui permettent de déterminer les coefficients.

La remarque précédente (§12) s'applique évidemment à ce genre de problèmes ; les développements obtenus ne sont vrais, en général, que pour certaines régions.

formules de développement par le binôme

14. APPLICATION. Par la méthode des coefficients indéterminés, développer la racine carrée de $(1-x)$, suivant les puissances croissantes de x .

Écrivons :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &\equiv 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 \dots \\ \text{d'où : } (1-x) &\equiv 1 + C_1^2x^2 + C_2^2x^4 + C_3^2x^6 + C_4^2x^8 + C_5^2x^{10} \dots \\ &+ 2C_1x + 2C_2x^2 + 2C_3x^3 + 2C_4x^4 + 2C_5x^5 \dots \\ &+ 2C_1C_2x^3 + 2C_1C_3x^4 + 2C_1C_4x^5 + 2C_1C_5x^6 + 2C_1C_6x^7 \dots \\ &+ 2C_2C_3x^5 + 2C_2C_4x^6 + 2C_2C_5x^7 + 2C_2C_6x^8 + 2C_2C_7x^9 \dots \\ &+ 2C_3C_4x^7 \dots\end{aligned}$$

Si nous admettons que ce développement s'obtient comme celui du carré d'un polynôme et se compose de la somme des carrés des termes, augmentée des doubles produits des termes pris deux à deux, il y a identité entre $(1-x)$ et le développement qui est à droite; et les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned}-1 &= 2C_1 \\ 0 &= C_1^2 + 2C_2 \\ 0 &= 2C_3 + 2C_1C_2 \\ 0 &= C_2^2 + 2C_4 + 2C_1C_3 \\ 0 &= 2C_5 + 2C_2C_3 + 2C_1C_4 \\ 0 &= C_3^2 + 2C_6 + 2C_1C_5 + 2C_2C_4\end{aligned}$$

D'où l'on tire les valeurs des coefficients :

$$C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = -\frac{1}{8}; C_3 = -\frac{1}{16}; C_4 = -\frac{5}{128} \dots$$

et, en définitive:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.4} - \frac{3x^3}{2.4.6} - \frac{3.5x^4}{2.4.6.8} - \frac{3.5.7x^5}{2.4.6.8.10} \dots$$

EXERCICE V

1-20. Calculer la série qui constitue la racine carrée de $1-2x$;

$$\text{on trouvera : } 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^3}{3!} - \frac{3.5x^4}{4!} - \frac{3.5.7x^5}{5!} \dots$$

1-21. Calculer la racine cubique de $1-3x$.

$$1 - x - x^2 - \frac{2.5}{1.2.3}x^3 - \frac{2.5.8}{1.2.3.4}x^4 \dots$$

1-22. Développer $1 \div 1-x$. Suivant les puissances croissantes de x .

1-23 Développer $1 \div (1-x)^2$.

IV. Décomposition des fractions rationnelles.

15. On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes. On peut supposer que ces polynômes sont premiers entre eux.

Par exemple : $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$ est une fraction rationnelle.

Pour effectuer certaines opérations sur les fractions rationnelles, particulièrement dans le calcul intégral, il faut décomposer ces fractions en éléments simples. Les coefficients indéterminés offrent une première méthode que nous allons exposer.

Les cas suivants peuvent se présenter :

a) Le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur (§16), il y a alors une opération préliminaire, puis :

b) Le dénominateur peut être mis sous forme d'un produit de facteurs différents du premier degré (§17) ou :

c) Les facteurs du dénominateur ne sont pas tous différents (le dénominateur admet des racines multiples) (§18) ou :

d) Les racines du dénominateur sont imaginaires (§19).

16. Si le degré du numérateur d'une fraction rationnelle est supérieur à celui du dénominateur, il faut commencer par trouver le quotient du numérateur par le dénominateur ; le reste sera le numérateur d'une nouvelle fraction rationnelle que l'on devra décomposer d'après les règles qui seront exposées en (17), (18), (19).

$$\text{Soit : } \frac{x^3-2x^2-6x+17}{x^2-5x+6}.$$

La division du numérateur par le dénominateur fournit le quotient : $(x+3)$ et le reste $(3x-1)$.

La fraction rationnelle est identique à :

$$x+3+\frac{3x-1}{x^2-5x+6}.$$

Une fraction rationnelle peut donc être mise sous la forme d'un polynôme augmenté d'une fraction rationnelle ayant comme numérateur un polynôme de degré inférieur au dénominateur.

17. Soit maintenant une fraction rationnelle ayant au numérateur un polynôme de degré inférieur au polynôme du dénominateur.

Supposons que le dénominateur puisse être mis sous forme d'un produit de facteurs différents du premier degré.

$$\text{Soit : } \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l)}$$

Écrivons que cette fraction est identique à la somme des fractions suivantes, les coefficients A, B, C, ... L, étant des nombres à déterminer :

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b) \dots (x-l)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} \dots + \frac{L}{x-l}$$

Si nous multiplions les deux membres par le produit :

$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l)$, les deux membres de l'égalité devront donner des polynômes identiques. En égalant les coefficients des puissances semblables de x , nous obtenons les équations nécessaires pour déterminer les coefficients.

$$\text{Ainsi : } \frac{3x-1}{(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Multipliant les deux membres par le produit : $(x-2)(x-3)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 3x-1 &\equiv A(x-3) + B(x-2); \\ &\equiv x(A+B) + (-3A-2B). \end{aligned}$$

$$\text{Il faut donc : } A+B=3 \quad ; \quad -3A-2B=-1.$$

$$\text{Ce qui donne : } A=-5 \quad ; \quad B=8.$$

La fraction donnée est identique à la somme des deux fractions :

$$\frac{-5}{(x-2)} + \frac{8}{(x-3)}$$

EXERCICE VI

Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$1-24. \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$$

$$1-25. \frac{x}{(x+1)(x+6)}$$

$$1-26. \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$$1-27. \frac{5x+1}{2(x-1)(x+1)}$$

$$1-28. \frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$1-29. \frac{7x+2}{x(x-2)(x+3)}$$

$$1-30. \frac{2x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

18. Lorsque les facteurs du dénominateur ne sont pas différents, la fraction rationnelle est décomposable d'après le modèle suivant.

$$\text{Soit : } \frac{(2x+5)}{(x-1)^3(x-3)}$$

Identifions la fraction proposée avec la somme des fractions suivantes :

$$\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-3)}$$

Il faut alors multiplier les deux membres par $(x-1)^3(x-3)$ et identifier avec le numérateur la somme des produits obtenus.

EXERCICE VII

Décomposer les fractions rationnelles suivantes.

$$1-31. \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$$

$$1-32. \frac{x^4+x^3+2x^2-x-1}{x^3-x}$$

$$1-33. \frac{x^2+1}{x^3(x-1)}$$

$$1-34. \frac{1+7x-x^2}{(1+3x)^2(1-10x)}$$

$$1-35. \frac{3(2x+5)}{(x-1)^3(x-3)}$$

$$1-36. \frac{8-x}{(2-x)^2(x+1)}$$

$$1-37. \frac{9x^2+14x+3}{(1-3x)^2(1+10x)}$$

$$1-38. \frac{5-9x}{(1-3x)^3(1+x)}$$

19. Il peut arriver que le dénominateur ait des racines imaginaires.

$$\text{Soit : } \frac{5x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

où $x^2+1=0$ n'admet que des racines imaginaires.

Écrivons :
$$\frac{5x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Le numérateur de x^2+1 est un polynôme du premier degré : $Cx+D$.

Procédant comme dans les autres cas, A , B , C et D sont facilement déterminés.

Dans le cas actuel, $A = 4$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$.

La fraction donnée est équivalente à :

$$\frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{-x}{x^2+1}.$$

EXERCICE VIII

Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

1-39.	$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$	1-40.	$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$
1-41.	$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-2)(x^2+1)}$	1-42.	$\frac{1}{(x^2+1)^2(x)^3}$

20. Pour déterminer les divers coefficients, il est ordinairement plus rapide de procéder autrement que dans les exemples traités en (§17) (§18) et (§19). En attribuant à x des valeurs convenables, on peut déterminer immédiatement tel coefficient utile sans calculer tous les autres, qui ne nous intéressent pas.

Voici ce procédé, exposé à l'aide d'un exemple.

Soit à décomposer en fractions simples :

$$\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}.$$

Les facteurs du dénominateur sont : $(x-2)(x-3)(x-4)$

Nous identifierons donc la fraction donnée avec la somme :

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}.$$

Multipliant les deux membres par $(x-2)(x-3)(x-4)$ il vient, en identifiant avec le numérateur de la fraction donnée :

$$12x^2 - 70x + 98 = A(x-3)(x-4) \\ + B(x-2)(x-4) + C(x-2)(x-3)$$

Donnons à x , dans les deux membres, les valeurs successives : 2, 3, 4.

Pour $x = 2$, le polynôme prend la valeur 6, et l'on a à droite $2A$; d'où $2A = 6$ ou $A = 3$.

Pour $x = 3$, le polynôme devient -4 ; à droite il reste $-B$: $B = 4$.

Pour $x = 4$, le polynôme devient 10, d'où $C = 5$.

La fraction proposée est donc égale à la somme de :

$$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4}.$$

EXERCICES DIVERS IX

Décomposer en fraction simples, par l'une ou l'autre des méthodes précédentes, les fractions rationnelles suivantes :

$$1-43. \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} \quad 1-44. \frac{x^2-2x+2}{x(x^2-x+1)} \quad 1-45. \frac{x^2-7x+11}{(x-2)(x-4)(x-5)}$$

$$1-46. \frac{4}{x(x^2+4)} \quad 1-47. \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} \quad 1-48. \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$1-49. \frac{x+1}{x(x-1)^3} \quad 1-50. \frac{2x^3-x^2+3x+12}{(x-2)(x-4)(x^2+1)} \quad 1-51. \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}$$

$$1-52. \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2} \quad 1-53. \frac{360x^2-266x+47}{24x^3-26x^2+9x-1}$$

$$1-54. \frac{4x^2+2}{4x^4+1} = \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1}$$

Trouver le développement en série suivant les puissances croissantes de x :

$$1-55. \frac{2+3x^2}{1-2x^2} \quad 1-56. \frac{1-x}{1-x+x^2} \quad 1-57. \frac{1+x}{(1-x)(1+x^2)} \quad 1-58. \frac{5x+1}{1-x^2}$$

V. LOI DE RÉCURRENCE OU INDUCTION

MATHÉMATIQUE

Passé à 25

21. A la méthode des coefficients indéterminés peut se rattacher le mode de démonstration appelé induction mathématique ou loi de récurrence. *Une loi est vérifiée pour un certain nombre d'entiers positifs ; on démontre que si la loi est vraie jusqu'à l'entier n , elle est encore vraie jusqu'à l'entier suivant $(n+1)$.* La formule, par hypothèse, a été trouvée vraie pour $n=1, 2, 3, \dots$ elle est donc vraie pour 4 ; étant vraie pour 4, elle est vraie pour 5, et ainsi de suite pour 6, 7, 8 ... indéfiniment ; la loi est donc vraie pour tous les nombres entiers.

22. Soit à trouver la formule donnant la somme des n premiers nombres impairs.

Nous avons :

$$1+3 = 2^2$$

$$1+3+5 = 3^2$$

$$1+3+5+7 = 4^2$$

$$1+3+5+7+9 = 5^2$$

Nous constatons que la somme des 2, 3, 4, 5 premiers nombres impairs est égale au carré de 2, 3, 4, 5. Nous pourrions vérifier le fait pour les 1000 premiers nombres impairs, par exemple, et toujours nous trouverions que la somme des n premiers nombres impairs est n^2 .

Le raisonnement d'induction mathématique intervient et permet de ne pas pousser aussi loin les essais pour être persuadé de la vérité de la loi. Supposons la loi vérifiée jusqu'à k , c'est à-dire que la somme des k premiers nombres impairs est k^2 , montrons que la somme de $k+1$ premiers nombres impairs est bien $(k+1)^2$.

Le nombre impair de rang k a comme valeur $2k-1$ car dans la progression arithmétique que forment les nombres impairs, le terme de rang k est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison 2 qu'il y a de termes avant lui — le terme de rang k est donc : $1+2(k-1) = 2k-1$; de même le terme de rang $k+1$ est $2k+1$.

Il a été vérifié que : $1+3+5+\dots(2k-1) = k^2$.

En ajoutant le nombre impair suivant, nous aurons :

$$1+3+5+7+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1)$$

Mais précisément k^2+2k+1 est le carré de $(k+1)$; donc la somme des $(k+1)$ premiers nombres impairs est bien $(k+1)^2$.

La loi est vraie pour $(k+1)$ lorsqu'elle est vraie pour k ; or elle est vraie pour $k = 5$, donc elle est vraie pour $k = 6$; étant vraie pour $k = 6$, elle est vraie pour $k = 7$, pour $k = 8$, $k = 9$, 10 , 11 ... donc elle est toujours vraie.

La démonstration d'un théorème sur les inégalités (§85), celle de la formule du binôme pour les nombres entiers, (§159) sont données par induction mathématique.

EXERCICE X

Démontrer les formules suivantes par le raisonnement d'induction mathématique.

$$1-59. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$1-60. \quad \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$1-61. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1-62. \quad 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$1-63. \quad 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7).$$

$$1-64. \quad 1.3 + 3.5 + 5.7 + 7.9 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$$

$$1-65. \quad 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = n(n+2)(2n^2+4n-1).$$

$$1-66. \quad 1.3.5 + 7.9.11 + 13.15.17 + \dots + (6n-5)(6n-3)(6n-1) = 3n^2(18n^2-13).$$

1-67. Montrer que $n^2 + 2n$ est toujours divisible par 8 lorsque n est un nombre pair.

1-68. Montrer que la différence entre le cube d'un nombre et ce nombre est toujours un multiple de 6.

1-69. Montrer que $3^{4n} - 1$ est toujours divisible par 80.

22.5. La méthode des coefficients indéterminés permet d'établir des formules, ou des relations utiles pour le calcul de la somme des termes d'une série, par exemple.

Soit à calculer la somme des termes :

$$1.2.3. + 2.3.4. + 3.4.5. + \dots + n(n+1)(n+2).$$

Posons que cette somme est donnée par un polynôme du quatrième degré : $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$.

Nous aurons donc identiquement :

$$\begin{aligned} 1.2.3. + 2.3.4. + \dots \\ (n)(n+1)(n+2) = \\ A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 \quad (1) \end{aligned}$$

et il faut déterminer A, B, C, D et E.

Si nous ajoutons un terme au développement (1) nous aurons :

$$\begin{aligned} 1.2.3. + 2.3.4. + \dots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ A + B(n+1) + C(n+1)^2 + D(n+1)^3 + E(n+1)^4 \quad (2) \end{aligned}$$

Par soustraction : (2) - (1), nous obtenons :

$$(n+1)(n+2)(n+3) = B + C(2n+1) + D(3n^2+3n+1) + E(4n^3+6n^2+4n+1)$$

$$\text{ou : } n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = 4En^3 + n^2(3D+6E) + n(2C+3D+4E) + (B+C+D+E)$$

$$\text{On doit donc avoir : } B+C+D+E = 6$$

$$2C+3D+4E = 11$$

$$3D+6E = 6$$

$$4E = 1$$

$$\text{d'où : } E = 1/4 ; D = 3/2 ; C = 11/4 ; B = 3/2$$

Pour déterminer A on n'a qu'à prendre $n = 1$ dans (1) et on trouve alors : $6 = A + B + C + D + E$, d'où : $A = 0$ puisque

$$B+C+D+E = 6$$

Le développement cherché est donc :

$$6n/4 + 11n^2/4 + 6n^3/4 + n^4/4$$

$$= \frac{n}{4} (6 + 11n + 6n^2 + n^3)$$

$$= \frac{n}{4} (n+1)(n+2)(n+3)$$

VI. DIVISIBILITÉ PAR $(x-a)$

23. THÉOREME. *Le reste de la division par $(x-a)$ d'un polynôme entier en x s'obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme. On doit donc avoir $R = P(a)$.*

Soit un polynôme entier en x : $P(x)$. Soit également $Q(x)$ le quotient de $P(x)$ par $(x-a)$ et R le reste. Le degré du reste devant être inférieur à celui du diviseur, R est indépendant de x , donc une constante.

Nous avons l'identité : $P(x) \equiv (x-a) Q(x) + R$

En remplaçant x par a dans cette identité, nous obtenons :

$$P(a) = (a-a) Q(a) + R$$

Donc $R = P(a)$, ce qui démontre le théorème.

24. COROLLAIRE *Lorsque $P(a) = 0$, le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$.*

En effet, puisque le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$ est nul, il s'ensuit que le polynôme est bien divisible par $(x-a)$.

25. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par $(x-a)$ est que ce polynôme s'annule quand on y remplace x par a .*

La condition est nécessaire, car le reste doit être 0 si la division est possible ; or ce reste est donné par $P(a)$.

La condition est suffisante ; car, si elle est réalisée, le reste R est nul et la division est possible.

26. THÉOREME. *Le reste de la division par $(x+a)$ d'un polynôme entier en x s'obtient en remplaçant x par $(-a)$ dans ce polynôme.*

En raisonnant comme précédemment, nous obtenons :

$$P(x) = Q(x) \times (x+a) + R$$

$$\text{Si } x = -a : P(-a) = Q(-a) \times (-a+a) + R.$$

Donc $P(-a) = R$, ce qui démontre le théorème.

Comme $(x+a) = [x-(-a)]$ nous aurions pu déduire ce théorème du précédent.

EXERCICE XI

Sans effectuer la division, trouver le reste des divisions suivantes :

1-70. $(a^3 - 1) \div (a - 1)$.

1-71. $(x^5 + 1) \div (x - 1)$.

1-72. $(a^5 + b^5) \div (a - b)$.

1-73. $(a^7 + b^7) \div (a + b)$.

1-74. $(3a^3 + 5a^2 - 6a) \div (a + 1)$.

1-75. $x^4 - 8x^2 - 9 \div (x - 2)$.

1-76. $2x^4 + 17x^3 - 68x - 32 \div (x + \frac{1}{2})$

1-77. $3x^5 + 2x^4a - 4x^3a^2 + 4x^2a^3 + 5xa^4 - 2a^5 \div (x - a)$

1-78. $x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5 \div (x - 2b)$

1-79. Déterminer m de telle sorte que $x^4 - 5x^2 + 4x - m$ soit divisible par $(2x + 1)$.

1-80. Déterminer m de telle sorte que :

$$2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ma^4$$

soit divisible par $(x - a)$.

1-81. Déterminer m et n pour que le polynôme $x^4 - 3x^3 + mx + n$ soit divisible par $(x^2 - 2x + 4)$.

1-82. Déterminer p et q de façon que le polynôme $x^4 + px^2 + q$ soit divisible par $(x^2 + 2x + 5)$.

1-83. Déterminer m , n , p de façon que le polynôme

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$

soit divisible par $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 3)$.

27. APPLICATIONS. $x^m - a^m$ est divisible par $(x - a)$, lorsque m est un entier positif.

Soit en effet $P(x) = x^m - a^m$;

Nous aurons $P(a) = a^m - a^m = 0 = R$

Il s'ensuit que $P(x)$ est divisible par $(x - a)$.

28. Quotient de $x^m - a^m$ par $(x - a)$.

En effectuant la division nous obtenons :

$$x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + x^{m-4}a^3 + x^{m-5}a^4 \dots + a^{m-1}.$$

Tous les termes sont précédés du signe $+$; le degré de x va en diminuant d'une unité, celui de a en augmentant d'une

unité. La somme des degrés de x et de a est toujours $m-1$. Le quotient est donc un polynôme de degré $(m-1)$ homogène en x et a .

29. $x^m + a^m$ n'est jamais divisible par $x-a$.

En effet si $P(x) = x^m + a^m$, nous aurons :

$$P(a) = a^m + a^m = 2a^m.$$

Puisque le reste n'est pas nul, la division est impossible.

30. $x^m - a^m$ est divisible par $(x+a)$ si m est pair.

$P(a)$ devient 0, si m est pair et $-2a^m$, si m est impair.

Donc la division est possible, sans reste, lorsque m est pair.

31. Quotient de $x^m - a^m$ par $x+a$.

En effectuant la division, on obtient le quotient :

$$\begin{aligned} x^{m-1} - x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 \\ + x^{m-5}a^4 - x^{m-6}a^5 \dots - a^{m-1}. \end{aligned}$$

Les signes alternent. Les degrés de x vont en diminuant d'une unité ; ceux de a en augmentant d'une unité. Le quotient est un polynôme homogène en x et a et de degré $m-1$.

32. $x^m + a^m$ est divisible par $x+a$ si m est impair.

Puisque $P(-a)$ devient 0, si m est impair, l'expression $x^m + a^m$ est bien divisible par $(x+a)$.

Si m est pair, $P(-a) = 2a^m$.

La division est donc possible lorsque m est impair.

33. Quotient de $x^m + a^m$ par $(x+a)$.

On obtient comme quotient de $x^m + a^m$ par $x+a$, lorsque m est impair :

$$x^{m-1} - x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 + x^{m-5}a^4 \dots + a^{m-1}.$$

Les signes alternent ; les degrés de x vont en diminuant, ceux de a en augmentant.

EXERCICE XII

1-84. Écrire immédiatement les quotients suivants : $(x^7 - 1) \div (x - 1)$.

1-85. Quel est le quotient de : $(a^7x^7 + b^7)$ par $(ax + b)$?

1-86. Quotient de $x^5 - 32$ par $(x - 2)$?

1-87. Quotient de $x^5 + 32$ par $(x + 2)$?

1-88. Quotient de $(a+x)^6 - b^3$ par $(a+x)^2 - b$?

1-89. Trouver explicitement le résultat de la division de :
 $(x+a)^3 + (y+b)^3$ par $(x+a+y+b)$.

Quelles divisions des formes étudiées en (25-33) fournissent les quotients suivants :

1-90. $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$?

1-91. Même quotient que 7, mais les signes alternent.

1-92. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

1-93. $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$.

1-94. $(ax)^6 + (ax)^5y + (ax)^4y^2 + (ax)^3y^3 + (ax)^2y^4 + (ax)y^5 + y^6$.

1-95. $(xy)^6 - (xy)^5m + (xy)^4m^2 - (xy)^3m^3 + (xy)^2m^4 - (xy)m^5 + m^6$.

1-96. $x^{2m-1} + x^{2m-2} + x^{2m-3} + x^{2m-4} + x^{2m-5} \dots + x^2 + x + 1$.

1-97. $(x+y)^4 + (x+y)^3(c+d) + (x+y)^2(c+d)^2 + (x+y)(c+d)^3 + (c+d)^4$.

34. Théorème. *Quand un polynôme entier en x s'annule pour des valeurs distinctes $a, b, c, \dots l$ attribuées à x , ce polynôme est divisible par le produit :*

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l).$$

Soit le polynôme $P(x)$, entier en x .

a. Puisque $P(a) = 0$, le polynôme est divisible par $(x-a)$.

On a donc identiquement : $P(x) \equiv (x-a) P_1(x)$;
 $P_1(x)$ étant le quotient de $P(x)$ par $(x-a)$.

b. $P_1(x)$, quotient par $(x-a)$, d'un polynôme entier en x est évidemment un polynôme entier en x .

$P(b) = 0$, par hypothèse.

Donc : $P(b) = P_1(b)(b-a) = 0$

Le facteur $(b-a)$ est différent de 0, il s'en suit que $P_1(b)$ doit être nul.

Et puisque $P_1(x)$ s'annule pour $x = b$, $P_1(x)$ est divisible par $(x-b)$.

On a donc identiquement : $P_1(x) \equiv (x-b) P_2(x)$ et $P(x) \equiv P_1(x) (x-a) \equiv (x-a) (x-b) P_2(x)$, où $P_2(x)$ désigne le quotient de $P_1(x)$ par $(x-b)$.

c. Comme on doit avoir $P(c) = 0$, par hypothèse, on verrait, en répétant le raisonnement précédent, que $P_2(x)$ doit être divisible par $(x-c)$.

De même dans le cas des autres valeurs distinctes qui peuvent annuler $P(x)$. En définitive, on obtient :

$$P(x) \equiv (x-a) (x-b) (x-c) \dots (x-l) P_n(x).$$

35. Théorème. *Pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par un produit de plusieurs facteurs de la forme $(x-a)$, il faut qu'il soit divisible séparément par chacun d'eux.*

Soit en effet : $P(x) \equiv (x-a) (x-b) (x-c) \dots (x-l) P_n(x)$; en intervertissant l'ordre des facteurs, et en mettant premier le facteur étudié, $(x-k)$, on ne change rien au produit ; donc : $P(x) \equiv (x-k) (x-a) \dots P_n(x)$,

Si l'on désigne par $P^1(x)$ l'ensemble des facteurs qui suivent $(x-k)$, il est évident que l'on peut écrire :

$P(x) = (x-k)P^1(x)$; donc $P(x)$ est bien nécessairement divisible par $(x-k)$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

36. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par le produit $(x-a) (x-b) (x-c) \dots (x-l)$, $a, b, c, \dots l$ ayant des valeurs distinctes, est qu'il soit divisible séparément par chacun des facteurs du produit.*

S'il est divisible par chacun des termes $(x-a) (x-b) \dots$ alors $P(x)$, s'annule pour $x=a$, $x=b$ et ... (34) le polynôme est divisible par le produit. D'ailleurs la condition est nécessaire (35).

37. Remarque. Soit m le degré du polynôme $P(x)$. $P_1(x)$, quotient de $P(x)$ par $(x-a)$, sera de degré $(m-1)$;

le coefficient du premier terme de $P_1(x)$ sera celui du premier terme de $P(x)$.

Si $P(x) = A_0 x^m + \dots$ on aura donc :

$$P_1(x) = A_0 x^{m-1} + \dots$$

Le coefficient du terme du plus haut degré de $P_2(x)$ est A_0 :

$$P_2(x) = A_0 x^{m-2} + \dots$$

En général, le coefficient du premier terme de chacun des quotients partiels est le même que celui du premier terme de $P(x)$: $P_k(x) = A_0 x^{m-k} + \dots$

De plus, dans l'expression : $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-1) P_n(x)$, le polynôme $P_n(x)$ est du degré $(m-n)$, n , désignant le nombre de facteurs, m le degré de $P(x)$.

Si le nombre des facteurs est égal au nombre qui marque le degré du polynôme, $m = n$, $P_n(x)$ se réduit à son premier terme A_0 . Dans ce cas :

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-1) A_0.$$

38. Théorème. *Un polynôme entier en x de degré m , qui s'annule pour plus de m valeurs distinctes de x , est identiquement nul.*

Soient les $m+k$ nombres $a, b, c, d \dots l, n, p \dots$ qui annulent le polynôme $P(x)$, de degré m .

Le développement de ce polynôme est de la forme :

$$P(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + A_4 x^{m-4} \dots + A_m.$$

Si les m valeurs $a, b, c, \dots l$, annulent ce polynôme, $P(x)$ est alors divisible par le produit :

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l) \quad (34)$$

et puisque ces facteurs sont au nombre de m :

$$P(x) \equiv A_0 (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l) \quad (37)$$

Par hypothèse, $P(x)$ s'annule encore pour d'autres valeurs que celles qui ont été employées dans le produit précédent, pour n , par exemple.

Il faut donc :

$$P(n) = A_0 (n-a)(n-b)(n-c) \dots (n-l) = 0.$$

Comme chacun des facteurs est différent de 0, puisque toutes les quantités $a, b, c \dots l$, sont distinctes, il faut $A_0 = 0$.

A_0 étant nul, $P(x)$ sera nul quel que soit x , puisque

$$P(x) \equiv A_0(x-a)(x-b) \dots (x-l).$$

Donc le polynôme $P(x)$ est identiquement nul.

39. Théorème. *Deux polynômes de degré m , égaux pour plus de m valeurs distinctes de x , sont identiques.*

Soient les deux polynômes :

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + A_4x^{m-4} \dots + A_m,$$

$$B_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + B_3x^{m-3} + B_4x^{m-4} \dots + B_m,$$

qui prennent des valeurs égales pour plus de m valeurs distinctes de x .

Leur différence :

$$(A_0 - B_0)x^m + (A_1 - B_1)x^{m-1} + (A_2 - B_2)x^{m-2} + \dots (A_m - B_m)$$

est un polynôme entier du degré m ; ce polynôme s'annule pour plus de m valeurs distinctes de x , par hypothèse : c'est un polynôme identiquement nul (§38); donc tous ses coefficients sont nuls (§9), c'est-à-dire que l'on a :

$$A_0 = B_0; A_1 = B_1; A_2 = B_2; \dots A_m = B_m$$

et les polynômes donnés ayant les mêmes coefficients sont identiques.

40. Corollaire. *Un trinôme du second degré ne peut admettre plus de deux racines.*

Si ce trinôme admettait trois racines distinctes, il serait identiquement nul.

Un polynôme du troisième degré en x ne peut admettre plus de trois racines distinctes.

En général un polynôme entier en x de degré n ne peut admettre plus de n racines distinctes.

EXERCICE XIII

1-98. Déterminer m, n, p de telle sorte que le polynôme

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p \text{ soit divisible par } (x-3)(x+1)(x-1).$$

1-99. Soit $x^4 - bx^3 - 15x^2 + dx + e$, déterminer b, d, e de façon que le polynôme soit divisible par le produit : $(x-1)(x-7)(x+2)$.

1-100. Dans $x^4 - 5x^3 + mx^2 + nx + p$ déterminer m, n, p pour que le polynôme soit divisible par $(x-8)(x+2)(x-7)$.

1-101. Montrer que $2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$ est divisible par $(a^2 - 5ab + 6b^2)$.

1-102. Démontrer que $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.

1-103. Montrer que $120x^4 + 154x^3 + 71x^2 + 14x + 1$ est divisible par $(20x^2 + 9x + 1)$.

1-104. Quel est le reste de la division de $x^2 - 2nx - 3n^2 + 3ax - an + 2a^2$ par $(x+a+n)$?

1-105. Montrer que $x^3 + b^3 + 3bx - 1$ est divisible par $(x+b-1)$

1-106. Soit le polynôme $3x^6 + 27x^5 - 8x^4 - 68x^3 + 36x^2 + 8x + q$, déterminer q de façon que le polynôme soit divisible par $(x+3)$.

1-107. Montrer que $13^p - 1$ est toujours divisible par 12, p étant un nombre entier positif. Dans quel cas est-il divisible par 14 ?

1-108. Montrer que $2^{35} - 1$ est divisible par 31, par 127 et par 3937.

1-109. Démontrer que $x^{3a} + x^{3b} + 1 + x^{3c} + 2$ où a, b et c sont des nombres entiers positifs, est toujours divisible par $(x^2 + x + 1)$.

(On multipliera dividende et diviseur par $x-1$).

1-110. Montrer que $x^{2m} + x^m + 1$ est divisible par $(x^2 + x + 1)$ lorsque m est de la forme $3k + 1$ ou $3k - 1$.

1-111. Démontrer que : $x^{4a} + x^{4b} + 1 + x^{4c} + 2 + x^{4d} + 3$ est divisible par $(x^3 + x^2 + x + 1)$, a, b, c , et d étant des entiers positifs.

1-112. Si m est impair, $(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$ est divisible par le produit $(b+c)(c+a)(a+b)$.

1-113. Déterminer A et B de façon que $Ax^4 + Bx^3 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$.

✓ 1-114. En divisant un polynôme entier en x successivement par $(x-1)$ et $(x-2)$ on trouve les restes 6 et 18. Quel est le reste de la division du même polynôme par $(x-1)(x-2)$?

1-115. En divisant un polynôme entier en x successivement par $x+1$, $x-1$, $x-2$ on trouve les restes 1, 3, 9. Quel est le reste de la division du même polynôme par $(x+1)(x-1)(x-2)$?

1-116. Si $x^3+3Bx^2+3Cx+D$ est divisible par $x^2+2Bx+C$ le premier polynôme est un cube et le second un carré.

1-117. Déterminer a et b pour que le polynôme
$$x^4+ax^3+bx^2+2x(a-1)+9$$
 soit un carré.

CHAPITRE II

FORMES INDÉTERMINÉES

Sommaire. I. Notion de limite : infiniment petit, infiniment grand.
II. Théorèmes sur les limites. III. Études de quelques formes indéterminées remarquables.

I. NOTION DE LIMITE

41. Lorsque les valeurs successives que prend une variable s'approchent d'une valeur déterminée C de telle façon qu'à partir d'un certain rang toutes les valeurs sont constamment comprises entre $(C + \alpha)$ et $(C - \alpha)$, α étant un nombre aussi petit que l'on veut, on dit que cette valeur C est la limite vers laquelle tend la variable.

Par exemple, les quantités : $.7, .67, .667, .6667, .66667, .666667$ s'approchent indéfiniment de la valeur $\frac{2}{3}$ qui en est la limite.

De même les sommes :

$$1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \dots$$

approchent indéfiniment par excès et par défaut de la valeur $\frac{2}{3}$ qui est encore leur limite.

42. **Infiniment petit.** On appelle infiniment petit toute quantité variable qui a pour limite zéro.

43. **Infiniment grand.** Si une fonction $y = f(x)$ est telle que lorsque x prend des valeurs comprises entre $(a+h)$ et $(a-h)$, h tendant vers 0, y prend des valeurs constamment supérieures à tout nombre A aussi grand que l'on veut, par définition, on dira que y tend vers l'infini lorsque x tend vers a .

Soit $y = \frac{1}{x}$; en faisant prendre à x des valeurs de plus en plus petites : $.1, .01, .001, .0001 \dots$ on voit que y prend des valeurs de plus en plus grandes 10, 100, 1000, 10 000 ... si x devient infiniment petit, la valeur de y deviendra infiniment grande.

Soit l'expression $\frac{k}{a}$, où a tend vers 0 et k désigne une quantité finie différente de 0.

Puisque a tend vers 0, on peut le supposer plus petit que $\frac{k}{N}$, N étant un nombre arbitrairement grand. Le rapport $\frac{k}{a}$, ou $k \div (\frac{k}{N}) = N$, augmentera donc indéfiniment en même temps que N .

Donc $\frac{k}{a}$ tend vers l'infini quand a tend vers 0.

L'infini se désigne par le symbole ∞ ; il est encore marqué par $\frac{k}{0}$ expression qui n'a de sens que si le dénominateur est considéré comme la limite d'une quantité tendant vers 0.

44. Notion d'infini fournie par une loi connue.

Lorsque la température d'un gaz ne change pas, la pression et le volume sont liés par la relation : $P \times V = C$. Admettons que cette formule de la loi de Mariotte est vraie absolument, qu'il s'agit donc d'un "gaz parfait".

Le volume est toujours donné par la formule : $V = \frac{C}{P}$; si donc la pression diminue indéfiniment, le volume augmente indéfiniment et tend vers l'infini.

De même, pour que le volume tende vers 0, il faut que la pression augmente indéfiniment, d'après la même formule.

II. THÉORÈMES SUR LES LIMITES

45. Limite d'une somme. *La limite de la somme d'un nombre fini de parties est la somme des limites des parties.*

Si a , b et c sont les limites des quantités x , y et z , en valeur absolue :

$$a - x = \alpha; \quad b - y = \beta; \quad c - z = \gamma.$$

Chacune des quantités α , β et γ tendant vers 0.

En additionnant les trois égalités, nous avons :

$$(a+b+c) - (x+y+z) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Supposons que la plus grande des valeurs α , β , γ soit γ ; la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est donc plus petite que 3γ ; donc, $\alpha + \beta + \gamma$ tend vers 0, et la limite de la somme est bien égale à la somme des limites des parties de la somme.

46. Remarque. Il est *essentiel* à la démonstration que le nombre des parties de la somme soit *fini*. Dans l'exemple précédent, si le nombre des parties est n , la valeur de $n\gamma$ n'est pas nécessairement nulle quand n tend vers l'infini.

Dans la théorie des séries (§191), on voit que la somme:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

où chaque terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, augmente indéfiniment lorsque p augmente indéfiniment lui-même.

Au contraire, dans la somme: $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{8n} + \frac{1}{16n} \dots$ que l'on peut prolonger indéfiniment, on obtient comme limite $\frac{2}{n}$, donc 0, lorsque n tend vers l'infini.

Donc, la limite d'un nombre fini de parties est la somme des limites des parties. Si le nombre des parties augmente indéfiniment, on ne peut rien affirmer.

47. Limite d'un produit. Lorsque le nombre des facteurs d'un produit est *fini*, la limite du produit est le produit des limites des facteurs.

Si l'on a : $x = a + \alpha$ et $y = b + \beta$,
le produit $xy = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta$.

Les produits αb et βa tendent évidemment vers 0 et, à plus forte raison, $\alpha\beta$, si α et β tendent vers 0.

Donc, la limite du produit tend vers le produit des limites.

48. Remarque. Il faut encore noter que le nombre des facteurs doit être *fini* pour que la loi s'applique sûrement.

Soit le produit :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} \times \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \dots \times \frac{1+\frac{(n-1)}{n}}{1+\frac{n}{n}}$$

La limite de chacun des facteurs est l'unité, lorsque n tend vers l'infini, tandis que la limite du produit est $1/2$.

comme on s'en rend aisément compte, chaque dénominateur, sauf le dernier $(1 + \frac{n}{n})$, se simplifiant avec le numérateur du facteur suivant.

49. Limite d'un quotient. *La limite du quotient de deux variables est le quotient des limites des variables, lorsque les limites a et b ne tendent pas simultanément vers 0 ou n'augmentent pas toutes deux indéfiniment.*

Soit le quotient : $\frac{a + \alpha}{b + \beta}$; montrons que ce quotient tend vers $\frac{a}{b}$, si α et β tendent vers 0.

$$\text{La différence : } \frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - a \beta}{b(b + \beta)}$$

est une fraction dont le numérateur tend vers 0 si a et b n'augmentent pas indéfiniment; tandis que le dénominateur tend vers b^2 . Donc, cette différence tend vers 0.

Si a et b tendent vers 0 ou vers α , la différence elle-même est indéterminée.

Les cas où cette proposition ne s'applique pas, sont donc de la forme : $\frac{0}{0}$, $\frac{\alpha}{\alpha}$, cas qui vont être étudiés dans les paragraphes suivants.

III. ÉTUDE DE QUELQUES FORMES INDÉTERMINÉES REMARQUABLES

Étude de la forme indéterminée : $\frac{0}{0}$

50. *Quand une expression algébrique prend une des formes :*

$$\frac{0}{0}, \frac{\alpha}{\alpha}, \alpha - \alpha, \text{ cette expression est indéterminée.}$$

Le quotient $\frac{0}{0}$ par exemple, peut prendre une valeur quelconque arbitraire. Mais ces valeurs arbitraires seraient sans intérêt; aussi préfère-t-on adopter la valeur que prend la fonction par continuité. De même, la différence de deux nombres infiniment grands est indéterminée par nature ainsi que le quotient de deux nombres infiniment grands.

Lorsque la valeur que prend par continuité la fonction, a été fixée, on dit que l'indétermination a été levée. On appelle cette valeur, la vraie valeur de l'indéterminée.

51. Etude de la forme $\frac{0}{0}$.

Si les deux termes de la fraction qui s'annulent tous deux sont des polynômes, il sera possible de lever l'indétermination en remarquant que les deux polynômes entiers en x qui s'annulent pour $x=a$, sont divisibles tous les deux par $(x-a)$. En simplifiant, une nouvelle expression sera obtenue que l'on étudiera pour $x = a$. Si de nouveau les deux termes s'annulent, l'opération sera recommencée, jusqu'à ce que l'un au moins des deux termes ne s'annule pas pour $x=a$.

On appliquera alors les règles ordinaires des fractions ou les remarques de (§49). Si les termes sont tous deux différents de 0 pour $x=a$, le quotient des deux valeurs donnera la valeur de la fraction.

Si le dénominateur seul s'annule, la fraction augmente indéfiniment.

Si le numérateur seul s'annule, la limite de la fraction est 0.

Soit la fraction : $\frac{x^5 - 1}{x - 1}$, les deux termes de cette expression s'annulent pour $x = 1$. En divisant les deux termes par $(x-1)$, on obtient :

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{1}$$

et pour $x = 1$, ce rapport vaut 5.

EXERCICE XIV

Calculer la "vraie valeur" des expressions suivantes :

2-1. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$ pour $x=1$.

2-2. $\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$ pour $x=1$.

2-3. $\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6}$ pour $a=2$.

$$2-4. \frac{y^3 - 3y^2 + 4}{y^3 - 2y^2 - 4y + 8} \text{ pour } y = 2.$$

$$2-5. \frac{a^4 - 6a^2 + 8a - 3}{a^2 - 3a + 2} \text{ pour } a = 1.$$

$$2-6. \frac{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}{x^3 - 3x^2 + 4} \text{ pour } x = 2.$$

$$2-7. \frac{8x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2} \text{ pour } x = \frac{1}{2}.$$

$$2-8. \frac{4x^3 - 13x^2 + 11x - 2}{8x^3 - 22x^2 + 13x - 2} \text{ pour } x = 2.$$

$$2-9. \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} \text{ pour } x = 1.$$

$$2-10. \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8} \text{ pour } x = 2.$$

$$2-11. \frac{75x^4 + 140x^3 - 223x^2 + 92x - 12}{45x^4 - 93x^3 + 65x^2 - 19x + 2} \text{ pour } x = \frac{2}{3},$$

et pour $x = \frac{1}{3}$.

$$2-12. \frac{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 6} \text{ pour } x = 1.$$

Étude de la forme indéterminée :

infini - infini, ou $\infty - \infty$.

52. Cette forme indéterminée peut se ramener à la forme précédente. L'expression est bien indéterminée, car toute quantité finie ajoutée à l'infini ne change en rien le caractère de l'infini; la différence entre deux infinis, peut donc être une quantité quelconque. La différence entre deux infinis peut même être infinie, car $2x$ est infini en même temps que x et la différence entre $2x$ et x est alors infinie.

53. Soit l'expression : $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 7}$; lorsque x augmente indéfiniment, cette expression se présente sous la forme d'une différence d'infinis. Multiplions et divisons par l'expression conjuguée, nous aurons :

$$y = \frac{x^2 - (x^2 - 4x + 7)}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 7}} = \frac{4x - 7}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 7}}$$

Nous verrons (§55) que pour obtenir la valeur limite de cette expression, il faut diviser les deux termes par x et faire tendre x vers l'infini. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{4 - \frac{7}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}} \quad \text{et, à la limite :} \quad \frac{4}{1 + 1} = 2.$$

54. Nous pouvions encore développer le radical, soit par la formule du binôme (§169), soit encore en extrayant la racine carrée de l'expression ; nous aurions eu ainsi :

$y = x - (x - 2 + \frac{k}{x} + \dots)$; si x augmente indéfiniment, nous obtenons immédiatement la limite cherchée.

EXERCICE XV

2-13. Valeur limite de $(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x)^{\frac{1}{2}}$ lorsque x tend vers l'infini.

2-14. Limite de $(x^2 - 4x + 7)^{\frac{1}{2}} - (x^2 - 8x - 9)^{\frac{1}{2}}$ lorsque x augmente indéfiniment.

2-15. Pour x tendant vers 4 quelle est la limite de $\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}$.

2-16. Quelle est la limite de l'expression suivante lorsque x tend vers 2 :

$$\frac{x-12}{x^2+2x-8} - \frac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)}.$$

2-17. Limite de l'expression : $\frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}$
pour x tendant vers 2.

2-18. Si x tend vers 2, vers quelle limite tend l'expression :

$$\frac{4x^2+3}{x(x^2+x-6)} - \frac{x-1}{x^2-6x+8}.$$

2-19. Limite de : $2x - \sqrt{x^2 - x + 1}$, x tendant vers l'infini.

2-20. Limite de : $(x+3) - \sqrt{x^2 + 6x + 50}$, x tendant vers l'infini.

2-21. Limite de : $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2 + 7} - (x+2)$ pour x tendant vers l'infini,

ÉTUDE DE LA FORME INDÉTERMINÉE : $\frac{\infty}{\infty}$

55. Ce cas d'indétermination se présente souvent dans l'étude des séries (§180). Lorsque les deux termes d'un rapport tendent vers l'infini, on obtiendra la valeur limite de ce rapport en divisant les deux termes par la variable élevée à une puissance convenable. Dans l'expression nouvelle, il y aura plusieurs termes ayant x en dénominateur qui disparaîtront lorsque x augmentera indéfiniment. Il ne restera à étudier que le rapport des autres quantités.

56. Soit à étudier :
$$\frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 25}{3x^3 - 5x^2 - 8x + 2} = y$$

expression qui prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$, lorsque x augmente indéfiniment.

Divisons les deux termes par x^3 , il vient :

$$y = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{25}{x^3}}{3 - \frac{5}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

si x augmente indéfiniment, tous les termes du numérateur s'annulent, sauf le premier; et il en est ainsi des termes du dénominateur. À la limite, on aura donc : $y = \frac{1}{3}$.

57. Soit encore à étudier la limite de :

$$\frac{x + 3 + \frac{x + 6}{x - 2}}{x - 7 - \frac{x + 2}{x - 2}}$$

lorsque x tend vers 2. Les deux termes de la fraction tendent alors vers l'infini ;

multiplions-les par $(x-2)$, il vient :

$$\frac{(x+3)(x-2) + (x+6)}{(x-7)(x-2) - (x+2)}$$

et lorsque $x = 2$, la valeur du rapport est : $\frac{8}{-4} = -2$.

58. Cas général.

$$\text{Soit à étudier : } y = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots}.$$

Si nous divisons les deux membres par x^n , nous obtenons :

$$y = \frac{ax^{m-n} + bx^{m-n-1} + cx^{m-n-2} + \dots}{A + B/x + C/x^2 + \dots}.$$

Divers cas peuvent se présenter.

Si $m = n$ tous les termes du numérateur s'annulent pour x tendant vers l'infini, sauf le premier et il en est ainsi des termes du dénominateur. **La valeur limite est : a/A .**

Si $m > n$, le premier terme au moins du numérateur augmente indéfiniment tandis que le dénominateur tend vers A : **y augmente donc indéfiniment.**

Si $m < n$, tous les termes du numérateur tendent vers 0, puisque tous les exposants sont négatifs, tandis que le premier terme du dénominateur est A , **la limite est 0.**

59. On peut énoncer les règles suivantes : Lorsque les deux termes d'un rapport sont des polynômes augmentant indéfiniment avec x ,

Si les degrés des polynômes sont les mêmes, la valeur limite est celle du rapport des coefficients des termes du plus haut degré.

Si le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur, le rapport augmente indéfiniment.

Si le degré du numérateur est plus faible que celui du dénominateur, le rapport tend vers 0.

Si les termes ne sont pas des polynômes, la limite du rapport s'obtiendra par des procédés divers, suivant les fonctions que contiennent les rapports.

EXERCICE XVI

Quelle est la limite des expressions suivantes lorsque x augmente indéfiniment :

$$2-22. \quad \frac{2x^2 + 4x - 1}{17x - 5}.$$

$$2-23. \quad \frac{4x^3 - 9x + 90}{x^3 - 1}$$

$$2-24. \quad \frac{5x^3 - 7x + 9}{x^4 - 16}.$$

$$2-25. \quad \frac{7x^3 - 9x + 25}{2x^3 + 5x - 56}.$$

$$2-26. \quad \frac{17x^2 + 89}{8x^3}.$$

Calculer la limite des expressions .

$$2-27. \quad \frac{n(n+1)}{n^2 + 3n + 5}, \quad n \text{ tendant vers l'infini.}$$

$$2-28. \quad \frac{n^2}{(n+1)^2}, \quad n \text{ tendant vers l'infini.}$$

$$2-29. \quad \frac{(n-2)^3}{(n-1)^3}, \quad n \text{ tendant vers l'infini.}$$

$$2-30. \quad \frac{(3x-7)(2x+9)(x+1)}{x^3 + 5x + 9}, \quad x \text{ tendant vers l'infini.}$$

$$2-31. \quad \frac{(x^2+1)(2x-7)(x+8)}{x(x+5)(2x-7)(x+9)} \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

$$2-32. \quad \frac{(3x+7)^2}{\sqrt{(x^3+5x+9)}} \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

$$2-33. \quad \frac{(x^5 + 5x^3 + 7)^{\frac{1}{4}}}{(4x^4 + 3x - 5)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

$$2-34. \quad \frac{x^3 + 100x^2 - 100}{(x + x^{\frac{1}{2}})^3} \quad "$$

$$2-35. \quad \frac{3 + x^{\frac{1}{2}}}{7 - x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si } x \text{ tend vers l'infini.}$$

$$2-36. \quad \frac{(x + 2x^{\frac{1}{2}})^3}{\sqrt{(x^6 - 64)}}, \quad x \text{ augmentant indéfiniment.}$$

60. Étude des fonctions : $\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, lorsque x tend vers 0.

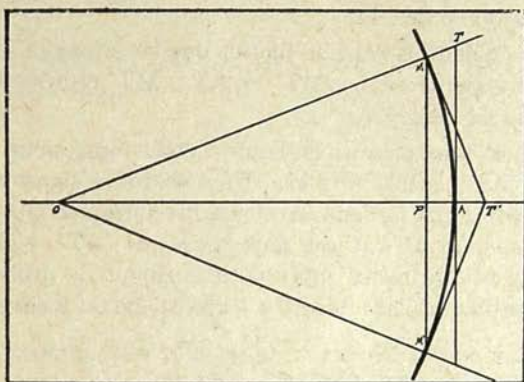


Fig. 1

Sur le graphique, PM est le sinus de l'angle MOA ou x ; AT est la tangente du même angle. La longueur de l'arc AM, calculée au moyen de OA pris comme unité, donne en radians la valeur de l'angle MOA.

Les fonctions $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ sont de la forme $\frac{0}{0}$ lorsque x tend vers 0. Comme ces expressions se rencontrent très souvent, il est utile d'en faire une étude spéciale.

Étude géométrique du rapport $\frac{\sin x}{x}$, quand x tend vers 0.

Étude de la valeur numérique du rapport : $\sin x/x$ quand x , en radians, tend vers 0.

x (en radians)	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
.20	.19867	.9934
.15	.14944	.9963
.10	.09983	.9983
.05	.04998	.9996
.01	.01000	1.0000
.001	.00100	1.0000

On voit ainsi que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers l'unité, quand x tend vers 0.

Soit PM la ligne qui représente le sinus, (le rayon OA étant pris comme unité). La droite AT représentera la tangente, et l'arc AM, représentera l'angle x exprimé en radians. Menons la tangente MT'.

Il est évident, d'après la figure, que les triangles OAT et OMT' sont égaux: donc $MT' = AT$; MT' représente donc la tangente de l'angle x .

Si nous construisons la figure symétrique, nous aurons $M'T' = MT'$; $M'A = AM$. Comme toute ligne convexe est plus petite que la ligne enveloppante terminée aux mêmes extrémités, l'arc M'AM est plus petit que $MT' + M'T'$ ou $2x < 2 \operatorname{tg} x$. De même, puisque le segment de droite MM' est plus petit que l'arc MAM': $2PM < 2x$, ou $2 \sin x < 2x$.

$$\begin{array}{l} \text{On a donc :} \quad 2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x \\ \quad \quad \quad \text{ou} \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x. \end{array}$$

Si l'on divise les trois termes par $\sin x$, ce qui est possible puisque $\sin x$ est positif (§80), il vient :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mais lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers l'unité; le rapport $1/\cos x$ tend lui-même vers l'unité tout en lui étant supérieur; posons $1/\cos x = (1 + a)$, a étant une quantité tendant vers 0 en même temps que x .

Le rapport $\frac{x}{\sin x}$ est donc compris entre 1 et $(1 + a)$, et, à la limite, lorsque x tend vers 0, $(1 + a)$ tend lui-même vers l'unité; donc $\frac{x}{\sin x}$ a pour limite l'unité lorsque x tend vers 0.

Valeur du rapport: $\sin x/x$ lorsque x est donné en degrés, minutes ou secondes.

Si l'angle est donné en degrés soit $\sin x^\circ$, il est facile de transformer cet angle en radians puisque :

$$1^\circ = \pi/180 \text{ radians. Donc :}$$

$$\frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\sin x\pi/180}{x}, \text{ et ce rapport peut s'écrire :}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\sin y}{y} \times \frac{\pi}{180}$$

Si on remplace : $\pi x/180$ par y , on voit que $\sin y/y$ tend vers l'unité, et le rapport précédent tend vers : $\pi/180 = 0.01746$

Donc : $\frac{\sin x^\circ}{x}$ tend vers 0.01746 quand x , exprimé en degrés, tend vers 0.

Lorsque x est exprimé en minutes, le rapport : $\frac{\sin x'}{x}$ s'obtient comme précédemment.

Une minute exprimée en radians vaut : $\frac{\pi}{180 \times 60}$

$$\text{Donc : } \frac{\sin x'}{x} = \frac{\sin \frac{\pi x}{180 \times 60}}{x} = \frac{\pi}{180 \times 60} = .00029, \text{ à la}$$

limite.

Si l'angle x est exprimé en secondes, on trouve de même :

$$\frac{\sin x''}{x} = \frac{\sin \frac{\pi x}{180 \times 3600}}{x} = \frac{\pi}{180 \times 3600} = .000\ 004848$$

62. Corollaire. La fonction $\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\sin x} \times \cos x$,
 puisque $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Comme la valeur de $\cos x$ tend
 vers 1, et que $x/\sin x$ tend également vers l'unité, l'application
 du théorème (§47) montre que la limite du produit de ces deux
 termes est le produit des limites de chacun; donc la limite du
 rapport $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ est bien 1.

De même : $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{tg} x}$
 comme la limite de chacun des deux rapports est l'unité, il
 s'ensuit que la limite du produit est encore l'unité.

Les rapports : $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ ont donc tous l'unité
 pour limite, quand x tend vers 0, *pourvu que les angles x soient
 exprimés en radians.*

EXERCICE XVII

Calculer les limites des expressions suivantes, lorsque x tend vers 0.

2-37. $\frac{\sin x/2}{x}$

2-42. $\frac{\sin 3x}{x}$

2-47. $\frac{\sin x^2}{x}$

2-38. $\frac{\sin x^2}{x^2}$

2-43. $\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

2-48. $\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$

2-39. $\frac{\sin x}{x^2}$

2-44. $\frac{\sin (x)^{1/2}}{x}$

2-49. $\frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} qx}$

2-40. $\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$

2-45. $\frac{\sin (x/3)^2}{x^2}$

2-50. $\frac{\sin (x-m)}{(x-m)}$ x tendant vers m

2-41. $\frac{x^2 - x}{\sin x}$

2-46. $\frac{x + x^2}{\sin x^2}$

2-51. $\frac{\sin (x^2 - 5x)}{x^2 + 5x}$

2-52. $\frac{\sin x \text{ (secondes)}}{x}$, l'angle étant exprimé en secondes.

EXERCICES DE REVUE XVIII

2-53. Trouver la limite de $\sqrt{x^2 + 1} - (x+2)$, quand x tend vers l'infini.

2-54. Quelle est la valeur limite de : $\sqrt{x^2 - 5x + 9} - \sqrt{4x^2 - 4x + 7}$ quand x augmente indéfiniment ?

2-55. Lorsque x augmente indéfiniment, vers quelle limite tend le rapport :

$$\frac{(ax+b)^{1/2} - (bx+a)^{1/2}}{(cx+d)^{1/2} - (dx+c)^{1/2}}.$$

2-56. Si la variable x tend vers l'unité, vers quelle limite tend l'expression :

$$\frac{\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2-57. La valeur de n tendant vers l'infini, quelle est la limite du rapport :

$$\frac{2n + \sqrt{n^2 + 10}}{3n - 2 + \sqrt{4n^2 - 3n + 7}}.$$

2-58. Valeur limite de l'expression : $\sqrt{x^2 + a^2} - x$, lorsque x augmente indéfiniment.

2-59. Limite pour x infini de $\frac{1 + x - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x} - 1}$.

2-60. Lorsque x tend vers l'unité, quelle est la limite de :

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{2x^3 - 5x^2 + 8x - 5}.$$

2-61. La variable x tendant vers 0, quelle est la limite de :

$$\frac{(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}}{x}.$$

2-62. Limite de $(x^7 - a^7) \div (x - a)$, lorsque x tend vers a .

2-63. Valeur de $\frac{\sin x - \sin a}{(x - a)}$, lorsque $(x - a)$ tend vers 0.

2-64. Valeur limite de $\frac{1}{x} \cdot \sin(x/2)$, lorsque x tend vers 0.

CHAPITRE III

CONSTRUCTION DES COURBES SIMPLES

Sommaire. I. Construction par points. II. Construction de la droite. III. Résolution graphique des équations. IV. Étude du système de deux équations du premier degré à deux inconnues. V. Courbes du second degré. VI. Résolution graphique des équations du second degré et du troisième degré.

I. CONSTRUCTION PAR POINTS

63. Un simple graphique rendra évidente la variation d'une fonction ou permettra la détermination approximative des racines. Des considérations élémentaires peuvent faciliter la construction d'une courbe dont l'équation se présente sous forme de polynôme ou de relations entre lignes trigonométriques. Voici comment on peut procéder.

64. Choisir deux droites rectangulaires appelées axes de coordonnées ; l'une, *horizontale*, est l'axe des abscisses ou axe des x ; l'autre, l'axe des ordonnées, ou des y . Le sens positif est ordinairement vers la droite, sur l'axe des x et vers le haut, sur l'axe des y .

On porte la valeur de l'abscisse sur l'axe des x dans le sens convenable. Prenons OP = abscisse de M .

Puis à partir de P , parallèlement à l'axe des y et dans le sens marqué par le signe de l'ordonnée, on porte l'ordonnée. Le point M est ainsi obtenu ; dans la figure ses coordonnées sont les suivantes : abscisse $+7$, ordonnée $+4$; on dit que c'est le point $(7,4)$.

De même, le point M' a comme coordonnées $(-5, 6)$, son abscisse est -5 et son ordonnée $+6$.

Le point M'' a (-7) comme abscisse et -5 comme ordonnée : c'est le point $(-7, -5)$.

Enfin N est le point $(4, -4)$.

L'autre point N de l'axe des x, a pour coordonnées $(-9,0)$.

Le point R de l'axe de y est $(0, -5)$.

Le point O, à l'origine, est $(0, 0)$ et S est $(0, 8)$.

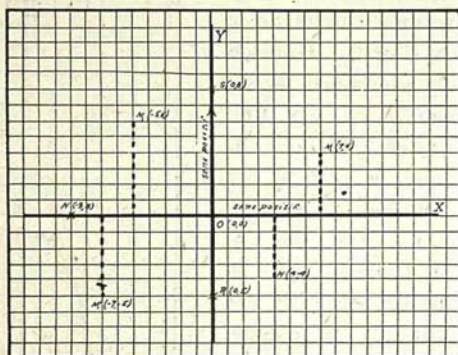


Fig. 2

La droite OX, horizontale, est l'axe des abscisses ; OY est l'axe des ordonnées. Le sens positif est celui de OX, pour les abscisses et celui de OY, pour les ordonnées. Le point M, par exemple, est déterminé par ses deux coordonnées : abscisse 7, ordonnée 4. Le point M est le point $(7,4)$.

65. Soit à construire la courbe : $y = \frac{x^3}{12} - 1$.

La variable y représente l'ordonnée d'un point de la courbe, et la variable x l'abscisse du même point. La courbe est le lieu des points qui vérifient cette équation. Voici pour quelques valeurs de x les valeurs correspondantes de y .

(A) $0 \quad -1 \quad -1 \quad -\frac{13}{12}$ (F)

(B) $1 \quad -\frac{11}{12} \quad -2 \quad -\frac{5}{3}$ (G)

(C) $2 \quad -\frac{1}{3} \quad -3 \quad -\frac{13}{4}$ (H)

(D) $3 \quad \frac{5}{4} \quad -4 \quad -\frac{19}{3}$ (I)

(E) $4 \quad \frac{13}{3}$

La position d'un point est déterminée par deux nombres : l'abscisse de ce point et son ordonnée. Après avoir déterminé un certain nombre de points, on les joint par un trait continu, précisé au besoin par la détermination de points

supplémentaires. Pour construire facilement une courbe, le papier quadrillé est conseillé.

Un simple examen de la courbe montre que l'ordonnée y s'annule pour une valeur de x comprise entre 2 et 3. Comme la valeur de y augmente constamment avec x , y est une *fonction croissante* de x . On voit encore que la courbe est tournée vers le bas jusqu'à sa rencontre avec l'axe des y , et qu'elle est tournée vers le haut après avoir traversé cet axe. Le point où la courbe change ainsi de direction de courbure est un "*point d'inflexion*".

Cette construction point par point de courbes représentant des équations, suffit dans bien des cas. La notion de dérivée première et celle de dérivée seconde permettront de procéder avec plus de rigueur.

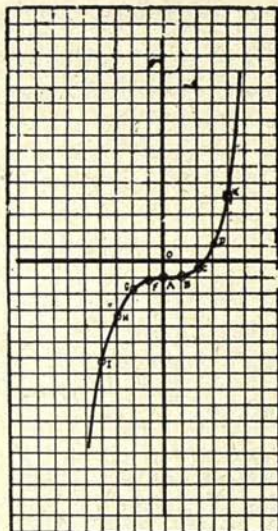


Fig. 3

L'ordonnée s'annule pour une valeur de x comprise entre 2 et 3. Jusqu'au point A la courbe est orientée vers les y négatifs ; à partir de A, elle est orientée vers les y positifs : le point A est un "*point d'inflexion*".

EXERCICE XIX

3-1. Construire la courbe que représente l'équation :

$$y = x^2 - 3x.$$

3-2. Construire la courbe : $y = x^3 - 2x^2 + 1.$

3-3. Construire la courbe : $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

3-4. Construire la courbe : $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

3-5. Construire la courbe trigonométrique : $y = 2 \sin x.$

3-6. Construire la courbe : $y = \arcsin x.$

3-7. Construire la courbe : $y = \sin x^2.$

II. CONSTRUCTION DE LA DROITE

66. Les courbes les plus simples à construire sont évidemment les droites. Le débutant s'apercevra que toute équation du premier degré en x et y est représentée par une droite.

Remarquer en particulier les équations :

$x = 0$. Les points dont l'abscisse est nulle sont tous sur l'axe des y . Cette équation $x = 0$, représente l'axe des ordonnées.

$y = 0$. Tous les points dont l'ordonnée est nulle sont sur l'axe des x . Dès lors, $y = 0$, représente l'axe des abscisses.

EXERCICE XX

Construire les courbes suivantes. Déterminer plusieurs points de la courbe afin d'en connaître l'allure exactement.

3-8. $y = 3x + 3$

3-9. $x = 4$

3-10. $3x - 7y = 42$

3-11. $y + 3x = 0$

3-12. $3y = x + 3$

3-13. $x + y = 3$

3-14. $3x + 7y = 21$

3-15. $y = -3$

3-16. $2x + 5y = 7$

3-17. $2x - 5y = 7$

3-18. $y = 3x$

3-19. $2x + 3y = 0$

III. RÉOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS

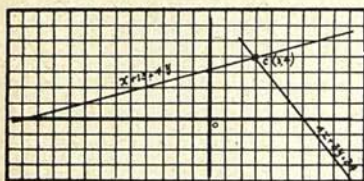


Fig. 4

Les droites $4x + 3y = 24$ et $x + 13 = 4y$ se rencontrent en un point dont les coordonnées sont $x = 3$, $y = 4$

67. Pour résoudre graphiquement les équations du premier degré, construire sur du papier quadrillé les droites représentant chacune des équations. Le point commun aux deux droites donne la solution cherchée : il n'y a qu'à tracer le contour des coordon-

nées du point commun pour trouver les valeurs de x et y de la solution.

68. Soient les deux équations :

$$4x + 3y = 24 ; \quad x + 13 = 4y.$$

Construire les droites représentant ces équations, ce que l'on pourra faire en donnant à x les valeurs 0, 6, 9, par exemple. Les deux droites se rencontrent bien en un point C dont les coordonnées sont (3,4). Le système de solutions de l'équation est donc : $x = 3$; $y = 4$.

EXERCICE XXI

Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants. Vérifier en trouvant les solutions par les procédés ordinaires de l'algèbre.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 3-20. $x=2y+3$
$x+y=6$ | 3-21. $2y-x=8$
$4y+3x=6$ | 3-22. $2x+y=0$
$y=4/3(x+5)$ |
| 3-23. $y=3x+4$
$y=x+8$ | 3-24. $3y+2x=16$
$5y-3x=14$ | 3-25. $2y-x=3$
$3y-5x=15$ |
| 3-26. $x=4y$
$2y+x=18$ | 3-27. $6x-5y=18$
$4y=3x$ | 3-28. $2x=5y+15$
$3x-4y=12$ |
| 3-29. $3x-y=7$
$6x-2y=3$ | 3-30. $3x-y=7$
$6x-2y=14$ | |

IV. SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

69. Étude du système : $ax + by = c$
 $a'x + b'y = c'$

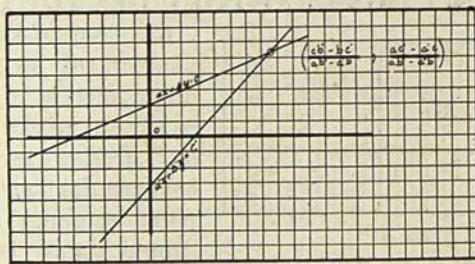


Fig. 5

Les deux droites $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ se rencontrent en un point dont les coordonnées résolvent le système des deux équations données.

Le lieu des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by = c$ est une droite. De même $a'x + b'y = c'$ représente une droite. Comme deux droites situées dans

un même plan se rencontrent, en général, on trouvera les coordonnées de leur point de rencontre en résolvant les deux équations:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

Les coordonnées du point M sont ainsi :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

et les droites se rencontrent en un point bien déterminé pourvu que le dénominateur de x et y soit différent de 0. Donc, si $ab' - a'b$ diffère de 0, les deux droites se rencontrent et les deux équations sont compatibles..

Si $ab' - a'b = 0$, alors x et y deviennent infinis, ce qui montre que les deux droites *se rencontrant à l'infini* sont parallèles. Dans ce cas les deux équations n'ont pas de solution commune : *elles sont incompatibles*.

Si $ab' - a'b = 0$ et si en même temps : $ac' - a'c = 0$, de la première relation on tire : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$
et de la seconde : $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$

On a donc $b/b' = c/c'$, ce qui donne $bc' - b'c = 0$. Si donc les deux conditions précédentes sont réalisées, la relation $bc' - b'c = 0$ en découle et les numérateurs et les dénominateurs des valeurs de x et de y sont nuls tous deux, x et y ont donc des valeurs indéterminées : $0/0$.

Cette solution s'interprète facilement. Puisque, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, les deux équations ont des coefficients proportionnels et représentent la même droite.

En résumé, si $ab' - a'b$ diffère de 0, les deux droites se rencontrent, *les deux équations sont compatibles*:

$$ab' - a'b = 0 \text{ avec } \begin{cases} +ac' - a'c \text{ différent de } 0, \text{ les deux droites} \\ \text{sont parallèles, les deux} \\ \text{équations sont incompati-} \\ \text{bles.} \\ +ac' - a'c = 0, \text{ les deux droites sont con-} \\ \text{fondues, le système est} \\ \text{indéterminé.} \end{cases}$$

V. COURBES DU SECOND DEGRÉ

70. Les courbes du second degré peuvent servir à la résolution graphique de deux équations homogènes.

Soient les deux équations : $16x^2 + 27y^2 = 576$

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Construire ces courbes en donnant à x et y des valeurs convenables. Comme x et y ne paraissent qu'au carré, une seule opération permet de déterminer quatre points.

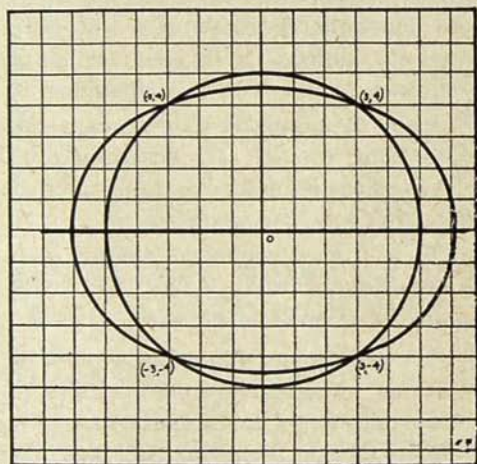


Fig. 6

L'ellipse $16x^2 + 27y^2 = 576$ et le cercle $x^2 + y^2 = 25$ se rencontrent aux points $(3,4)$, $(-3,4)$, $(3,-4)$, $(-3,-4)$.

La première courbe est une ellipse, la seconde un cercle. Les points communs sont : $(3,4)$, $(3,-4)$, $(-3,4)$, $(-3,-4)$.

71. Nous croyons utile de rappeler que pour résoudre ces équations du même degré, dont les premiers membres sont homogènes, la méthode algébrique consiste à remplacer une des inconnues par m fois l'autre ; puis, faisant le rapport des deux membres des équations, éliminer cette inconnue et obtenir ainsi une équation pour déterminer m . Dès que m est déterminée, la valeur de x se trouve facilement, ainsi que celle de y .

Pour le cas précédent, posons $y = mx$. Les équations deviennent :

$$16x^2 + 27m^2x^2 = 576$$

$$x^2 + m^2x^2 = 25.$$

Dans le rapport, x^2 disparaît et il vient :

$$\frac{16 + 27m^2}{1 + m^2} = \frac{576}{25}$$

après quelques réductions : $m^2 = \frac{16}{9}$.

Remplaçant m^2 par cette valeur dans l'une ou l'autre des équations, la valeur de x^2 se dégage. Ici,

$$x^2 = 9 \text{ ou } x = +3 \text{ et } -3.$$

Les valeurs de y correspondantes sont $+4$ ou -4 , car la valeur de m est $+\frac{4}{3}$ ou $-\frac{4}{3}$. Les solutions sont au nombre de quatre : $(3, 4)$; $(3, -4)$; $(-3, 4)$; $(-3, -4)$.

EXERCICE XXII

Construire les courbes suivantes :

3-31. $xy = 6$ (hyperbole)

3-32. $x^2 + y^2 = 36$ (cercle)

3-33. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (ellipse)

3-34. $x^2 - y^2 = 36$ (hyperbole)

3-35. $y = x^2 - 4x - 1$ (parabole) 3-36. $x = y^2 + 5y + 2$ (parabole).

VI. RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET DU TROISIÈME DEGRÉ

72. Résolution graphique de l'équation du second degré.

EXERCICE XXIII

3-37. Construire les deux courbes suivantes et trouver leurs points communs $y = x^2$; $y = -3x + 4$.

Les deux courbes se coupent en A. En ce point, elles ont donc une ordonnée commune ; écrivons qu'au point A : $y = x^2 = -3x + 4$ ou encore, en ne tenant pas compte de y , écrivons qu'au point A, $x^2 = -3x + 4$, ou encore $x^2 + 3x - 4 = 0$.

La construction des deux courbes a donc fourni un moyen ingénieux de résoudre graphiquement une équation du second degré, l'équation

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

3-38. Appliquer la méthode exposée précédemment à la recherche des racines de l'équation : $2x^2 - 3x - 20 = 0$. Après avoir divisé les termes par 2, construire les deux courbes :

$$y = x^2 \text{ et } y = \frac{3}{2}x + 10.$$

3-39. Construire la courbe $y = 2x^2 - 3x - 20$. Trouver graphiquement les valeurs qui annulent y . Comparer aux résultats obtenus précédemment.

3-40. Chercher les racines de $x^2 + 5x + 6 = 0$, en construisant les deux courbes $y = x^2$ et $y = -5x - 6$.

3-41. Calculer graphiquement comme en (2) les racines de $3x^2 - x - 14 = 0$.

Pour résoudre graphiquement un certain nombre d'équations du second degré, il suffirait de construire avec soin la courbe $y = x^2$. On construirait ensuite la droite obtenue en égalant à y le reste de l'équation changé de signe.

Application de la remarque précédente. Construire avec soin la courbe $y = x^2$. Résoudre au moyen de cette courbe et de la droite auxiliaire, les équations :

3-42. $x^2 - 6x + 8 = 0$ 3-43. $x^2 - 4x - 21 = 0$ 3-44. $x^2 - 10x + 25 = 0$

3-45. $x^2 + 6x + 9 = 0$ 3-46. $x^2 + 8x + 12 = 0$ 3-47. $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Résoudre graphiquement les équations suivantes. Construire les courbes et trouver les coordonnées des points communs.

3-48. $x^2 + y^2 = 100$
 $x + y = 14$

3-49. $x^2 + y^2 = 100$
 $3x + 4y = 25$

3-50. $9x^2 + 25y^2 = 225$
 $x^2 + y^2 = 16$

3-51. $9x^2 + 25y^2 = 225$
 $x^2 + y^2 = 9$

3-52. $4x^2 - 9y^2 = 36$
 $x^2 + y^2 = 9$

3-53. $x^2 + y^2 - 5x - 5y - 2 = 0$
 $3x - 2y = 0$

3-54. $9x^2 + 16y^2 = 144$
 $x^2 - y^2 = 4$

3-55. $xy = 40$
 $x - y = 3$

3-56. Construire la courbe : $y^3 = x(9 - x^2)$.

3-57. Construire la courbe $y = x^4 - 12x^2 + 12x - 3$, en déduire les valeurs approchées des racines de l'équation formée en égalant le second membre à 0.

73. Résolution graphique de l'équation du troisième degré.

3-58. Construire les courbes $y = x^3$ et $y = 2x^2 + x - 2$. Trouver les points communs ; en conclure les racines de l'équation :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

3-59. De même construire les courbes $y = x^3$ et la courbe $y = 4x^2 + 5x - 14$ afin de résoudre l'équation : $x^3 - 4x^2 - 5x + 14 = 0$.

Au moyen de la courbe auxiliaire $y = x^3$, résoudre graphiquement les équations suivantes :

3-60. $x^3 - 30x + 36 = 0$

3-61. $x^3 - 63x - 162 = 0$

3-62. $x^3 - 19x + 30 = 0.$

CHAPITRE IV

INÉGALITÉS

Sommaire. I. Définitions. II. Propositions générales. III. Inégalités simultanées du premier degré. IV. Inégalités à deux inconnues. V. Inégalités du second degré. VI. Inégalités de degrés supérieurs au second. VII. Propositions sur les inégalités.

74. Définition. *Lorsqu'une quantité est plus grande ou plus petite qu'une autre, on dit qu'il y a inégalité.*

L'expression *a* plus grand que *b* ou symboliquement, $a > b$ doit s'entendre comme suit : la différence entre *a* et *b*, ou $(a - b)$, est une quantité positive. Inversement, *a* plus petit que *b*, ou symboliquement : $a < b$ signifie que $(a - b)$ est une quantité négative.

D'après cette convention, $-2 > -4$, puisque $-2 - (-4) = +2$, quantité positive. De même, tout nombre négatif est plus petit que 0, car $0 - (-n) = +n$, *n* étant positif.

75. Deux inégalités sont de même sens, lorsque les quantités placées à droite sont dans les deux cas plus grandes ou plus petites que les quantités placées à gauche ; elles sont de sens contraires lorsque dans un cas le membre de droite est plus grand que celui de gauche et que, dans l'autre cas, l'inverse est vrai.

Ainsi les inégalités : $7 > 3$, $x^2 > 0$, $-13 > -20$ sont toutes de même sens ; tandis que les inégalités $3 < 5$, $x^2 + 2 > 1$ sont de sens contraires.

76. Il faut encore distinguer entre les *inégalités absolues* et les *inégalités conditionnelles ou inéquations*. Les premières sont réalisées quels que soient les nombres que représentent les lettres comme cela a lieu, par exemple, pour $a^2 + b^2 + 2ab > 0$ inégalité qui est vraie, quels que soient *a* et *b* réels.

Les inégalités conditionnelles, au contraire, n'ont lieu que pour certaines valeurs qu'il faut précisément déterminer. Si

j'écris : $3x - 4 > 2x - 7$, j'ai une inégalité qui n'est vérifiée que pour $x > -3$.

77. Deux inégalités sont *équivalentes* lorsqu'elles admettent les mêmes solutions.

II. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Voici quelques propositions fondamentales pour l'étude des inégalités.

78. Théorème. *En ajoutant ou en retranchant une même quantité aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente.*

Soit l'inégalité $a > b$, où a et b peuvent dépendre d'inconnues quelconques. Cette expression doit s'entendre dans le sens précisé en (§74) : $(a-b)$ est une quantité positive ou encore $(a-b) = k$, k étant un nombre positif.

Si l'on ajoute ou si l'on retranche un nombre quelconque x aux deux membres, l'égalité précédente n'est évidemment pas troublée. Donc :

$a - b + x = k + x$ ou encore : $(a+x) - (b+x) = k$, expression qui peut s'écrire : $a + x > b + x$, ce qui démontre la proposition.

79. Corollaire. La proposition précédente permet de faire passer dans un même membre tous les termes d'une inégalité. Cette opération revient en effet à additionner aux deux membres d'une inégalité les quantités que l'on veut transposer mais prises en signes contraires.

Ainsi de $3x + 7 > 2x - 14$, on tire : $3x - 2x > -14 - 7$, ou enfin : $x > -21$; il a suffi d'additionner aux deux membres $-2x$ et -7 .

80. Théorème. *En multipliant ou en divisant par un même nombre positif les deux membres d'une inégalité on obtient une inégalité équivalente.*

Soit en effet : $a > b$. Cette inégalité peut s'écrire : $a - b = k$, où k est un nombre positif.

En multipliant les deux membres par m , nombre positif, on obtient : $m(a-b) = mk$, ou encore $ma - mb = mk$, ou enfin : $ma > mb$; ce qu'il fallait démontrer.

81. Réciproquement. *Toute quantité rendant $ma > mb$, où m est un nombre positif, rendra également $a > b$.*

Pour obtenir la dernière inégalité il suffit en effet de multiplier les deux termes de la première par $\frac{1}{m}$; comme $\frac{1}{m}$ est positif, le raisonnement de (§80) s'applique sans modification.

82. Théorème. *En multipliant ou divisant les deux termes d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire à la précédente.*

Soit $a > b$. Par définition, a étant plus grand que b , la relation suivante existe : $(a-b) = k$, où k est un nombre positif. Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité précédente par le nombre négatif m , on aura : $m(a-b) = mk$. Mais m est négatif, donc $mk < 0$.

On a donc $ma - mb =$ une quantité négative, ou enfin : $ma < mb$, puisque $ma - mb$ est négatif.

83. Remarque. *Avant de multiplier les deux membres d'une inégalité par une quantité, il faut être certain du signe de cette quantité afin de connaître le sens de l'inégalité obtenue.*

84. Théorème. *Si les deux membres d'une inégalité sont positifs, l'inégalité obtenue en élevant les deux membres à une puissance entière positive, est de même sens que la première.*

Soit $a > b$ ou $a = b + k$, k étant positif; donc $a^m = (b+k)^m = b^m + K$, les termes résumés par K étant tous positifs, comme on le voit dans le développement par la formule du binôme (§158). Donc, on a bien $a^m > b^m$.

85. Remarque. On pourrait démontrer comme suit que $a^m > b^m$, si $a > b$. Posons :

$$a = b + k$$

$$a^2 = (b+k)a = (b+k)^2 = b^2 + 2kb + k^2$$

$$\text{ou, enfin : } a^2 > b^2.$$

Multiplions les deux membres de la dernière inégalité par a .

$$a^2 \times a > b^2 \times a \text{ ou } b^2 (b+k) = b^3 + b^2k.$$

$$\text{Donc } a^3 > b^3.$$

Supposons la loi vraie jusqu'à k : $a^k > b^k$; montrons qu'elle est encore vraie pour $(k+1)$.

Multipliant les deux membres par a , ou $(b+k)$, nous aurons :

$$a^{k+1} > b^k (b+k) \text{ ou } b^{k+1} + k \cdot b^k.$$

$$\text{Donc : } a^{k+1} > b^{k+1}.$$

Or la loi est vraie jusqu'à 3, donc elle est vraie pour 4, 5, 6 ... C'est un exemple de raisonnement par induction mathématique (§21).

86. Remarque. *Si on élève les deux membres d'une inégalité à membres positifs à une puissance entière négative, il faut changer le sens de l'inégalité.*

Soient en effet les deux nombres positifs a et b tels que $a > b$. Par définition $a^{-3} = 1/a^3$. Or si $a > b$, en élevant les deux membres à une puissance entière positive 3, par exemple, on a encore : $a^3 > b^3$.

De là nous déduisons évidemment :

$$\frac{1}{a^3} < \frac{1}{b^3}, \text{ ou } a^{-3} < b^{-3}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Puissances fractionnaires

87. Le cas des puissances fractionnaires s'interprète aisément pourvu que l'on traite les racines comme les radicaux arithmétiques; raisonnons sur des nombres positifs, a et b . Par exemple de $a > b$, on tire $a^{3/4} > b^{3/4}$ pourvu que l'on ne s'intéresse qu'à la valeur de $a^{3/4}$ qui est réelle et positive. Si l'inégalité précédente n'était pas vérifiée, en lui appliquant le théorème (§84) on déduirait : $a < b$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

88. Si les deux membres d'une inégalité sont négatifs, on peut les élever à une puissance impaire sans changer le sens de l'inégalité mais non à une puissance paire.

Soit un exemple numérique: $-5 > -7$.

Comme on a : $-5 - (-7) > 0$, la valeur absolue de -5 qui est à gauche est plus faible que la valeur absolue de -7 qui est à droite. En élevant les deux membres à une puissance impaire, les mêmes relations existent encore entre les valeurs absolues; mais les signes étant négatifs, le membre de gauche est encore plus grand que celui de droite. $(-5)^{2k-1} > (-7)^{2k-1}$.

Mais, si on avait élevé les deux membres à une puissance paire, les deux membres étant tous deux positifs, le membre de droite serait le plus grand ou $(-5)^{2k} < (-7)^{2k}$, l'inégalité a changé de sens.

89. Théorème. Lorsque les membres d'une inégalité sont de signes contraires on peut les élever à une puissance impaire sans changer le sens de l'inégalité, mais si on les élève à une puissance paire, on ne peut prévoir le sens de l'inégalité obtenue; parfois même on obtient une égalité.

Soit $4 > (-7)$;

évidemment: $4^3 > (-7)^3$,

mais $4^2 < (-7)^2$.

Soit un autre cas : $4 > -2$,

$4^3 > (-2)^3$,

$4^2 > (-2)^2$;

enfin : $+4 > (-4)$,

$4^3 > (-4)^3$,

$4^2 = (-4)^2$.

EXERCICE XXIV

4-1. Résoudre l'inégalité : $\frac{5x}{7} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15} < \frac{9}{25} - \frac{2x}{35}$.

4-2. Quelles sont les valeurs entières de x qui vérifient l'inégalité :

$$\frac{2x}{5} - 23 < 2x - 16 ?$$

4-3. Résoudre l'inégalité : $8x - 3 > -1 + \frac{x}{2}$.

4-4. Résoudre l'inégalité : $3x - 7 < \frac{x}{4} + 15$.

4-5. Résoudre l'inégalité : $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > x - 5$.

4-6. Résoudre : $3x - (x/3 + 5) < 5x - 7$.

III. INÉGALITÉS SIMULTANÉES

DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

90. Il arrive souvent que la nature des problèmes demande la détermination de quantités vérifiant plusieurs inégalités. Un graphique rendra intuitive la détermination des solutions.

Soit à déterminer des quantités x vérifiant simultanément les inégalités :

$$2x + 7 > 3x - 9;$$

$$\frac{1}{2}(x+7) > 1;$$

$$\frac{1}{4}(2x - 9) < 2.$$

La première est vérifiée dès que $x < 16$; la seconde lorsque $x > -5$, la troisième pour $x < 8.5$. Les valeurs de x comprises entre -5 et 8.5 vérifient donc les trois inégalités ; il faut donc $-5 < x < 8.5$.

91. On aurait obtenu la représentation suivante sur un graphique :

Soit 0 l'origine, et le sens positif, comme à l'ordinaire, pris vers la droite. La première inégalité exclut tous les points à droite de A tel que $OA = 16$.

La seconde exclut tous les points à gauche de B tels que $OB = -5$, enfin la troisième exclut tous les points à droite de C tel que $OC = 8.5$. Il reste les seuls points compris entre B et C.



Fig. 7

Les points compris entre B(-5, 0) et C (8.5, 0) vérifient les trois inégalités.

Il peut se faire qu'il n'existe pas de région commune aux trois inégalités; dans ce cas on dit qu'elles sont *incompatibles*.

EXERCICE XXV

4-7. Quelles sont les valeurs de x vérifiant simultanément les inégalités:

$$6x + \frac{5}{4} > 4x + 7$$

$$\frac{1}{2}(8x + 3) < 2x + 25.$$

4-8. Même question pour : $15x - 2 > 2x + \frac{1}{3}$

$$\text{et } 2(x - 4) < \frac{1}{2}(3x - 14).$$

4-9. Quelles sont les valeurs que x peut prendre pour vérifier simultanément

$$8x - 5 > \frac{1}{2}(15x - 8)$$

$$\text{et } 2(2x - 3) > 5x - \frac{3}{4}.$$

4-10. Étudier les inégalités : $\frac{1}{7}(4x - 5) > x + 3$

$$\text{et } \frac{1}{4}(3x + 8) > 2x - 5.$$

IV. INÉGALITÉ À DEUX INCONNUES INÉGALITÉS SIMULTANÉES

92. On peut avoir à étudier des inégalités entre deux inconnues. Le procédé algébrique consiste à choisir la valeur d'une des inconnues et à étudier l'inégalité qui demeure. On pourra donner à l'une des inconnues toutes les valeurs possibles et les variations de l'autre seront successivement déterminées.

93. Une construction graphique très simple fournira d'un seul coup toutes les solutions. Soit à étudier l'inégalité :

$$4x + 3y > 12$$

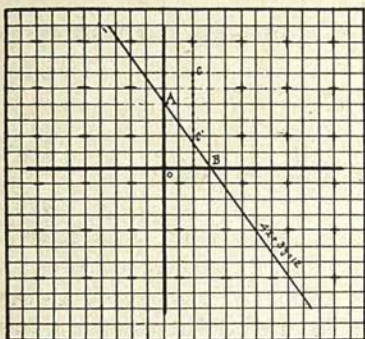


Fig. 8

Les points qui sont à droite de AB ont des coordonnées qui rendent l'expression $4x + 3y - 12$ positive ; ceux qui sont à gauche rendent négative la même expression.

les coordonnées de C' la relation $4x + 3y = 12$. Mais en substituant à l'ordonnée de C' celle de C , on augmente la valeur du membre de gauche. Donc pour tout point C' à droite de AB, on obtient des nombres x et y qui vérifient l'inégalité proposée. Si le coefficient de y était négatif, ce sont les points à gauche de AB qui vérifieraient l'inégalité.

Construisons la droite AB dont l'équation est précisément $4x + 3y = 12$. Tous les points du plan à droite de AB donnent des couples de valeurs x et y vérifiant l'inégalité :

$$4x + 3y > 12.$$

En effet, soit C un de ces points. Par C menons une parallèle à l'axe des ordonnées OA, coupant la droite AB en C' . Puisque le point C' appartient à la droite AB, il existe entre

94. La droite AB partage le plan en deux régions telles que les points de l'une vérifient l'inégalité et ceux de l'autre ne la vérifient pas. On peut encore dire que la droite $4x + 3y - 12$ partage le plan en deux régions telles que dans l'une $4x + 3y - 12$ est positive, tandis que dans l'autre la même expression est négative.

95. Pour trouver facilement la région du plan qui contient les points obéissant à une inégalité, après avoir construit la droite telle que AB, chercher dans laquelle de ces régions se trouve l'origine, ce qui s'obtient immédiatement en remplaçant x et y par 0, puisque les coordonnées de l'origine

sont (0,0). Le signe du terme restant sera celui de la région où se trouve l'origine.

EXERCICE XXVI

Résoudre les inégalités suivantes. Découvrir les régions du plan vérifiant chacune des inégalités.

4-11. $5x + 4y > 20$.

4-12. $7x - 2y < 14$.

4-13. $3y > 4x$.

4-14. $x < y + 5$.

4-15. $5x - 3y > 15$.

4-16. $y > -2x + 3$.

96. On pourra procéder de même pour la solution de plusieurs inégalités à deux inconnues. Si les inégalités sont compatibles, on trouvera une région du plan où elles seront toutes vérifiées. Si elles sont incompatibles, il n'y a aucune région jouissant de cette propriété.

Il sera bon de faire usage de papier quadrillé et de construire les droites avec soin. Les sommets des carrés fournissent les solutions entières des inégalités.

97. L'algèbre permet de trouver les solutions, mais non sans quelques difficultés ; la méthode directe n'existe pas.

Soit à étudier le système : (solution algébrique).

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{5} - 1 > 0;$$

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{4} - 1 < 0;$$

$$\frac{x}{10} - \frac{y}{5} - 1 < 0.$$

De la première on tire : $x > 7(1 - \frac{y}{5}),$

de la seconde $x < 15(1 - \frac{y}{4}),$

de la troisième $x < 10(1 + \frac{y}{5}).$

On doit donc avoir : $15(1 - \frac{y}{4}) > 7(1 - \frac{y}{5})$

et $10(1 + \frac{y}{5}) > 7(1 - \frac{y}{5}).$

De la première : $y < 3\frac{1}{4}$;

de la dernière de ces relations on tire : $y > -\frac{1}{2}.$

On voit que y peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2, 3.

Pour $y = 0$, x peut prendre les valeurs 8, 9.

$y = 1$ — 6,7,8,9,10,11.

$y = 2$ — 5,6,7.

$y = 3$ — 3.

On voit immédiatement tous les systèmes de solutions possibles.

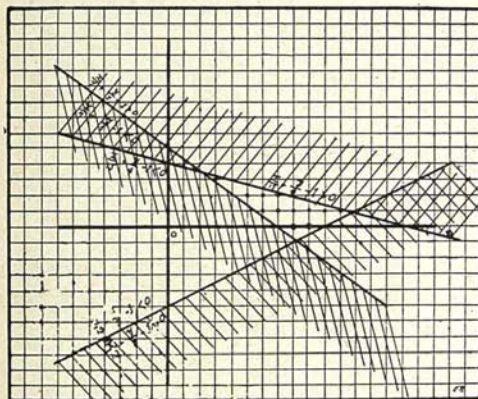


Fig. 9

Les coordonnées des points situés à l'intérieur du triangle vérifient seules les trois inégalités proposées.

points dont les coordonnées obéissent aux inéquations simultanées.

Construisons chacune des droites représentées en égalant à 0 les membres de gauche. On mettra ainsi en évidence les régions du plan où chaque inégalité est vérifiée et celles où elle ne l'est pas. On pourrait couvrir de hachures les régions défavorables ; la région favorable comprend les

97.' Graphique. Le graphique montrera immédiatement tous les points correspondant aux solutions. On les trouve à l'intérieur du triangle ABC.

EXERCICE XXVII

4-17. Étudier les systèmes formés par les inégalités suivantes :

$$y - 2x + 3 < 0 ; y + x - 6 > 0.$$

4-18. Étudier le système : $y + 2x - 1 > 0$ et $y - 3x - 11 < 0$. Construire les droites mettant en évidence les régions favorables.

4-19. Résoudre géométriquement le système des trois équations :

$$x + y - 8 > 0 ; 5y - 2x - 19 < 0 ; 2y - 5x + 26 > 0.$$

On construira les droites convenables ; les régions seront déterminées ; les points fournissant les solutions se trouveront à l'intérieur d'un triangle.

4-20. Trouver géométriquement la solution des quatre inégalités :

$$x > 2 ; x < 9 ; y > 1 ; y < 8.$$

4-21. Déterminer la région du plan dont les points vérifient les inégalités :

$$x > 3 ; y < 6 ; x - y - 3 < 0.$$

4-22. Résoudre géométriquement :

$$x - 2 < 0 ; x + 2 > 0 ; y - 2 < 0 ; y + 2 > 0.$$

4-23. Résoudre géométriquement :

$$x + y + 1 > 0 ; x + y - 1 < 0 ; x - y + 1 > 0 ; x - y - 1 < 0.$$

V. INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ À UNE INCONNUE

98. L'étude des inégalités du second degré à une inconnue revient à celle du trinôme du second degré. Nous ne ferons que rappeler les principaux théorèmes.

Un trinôme du second degré à racines réelles et inégales est du signe contraire à celui de son premier terme pour les valeurs de x comprises entre les racines.

Un trinôme du second degré à racines réelles et inégales est du signe de son premier terme pour les valeurs de x extérieures aux racines.

Un trinôme du second degré à racines imaginaires ou à racines égales est toujours du signe de son premier terme.

99. Applications et problèmes. Pour résoudre une inégalité du second degré, on appliquera les théorèmes qui viennent d'être énoncés.

Soit à étudier la fraction : $\frac{2y - 5}{y + 8} < 0.$

En multipliant les deux termes par le carré de $(y+8)$, on ne change pas le sens de l'inégalité (80). Donc, il suffit d'étudier le signe de $(2y-5)(y+8)$ dont les racines sont 2,5 et -8. Comme le coefficient de y^2 est positif, y ne

peut prendre que des valeurs intérieures aux racines, pour que le produit $(2y - 5)(y + 8)$ soit négatif: donc y doit être compris entre -8 et 2.5 : $-8 < y < 2.5$.

100. Méthode des tableaux. On pourra procéder autrement, par tableaux. On étudie séparément le signe de chacun des termes de la fraction, puis on dresse un tableau comme suit :

$$\text{Étude de : } \frac{2y - 5}{y + 8} < 0$$

y	$2y - 5$	$y + 8$
$+$ infini	$+$	$+$
	$+$	$+$
2.5	0	$+$
	$-$	$+$
-8	$-$	0
	$-$	$-$
$-$ infini	$-$	$-$

Le quotient devant être négatif, $2y - 5$ et $y + 8$ doivent être de signes contraires ; la région convenable est comprise entre 2.5 et -8 .

EXERCICE XXVIII

4-24. Étudier l'inégalité : $\frac{x + 5}{x - 3} < 0$.

4-25. Pour quelles valeurs de x l'inégalité suivante est-elle vérifiée
 $2x^2 - 16x + 32 > 0$?

4-26. Quelles sont les valeurs de x qui vérifient l'inégalité :
 $2x^2 - 16x + 40 < 0$?

4-27. Y a-t-il des valeurs de x satisfaisant à l'inégalité :
 $x^2 - 16x + 32 < 0$?

Construire la courbe $y = x^2 - 16x + 32$ et interpréter le résultat que fournit l'algèbre.

4-28. Quelles sont les valeurs de x vérifiant l'inégalité : $x^2 - 6x + 9 > 0$.
 construire la courbe $y = x^2 - 6x + 9$ et interpréter les résultats.

4-29. Pour quelles valeurs de x l'inégalité : $x^2 - 7x + 10 < 0$ est-elle vérifiée? Construire la courbe $y = x^2 - 7x + 10$ et interpréter les résultats.

4-30. Quelles valeurs de x vérifient simultanément les deux relations :

$$x^2 + x - 6 < 0 \text{ et } x^2 + 3x - 4 > 0.$$

Afin de comprendre les résultats, construire les deux courbes obtenues en égalant à y chacun des polynômes.

4-31. Existe-t-il des valeurs de x vérifiant simultanément les inégalités :

$$x^2 - 12x + 32 > 0 \text{ et } x^2 - 9x + 30 > 0?$$

Comme précédemment, construire les courbes correspondantes.

4-32. Même question pour $5x^2 - 7x + 1 < 0$ et $x^2 - 9x + 30 < 0$.

4-33. Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris pour que l'inégalité $x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$ soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x .

4-34. Étant donnée l'équation $5x^2 - 12xy + 4y^2 + 54x - 4y - 139 = 0$, on demande les limites entre lesquelles on peut faire varier x pour que les valeurs de y soient réelles.

4-35. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que le trinôme $mx^2 + (m-1)x + m-1$ reste négatif quel que soit x .

4-36. Quelles valeurs faut-il donner à la constante m pour que le trinôme $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + (5m-6)$ reste positif pour toutes les valeurs de x .

4-37. Quelles valeurs peut prendre m pour que le trinôme : $(4-m)x^2 - 3x + 4 + m$ reste positif quel que soit x .

VI. INÉGALITÉS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR AU SECOND

101. Si l'inégalité est du troisième ou du quatrième degré, on peut l'étudier après avoir calculé les racines car *le signe d'un polynôme à racines réelles et distinctes change lorsque l'une des racines est franchie.*

Dans bien des cas cependant les inégalités se présentent sous forme de facteurs ; le signe de chacun des facteurs est étudié, celui du produit s'en déduit aisément.

Une simple construction de courbe rendra intuitifs les résultats. Il n'est pas nécessaire de construire les courbes avec une très grande précision dans ces cas : c'est le point

de vue qualitatif qui importe, il suffit en général de connaître l'allure de la courbe pour que les conclusions soient possibles.

Soit à résoudre l'inégalité :

$$(x+7)(x+1)(x-2)(x-5) > 0.$$

Appelons y le membre de gauche :

$$y = (x+7)(x+1)(x-2)(x-5).$$

L'ordonnée y s'annule pour les valeurs suivantes de x :

$$-7, -1, 2, 5.$$

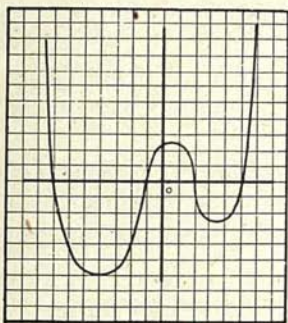


Fig. 10

Le graphique reproduit l'"allure" de la courbe :

$$y = (x+7)(x+1)(x-2)(x-5)$$

On voit immédiatement les valeurs de x qui rendent y positif.

Lorsque x est infiniment grand et négatif, y est infiniment grand et positif. Lorsque x est infiniment grand positif, il en est ainsi de y . Si nous faisons croître x depuis l'infini négatif, jusqu'à -7 , y est constamment positif. Pour $x = -7$, y s'annule. Pour x compris entre -7 et -1 , y est négatif, car seul le signe du premier facteur est changé ; pour x compris entre -1 et $+2$, y est positif, car les deux premiers facteurs sont négatifs, mais leur produit est positif, etc.

102. Si l'une des racines était double, le signe de y ne changerait pas en franchissant la valeur de x correspondante ; dans le cas d'une racine triple, il y aurait changement de signe.

Sur le graphique, les valeurs qui résolvent l'inégalité, se trouvent facilement. Ce sont celles pour lesquelles la courbe est au-dessus de l'axe de x ; les régions sont comprises entre $-\infty$ et -7 , entre -1 et 2 , ou enfin entre 5 et $+\infty$.

$$x < -7, -1 < x < 2, x > 5.$$

La figure 10 ne donne que l'allure de la courbe.

Remarque. Il est bon de ranger les facteurs suivant l'ordre croissant de leurs racines.

EXERCICE XXIX

4- 8. Quelles sont les valeurs de x qui vérifient l'inégalité :

$$4x^3 - 10x^2 + 48x < 0 ?$$

4-39. Même question pour : $3x^3 - 12x^2 + 9x > 0$.

4-40. Existe-t-il des valeurs de x qui puissent vérifier simultanément les inégalités : $3x^3 - 5x^2 + 2x > 0$ et $x^3 - x^2 + 4x < 0$?

4-41. Quelles sont les valeurs de x qui vérifient simultanément les deux inégalités : $x^3 - 11x^2 + 10x < 0$ et $x^3 - 12x^2 + 32x > 0$?

4-42. Résoudre l'inégalité : $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0$.

4-43. Résoudre l'inégalité : $\frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$.

4-44. Résoudre l'inégalité : $\frac{7x - 5}{8x + 3} > 4$.

103. Remarque. I. Pour résoudre les exercices 4-43. et 44-4. ainsi que quelques autres, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par le carré du dénominateur ce qui ne change pas l'inégalité (§80).

Il est possible de procéder par tableaux comme en (§100).

Soit à étudier l'inégalité : $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) < 0$.

On peut dresser un tableau ayant en tête de colonnes chacun des facteurs. On mettra en évidence les valeurs qui annulent chacun de ces facteurs; puis le signe dans l'intervalle considéré.

	$x^2 - 3x + 2$	$x^2 - 7x + 12$
+ infini	+	+
	+	+
+4	+	0
	+	-
+3	+	0
	+	+
+2	0	+
	-	+
+1	0	+
	+	+
- infini	+	+

L'inégalité est donc vérifiée entre 3 et 4, et entre 1 et 2.

Remarque II. L'inégalité $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} < 0$ aurait exactement les mêmes solutions et pourrait être étudiée de la même façon.

EXERCICE XXX

4-45. Résoudre l'inégalité : $(x-1)(x^2-3x+2)(x^2+x+1) < 0$.

4-46. Résoudre l'inégalité : $(x-1)^2(x^2-5x+6)(x^3-2x^2+2x-1) > 0$.

4-47. Résoudre : $x < \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$.

4-48. Résoudre : $(3x-1)(x+1)^2(x-2) > 0$.

INÉGALITÉS SIMULTANÉES ENTRE DEUX INCONNUES DE DEGRÉS SUPÉRIEURS AU PREMIER

104. Dans certains cas, la méthode graphique fournit très facilement les solutions de problèmes qu'il serait difficile de résoudre autrement.

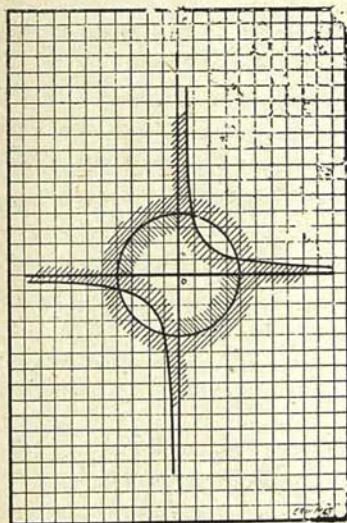


Fig. 11

Les coordonnées des points compris à l'intérieur des deux surfaces curvilignes communes au cercle et à l'hyperbole fournissent les solutions de deux inégalités simultanées du second degré

Soit à résoudre les deux inégalités :

$$x^2 + y^2 < 16 \text{ et } xy > 4.$$

Construisons les courbes $x^2 + y^2 = 16$ et $xy = 4$.

La première représente un cercle de rayon 4, ayant le point 0 comme centre. La courbe $xy = 4$ est une hyperbole, donc une courbe à deux branches. Les régions du plan vérifiant les deux inégalités seront trouvées très facilement : les points à l'intérieur du cercle vérifient la première ; les points à l'intérieur des branches vérifient la seconde ; les points des régions communes vérifient les deux inégalités.

EXERCICE XXXI

4 49. Résoudre graphiquement les deux inégalités :

$$x^2 + y^2 > 16 \text{ et } x^2 + y^2 < 36.$$

4-50. Trouver graphiquement les points vérifiant les deux inégalités :

$$x^2 + y^2 < 25 \text{ et } x + y > 0.$$

4 51. Quelles sont les régions du plan où se trouvent les points vérifiant les inégalités :

$$y > x^2 - 2 \text{ et } x^2 + (y-4)^2 < 4.$$

4-52. Dans quelles régions du plan se trouvent les points qui vérifient les inégalités :

$$xy + 3y + 4x + 1 > 0 \text{ et } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 < 0.$$

VII. QUELQUES PROPOSITIONS PARTICULIÈRES SUR LES INÉGALITÉS

105. *Le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum lorsque ces facteurs sont égaux.*

Soit $2a$ la somme des deux facteurs. L'un sera $(a+x)$, l'autre $(a-x)$ et le produit des deux sera $(a^2 - x^2)$. Ce produit sera le plus grand possible quand x sera nul, c'est-à-dire lorsque les deux facteurs seront égaux.

EXERCICE XXXII

4-53. Quel est le plus grand champ rectangulaire que l'on peut entourer d'une clôture ayant une longueur donnée $2d$?

4-54. Quelle est l'ellipse de surface maximum que l'on peut construire moyennant la condition que la somme des deux axes soit constante ?

106. *Théorème. La moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.*

Il faut démontrer que $\frac{1}{2}(a+b) > (ab)^{\frac{1}{2}}$; puisqu'il s'agit de deux nombres positifs, on peut élever les deux membres au carré sans changer l'inégalité (84). Si l'inégalité est vraie, alors $\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) > ab$,

$$\text{ou } a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$

$$\text{ou } a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

$$\text{ou enfin, } (a-b)^2 > 0; \text{ ce qui est évident.}$$

107. *Le produit de plusieurs nombres positifs dont la somme est constante est maximum quand ces nombres sont égaux.*

Soient les nombres: a, b, c, d , dont la somme $a + b + c + d = s$ est constante. Supposons que a et b soient inégaux. Sans changer les autres facteurs, nous augmenterons le produit en remplaçant a et b chacun par leur demi-somme (§105). Dès que deux facteurs inégaux sont remplacés par deux facteurs égaux de même somme, le produit est augmenté. Comme cette proposition est vraie pour tous les couples de facteurs, nous voyons que le produit ne saurait être maximum si deux facteurs sont inégaux. Donc...

Comme conséquence :

$$abcd < \left[\frac{1}{4}(a + b + c + d) \right]^4$$

et le signe de l'inégalité persistera tant que les facteurs seront inégaux.

108. Remarque. Si l'on appelle moyenne géométrique de plusieurs nombres la racine d'indice m de leur produit; le théorème précédent peut s'interpréter comme suit : *la moyenne arithmétique de plusieurs nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.*

EXERCICE XXXIII

Démontrer les inégalités suivantes, qui sont en général des inégalités absolues, entre nombres positifs :

$$4-55. \frac{1}{2}(a + b) > \frac{2ab}{a + b}.$$

$$4-56. \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

$$4-57. x^2 + y^2 + z^2 > xy + yz + zx.$$

$$4-58. m + \frac{1}{m} > 2.$$

$$4-59. x^2 + 3y^2 > 2y(x + y).$$

4-60. $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 > xyz(x + y + z).$

4-61. $a^4 + b^4 + c^4 > abc(a + b + c).$

4-62. $x/a + y/b + z/c > 3 \sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}}.$

4-63. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) > 9abc.$

4-64. Vérifier que :

$$xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) > 6xyz.$$

4-65. Vérifier que : $3(1 + n^2 + n^4) > (1 + n + n^2)^2.$

4-66. Vérifier l'inégalité : $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$

4-67. La vitesse d'un bateau en eau calme est v . Si ce bateau est dans un courant de vitesse a , la vitesse du bateau devient $v+a$ ou $v-a$. Montrer que dans le courant, il faudra plus de temps au bateau pour parcourir la longueur $2m$, — m pour aller, m pour revenir —, que pour parcourir $2m$, en eau calme.

CHAPITRE V

ANALYSE INDÉTERMINÉE

Sommaire. I. Équations indéterminées. II. Solutions entières de l'équation $ax+by=c$. III. Recherche d'une solution de $ax+by=c$. IV. Système de deux équations à trois inconnues. V. Équation indéterminée du second degré.

I. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

109. Si l'on ne donne qu'une seule équation entre x et y , ou s'il n'y en a que deux entre x , y et z , le système est indéterminé. En général, si le nombre des équations est moindre que celui des inconnues, le système est indéterminé.

ANALYSE DIOPHANTINE

On appelle analyse *diophantine (d'après Diophantus, grec, 250 ans avant Jésus-Christ) cette partie de l'algèbre qui n'admet que des nombres entiers et positifs comme solutions acceptables. Les questions d'analyse indéterminée que nous allons étudier relèvent de l'analyse diophantine.

Soit l'équation $3x + y = 7$. On peut donner à x toutes les valeurs, et la valeur de y se déduit facilement: il existe donc un nombre indéfini de solutions.

En géométrie analytique, l'équation $3x + y = 7$ est celle d'une droite, et chercher un système de solutions revient à chercher un point sur la droite; le nombre de points est évidemment infini, comme le nombre de solutions de l'équation.

De même, soient $2x + y + 2z = 17$ et $x - y - 7z = 8$. On peut donner à z toutes les valeurs possibles et x et y en découlent. L'interprétation de la géométrie analytique est simple: chacune des équations représente un plan dans l'espace à trois dimensions; nous avons deux plans et le lieu des points qui appartiennent aux deux plans est leur

intersection ; ici encore, il s'agit de déterminer les points qui appartiennent à une droite : il y en a une infinité.

Les conditions du problème peuvent, dans certains cas, limiter le nombre des solutions intéressantes ; par exemple, on pourra exiger que les inconnues ne prennent que des valeurs entières et positives.

110. Rappel de quelques propositions arithmétiques.

Pour mieux comprendre la théorie de l'analyse indéterminée, il est bon de rappeler quelques propositions de l'arithmétique.

Tout diviseur commun à deux nombres divise leur plus grand commun diviseur.

En effet, tout diviseur commun aux nombres 615 et 195 divise les restes des divisions successives que l'on fait pour trouver le plus grand commun diviseur ; donc il divise le dernier reste qui est le plus grand commun diviseur.

Si l'on multiplie deux nombres par un même facteur on multiplie leur plus grand commun diviseur par ce facteur.

En effet, lorsque l'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre le reste de la division est multiplié par ce nombre. Donc en multipliant 615 et 195 par un troisième nombre, la série des restes est multipliée par ce nombre. Par suite, le dernier reste qui est le plus grand commun diviseur sera multiplié par ce nombre.

Si on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur les quotients obtenus n'auront d'autre diviseur commun que l'unité.

En effet, si on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur, le plus grand commun diviseur aura été divisé par lui-même et par conséquent, le plus grand commun diviseur des quotients obtenus sera l'unité : les deux quotients seront donc premiers entre eux.

N. 3 *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre.*

Soit C qui divise le produit $A \times B$ et qui est premier avec A. Je dis que C divise B.

En effet A et C étant premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est l'unité.

Si on multiplie les deux nombres A et C par B, les produits : AB et CB auront B comme plus grand commun diviseur puisque l'unité qui était leur plus grand commun diviseur auparavant aura été multipliée par B. Or C divisant AB, par hypothèse, et évidemment CB, doit diviser le plus grand commun diviseur de AB et CB, ou B : donc C divise B, ce qu'il fallait démontrer.

II. SOLUTIONS ENTIÈRES DE L'ÉQUATION $ax+by=c$

Toute équation du premier degré en x et y peut se mettre sous la forme $ax+by=c$, où a , b et c sont des entiers. En effet, il n'y a qu'à faire passer tous les termes renfermant les variables dans un même membre et les quantités connues dans l'autre membre, à grouper les termes semblables, puis à faire disparaître les dénominateurs.

On peut supposer a , b et c , premiers entre eux dans leur ensemble, car si cela n'était, il serait facile d'arriver à ce résultat en divisant a , b , et c par leur plus grand commun diviseur.

111. Théorème. *Les nombres a , b et c étant entiers et premiers entre eux dans leur ensemble, la forme $ax+by=c$ n'admettra de solutions entières en x et y que si a et b sont premiers entre eux.* N, B.

En effet, si a et b admettent un diviseur commun d , ce nombre divisera ax et by , puisque x et y doivent être des nombres entiers, — donc d divisera également c . Alors a , b et c ne seraient pas premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc a et b doivent être premiers entre eux.

L'équation $4x + 6y = 25$ ne peut admettre de solutions entières en x et y . Sur du papier quadrillé, construire la droite $4x + 6y = 25$ et observer qu'elle ne passe par aucun des sommets des petits carrés : le côté des carrés est pris comme unité.

111.5. *Lorsque les coefficients a et b sont premiers entre eux l'équation $ax + by = c$ admet toujours au moins une solution entière.* (*positives ou négatives*)

Soit $ax + by = c$, et supposons que a soit positif.

On déduit :
$$x = \frac{c - by}{a}$$

Donnons à y les valeurs successives : 0 1 2 3 ... $(a-1)$ et chaque fois effectuons la division de $(c-by)$ par a . Si le reste est nul, une solution est trouvée. S'il y a un reste, on peut diriger l'opération pour qu'il soit positif.

Soit, par exemple :

$$7x + 17y = 100$$

$$x = \frac{100 - 17y}{7}$$

Pour $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, les restes sont :

$$2, 6, 3, 0, 4, 1, 5,$$

le dernier reste est bien 5, car $100 - 17 \times 6 = -2$, mais -2 est égal à $-7+5$ et le quotient de $(-7+5)$ par 7 est -1 avec un reste qui est bien un reste positif 5. Les opérations ainsi conduites on a : $c-by_1=aq_1+r_1$ le nombre r_1 étant positif et nécessairement plus petit que a .

Deux de ces divisions ne peuvent donner le même reste. En effet si on avait :

$$c-by_1 = aq_1 + r_1 \quad (1)$$

$$c-by_2 = aq_2 + r_1 \quad (2)$$

le reste étant deux fois le même, on obtiendrait en soustrayant (2) de (1) :

$$b(y_2 - y_1) = a(q_1 - q_2)$$

et a devrait diviser le produit $b(y_2 - y_1)$ ce qui est impossible puisque a est premier avec b et que y_2 et y_1 sont l'un et l'autre inférieurs à a . Les a restes obtenus sont donc différents et comme ils sont tous non négatifs l'un d'eux doit être 0.

Il y a donc une valeur entière de y inférieure à a telle qu'il corresponde pour x une valeur entière et il existe au moins une solution entière de l'équation : $ax + by = c$.

112. Théorème. *Si l'on connaît un système de solutions entières : $x = m, y = n$, de la forme $ax + by = c$, il est possible d'en déduire une infinité d'autres.*

Si m et n sont des solutions entières de $ax + by = c$, on aura :

$$am + bn = c.$$

Dans le système $ax + by = c$, on peut remplacer c par sa valeur $am + bn$, et écrire : $ax + by = am + bn$, ou,

$$a(x - m) = -b(y - n).$$

Comme x et m doivent être des entiers, le produit $b(y - n)$ doit être un multiple de a . Mais a et b sont premiers entre eux (§111), donc a doit diviser $(y - n)$ puisque tout nombre entier qui divise un produit de deux facteurs entiers et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre. On doit donc avoir :

$$(y - n) = ap,$$

p étant un nombre entier quelconque.

Dès lors : $x - m = -\frac{b}{a}(y - n) = -\frac{b}{a}(ap) = -bp$.

On aura un système de solutions :

$$x - m = -bp \text{ et } y - n = ap;$$

$$\text{d'où, } x = m - bp;$$

$$y = n + ap.$$

p étant un nombre entier quelconque.

113. Remarque. Dans l'expression de x , on trouve le coefficient de y changé de signe, et dans celle de y le coefficient de x avec son signe : $x = m - bp$, $y = n + ap$. N. 3

Il est indifférent de conserver le signe du coefficient a ou celui de b , car p peut aussi bien être positif que négatif.

III. RECHERCHE D'UNE DES SOLUTIONS

ENTIÈRES DE $ax + by = c$

114. Par simple examen. Souvent un moment d'attention suffit pour trouver une solution du système.

Soit $4x + 5y = 16$. Le système de valeurs : $x = 4$, $y = 0$, se présente naturellement, et l'ensemble des solutions est donné par :

$$x = 4 + 5p, \quad y = 0 - 4p.$$

Lorsque le coefficient de l'une des inconnues est l'unité, on obtiendra une solution entière en donnant à l'autre inconnue la valeur 0.

Soit, $x + 9y = 17$; un système de solutions est évidemment : $y = 0$, $x = 17$.

115. Cas général. Dans le cas général, voici comment on peut procéder.

Soit l'équation : $17x + 23y = 500$.

Cette équation résolue par rapport à x donne :

$$x = \frac{500 - 23y}{17} = \frac{29 \times 17 + 7 - 17y - 6y}{17}.$$

Ou encore : $x = 29 - y + \frac{7 - 6y}{17}$.

Puisque x et y doivent être des entiers, il faut que $(7-6y)$ soit un multiple de 17. Posons : $\frac{7-6y}{17} = t$, t étant un entier.

$$\begin{aligned}\text{Nous aurons : } x &= 29 - y + t, \\ 7 - 6y &= 17t, \\ 6y &= 7 - 17t, \\ y &= \frac{6 + 1 - 12t - 5t}{6}.\end{aligned}$$

$$\text{Nous trouvons : } y = 1 - 2t + \frac{1-5t}{6}.$$

Comme précédemment, il faut que $(1-5t) \div 6$ soit un entier : s .

$$\text{Alors : } y = 1 - 2t + s$$

De l'équation $(1-5t) \div 6 = s$, nous tirons :

$$t = -s + \frac{(1-s)}{5}$$

Posons encore $(1-s) \div 5 = p$. D'où $s = 1 - 5p$, et le système de solutions se dégage facilement :

$$\begin{aligned}s &= 1 - 5p \\ t &= -s + p = 6p - 1 \\ y &= 4 - 17p \\ x &= 24 + 23p\end{aligned}$$

Si $p=0$, $x=24$ et $y=4$, on vérifie que $17 \times 24 + 23 \times 4 = 500$.

116. Remarque. Le travail précédent peut parfois être abrégé. Lorsque par exemple on a obtenu :

$$y = 1 - 2t + \frac{1-5t}{6} \quad (\S 116)$$

nous n'avions qu'à donner à t la valeur (-1) et la valeur correspondante de y aurait été : $y = 1 + 2 + 1 = 4$ celle de x étant : $29 - y + t = 29 - 4 - 1 = 24$.

Un système de solutions : $x = 24$, $y = 4$ étant ainsi trouvé les solutions seraient de la forme :

$$\begin{aligned}x &= 24 + 23p \\ y &= 4 - 17p\end{aligned}$$

117. Dans bien des cas, les conditions du problème entraînent une discussion des solutions. Soit le dernier exemple étudié; les conditions imposées peuvent être que x et y non seulement doivent être entiers, mais encore des entiers positifs.

Il reste alors à étudier le système de deux inégalités à une inconnue.

Pour que x soit positif, il faut : $x = 24 + 23p > 0$.

Pour que y soit positif, il faut : $y = 4 - 17p > 0$.

Ce qui entraîne : $p > -\frac{24}{23}$; et pour que y soit positif, $p < \frac{4}{17}$. Les seules valeurs que p puisse prendre sont donc 0 et -1 . Les solutions correspondantes sont :

$$x = 24 \text{ avec } y = 4; \quad x = 1 \text{ avec } y = 21.$$

EXERCICE XXXIV

Résoudre en nombres entiers et positifs les équations suivantes :

5-1. $19x - 14y = 11$.

5-2. $2x + 3y = 25$.

5-3. $3x = 8y - 16$.

5-4. $21x + 17y = 2000$.

5-5. De combien de façons différentes peut-on, en ajoutant des 7 et retranchant des 13, aboutir à une somme de 26?

5-6. Résoudre en nombres entiers et positifs : $3x + 5y = 1306$.

5-7. Résoudre : $24x + 65y = 243$.

5-8. Quels sont les degrés correspondants des thermomètres Centigrade et Fahrenheit entre -40°C et 360°C qui sont exprimés par des nombres entiers ?

5-9. Trouver les nombres qui divisés par 7 donnent un reste de 5, et divisés par 9, un reste de 2.

5-10. Résoudre : $3x = 8y - 16$.

5-11. Résoudre : $14x = 5y + 7$.

5-12. Résoudre : $27x = 1600 - 6y$ en nombres entiers.

5-13. Diviser 100 en deux parties qui soient l'une un multiple de 7, l'autre un multiple de 11.

5-14. Former la somme de 254 avec des 11 et des 5.

5-15. Trouver les plus petits nombres entiers qui vérifient l'équation : $3x = 8y - 16$.

5-16. On donne $9x + 13y = 2000$, x et y étant entiers positifs, on demande la plus grande valeur de x et la plus petite valeur de y qui vérifient l'équation.

Quand les coefficients de x et de y sont de signes contraires on a une infinité de solutions. S'ils sont de même signe on a un nombre fini de solutions.

IV. SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

À TROIS INCONNUES

118. Lorsqu'il y a trois inconnues avec deux équations, on commencera par éliminer l'une des inconnues; puis, l'équation obtenue sera étudiée comme précédemment. Une discussion s'imposera pour éliminer les valeurs ne répondant pas aux conditions du problème.

Soit le problème amusant suivant: *Un fermier vend cent bêtes pour \$100, les unes à \$5, les autres à \$1, les autres à \$0.50 : combien y en avait-il de chaque espèce ?*

$$\begin{aligned} \text{On a évidemment : } \quad x + y + z &= 100 \\ 5x + y + \frac{1}{2}z &= 100. \end{aligned}$$

Pour éliminer, soustrayons l'équation du haut de celle du bas, ce qui donne :

$$4x - \frac{1}{2}z = 0, \text{ d'où } z = 8x.$$

Remplaçant z par sa valeur dans une des équations, nous obtenons :

$$y = 100 - 9x$$

Toute valeur entière donnée à x fournit des valeurs entières pour y et z . Comme y et z doivent en même temps être positifs, ainsi que x , on doit avoir :

$$\begin{aligned} z = 8x &> 0 \\ y = 100 - 9x &> 0. \end{aligned}$$

Donc x doit être positif et $< \frac{100}{9}$ ou $11\frac{1}{9}$; x peut prendre les valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, ... 11. Les valeurs des autres inconnues se calculent facilement.

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$z =$	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
$y = 100$	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1	

EXERCICE XXXV

5-17. Nous conserverons au problème suivant sa forme originale:

Chargé par un ami de faire des aumônes,
Je dois distribuer cent francs à cent personnes,
Et cent pièces en tout, les unes d'argent blanc :
Beaux écus de cent sous, belles pièces d'un franc ;
D'autres en cuivre rouge à récents millésimes,
Très brillantes encore et valant dix centimes.
J'ai trouvé deux moyens en bon calculateur,
De suivre exactement le vœu du donateur,
Et, comme il le voulut, de faire des largesses
En donnant les cent francs avec juste cent pièces.
Quels sont ces deux moyens ? Dis-le moi, cher lecteur.

(Rouse Ball, Récréations mathématiques I, p. 110)

5-18. Un fermier achète pour 100 francs, 100 menus objets. Les uns coûtent 3 fr 50, les autres 1 fr $\frac{1}{3}$ et les derniers 0 fr 50. Combien de chaque espèce ?

5-19. Montrer que le problème suivant est impossible. Un fermier vend 100 bêtes pour 100 dollars, les unes à \$5, les autres à \$2, les autres à \$0.50. Combien y en avait-il de chaque espèce ?

5-20. On achète des agneaux et des moutons, donnant \$8 pour chaque agneau et \$27 pour chaque mouton. Les agneaux ont coûté \$97 de plus que les moutons. Combien y en avait-il de chaque espèce ?

5-21. Partager 100 en deux parties telles que l'une soit un multiple de 11 et l'autre un multiple de 6.

5-22. Un fermier a retiré \$300 de la vente de vaches à \$45 et de moutons à \$6. Combien de chaque espèce ?

5-23. Neuf pommes et 5 oranges coûtent ensemble 52 sous. Quel est le prix de chaque fruit exprimé par un nombre entier de sous ?

5-24. Une personne a acheté 14 verges de drap pour \$9.30. Le drap était de prix différents, à 50 sous, 70 sous et \$1.00. Combien a-t-il eu de verges entières des prix divers ?

5-25. Trouver les nombres qui, divisés par 7 donnent un reste de 5 et divisés par 9 donnent un reste de 2 ?

5-26. Quel est le nombre qui donne un reste de 16 lorsqu'il est divisé par 39 et un reste de 27 lorsqu'il est divisé par 56 ?

5-27. Si l'on compte les oranges d'une caisse 2, 3, 4, 5, 6 à la fois, il n'y a aucun reste, mais si elles sont comptées 7 à la fois, le reste est 5. Combien y-a-t-il d'oranges ?

5-28. Quel est le plus petit nombre qui, divisé par 17 donne un reste de 7, et divisé par 26 donne un reste de 13 ?

5-29. On demande le plus petit nombre qui divisé par 11, 19 et 29 respectivement donnera les restes 3, 5, 10.

5-30. Résoudre en nombres entiers et positifs :

$$3x + 5y + 6z = 104$$

$$9x + 3y + 8z = 164.$$

5-31. La différence entre un certain multiple de 10 et la somme de ses chiffres est 99. Quel est ce nombre ?

5-32. Résoudre en nombres entiers positifs :

$$6x + 9y + 14z = 77$$

$$4x + 15y + 7z = 51.$$

5-33. On partage 74 en trois parties qui sont respectivement des multiples de 5, 6 et 7. La somme des quotients doit être 12. Quelles sont ces parties ?

5-34. Il y a trente pièces d'argent, des pièces de 50 sous, de 25 sous et de 10 sous. Combien y en a-t-il de chaque sorte sachant qu'en tout il y a \$6.50 ?

5-35. Si 100 animaux ont coûté \$198, combien y en avait-il de chaque espèce, sachant qu'il y avait des pourceaux à \$12, des moutons à \$8 et des poulets à \$1 ?

5-36. Quatre enfants se partagent 337 billes. A en prend 7 à la fois, et se retire; B en prend 5 à la fois et laisse C prendre 4 billes à la fois, après quoi D prend celles qui restent 6 à la fois. La somme des billes de A et B dépasse de l'unité deux fois la somme des billes des deux autres. A en a 15 de plus que B et C ensemble; A et C constatent qu'ils ont chacun un nombre de billes qui est un multiple de 5. Combien chacun en a-t-il ?

5-37. Un groupe d'hommes et d'enfants ont dépensé \$1000 dans une promenade, les enfants dépensant chacun \$11 et chaque homme \$19. Combien y avait-il d'hommes et d'enfants ?

5-38. Trois cloches commencent à sonner en même temps et font entendre leurs coups à des intervalles respectivement égaux, pour chacune d'elles, à 25, 29 et 33 secondes. La première cloche cesse de sonner au bout d'un temps moindre qu'une demi-heure; la seconde et la troisième continuent de sonner respectivement pendant 18 secondes et 21 secondes, puis cessent leur sonnerie. On demande pendant combien de temps chaque cloche a sonné ?

5-39. Problème des "cocos". Cinq insulaires ont à se partager des cocos et conviennent de prendre chacun le cinquième du nombre total. Au cours de la nuit, un premier se lève, fait cinq amas égaux des cocos, jette à la mer un coco restant, prend sa part et va se coucher. Un second

fait comme le premier: il met les cocos en cinq amas égaux et prend sa part après avoir jeté le coco qui restait, et ainsi pour le troisième, le quatrième et le cinquième. Le lendemain matin, ils font le partage équitable des cocos la division se faisant sans reste cette fois: combien y avait-il de cocos ?

$$m = 3121 + 15605f$$

V. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ

119. Lorsque les équations indéterminées sont d'un degré autre que le premier, il n'existe pas, en général, de méthode élémentaire pour les résoudre. Cependant, si l'une des inconnues ne figure qu'au premier degré, il est possible d'aboutir à une solution.

120. Soit l'équation: $Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$, où tous les coefficients sont des entiers, à résoudre en nombres entiers en x et y .

Nous avons : $y(Bx + E) = -Ax^2 - Dx - F$

$$\text{d'où } y = \frac{-(Ax^2 + Dx + F)}{Bx + E}$$

si nous effectuons la division par $Bx + E$, nous obtiendrons pour y une valeur de la forme :

$$y = mx + n + \frac{K}{Bx + E}.$$

Dans n et dans K , il peut arriver que B^2 soit en dénominateur, mais en multipliant les deux membres par B^2 il n'y aura plus que des entiers. La partie fractionnaire $KB^2 \div (Bx + E)$ devra donc elle aussi être un entier ; donc $Bx + E$ devra être un des diviseurs de KB^2 . Les valeurs de x ainsi obtenues fourniront celles de y . Les solutions non acceptables seront éliminées.

121. Exemple. Soit à résoudre en nombres entiers positifs : $3x^2 + 7xy - 2x - 5y - 35 = 0$. Nous trouvons

$$\text{immédiatement : } y = \frac{-(3x^2 - 2x - 35)}{7x - 5}$$

$$\text{ou } y = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{49} + \frac{\frac{1710}{49}}{7x - 5}.$$

en multipliant les deux membres par 49, et en faisant passer tous les termes à gauche, nous obtenons :

$$49y + 21x + 1 - \frac{1710}{7x - 5} = 0.$$

Il faut donc que $7x - 5$ soit un diviseur de 1710.

Les facteurs premiers de 1710 sont : 2.3.3.5.19. Les diviseurs de 1710 sont donc au nombre de 24. Pour les obtenir écrivons les facteurs premiers de la façon suivante :

1.2 Multiplions la deuxième ligne par les termes de

1.3.9 première :

1,3,9,2,6,18;

1.5 puis multiplions ces produits par les termes de

1.19 la troisième :

1,3,9,2,6,18,5,15,45,10,30,90;

puis ces nouveaux produits par les termes de la quatrième ligne — il faudra donc ajouter aux produits précédents :

19,57,171,38,114,342,95,285,855,190,570,1710.

Le binôme $7x - 5$ peut égaler l'un ou l'autre de ces 24 diviseurs ; nous chercherons quels sont ceux qui augmentés de 5 sont multiples de 7 ; nous trouvons que seuls 2,9,30,114 conviennent. Les valeurs de x correspondantes sont 1,2,5,17.

On calcule facilement la valeur de y au moyen de la

formule :
$$y = \frac{-(3x^2 - 2x - 35)}{7x - 5}.$$

Comme y doit être entier et positif, il suffira d'essayer les valeurs de x comprises entre les racines de $3x^2 - 2x - 35$, puisque $7x - 5$ est positif (§98) ; seules les valeurs 1 et 2 de x peuvent être essayées. Nous trouvons ainsi que le système admet les solutions entières et positives :

$$x = 1, y = 17 ; x = 2, y = 3.$$

EXERCICE XXXVI

• Résoudre en nombres entiers positifs :

5-40. $3xy + 2y^2 - 5y - 4x - 5 = 0$. *impossible*

5-41. $7x^2 - 3x - 4y - 10 = 0$.

5-42. $2xy - 3x^2 + y - 1 = 0$.

5-43. $x^2 - xy + 2x - 3y - 11 = 0$. *x=5 y=3*

5-44. $5xy = 2x + 3y + 18$.

5-45. $xy + x^2 - 2x - 3y - 29 = 0$.

5-46. $3xy - 4y + 3x = 14$.

5-47. Trouver les nombres entiers de deux chiffres qui sont divisibles par le produit des deux chiffres qui les composent.

*les nombres 11 - 12 - 24 - 36 et 15
sont.*

CHAPITRE VI

ANALYSE COMBINATOIRE

Sommaire. I. Définitions. II. Arrangements. III. Permutations. IV. Combinaisons. V. Propriétés particulières des combinaisons. VI. Permutations circulaires. VII. Permutations avec répétitions. VIII. Arrangements avec répétitions. IX. Combinaisons avec répétitions. X. Probabilités. XI. Problème des dés.

I. DÉFINITIONS

122. L'analyse combinatoire étudie les arrangements, les combinaisons et les questions analogues. Ce chapitre des mathématiques fournit les principaux théorèmes sur lesquels reposent, la théorie des nombres, la théorie des jeux de hasard, le calcul des probabilités et ses applications de plus en plus nombreuses et importantes.

analyse comp.
te.
123. ARRANGEMENTS. On appelle arrangements de m objets pris n à n les différents groupes que l'on peut former en plaçant n de ces objets à la suite les uns des autres, ces groupes différant soit par l'ordre, soit par la nature des objets qui y figurent. *N.B. on ne permute jamais un arrangement.*

PERMUTATIONS. Le nom de permutations est donné aux arrangements de m objets pris m à m . Ce sont les différents groupes obtenus en disposant les uns à la suite des autres les m objets en sorte que les groupes diffèrent par l'ordre des objets. Les permutations se rattachent évidemment aux arrangements dont elles sont un cas limite.

travail de
compte des
COMBINAISONS. On appelle combinaisons n à n de m objets distincts, tous les groupes que l'on peut obtenir en prenant n de ces objets, les groupes différant au moins par la nature d'un des objets qui y figurent.

EXERCICE XXXVII A

124. Le débutant se demande souvent si, dans le problème, il est question d'arrangements ou de combinaisons. Les exercices suivants l'aideront à vaincre les premières difficultés.

Se poser pour cela la question suivante : l'ordre des termes dans les groupes est-il essentiel ? alors ce sont des arrangements ou des permutations ; si l'ordre n'est pas essentiel, si alors même que les éléments d'un groupe sont changés de rang le groupe lui-même n'est pas changé — alors ce sont des combinaisons. N.B.
///

6-1. Avec les lettres du mot "parent" combien de mots différents de trois lettres peut-on former ? comb.

Le groupe *apr*, diffère-t-il du groupe *par* ? Donc ...

6-2. Avec les facteurs algébriques p, a, r, e, n, t combien de produits différents de deux facteurs peut-on former ? comb.

Le groupe de facteurs *ap*, diffère-t-il du groupe *pa* ? Donc ...

6-3. Combien de groupes différents de quatre personnes prises parmi 10 peut-on former ? comb.

Si l'on considère un de ces groupes, en changeant l'ordre des personnes qui le constituent, change-t-on de groupe ?

6-4. De combien de façons différentes quatre élèves peuvent-ils se classer par ordre de mérite dans une classe de 30 élèves ? comb.

L'ordre est-il important ?

6-5. Combien de nombres différents peut-on former avec les chiffres 234567 ? comb.

Deux nombres formés des mêmes chiffres mais dans un autre ordre, diffèrent-ils entre eux ?

6-6. Combien de signaux différents puis-je donner en me servant à la fois de quatre drapeaux choisis parmi huit drapeaux différents ? comb.

L'ordre dans la disposition des drapeaux importe-t-il ?

II. ARRANGEMENTS

125. Formation des arrangements.

Soit à former les arrangements de m objets pris n à n .

Les arrangements possibles de m objets 1 à 1 sont évidemment au nombre de $m : a, b, c, d, \dots l$.

Pour obtenir les arrangements de m objets 2 à 2, écrivons sur une ligne horizontale les groupes d'arrangements 1 à 1 et faisons de chacun une tête de colonne : nous aurons ainsi

m colonnes. Chaque colonne sera formée par des groupes de deux lettres, l'une qui est en tête de la colonne, la seconde est l'une des $(m-1)$ autres lettres. Nous aurons dans chaque colonne $(m-1)$ groupes de 2 lettres et dans les m colonnes un nombre de groupes égal à $m(m-1)$.

ab	ba	ca	da	ea	...	1a	ma
ac	bc	cb	db	eb		1b	mb
ad	bd	cd	dc	ec		1c	mc
ae	be	ce	de	ed		1d	md
.....							
am	bm	cm	dm	em		1m	ml

Aucun arrangement n'a été omis car la première lettre d'un arrangement quelconque est l'une de celles qui figurent en tête des colonnes, et puisqu'on a fait suivre cette lettre de toutes les autres; il est évident que cet arrangement a été obtenu.

Aucun arrangement n'a été répété, car les arrangements de la même colonne diffèrent par la deuxième lettre, et ceux de deux colonnes différentes, par la première.

Pour former les groupes d'arrangements de m lettres 3 à 3, on procédera de même. On formera autant de colonnes qu'il y a de groupes d'arrangements 2 à 2, puis on fera suivre le groupe de tête des lettres qui n'y figurent pas déjà. On obtiendra donc dans chaque colonne $(m-2)$ groupes de trois lettres :

abc	bac	cab	...	lma	...	mka	mla
abd	bad	cad		lmb		mkb	mlb
...							
abm	bam	cam		lmj		mkj	mlk

On démontre comme précédemment que *tous les groupes d'arrangements de trois lettres ont été obtenus*. Soit un de ces groupes jkl ; mettant à part la dernière lettre, il reste jk , un des groupes des arrangements de m lettres 2 à 2 que l'on trouve nécessairement en tête d'une colonne, puisque tous les groupes d'arrangements 2 à 2 y figurent; le groupe

jkl se trouve dans la colonne *jk*, puisqu'on a fait suivre *jk* de toutes les lettres autres que *j* et *k*.

Chaque groupe n'a été obtenu qu'une fois. On n'a pu obtenir deux fois le même groupe dans la même colonne, puisque les dernières lettres des éléments d'une même colonne sont différentes; on n'a pu obtenir le même groupe dans deux colonnes différentes, puisque les premiers éléments de deux colonnes sont des groupes différents.

On procéderait de même pour former les groupes d'arrangements de m lettres 4 à 4, puis 5 à 5, ... n à n , en formant dans chaque cas autant de colonnes qu'il y a de groupes d'arrangements de l'ordre immédiatement inférieur et faisant suivre dans chaque colonne le groupe de tête par toutes les lettres qui n'y figurent pas.

EXERCICE XXXV A

6-7. Former le tableau complet des arrangements des lettres *abcdef*, prises deux à deux.

6-8. Former le tableau des arrangements des chiffres 12345 pris 3 à 3.

6-9. Tableau des arrangements 4 à 4 des lettres du mot *tour*.

126. Calcul du nombre des arrangements.

Désignons par le symbole A_m^n le nombre des arrangements de m lettres prises n à n : m en indice indiquant le nombre total de lettres, n en exposant indiquant le nombre de lettres d'un groupe.

On a évidemment : $A_m^1 = m$

Pour former les arrangements de m objets 2 à 2, on a construit un nombre de colonnes égal à A_m^1 , puis chaque colonne contient $(m-1)$ groupes de deux lettres. Tous les groupes ont été ainsi obtenus et une seule fois (§125), donc :

$$A_m^2 = A_m^1 (m-1) = m(m-1).$$

De même pour les groupes d'arrangements 3 à 3 : on a formé autant de colonnes qu'il y a de groupes différents d'arrangements 2 à 2, soit A_m^2 , et dans chaque colonne on a $(m-2)$ groupes de trois lettres, ce qui fait un nombre de groupes de trois lettres donné par $A_m^2 (m-2)$, ou $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$

De proche en proche, nous arriverions à A_m^{k-1} , dont la valeur égale :

$$A_m^{k-1} = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-k+2).$$

Le dernier terme étant $[m - (k-1) + 1]$, ou $m-k+2$.

127. Formule générale des arrangements. Supposons établie jusqu'au symbole A_m^{k-1} la règle suivante: *le nombre des arrangements de m lettres $k-1$ à $k-1$ est donné par le produit de $k-1$ facteurs, allant en décroissant, le dernier étant $[m - (k-1) + 1]$.* Démontrons que cette loi est encore vraie pour A_m^k .

Pour trouver tous les groupes des arrangements k à k , il faut dresser autant de colonnes qu'il y a de groupes d'arrangements $(k-1)$ à $(k-1)$; on fera suivre chaque groupe de tête des $(m-k+1)$ lettres qui n'y figurent pas; comme il y a A_m^{k-1} colonnes, le nombre des groupes d'arrangements k à k est donc : $A_m^{k-1} \times (m-k+1)$.

Comme on connaît le développement de A_m^{k-1} , on en conclut :

$$A_m^k = A_m^{k-1} (m-k+1) = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-k+2)(m-k+1).$$

Il y a bien k facteurs qui vont en diminuant. La loi vraie jusqu'à $k-1$ est donc encore vraie jusqu'à k . Or elle est vérifiée pour $k = 2, 3, \dots$ elle est vraie pour $k=4, 5, \dots$ elle est générale. On a donc la formule fondamentale :

N.B. $A_m^k = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-k+1).$
 $= \frac{m!}{(m-k)!}$

EXERCICE XXXVI A

6-10. Il y a 40 places dans un tramway, de combien de façons différentes 20 personnes peuvent-elles se placer ?

6-11. De combien de façons différentes 20 personnes peuvent-elles remplir 5 postes différents ?

6-12. Le nombre des arrangements de n objets 4 à 4 égale 12 fois celui des arrangements de n objets 2 à 2. Combien y a-t-il d'objets ? 6

6-13. Combien peut-on imaginer de mots différents de deux consonnes et d'une voyelle choisis parmi 17 consonnes et 5 voyelles ? 1

$$3 \times A_{17}^2 \times A_5$$

6-14. Avec les lettres a,b,c,d combien de mots différents de trois lettres peut-on faire ? Dresser la liste de tous ces mots.

6-15. Combien y a-t-il de mots différents de cinq lettres a,b,c,d,e qui commencent et se terminent par une voyelle ? $2A_3^3$ (A B C D E) 2 x 5³

6-16. Combien y a-t-il de facteurs dans le produit des symboles $n!(n-1)!(n-2)!(n-3)!$? $n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot (n-3)!$

6-17. Avec les lettres du mot *providence*, combien de mots différents peut-on former, les mots devant tous comprendre 6 lettres, se terminer par e et commencer par une consonne ?

6-18. Quelle est la valeur de n si $A_n^5 = 12 A_n^3$? $n=7$

6-19. Déterminer n si $A_{2n}^3 = 100 A_n^2$? $n=13$

6-20. Combien d'arrangements différents peut-on former avec les lettres du mot *conseil* en les prenant 5 à 5 ?

6-21. Combien y a-t-il de nombres formés des chiffres de 9346, compris entre 3000 et 4000. Faire la liste complète de ces nombres. $A_3^3 = 6$

6-22. Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots différents de 6 lettres différentes peut-on former ? $\frac{26!}{20!}$

6-23. Combien de mots différents de 5 lettres au plus et de 2 lettres au moins peut-on former avec les lettres du mot *providence*, tous les mots devant se terminer par la lettre e ? $A_9^4 + A_9^3 + A_9^2 + A_9^1$

6-24. La formule qui permet de passer du symbole A_n^p à A_n^{p+1} est la suivante : $A_n^{p+1} = A_n^p (n-p)$. Pour que la formule soit applicable même au cas limite où $p=0$, quelle valeur faut-il attribuer au symbole : A_n^0 ? $A_n^0 = 1$

6-25. Une petite hélice porte trois lampes de couleurs différentes qui donnent l'illusion de trois cercles concentriques lorsque l'hélice tourne rapidement. Si l'on dispose de 20 couleurs différentes, combien de variétés d'effets peut-on obtenir ? $20 \times 19 \times 18$

6-26. Mêmes données que 16, mais les lampes peuvent de plus être de la même couleur. 20^3

III. PERMUTATIONS

128. Calcul du nombre des permutations.

Le nombre de permutations de m objets se déduit de la formule précédente (§127), c'est en effet le nombre d'arrangements de ces m objets pris m à m . Donc ;

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots 4.3.2.1.$$

Donc le nombre de permutations de m objets est égal au produit des m premiers nombres entiers consécutifs. Ce pro-

duit s'appelle la *factorielle* de m , on le désigne par les symboles : P_m , $\underline{m!}$ ou $\underline{m}$.

129. Autre démonstration de la formule du nombre des permutations de m objets.

Supposons formé le tableau des permutations de $(m-1)$ lettres. La m ième lettre pourra être placée dans un groupe de $(m-1)$ lettres différentes: avant les $(m-1)$ autres, ce qui fait une position, ou après l'une ou l'autre des $(m-1)$ lettres, donc de m façons différentes en tout.

On démontre facilement que toute permutation de m lettres est ainsi obtenue et obtenue une seule fois. Donc : $P_m = m \cdot P_{m-1}$.

Appliquant cette formule aux diverses valeurs : m , $m-1$, $m-2$, ... on obtient :

$$\begin{aligned} P_m &= m \cdot P_{m-1} \\ P_{m-1} &= (m-1) P_{m-2} \\ P_{m-2} &= (m-2) P_{m-3} \\ P_{m-3} &= (m-3) P_{m-4} \\ &\dots\dots\dots \\ P_3 &= 3P_2 \\ P_2 &= 2P_1 \\ P_1 &= 1 \end{aligned}$$

Ces égalités multipliées membre à membre donnent en définitive la formule qu'il fallait démontrer :

$$P_m = m \cdot (m-1) (m-2) (m-3) (m-4) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

130. Formule de Stirling. Il est parfois intéressant de connaître approximativement la valeur de la factorielle $n!$. On se sert alors de la formule suivante appelée formule de Stirling.

$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, où e est la base du système de logarithmes népériens : $e = 2.71828$ et $\pi = 3.1416$.

Pour $n = 20$, le calcul direct de $n!$ donne :

$$2\,432\,902\,008\,176\,640\,000.$$

tandis que par l'application de la formule on obtient :

$$2\,422\,600\,000\,000\,000\,000.$$

Le rapport des deux nombres est sensiblement l'unité, bien que la différence entre les deux nombres soit très grande.

Remarque II. On écrit : $P(2) = 2! = 1.2$.

Il est évident que 1.2 doit alors s'interpréter 1×2 . En France, la confusion n'est pas possible puisque 1.2 (un et deux dixièmes) s'écrit 1,2 — la virgule séparant les entiers des décimales, — d'où l'expression "virgule décimale" au lieu de point décimal. En Amérique, il semble que le point décimal soit toujours employé. En Angleterre, le point décimal est employé, mais il est placé plus haut que le point ordinaire : on écrira 1'2 au lieu de 1.2.

EXERCICE XXXVII

6-27. Combien peut-on former de triangles ayant pour sommets trois des sommets d'un décagone ? *combinaisons*

6-28. On veut placer 20 livres sur un rayon de bibliothèque, sachant que 3 d'entre eux sont des volumes d'histoire qui doivent rester ensemble, dans le même ordre, de combien de façons peut-on disposer les volumes ? *18!*

6-29. Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot "volume", si les voyelles doivent occuper les rangs pairs ? *(P₃)²*

6-30. Avec les lettres du mot *providence*, combien de mots différents peut-on former, les mots devant tous se terminer par e et commencer par deux consonnes seulement. *de 12 lettres*

6-31. Un tramway contient 40 sièges, 20 à droite et 20 à gauche. De combien de façons différentes peuvent se placer 40 personnes sachant que celles qui sont placées à droite doivent toutes rester à droite ainsi que celles qui d'abord se sont placées à gauche ?

6-32. Soit le mot *triangle*. Avec les lettres de ce mot, combien de mots différents peut-on former sachant que les consonnes doivent être en deux groupes, l'un de deux consonnes, l'autre de trois ? *de 3 lettres*

6-33. Avec les lettres du mot *triangle*, combien peut-on former de mots différents commençant par une consonne, se terminant par une voyelle, la lettre r devant être une des trois premières lettres ? *de 3 lettres*

6-34. Trouver la somme de tous les nombres de cinq chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1,2,3,4,5 non répétés.

IV. COMBINAISONS

131. Combinaisons. Rappelons la définition des combinaisons (§123.) On appelle combinaisons n à n de m objets distincts, tous les groupes que l'on peut obtenir en prenant n de ces objets, les groupes différant au moins par la nature d'un des objets qui y figurent.

132. Calcul du nombre des combinaisons. Représentons par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n .

En permutant les n objets de chacun des groupes de combinaisons, on aurait tous les arrangements de m objets n à n . En effet, aucun arrangement ne serait omis, car les éléments d'un arrangement quelconque appartiennent à une combinaison déterminée, et l'on a formé toutes les permutations qu'une même combinaison peut fournir. Aucun groupe d'arrangements ne serait répété, car chaque groupe de combinaisons contient au moins un élément qui ne se trouve pas dans les autres et les permutations provenant du même groupe diffèrent entre elles.

A tout groupe de combinaisons, il correspond P_n groupes d'arrangements, puisque l'on peut permuter n lettres, de P_n façons différentes. Donc : $A_m^n = C_m^n \times P_n$.

On a la loi : le nombre des combinaisons de m objets n à n est égal au quotient du nombre des arrangements de m objets n à n par le nombre de permutations de n objets.

La formule est donc :

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}$$

contient de facteurs au numérateur et au dénominateur.

133. Autre forme de la formule des combinaisons.

En multipliant les deux termes de la formule précédente par la factorielle de $(m-n)$, la formule devient : $C_m^n =$

$$\frac{m!}{n! \times (m-n)!}$$

car le numérateur contient alors le produit de la suite des nombres entiers depuis m jusqu'à 1 : $m(m-1)\dots(m-n+1) \times (m-n)(m-n-1)\dots 3.2.1$. On a donc encore :

$$C_m^n = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

EXERCICE XXXVIII

- 6-35. Calculer les valeurs des symboles : C_{10}^4 , C_{12}^9 , C_{20}^{17} .
- 6-36. Quelle est la valeur de n si $C_n^6 = C_n^{12}$? Calculer alors : C_n^{16} . *$n=18$*
- 6-37. Quelles sont les valeurs de n et de r si : $A_n^r = 272$ et $C_n^r = 136$? *le même temps*
- 6-38. Dix hommes doivent être choisis parmi 100 pour une mission dangereuse. De combien de manières peut se faire le choix, si deux volontaires se présentent et si les huit autres doivent être choisis? *P_8 C_{98}^8*
- 6-39. Vingt droites qui ne sont ni concourantes ni parallèles sont tracées dans un plan. Combien déterminent-elles de points différents de rencontre? *C_{20}^2*
- 6-40. Combien de produits différents pouvant contenir deux facteurs au moins, peut-on former avec cinq nombres premiers entre eux? *$C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$*
- 6-41. On demande le nombre de groupes différents que l'on peut former avec douze personnes? (Une personne seule ne forme pas un groupe). *C_5^2*
- 6-42. Dans une compagnie de 96 hommes il y a en tout 7 officiers. De combien de façons peut-on choisir un détachement de 5 hommes dont un officier? *$C_{96}^4 \times 7$*
- 6-43. Combien de mots différents de 2 consonnes et de 2 voyelles peut-on former avec les lettres du mot : éducation? *$C_4^2 \times C_5^2$
 $C_4^2 \times A_5^2 \times A_4^2$
 $\times P_4$*
- 6-44. Quelle est la valeur de n dans l'équation : $C_n^2 + C_{n-3}^2 = 171$? *$n=15$*
- 6-45. Deux sacs contiennent chacun 7 jetons différents. Combien de groupes de 8 jetons peut-on tirer, si on en prend 4 dans chaque sac? *$C_7^4 \times C_7^4$*
- 6-46. On distribue 10 lettres en deux paquets, de combien de façons peut-on le faire si l'un des paquets doit contenir 6 lettres, l'autre 4? *C_{10}^6 ou C_{10}^4*
- 6-47. Combien de jeux différents de 13 cartes peut-on tirer de 52 cartes? *C_{52}^{13}*
- 6-48. Vingt-six personnes doivent voyager ensemble dans un omnibus qui peut en contenir 12 à l'extérieur et 14 à l'intérieur; si 8 personnes ne consentent pas à se placer à l'extérieur et 6 ne veulent pas se mettre à l'intérieur, de combien de façons pourra-t-on placer tout le monde? *$A_{14}^8 \times A_6^{12-6}$*
- 6-49. Il y a 16 boules dans un sac, dont deux noires; de combien de façons peut-on tirer 6 boules, de façon que parmi les six on ait les deux noires? *C_{14}^4*
- 6-50. De combien de façon 10 enveloppes partagées en trois groupes de 2,3,5 enveloppes peuvent-elles être distribuées dans trois maisons? *$C_2^2 \times C_3^3 \times C_5^5 \times P_3$*
- 6-51. Un facteur doit distribuer 10 lettres différentes dans deux maisons, de combien de façons peut-il le faire sachant qu'il doit remettre effectivement une lettre ou des lettres dans chacune des maisons? *donnée de C_{10}^1 à C_{10}^9
 $= 2^{10} - 2$*

V. PROPRIÉTÉS DES COMBINAISONS

N. 3
134. Théorème. *Le nombre des combinaisons de m lettres n à n est égal au nombre des combinaisons de m lettres $m - n$ à $m - n$.*

En effet, à toute combinaison renfermant n des m lettres, correspond une combinaison renfermant les $m - n$ autres, et réciproquement.

Choisir n objets parmi m revient à en laisser $m - n$.

On a donc l'égalité suivante : $C_m^n = C_m^{m-n}$.

135. Autre démonstration du théorème (§134).

On peut démontrer la même proposition (§134) par les formules mêmes :

Soit à montrer que $C_m^n = C_m^{m-n}$.

On a démontré que la formule donnant C_m^n peut s'écrire sous la forme : $C_m^n = \frac{m!}{n! (m-n)!}$ (133).

Le symbole C_m^{m-n} peut donc s'écrire :

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(n)!},$$

car on n'a qu'à remplacer n par $(m-n)$ et le facteur $(m-n)$ du premier cas devient : $m - (m-n) = n$.

Donc on a bien : $C_m^n = C_m^{m-n}$.

136. Remarque. La proposition précédente serait démontrée plus rapidement en remarquant que, puisqu'il y a symétrie dans $C_m^n = \frac{m!}{n! (m-n)!}$ entre n et $(m-n)$, on ne change rien en remplaçant n par $(m-n)$.

EXERCICE XXXIX

6-52. Calculer : C_{25}^{23}

6-53. Quelle est la valeur de : C_{18}^{15} ?

6-54. Calculer : C_{100}^{97}

137. Théorème. *Le nombre de combinaisons de m objets n à n est égal au nombre des combinaisons de $(m-1)$ objets n à n , augmenté du nombre des combinaisons de $(m-1)$ objets $(n-1)$ à $(n-1)$, ou symboliquement :*

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

Les groupes des combinaisons des m lettres $abc \dots m$ prises n à n peuvent être partagés en deux catégories : dans une des catégories les groupes contenant la lettre a , dans l'autre, les groupes ne contenant pas la lettre a . En faisant abstraction de la lettre a , dans les groupes qui la contiennent, il reste $(n-1)$ lettres choisies parmi $(m-1)$ lettres, il y en a donc : C_{m-1}^{n-1} . Les groupes qui ne contiennent pas a contiennent n lettres quand même, ces n lettres étant choisies parmi $(m-1)$ lettres seulement, il y en a : C_{m-1}^n .

On a donc bien : $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$.

138. Autre démonstration de (§137).

Nous avons :

$$C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1.2.3.\dots(n-1)}.$$

Puis :

$$C_{m-1}^n = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+2)(m-n+1)(m-n)}{1.2.3.\dots n}.$$

Nous pouvons faire la somme des deux expressions; après avoir multiplié les termes de C_{m-1}^{n-1} par n , nous pourrions mettre en facteur dans les numérateurs, le produit : $(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)$.

$$\begin{aligned} & \text{Nous aurons ainsi : } C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n = \\ & \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(n) + (m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3.4.\dots n} \\ & = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)(n+m-n)}{n!} \\ & = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} = C_m^n \quad (\S 132). \end{aligned}$$

EXERCICE XL

6-55. Il y a un groupe de 30 hommes dont un est italien et un autre allemand. De combien de façons l'allemand peut-il rencontrer 5 d'entre eux, l'italien étant un des 5 ? De combien de façons l'allemand peut-il rencontrer 5 d'entre eux, l'italien n'y étant pas ? En conclure le nombre de groupes différents de 5 hommes que l'allemand peut rencontrer.

6-56. Dans tous les groupes possibles de 5 élèves de votre promotion, combien y en a-t-il dont vous faites partie ? Combien y en a-t-il dont vous ne faites pas partie ? Combien y a-t-il de groupes en tout ?

6-57. On groupe de toutes les façons possibles 5 à 5 les lettres du mot "symbole." Quelle proportion de ces groupes contient la lettre s ? Quelle proportion ne la contient pas ?

139. Valeur maximum du symbole C_m^n lorsque n prend toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m .

Exercice préliminaire. Sur du papier quadrillé, marquer les points dont les coordonnées sont les suivantes : $x = n$, $y = C_8^n$. Donner à n les valeurs successives 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. À quelle valeur de n correspond le maximum de C_8^n ?

2. Sur du papier quadrillé, marquer les points dont les coordonnées sont les suivantes : $x = n$, $y = C_9^n$, n prenant les valeurs depuis 1 jusqu'à 9. À quelle valeur de n correspond le sommet du graphique ? Quelle est la valeur maximum de C_9^n ?

3. Calculer C_{12}^n en donnant à n les valeurs 4, 5, 6, 7, 8. Quelle est la valeur de n qui rend le symbole maximum ?

4. Calculer C_{11}^n , en donnant à n les valeurs 4, 5, 6, 7. Pour quelle valeur de n le symbole prend-il sa plus grande valeur ?

140. **Problème.** Pour quelle valeur de n le nombre des combinaisons de m lettres n à n est-il maximum ?

Les exercices précédents ont montré que la valeur du symbole C_m^n commençait d'abord par augmenter, passait par une valeur maximum, enfin reprenait en sens inverse les premières valeurs.

Soit donc :

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+2)(m-n+1)}{n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1}$$

$$\text{ou} = \frac{m-n+1}{n} \times \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+2)}{(n-1)(n-2) \dots 3.2.1}$$

$$\text{on trouve immédiatement } C_m^n = \frac{m-n+1}{n} \cdot C_m^{n-1}.$$

Pour savoir si le symbole C_m^n est plus grand que le symbole C_m^{n-1} , il suffit d'étudier le facteur : $\frac{m-n+1}{n}$. Si ce facteur dépasse l'unité, le symbole C_m^n est supérieur à C_m^{n-1} . Si ce facteur est inférieur à l'unité, le symbole de gauche est plus petit que celui de droite.

Posons : $\frac{m-n+1}{n} > 1$ et cherchons pour quelles valeurs de n cette relation est vérifiée.

Nous pouvons multiplier les deux membres de l'inégalité précédente par n , puisque n est positif. Donc il faut étudier :

$$m - n + 1 > n, \text{ ou } (m + 1) > 2n.$$

Si m est pair et égal à $2r$, le signe d'égalité ne peut exister, et l'on doit avoir : $n < (r + \frac{1}{2})$. Dès que n dépasse $(r + \frac{1}{2})$, le symbole C_m^n diminue, la plus grande valeur qu'il puisse prendre correspond donc à la valeur précédente entière soit $n = r$. Le maximum de C_{2r}^n est donc C_{2r}^r .

Si m est impair et égal à $2r + 1$, le facteur égale l'unité pour $n = r + 1$. Donc C_{2r+1}^n croît jusqu'à $n = r$, garde la même valeur pour $n = r + 1$, puis décroît. Le maximum est donc donné par l'un ou l'autre des symboles suivants :

$$C_{2r+1}^r = C_{2r+1}^{r+1}.$$

VI. PERMUTATIONS CIRCULAIRES

141. Dans certaines permutations, les groupes où l'ordre cyclique est conservé ne sont pas différents; par exemple $abc, bca, cab \dots$ ne seraient pas des permutations distinctes. Les différentes façons de se placer à table lorsque la table est sans place privilégiée donnent des permutations de ce genre: ce sont des permutations circulaires; les convives pourraient se déplacer ensemble, les voisins étant toujours les mêmes, sans que la permutation fût changée.

142. Supposons formés tous les groupes de permutations de m objets, les groupes de permutations circulaires ont été obtenus m fois. En effet, tous les groupes qui contiennent les m lettres dans un ordre donné ne forment qu'un seul groupe de permutations circulaires; or il y a m de ces groupes puisque l'énumération peut commencer par une lettre quelconque. Donc, on a la relation :

$$P_{\text{cir.}} = P_m \div m = P_{m-1}.$$

143. On pourrait obtenir plus simplement la formule précédente (§142). Soit la "table ronde" autour de laquelle doivent se placer les convives; faisons d'abord entrer un des convives: ce convive choisit une place et ne la quitte pas — ce qui est sans inconvénient puisque les places ne se distinguent en rien les unes des autres, — les $(m-1)$ autres convives se placent relativement à lui: ils peuvent se placer d'autant de façons qu'il y a de permutations possibles de $m-1$ objets.

$$\text{Donc : } P_{\text{cir.}m} = P_{m-1}.$$

EXERCICE XLII

6-58. De combien de façons différentes 10 perles peuvent-elles être enfilées dans un anneau ?

6-59. Si 4 dames et 4 hommes doivent s'asseoir autour d'une "table ronde", de combien de façons différentes peuvent-ils le faire, sachant que les dames et les hommes doivent alterner ?

6-60. De combien de façons différentes 10 personnes peuvent-elles se placer, sachant que le personnage principal doit occuper la place d'honneur ?

6-61. Vingt petits enfants dansent en rond. Combien de figures différentes peuvent-ils former ? P_{19}

6-62. Vingt enfants, 10 garçons et 10 petites filles dansent en rond, de combien de façons différentes peuvent-ils se placer petites filles et petits garçons alternant ? $74 P_{10}$

6-63. Les quatre sommets d'un carré sont joints par une ligne polygonale joignant les sommets deux à deux. Combien y en a-t-il de possibles ? $\frac{P_3}{2}$

6-64. Si au lieu d'un carré comme en (6-63.), on a un pentagone, combien y a-t-il de lignes polygonales possibles ? $\frac{P_4}{2}$

VII. PERMUTATIONS AVEC RÉPÉTITIONS

144. On appelle *permutations avec répétitions* les groupements distincts de **m** lettres données parmi lesquelles se trouvent **a** lettres *l*, **b** lettres *n*, **c** lettres *p* ... Les permutations des lettres du mot CANADA comprendraient ainsi 3 fois la lettre A.

145. Soit X le nombre de permutations avec répétitions. Si dans chacun des groupes de ces permutations, on laisse à leurs places toutes les lettres sauf **a** d'entre elles qui sont les *l* et qu'on les permute, on ne changera rien. Mais si l'on suppose ces lettres affectées d'indices, on aura obtenu **a** ! groupes différents : le nombre des groupes sera donc : X. **a** !.

Raisonnant sur les **b** lettres *n*, sur les **c** lettres *p* ... on obtient un nombre de groupes marqué par X. **a** ! **b** ! **c** ! ... et en même temps toutes les permutations des **m** lettres. On a donc l'équation : X. **a** ! **b** ! **c** ! ... = P_m ;

$$\text{d'où : } X = \frac{m!}{a! \times b! \times c! \dots}$$

EXERCICE XLIII

6-65. De combien de manières peut-on permuter les lettres du mot : "constitutionnellement" ?

6-66. Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot : "Constantinople" ?

6-67. Avec les lettres du mot "intelligent", combien de mots différents peut-on former, les consonnes gardant cependant leurs rangs ? $\frac{12!}{2!2!2!} = 11520$

6-68. On veut former tous les nombres possibles comprenant les chiffres : 12233347, combien y en aura-t-il ? $\frac{7!}{1!2!3!} = 1680$

6-69. Avec les lettres du mot "vivisection" combien de mots différents peut-on former, les voyelles devant garder leurs rangs ? $\frac{8!}{2!2!2!} = 1680$

6-70. Avec les chiffres 3456543, on veut former tous les nombres possibles, mais les chiffres pairs doivent occuper les rangs pairs. Combien y aura-t-il de nombres ? $\frac{7!}{2!2!2!} = 1680$

6-71. Combien peut-on former de nombres différents compris entre 200000 et 400000 avec les chiffres 222334 ? $\frac{6!}{2!2!2!} = 1680$

VIII. ARRANGEMENTS AVEC RÉPÉTITIONS

146. On appelle ainsi tous les groupes que l'on peut former en prenant de toutes les manières possibles p lettres distinctes ou non, de manière que deux groupes diffèrent l'un de l'autre par la nature des lettres qu'ils contiennent ou par l'ordre des lettres.

Avec abc par exemple, on peut faire les arrangements avec répétitions suivants (2 lettres) : aa, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, ab.

147. Supposons formés les groupes d'arrangements avec répétitions de n lettres $(p-1)$ à $(p-1)$. Pour former les groupes d'arrangements avec répétitions p à p , il n'y a qu'à ajouter à chaque groupe chacune des n lettres, ce qui donnera évidemment un nombre de groupes égal à n fois le précédent. On démontrerait facilement que tous les groupes d'arrangements p à p sont ainsi obtenus et une seule fois.

Donc : $R_n^p = R_n^{p-1} \times n$, où R symbolise le nombre d'arrangements avec répétitions.

Or, le nombre d'arrangements avec répétitions de n lettres 1 à 1 est évidemment n . De la formule précédente on tire :

$$R_n^2 = R_n^1 \times n = n^2; \text{ en général : } R_n^p = n^p.$$

EXERCICE XLIV

6-72. Avec les chiffres 123456789, combien de nombres différents dépassant 100 000 000 peut-on former, les chiffres pouvant être répétés ? 99

6-73. Un cadenas porte cinq anneaux, chacun contenant 10 lettres. Combien y a-t-il de combinaisons possibles pour obtenir un mot de cinq lettres placé en face du repère ? 10⁵

6-74. Quels sont les mots différents de quatre lettres que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet ? On considérera aaaa, par exemple, comme un mot. 26⁴

6-75. Avec les chiffres 123456, combien de nombres différents peut-on former, les chiffres pouvant être répétés. Chaque nombre devra être plus grand que 100 000. Quelle est la somme de ces nombres ? 6⁵ (1+2+3+4+5+6)

IX. COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITIONS

148. On obtient des combinaisons avec répétitions en formant tous les groupes possibles de p lettres, choisies parmi n lettres, de telle sorte que deux groupes diffèrent par la nature d'une lettre au moins, les lettres pouvant être répétées.

Dans le développement de $(a+b+c+d)^3$, par exemple, les termes différents que l'on obtient correspondent aux groupes de combinaisons avec répétitions.

Désignons symboliquement ce nombre par K_n^p .

149. Calcul de K_n^p .

Pour calculer K_n^p , comptons de deux façons différentes combien de fois la lettre a est présente dans ces groupes. Par symétrie, la lettre a est présente aussi souvent que les autres. Comme il y a p lettres dans chaque groupe, la lettre a est présente un nombre de fois marqué par :

à p fois par lettre $\frac{p}{n} K_n^p$

$p K_n^p =$ nombre total de lettres en tout que l'on a

La lettre a est présente dans plusieurs groupes ; en l'enlevant une fois de chacun de ces groupes, il reste l'ensemble des combinaisons avec répétitions de n lettres $(p-1)$ à $(p-1)$; on a donc enlevé la lettre a un nombre de fois marqué par K_n^{p-1} . Dans ces groupes de combinaisons $p-1$ à $p-1$,

la lettre a est présente un nombre de fois marqué par $\frac{p-1}{n} K_n^{p-1}$. On obtient donc l'équation :

$$\frac{p}{n} K_n^p = K_n^{p-1} + \frac{p-1}{n} K_n^{p-1} = \frac{n+p-1}{n} K_n^{p-1}.$$

$$\text{De là, on tire facilement : } K_n^p = \frac{n+p-1}{p} K_n^{p-1}$$

qui fournit une formule de récurrence.

$$\text{Il est évident que } K_n^1 = n. \text{ Donc } K_n^2 = \frac{n+2-1}{2} \times \frac{n}{1}.$$

$$\text{De même } K_n^3 = \frac{(n+3-1)(n+1)(n)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

et en général :

$$K_n^p = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1)}{p(p-1)(p-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = C_{n+p-1}^p$$

$$= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

EXERCICE XLV

6-76. Combien y aura-t-il de termes dans le développement complet de l'expression : $(a + b + c + d)^3$?

6-77. Dans le polynôme homogène du second degré, entre trois variables, combien peut-il y avoir de termes distincts ?

6-78. L'équation d'une conique contient une partie homogène et du second degré entre deux inconnues : combien de termes peut contenir cette partie importante de l'équation de la conique ?

6-79. Combien y a-t-il de termes dans un polynôme homogène du degré n à p variables ?

EXERCICES DIVERS SUR L'ANALYSE COMBINATOIRE

6-80. Trouver le nombre de mots différents que l'on peut former en permutant toutes les lettres du mot ESPÉRANCE.

6-81. Cinq sentiers conduisent au sommet d'une montagne, de combien de façons peut-on s'y rendre par un sentier et revenir par un autre ?

6-82. On permute les lettres du mot "espérance" en imposant la condition que les voyelles soient de deux en deux, séparées par une seule consonne. Combien y aura-t-il de groupes différents ?

6-83. De combien de façons peut-on disposer 8 livres sur une tablette de façon que deux livres déterminés ne soient pas voisins ?

6-84. On propose de choisir 5 personnes parmi 20 pour constituer un tribunal de juges. Combien y aura-t-il de groupes possibles? Dans combien de ces groupes une personne déterminée sera-t-elle présente? De combien sera-t-elle exclue?

6-85. Combien de nombres différents peut-on former avec les chiffres 222334; dans chacun de ces nombres il doit y avoir 6 chiffres.

6-86. On a deux séries de lignes concourantes, l'une de p lignes, l'autre de n lignes; sachant que ces lignes ne sont dans aucun cas parallèles entre elles, on demande le nombre d'intersections possibles?

6-87. Trouver la somme des nombres différents de 4 chiffres que l'on peut former avec les chiffres 2357. *non répétés.*

6-88. On doit permuter les lettres du mot "espérance", mais à la condition que le mot commence et se termine par la lettre e. Combien de mots différents sont possibles? On considère que é est identique à e.

6-89. Un club de 20 membres doit élire un bureau d'administration de 4 officiers; parmi les membres 5 sont français, 15 sont anglais; de combien de façons pourra-t-on constituer ce bureau si au moins un anglais doit en faire partie? $= 4320$ combinaisons *moins* $C_4^5 - C_4^0$

6-90. Dans le club précédent (6-89.) on veut former un bureau d'administration de 5 dignitaires dont un au moins doit être français; combien peut-on imaginer de groupes différents?

6-91. Même que 6-89., mais il faut seulement que le président soit français.

6-92. Quelle est la somme de tous les nombres de six chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1,2,3,4,5,6 non répétés? *Somme d'une colonne* $\frac{6!}{4!} (1+2+3+4+5+6)$

6-93. Quelle est la somme de tous les nombres dépassant 100 000 que l'on peut former avec les chiffres 113344? *non répétés* $\frac{6!}{2!2!2!} (1+2+3+4+5+6)$

6-94. Quelle est la somme de tous les nombres différents dépassant 1 000 000 que l'on peut former avec les chiffres 1223334? $\frac{6!}{2!2!2!} (1+2+3+4+5+6)$

6-95. Dans une urne se trouvent 5 boules noires, 4 jaunes et 3 rouges. De combien de façons peut-on tirer 6 de ces boules de manière que chaque couleur soit représentée?

6-96. De combien de façons peut-on disposer n livres sur une tablette de façon que deux livres en particulier ne soient pas voisins? $m - 12$ *non représentés*

6-97. Dans deux urnes il y a 14 boules également partagées; combien de tirages différents de 8 boules peut-on faire en tirant quatre boules de chaque urne? $C_4^7 \times C_4^7$ *on considère les livres comme groupes*

6-98. Combien peut-il y avoir de triangles ayant pour sommets ceux d'un pentagone donné? C_5^3

X. PROBABILITÉS.

150. La probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre de chances favorables à l'événement et le nombre total de chances possibles, pourvu que toutes les chances soient également possibles.

Si je jette un dé régulier, la probabilité d'amener 1 est $\frac{1}{6}$, puisque sur les six chances également possibles, une seule est favorable. Mais si le dé n'est pas régulier, les chances n'étant pas toutes également possibles, on ne peut définir a priori la probabilité.

151. La probabilité 1 correspond à la certitude: comme il est sûr que dans 500 ans tous les habitants du Canada seront morts, la probabilité de cet événement est 1. La probabilité 0, correspond, au contraire, à la certitude que l'événement ne se produira pas.

152. Lorsque deux événements sont indépendants, la probabilité de l'arrivée des deux événements est égale au produit des probabilités de chacun. Quelle est la probabilité d'obtenir 12 avec deux dés? Évidemment c'est $\frac{1}{36}$, car la probabilité d'obtenir le premier 6 est $\frac{1}{6}$, et, ce 6 obtenu, la probabilité d'obtenir le second 6 est encore $\frac{1}{6}$; donc la probabilité d'obtenir les deux est $\frac{1}{36}$. On pourrait raisonner autrement et assimiler les figures des dés aux arrangements avec répétitions: combien peut-on former de groupes d'arrangements avec répétitions de 6 chiffres 2 à 2? (§147) La formule donne 36; or un seul de ces arrangements est favorable.

153. Si un événement suppose la réalisation d'un autre événement, la probabilité de l'arrivée des deux événements égale le produit de la probabilité de l'un d'eux par la probabilité de l'arrivée de l'autre, le premier étant réalisé. C'est le principe des "probabilités composées." Quelle est la probabilité de tirer deux rois d'un jeu de 52 cartes? La probabilité de tirer un premier roi est $\frac{4}{52}$; ce premier roi étant tiré la probabilité d'en tirer un second est $\frac{3}{51}$; la probabilité de

tirer deux rois est donc :
$$\frac{4 \times 3}{52 \times 51} .$$

Une autre manière de raisonner est celle-ci : les deux rois font partie des groupes de combinaisons de 4 rois 2 à 2 : ce sont les groupes favorables. Les groupes possibles sont les groupes divers de combinaisons de 52 cartes 2 à 2. La probabilité de l'événement favorable est donnée par le quotient du premier nombre par le second.

153'. Espérance mathématique. On appelle *espérance mathématique* d'un joueur, le produit de son gain possible par la probabilité qu'il a de le réaliser.

Si A doit recevoir \$120 dans l'hypothèse où il tire 6 aux dés, son espérance mathématique est \$20. L'expression "espérance mathématique" n'a évidemment que le sens qui vient d'être défini; le mot espérance en particulier perd complètement sa signification habituelle.

On dit qu'un jeu est **équitable** lorsque la mise exigée d'un joueur est égale à son espérance mathématique. Dans le cas précédent, le propriétaire du jeu qui demanderait \$20 par coup jouerait lui-même "équitablement".

EXERCICE XLVII

6-99. Une urne contient 20 boules blanches et 2 boules noires. On tire deux boules : quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?

$$\frac{20}{22} \times \frac{19}{21}$$

$$\frac{C_{20}^2}{C_{22}^2}$$

6-100. Si l'on tire deux boules de la même urne (celle de 1), quelle est la probabilité pour que l'une soit blanche, l'autre noire ?

$$\frac{C_{20}^1 \times C_2^1}{C_{22}^2}$$

6-101. Même que précédemment, mais les deux boules doivent être noires.

$$\frac{C_2^2}{C_{22}^2}$$

Remarque. Ces trois problèmes épuisent la série des possibilités : la somme des probabilités doit donc être 1, puisque c'est la certitude.

$$\frac{C_{20}^2 + C_{20}^1 \times C_2^1 + C_2^2}{C_{22}^2} = 1$$

6-102. On doit payer 10 sous pour participer au jeu de hasard suivant. Cinq pièces de monnaie sont agitées et l'on observe le nombre de fois que les pièces présentent face ; si les cinq présentent toutes face, quel prix devrait être promis pour que le jeu fût équitable ?

$$320$$

6-103. Si l'on avait 5 dés au lieu de cinq pièces d'un sou, et que l'on exigeât 30 pour proclamer un gagnant : quelle somme devrait-on promettre, le droit de tirer étant payé 10 sous ?

$$777.50$$

6-104. On tire quatre cartes d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité pour que ce soient quatre cartes rouges ?

$$\frac{26}{52} \times \frac{25}{51} \times \frac{24}{50} \times \frac{23}{49}$$

6-105. quelle est la probabilité pour que ce soient quatre cartes de cœur ?

6-106. ... quelle est la probabilité pour que pas une ne soit de cœur ?

6-107. ... quelle est la probabilité pour que deux seulement soient des rois ? $C_4^2 \times C_{48}^2 / C_{52}^4$

6-108. ... quelle est la probabilité pour que l'une soit un roi, les autres une dame, un valet, un dix ? *Nombre de chances favorable: $4 \times 4 \times 4 \times 4$*

6-109. ... quelle est la probabilité pour que les quatre soient des rois ? $1 / C_{52}^4$

6-110. ... quelle est la probabilité pour que les quatre soient des rois et qu'elles aient été prises dans l'ordre suivant : cœur, carreau, trèfle, pique. $1 / 52^4$

6-111. Quelle est la probabilité de tirer 13 cartes de cœur en prenant 13 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes ? $C_{13}^{13} / C_{52}^{13}$

6-112. Quelle est la probabilité de tirer les 13 cartes de cœur par ordre de valeur ? $1 / A_{52}^{13}$

6-113. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité de ramener quatre fois de suite la même carte si elle est remise avec les autres chaque fois ? $(\frac{1}{52})^4$

154. La probabilité d'un événement étant connue, trouver la probabilité pour que cet événement arrive r fois lorsqu'il y a n essais.

Soit p la probabilité de l'événement, la probabilité que l'événement n'arrivera pas est $q = 1 - p$. Supposons que les événements favorables arrivent dans un ordre donné, il est évident que la probabilité de l'arrivée de l'événement r fois et de la non arrivée $(n - r)$ de l'événement contraire est $p^r \times (q)^{n-r}$. Mais comme l'ordre d'arrivée des événements n'importe pas, ils peuvent se présenter autant de fois qu'il y a de façons de combiner les n rangs r à r , soit C_n^r . La probabilité cherchée est donc : $C_n^r \cdot p^r \cdot q^{n-r}$: c'est le $(r+1)$ ème terme du développement de $(p+r)^n$. (§160)

EXEMPLE. Quelle est la probabilité de tirer au moins deux 6 dans six essais aux dés ?

La probabilité de tirer 2 six est :

$$C_6^2 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^4.$$

La probabilité de tirer 3 six est : $C_6^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^3$; celle de tirer quatre 6 est : $C_6^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^2$.

Ce sont les termes du développement de : $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^6$.

La probabilité de tirer 2 six au moins est donc :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 - C_6^1 \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

puisque c'est la certitude 1, moins la probabilité de ne pas tirer un seul 6 : $\left(\frac{5}{6}\right)^6$; moins la probabilité de n'en tirer qu'un seul : $C_6^1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

EXERCICE XLVIII

6-114. On jette trois dés : quelle est la probabilité pour que pas un ne soit un 6 ? $\left(\frac{5}{6}\right)^3$

6-115. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un seul six lorsque l'on jette trois dés ? $C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2$

6-116. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux six ? $C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)$

6-117. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait trois six ? $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

Remarque. La somme des probabilités 1, 2, 3 et 4 doit être 1, car l'un ou l'autre de ces événements doit se réaliser.

6-118. En tirant pile ou face, quelle est la probabilité pour que trois fois on ait pile ? On tire six fois. $C_6^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$

6-119. On tire six fois pile ou face, quelle est la probabilité pour qu'on obtienne pile trois fois au moins ? $(C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6) \left(\frac{1}{2}\right)^6$

6-120. Trois hommes A, B, C jouent pile ou face. Celui qui gagne est celui qui obtient pile le premier. Quelles sont les chances respectives de A, B et C ?

6-121. A et B jouent aux dés. $\nearrow$ Le premier des deux qui obtient 8 est le gagnant. Quelles sont leurs chances respectives, A jouant le premier ?

6-122. Dans une urne, il y a 6 boules noires, 4 jaunes et 3 rouges. Un jeu de hasard est organisé comme suit : pour avoir le droit de puiser 6 boules, il faut payer \$0.25 et si les trois couleurs sont représentées par les boules, le gagnant reçoit \$5.00. Au bout de 1000 coups, quel sera le bénéfice probable du propriétaire du jeu ?

6-123. Un professeur distribue à ses élèves leurs propres feuilles de compositions pour la correction, mais il les remet au hasard : quelle est la probabilité pour que l'un d'eux reçoive sa propre copie ?

chance de recevoir $\frac{1}{n}$

chance de ne pas recevoir $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

on a donc $C_n^1 \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

façon de combiner les jeux $C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13}$ Prob.

114

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

$$\frac{1}{C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}}$$

6-124. On vient de distribuer 52 cartes à quatre joueurs. Combien faudrait-il jouer de parties pour que la probabilité soit 1 que les quatre joueurs aient de nouveau les mêmes jeux ?

6-125. Six pièces d'argent sont jetées au hasard : quelle est la probabilité pour obtenir 3 piles, 3 faces ? $C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow 4^{\text{ème}} \text{ terme de } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6$

6-126. Sur une tablette, il y a trois livres d'algèbre, 5 de géométrie, et 6 de géographie placés au hasard. Quelle est la probabilité pour que les livres se rapportant au même sujet soient précisément ensemble ?

Chance favorable : $P_3 P_5 P_6$
Prob. P_{14}

XI. PROBLÈME DES DÉS

155. Quelle est la probabilité d'amener 12 avec trois dés ?

Soit x le nombre marqué par le premier dé, y celui du second, z celui du troisième.

On doit avoir : $x + y + z = 12$

Donnons des valeurs à x et résolvons par rapport à y et z :

Avec $x = 1$,	y peut être : 5, 6	
	z peut être : 6, 5	2 solutions.
$x = 2$,	y peut être : 4, 5, 6	
	z peut être : 6, 5, 4	3 solutions.
$x = 3$,	y peut être : 3, 4, 5, 6	
	z peut être : 6, 5, 4, 3	4 solutions.
$x = 4$,	y peut être : 2, 3, 4, 5, 6	
	z peut être : 6, 5, 4, 3, 2	5 solutions.
$x = 5$,	y peut être : 1, 2, 3, 4, 5, 6	
	z peut être : 6, 5, 4, 3, 2, 1	6 solutions.
$x = 6$,	y peut être : 1, 2, 3, 4, 5	
	z peut être : 5, 4, 3, 2, 1	5 solutions.

Il y a en tout 25 cas favorables.

Or, le nombre de cas possibles est 216 ou 6^3 , car à chacune des faces du premier dé en correspondent 6 du second, soient 36 aspects différents pour les deux ; à chacun de ces aspects il en correspond 6 pour le troisième, donc en tout 216. La probabilité d'amener 12 est donc : $\frac{25}{216}$.

EXERCICE XLIX

6-127. Quelle est la probabilité d'amener 13 avec trois dés ?

6-128. Quelle est la probabilité d'amener 17 avec trois dés ?

156. Solution générale. *Quelle est la probabilité d'amener n avec un nombre quelconque de dés?*

Raisonnons sur trois dés. Supposons les faces du premier dé représentées par : $(t^1, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6)$. Si on élève cette somme au cube, on obtiendra comme coefficient d'une des puissances de t le nombre de fois qu'elle se présente dans un tirage de 6^3 ou 216 coups. Nous allons développer cette formule pour le cas de trois dés.

$$\begin{aligned}(t^1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^3 = & t^{18} + 3t^{17} + 6t^{16} + 10t^{15} + 15t^{14} \\ & + 21t^{13} + 25t^{12} + 27t^{11} + 27t^{10} + 25t^9 + 21t^8 + 15t^7 + 10t^6 \\ & + 6t^5 + 3t^4 + t^3.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que la probabilité de tirer 12 est bien $\frac{25}{216}$ et qu'il y a la même probabilité d'amener 9 que d'amener 12. Dans un tirage réel, on constate que 11, par exemple, est amené plus souvent que 9 ou 12.

On n'aurait qu'à développer le même polynôme à la quatrième puissance et prendre comme dénominateur 1296 pour calculer les probabilités correspondant à quatre dés.

EXERCICE L

6-129. Quel sera le profit du propriétaire d'un jeu de hasard qui fait tirer aux dés : le joueur paie 25 sous du coup et reçoit \$1.00 s'il amène 16, \$2.00 s'il amène 17 et \$10 s'il amène 18. On supposera qu'il fait tirer ainsi 2160 coups.

6-130. Quelle est l'espérance mathématique d'un joueur qui, jouant avec trois dés, obtient \$5.00 pour 18, \$1 pour 17 et \$0.25 pour 16 ? Quelle devrait être sa mise si le jeu était "équitable" ?

CHAPITRE VII

BINÔME de NEWTON

Sommaire. I. Formule du binôme. II. Terme général. III. Loi de formation des termes. IV. Coefficient maximum. V. Somme des coefficients du binôme. VI. Développement de $(1+z)^n$.

I. FORMULE DU BINÔME

157. Produit de n facteurs binômes.

Ordonnons le produit :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \dots (x+1)$$

suivant les puissances décroissantes de x .

Il y a un terme en x^n , provenant de la multiplication des premiers termes des différents binômes.

Les termes en x^{n-1} sont obtenus en prenant x dans $(n-1)$ binômes et le second terme du binôme restant. Les termes de cette espèce ont pour somme :

$x^{n-1}(a+b+c+d \dots + 1)$; leur nombre est celui des combinaisons de n lettres 1 à 1 : C_n^1 . On a donc :

$x^{n-1}S_1$, S_1 désignant la somme $(a+b+c+d \dots + 1)$.

Les termes en x^{n-2} s'obtiennent en prenant x dans $(n-2)$ facteurs et les seconds termes des autres binômes :

$$x^{n-2}(ab+ac+ \dots bc+cd+ \dots kl) \text{ ou } x^{n-2}S_2.$$

Le nombre de termes de la parenthèse est donné par C_n^2 et $S_2 = (ab+ac+bc \dots kl)$.

En général, nous obtenons des termes en x^{n-k} en prenant x dans $(n-k)$ facteurs, et les seconds termes des autres facteurs: $x^{n-k}S_k$, où S_k = la somme des produits des seconds termes pris k à k .

Enfin, le dernier terme du développement est $abc \dots 1$.

On aura ainsi : $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) =$

$$x^4 + x^3(a+b+c+d) + x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ + x(abc+abd+acd+bcd) + abcd.$$

EXERCICE LI

7-1. Développer suivant le modèle précédent :

$$(x+m)(x+n)(x+p)(x+r)(x+s)$$

7-2. Développer : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

7-3. Développer : $(x+1)(x+4)(x+9)(x+16)$.

7-4. Développer : $(x+4)(x+5)(x+9)(x+6)$.

7-5. Développer : $(x-3)(x-4)(x+7)(x+1)$.

7-6. Développer : $(x-25)(x+10)(x+15)$.

7-7. Développer : $(x+\frac{2}{3})(x+\frac{3}{2})(x-2)$.

158. Formule du binôme.

$$\sum_{m=0}^n C_n^m a^m x^{n-m}$$

Supposons $a = b = c = d = \dots 1$, dans la formule précédente. Le premier membre devient : $(x+a)^n$. Chacun des termes de S_k devient a^k et le nombre de ces termes est C_n^k .

Le premier terme x^n ne change évidemment pas.

Le second terme $x^{n-1} S_1$ devient $x^{n-1} \cdot a \cdot C_n^1$, puisque dans S_1 a est répété un nombre de fois marqué par C_n^1 .

Le terme $x^{n-2} S_2$ devient : $x^{n-2} \cdot a^2 \cdot C_n^2$, puisque tous les termes de S_2 sont des a^2 et qu'il y en a C_n^2 .

De même le terme en x^{n-3} devient $x^{n-3} a^3 C_n^3$. Enfin le terme en x^{n-k} devient $x^{n-k} a^k C_n^k$.

Nous obtenons donc le développement suivant :

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + C_n^4 x^{n-4} a^4 \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^{n-1} x^1 a^{n-1} + a^n$$

159. Autre démonstration de la formule du binôme.

Supposons la loi suivante vérifiée jusqu'à la valeur n :

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 \dots \quad (158)$$

Elle est vraie d'abord pour $n = 2$ puisque :

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + C_2^1 x^{2-1} a + a^2.$$

Elle est vraie pour $n = 3$, puisque :

$$\begin{aligned} (x+a)^3 &= x^3 + C_3^1 x^{3-1} a + C_3^2 x^{3-2} a^2 + C_3^3 x^{3-3} a^3 \\ &= x^3 + 3x^2 a + 3x a^2 + a^3, \text{ car } x^{3-3} = x^0 = 1 \end{aligned}$$

De même elle est vraie pour $n = 4$.

$$A_n = A_{n-1} \frac{n-a+1}{a}$$

Si nous la supposons vraie pour n , montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

Nous avons : $(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a)$. Si nous acceptons le développement précédent de $(x+a)^n$, il vient pour $(x+a)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 (x+a)^{n+1} &= x^{n+1} \\
 &+ C_n^1 x^n a &+ x^n a \\
 &+ C_n^2 x^{n-1} a^2 &+ C_n^1 x^{n-1} a^2 \\
 &+ C_n^3 x^{n-2} a^3 &+ C_n^2 x^{n-2} a^3 \\
 &+ C_n^4 x^{n-3} a^4 &+ C_n^3 x^{n-3} a^4 \\
 &\dots &\dots \\
 &+ C_n^k x^{n-k+1} a^k &+ C_n^{k-1} x^{n-k+1} a^k \\
 &\dots &\dots \\
 &&+ C_n^n a^{n+1}
 \end{aligned}$$

la première colonne du développement étant obtenue en multipliant par x , la seconde en multipliant par a .

Or, on a démontré (§137) que $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Donc, $C_n^1 + C_n^0 = C_{n+1}^1$; $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$, etc. En faisant la somme des termes semblables dans l'expression précédente et en appliquant les formules simplifiées, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (x+a)^{n+1} &= x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 \dots \\
 &+ C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k \dots
 \end{aligned}$$

Si la loi précédente est vraie jusqu'à n , elle est donc encore vraie pour $(n+1)$; or, elle est vérifiée pour $n=2$, $n=3$; donc, elle est vraie pour $n=4, 5, 6$; donc, elle est générale et s'applique à tout nombre entier positif.

II. TERME GÉNÉRAL

160. Soit le développement du binôme :

$$\begin{aligned}
 (x+a)^n &= x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 \dots \\
 &+ C_n^k x^{n-k} a^k \dots
 \end{aligned}$$

$$\text{Posons } T_{0+1} = x^n; \quad T_{1+1} = C_n^1 x^{n-1} a \dots$$

la dernière valeur de k qui nous donne

$$\frac{n-k}{k+1} \geq 1 \text{ est la valeur de } k \text{ pour le terme maximum}$$

BINÔME DE NEWTON

On prend la valeur de k entière immédiatement inférieure à la fraction trouvée.

Le terme T_{k+1} sera donné par la formule :

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k,$$

c'est l'expression du terme général, ou de rang $(k+1)$.

Nous pouvons développer explicitement ce terme :

$$T_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}{1.2.3.4 \dots k} x^{n-k} a^k.$$

III. LOI DE FORMATION DES TERMES

161. Appliquant la formule précédente, nous obtenons pour le terme de rang $(k+2)$ ou $[(k+1)+1]$.

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} x^{n-k-1} a^{k+1}.$$

$$\text{Or, } C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)(n-k)}{1.2.3.4 \dots k(k+1)} \\ = C_n^k \times \frac{n-k}{k+1}.$$

Nous tirons facilement de ce développement la formule

suivante : $T_{k+2} = T_{k+1} \times \frac{n-k}{k+1} \times \frac{a}{x}.$

le terme $k+2$ est maximum

Dans le développement de $(x+a)^n$, pour passer d'un terme au terme suivant, il faut augmenter d'une unité l'exposant de a , diminuer d'une unité celui de x ; le nouveau coefficient égale le précédent multiplié par l'exposant de x dans le terme précédent, le produit étant divisé par le nombre qui marque le rang du terme précédent.

Application. Soit à développer : $(x+a)^{10}$. En appliquant la règle précédente, nous trouvons facilement :

$$x^{10} + \frac{1 \times 10}{1} x^9 a + \frac{10 \times 9}{2} x^8 a^2 + \frac{45 \times 8}{3} x^7 a^3 + \frac{120 \times 7}{4} x^6 a^4 \dots, \\ \text{ou, } x^{10} + 10x^9 a + 45x^8 a^2 \dots$$

162. Remarque. Le développement de $(x-a)^n$ est celui de $[x + (-a)]^n$; il suffit donc de remplacer $+a$ par $-a$ dans le développement de $(x+a)^n$.

EXERCICE LII

- 7-8. Développer $(x+a)^8$.
 7-9. Développer complètement : $(a+b)^{11}$.
 7-10. Quel est le développement de $(x+c)^9$?
 7-11. Développer $(x+2)^8$.
 7-12. Développer : $(x + 1/x)^8$.
 7-13. Développer : $(3a + 2b)^5$.
 7-14. Développer : $(ax - b/x)^7$.
 7-15. Développer : $(a + \sqrt{b})^8 + (a - \sqrt{b})^8$?
 7-16. Quelle est l'expression du terme général dans $(3-5x)^{2n}$?
 7-17. Que devient le terme de rang $k+1$ dans $(a-3bx)^n$?
 7-18. Calculer le 8e terme du développement de $(x+k)^{12}$.
 7-19. Quelle est l'expression du douzième terme dans : $(x+2)^{15}$?
 7-20. Trouver le 6e terme de : $(m^2+n^2)^{11}$.
 7-21. Quel est le douzième terme du développement de : $(3-z)^{15}$?
 7-22. Quelle est la valeur du 21e terme de : $(2-y)^{22}$?
 7-23. Quel est le quarantième terme de : $(x-y)^{42}$?
 7-24. Trouver le cinquième terme de : $(x+2a^3)^{17}$.
 7-25. Quelle est l'expression du développement du 10e terme de $(1-2a)^{12}$?
 7-26. Calculer : $(a + \sqrt{a^2-1})^7 + (a - \sqrt{a^2-1})^7$.
 7-27. Trouver le terme en y^4 dans $(3-y)^{10} + (2+y)^7$.
 7-28. Expression du terme indépendant de y dans :

$$\frac{(y+7)^6 + (3-y)^5}{y^2}$$

IV. ÉTUDE DES COEFFICIENTS DU BINÔME

163. Théorème. *Les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux dans le développement de $(x+a)^n$.*

Le terme qui en a k avant lui est T_{k+1} dont le coefficient est C_n^k . Le nombre de termes du développement de $(x+a)^n$ est $n+1$; le terme qui a k termes après lui est donc, T_{n+1-k} ou T_{n-k+1} , et son coefficient est C_n^{n-k} .

Or, $C_n^k = C_n^{n-k}$ (§134). Donc ..

164. Problème. Trouver le plus grand coefficient du développement de $(x+a)^n$.

Le coefficient dans T_{k+1} étant C_n^k , le plus grand coefficient correspond à la plus grande valeur du symbole C_n^k . Ce maximum a lieu pour $k = \frac{n}{2}$, si n est pair, ou pour l'entier qui précède ou qui suit $\frac{n}{2}$, si n est impair (§140).

165. Étude des termes du développement du binôme.

Dans plusieurs problèmes, il faut déterminer les termes jouissant d'une propriété particulière ; on doit procéder de la façon suivante : écrire l'expression du terme général, puis calculer la valeur qu'il faut attribuer à k pour que la condition soit vérifiée.

Soit à trouver le coefficient de x^8 dans le développement de $(x^2 + 1/x)^7$. Le terme cherché est celui de rang $(k+1)$, ou terme T_{k+1} , k devant être déterminé.

Or, nous savons que $T_{k+1} = C_7^k (x^2)^{7-k} \times (\frac{1}{x})^k$.

Si nous développons par rapport à x , nous trouvons : $x^{14-2k-k}$.

Pour que T_{k+1} soit le terme en x^8 , il faut que

$$14 - 3k = 8, \text{ ou } k = 2.$$

Dès lors le terme T_{k+1} devient : T_{2+1} ou $C_7^2 (x^2)^{7-2} (\frac{1}{x})^2$,
ou $21x^8$.

EXERCICE LIII

7-29. Calculer le coefficient de x^7 dans $(2x+x^2)^5$. $\nabla \theta$

7-30. Quel est le coefficient du terme indépendant de x dans $(x^2 + \frac{1}{x})^{10}$?

7-31. Calculer le coefficient du terme à coefficient maximum dans $(1+x)^{14}$.

7-32. Calculer le 5e terme du développement : $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3}{2a}\right)^9$.

7-33. Quel est le coefficient de x^{12} dans $(x^2 + 2x)^{10}$?

7-34. Coefficient de x^{-3} dans $(x^2 - \frac{a}{2x})^{12}$. $\therefore - \frac{5}{128} a^5$

7-35. Trouver le coefficient de x^{-20} dans $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{x^3}\right)^{15}$.

7-36. Quels sont les coefficients de x^{32} et de x^{-17} dans :
 $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{15}$?

7-37. Quel est le terme indépendant de x dans : $(\frac{3x^4}{2} - \frac{1}{3x^2})^9$?

7-38. Quel est le terme le plus grand du développement de $(3+2b)^9$, lorsque $b = 2$? $T_6 = C_9^5 (3)^{4-5} (4)^5 = 10,450,744$

7-39. Lorsque $a = \frac{1}{3}$, quel est le terme le plus grand du développement de $(1+4a)^8$?

7-40. Dans $(3x-2)^9$, on demande le terme le plus grand terme en valeur absolue lorsque $x = 1$.

7-41. Lorsque $m=11$ et $n=4$, quel est le plus grand terme en valeur absolue du développement de $(m-n)^{30}$?

V. ÉTUDE DES COEFFICIENTS DU BINÔME

166. **Somme des coefficients.** Si l'on fait $x = a = 1$, dans le développement de $(x+a)^n$, on trouve ;
 $(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 \dots + C_n^n = 2^n$.

Le calcul précédent montre encore que *le nombre total des combinaisons de n objets pris de toutes les façons possibles est $2^n - 1$.*

167. **Coefficients de rangs pair et impair.** Si, dans la formule du développement de $(x+a)^n$, on fait $x = 1$ et $a = -1$, on obtient ;

$$0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^6 - C_n^7 \dots$$

Donc, *la somme des coefficients de rangs impairs, dans le développement de $(x+a)^n$, égale la somme des coefficients de rangs pairs.* *et est égale à 2^{n-1}*

168. **Somme des carrés des coefficients du binôme.** Plusieurs des propriétés des symboles de combinaisons se démontrent par les propriétés du binôme.

Soit à démontrer que la somme des carrés des expressions C_n^k , lorsque k prend toutes les valeurs depuis $k=0$ jusqu'à $k = n$, est égale à $\frac{(2n)!}{n!n!}$

$$\text{On a ; } (x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 \dots + C_n^n a^n$$

Pour trouver la somme des coefficients d'un développement, on remplace x par 1. Exemple. Somme des coefficients de $(10x - 2y)^n$ = 8^n

BINÔME DE NEWTON

123

$$\text{et de même ; } (a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x^1 + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 \dots + C_n^n x^n.$$

En multipliant, on aura le développement de $(x+a)^{2n}$. Or, le coefficient de x^n est celui du terme T_{n+1} dans $(x+a)^{2n}$, soit C_{2n}^n .

Le même coefficient s'obtient en trouvant x^n dans le produit précédent. Ce coefficient est précisément la somme des carrés des C_n^k , comme on le voit immédiatement en effectuant la multiplication.

On a donc la relation ;

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n! \times n!} \quad (133).$$

EXERCICE LIV

7-42. Un enfant possède les pièces de monnaie suivantes : 1 sou, 5, 10, 25, 50, 100, 200, 500 sous. Sur combien d'objets de prix différents peut se porter son choix, sachant qu'il doit payer sans avoir à demander la monnaie ? $2^{20} - 1$

7-43. De combien de façons peut-on grouper 20 personnes en les mettant au moins 10 ensemble ? $2^{10} - \frac{C_{20}^{10}}{2}$

7-44. Combien de groupes différents impairs peuvent former 20 personnes ? $2^{19} - 1$

7-45. Calculer la somme des coefficients de x et y , dans le développement de $(2x+3y)^n$. = 5^n

7-46. Somme des valeurs absolue des coefficients de $(5a-4b)^n$. = 9^n

7-47. Combien de groupes différents peuvent former entre elles douze personnes ? $2^{12} - 1$

EXERCICE LV

Pour la simplification de l'écriture, le symbole C_n^k est écrit à la place de C_n^k de $(x+a)^n$.

7-48. Démontrer que : $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 \dots + rc_r \dots + nc_n = n2^{n-1}$.

7-49. Vérifier que : $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{4}c_3 \dots + \frac{(-1)^n}{(n+1)}c_n = \frac{1}{n+1}$.

7-50. Démontrer que : $c_0 - 2c_1 + 3c_2 - 4c_3 \dots + (-1)^k (k+1)c_k \dots + (-1)^n (n+1)c_n = 0$

7-51. Vérifier que : $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 \dots + (n-1)c_n = 1 + (n-2)2^{n-1}$.

7-52. Démontrer que : $c_0 + 3c_1 + 5c_2 + 7c_3 \dots + (2n+1)c_n = (n+2)2^n$.

7-53. Vérifier que : $3c_1 + 7c_2 + 11c_3 + \dots + (4n-1)c_n = 1 + (2n-1)2^n$.

7-54. Démontrer que : $C_{n+2}^{r+1} = C_n^{r+1} + 2C_n^r + C_n^{r-1}$. c.f. p. 101 Chap 137.

7-55. Montrer que : $C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + C_{n-3}^r + C_{n-4}^r + C_{n-5}^r \dots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$.

VI. DÉVELOPPEMENT DE $(1+z)^n$

169. Dans le développement de $(x+a)^n$, si $x=1$ et $a=z$, on obtient :

$$(1+z)^n = 1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 z^3 + C_n^4 z^4 + C_n^5 z^5 \dots$$

Cette formule a été démontrée dans le cas où n est un entier positif. On peut développer chacun des symboles et écrire la formule sous la forme suivante :

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1} z + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} z^4 \dots$$

Les deux formules de (§169) sont identiques pour n entier positif, mais si n prend d'autres valeurs, la seconde formule est calculable, tandis que les symboles de $(1+z)^n$ n'ont aucun sens immédiat. L'analyse mathématique démontre que le développement est valable pour toutes les valeurs de n *pourvu que z , en valeur absolue, soit inférieur à l'unité*. (Voir aussi §194).

170. Calcul des racines par le développement du binôme.

Le développement précédent permet de trouver *une racine quelconque d'un nombre donné*. Pour cela, chercher la partie entière de cette racine et la mettre en facteur, puis développer d'après la formule précédente.

Soit N le nombre dont on veut extraire la racine $m^{\text{ième}}$. La partie entière de la racine étant a , écrivons :

$$N = a^m \left(1 + \frac{x}{a^m}\right). \text{ La racine cherchée sera donc}$$

le produit par a de la racine $m^{\text{ième}}$ de $(1+z)$, où $z = x/a^m$.

Le nombre z est donc inférieur à l'unité et le développement est possible (§169).

Soit à trouver la racine 6ème de 75.

$$\text{Comme } 75 = 64 + 11,$$

la racine 6ème de 75 sera : $2 \left(1 + \frac{11}{64} \right)^{\frac{1}{6}}$

et $\left(1 + \frac{11}{64} \right)^{\frac{1}{6}}$ sera développé suivant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{6} \times \frac{11}{64} + \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} - 1 \right)}{1.2} \times \frac{11^2}{64^2} \\ & + \frac{\left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} - 1 \right) \left(\frac{1}{6} - 2 \right)}{1.2.3} \times \frac{11^3}{64^3} \\ & + \frac{\left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} - 1 \right) \left(\frac{1}{6} - 2 \right) \left(\frac{1}{6} - 3 \right)}{1.2.3.4} \times \frac{11^4}{64^4} + \dots \end{aligned}$$

Il est parfois plus rapide de prendre la puissance entière immédiatement supérieure plutôt que celle qui est immédiatement inférieure. Dans le cas précédent, ce serait 3^6 ou 729, qui évidemment entraînerait des calculs plus longs. Mais s'il s'agissait de trouver la racine 6ème de 702, par exemple, il serait préférable d'écrire : $702 = 729 - 27$,

et la racine 6ème de $702 = 3 \left(1 - \frac{27}{729} \right)^{\frac{1}{6}}$, ou $3 \left(1 - \frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{6}}$,

le binôme étant développé comme précédemment.

171. Puissance d'un polynôme.

Soit à développer : $(a+b+c \dots + 1)^m$, lorsque m est un entier positif.

TERME GÉNÉRAL. L'un quelconque des termes du produit définitif comprendra comme facteurs une des lettres de chacun des polynômes identiques dont on cherche la puissance m ème. On trouvera donc : a , α fois, b , β fois, c , γ fois ... et on devra avoir : $\alpha + \beta + \gamma \dots = m$

On peut avoir par exemple ; $a^{\alpha} a^1 a^1 \dots b^1 a^1 \dots 1b$. On constate donc que l'ensemble des termes du produit constitue l'une des permutations de m lettres avec répétitions. (§145). Le coefficient d'un tel terme est donc ;

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$$

et le terme étudié est ;

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots$$

Cas particulier, le BINÔME.

S'il s'agit du développement du binôme $(x+a)^m$ on devrait donc trouver la série des termes donnés par ;

$$\frac{m!}{\alpha! \beta!} x^{\alpha} a^{\beta}$$

Si l'on pose ; $\alpha + \beta = m$, alors ; $\alpha = m - \beta$ et si l'on remplace β par k , on trouve ainsi pour le terme général du développement du binôme ;

$$\frac{m!}{(m-k)! k!} x^{m-k} a^k$$

Se rappelant que le coefficient ; $\frac{m!}{(m-k)! k!} = C_m^k$

On trouve pour le terme général du développement du binôme ;

$$C_m^k x^{m-k} a^k$$

or c'est précisément celui que nous avons trouvé par un autre raisonnement (§160).

Développement de $(a + b + c + d)^3$.

Le coefficient de $a^2 b$ sera ; $\frac{3!}{1! 2!} = 3$

Le coefficient de $a^2 b$ sera ; $\frac{3!}{2! 1!} = 3$

Le coefficient de a^3 sera ; $\frac{3!}{3! 0!} = 1$ pourvu que l'on

écrive ; $0! = 1$.

Nombre de termes dans le développement de :

$$(a+b+c+d \dots +1)^m.$$

Si on ne tient pas compte des coefficients, on voit que le nombre de termes est égal au nombre de combinaisons avec répétitions de n lettres prises m à m : K_n^m .

Or on a démontré que

$$K_n^m = C_{m+n-1}^m \quad (§148).$$

Dans le développement de $(a+b+c+d)^3$, $n = 4$ et $m = 3$. Le nombre de termes sera donc :

$$C_{3+4-1}^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$$

Puissance m ème d'un polynôme :

Soit à développer : $(a + bx + cx^2 + dx^3 \dots)^m$.

Le terme général du développement est :

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} a^\alpha (bx)^\beta (cx^2)^\gamma \dots$$

toujours avec la condition : $\alpha + \beta + \gamma \dots = m$.

EXERCICE. Chercher le terme en x^6 dans le développement de $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^4$.

Le terme général est :

$$\frac{4!}{p! q! r! s!} (1)^p (-2x)^q (3x^2)^r (-4x^3)^s$$

Et on doit avoir les deux équations :

$$p + q + r + s = 4$$

$$q + 2r + 3s = 6$$

c'est un système d'équations qu'il faut résoudre.

Pour $s = 2$: $q = r = 0, p = 2$

$s = 1$: il faut : $q + 2r = 3$; $p + q + r = 3$

$$r = 1, q = 1, p = 1$$

$$r = 0, q = 3, p = 0$$

$s = 0$: $q + 2r = 6$; $p + q + r = 4$

$$r = 3, q = 0, p = 1$$

$$r = 2, q = 2, p = 0.$$

Les coefficients sont donnés par la formule schématique :

$$\frac{4!}{p! q! r! s!} (-1)^{q+s} 2^q 3^r 4^s$$

On peut dresser le tableau :

p	q	r	s	coefficient de x^6
2	0	0	2	96
1	1	1	1	576
0	3	0	1	128
1	0	3	0	108
0	2	2	0	216

Dont la somme est : 1124

Le coefficient de x^6 est donc : 1124.

posse Étude du cas où m n'est pas un entier positif.

De même que l'on peut développer le binôme lorsque m n'est pas un entier positif, de même peut-on utiliser les formules précédentes dans le cas où m serait un nombre fractionnaire ou bien un nombre négatif.

Soit à calculer x^6 dans le développement de
 $(1 + x^2 - x^3)^{-2}$

Le terme général du développement est :

$$\frac{(-2)!}{p! q! r!} (1)^p (x^2)^q (-x^3)^r$$

avec la condition que le développement $(-2)!$ comprendrait les $(p+q+r)$ facteurs : $(-2) (-3) (-4) \dots$

Il faudrait ici :

$$2q + 3r = 6$$

$$q = 0, \quad r = 2$$

$$q = 3, \quad r = 0$$

EXERCICE LVI

7-56. Développer : $(240)^{1/5} = (243-3)^{1/5} = 3 \left(1 - \frac{1}{81}\right)^{1/5}$.

7-57. Développer : $(31)^{1/3}$.

7-58. Calculer la racine cubique de 100 (avec quatre décimales).

7-59. Quelle est la racine cubique de 110 (avec quatre décimales)?

7-60. Calculer la racine cinquième de 297. (quatre décimales).

7-61. Racine 6ième de 60.

7-62. Racine cinquième de 4.

7-63. Quelle est la racine cinquième de 3275?

7-64. Calculer la racine 7e de 125.

7-65. Développer $2^{1/2}$, suivant la formule du binôme.

7-66. Montrer que : $7^{1/3} = 2 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 2^4} - \frac{5}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2^7} - \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 2^{10}} - \dots$

7-67. Développer : $(a-b)^{1/4}$.

7-68. Développer : $(a+x)^{2/3}$.

7-69. Développer : $(1-x)^{2/5}$.

7-70. Développer : $(1+x)^{-1/5}$.

7-71. Développer : $(1-x)^{-2}$.

7-72. Développer : $(1-a)^{-3}$.

7-73. Calculer la racine cubique de 9.

7-74. Racine cubique de 72. $\rightarrow 4 (1 + 1/6)^{1/3}$

7-75. Racine cubique de 87.

7-76. Calculer les coefficients de x^3 et de x^5 dans $(1+2x+3x^2)^{-2}$.

7-77. Coefficient de x^4 dans $(1-x+x^2)^3$. $6x$

7-78. Les coefficients de trois termes successifs du développement de $(1+z)^n$ sont 3003, 5005, 6435; quels sont ces termes? $n=15$ et $r=6$

7-79. Une somme d'argent est empruntée à 6%, à intérêts composés, pour 20 ans, mais souscrite à 96 seulement. Quel est le taux réel de l'emprunt?

Nous avons l'équation suivante : $96 (1+x)^{20} = 100 (1.06)^{20}$.
La valeur de x sera donnée par la formule du binôme, en calculant la racine vingtième de $1 + \frac{1}{24}$ et en multipliant par 1.06

ou $(1+x) = 1.06 \left(1 + \frac{1}{24}\right)^{1/20}$.

7-80. Quelles sont les conditions d'emprunt les plus avantageuses : \$1000000, à intérêts composés à 6%, 10 ans, souscrit à 95, ou \$1000000, à intérêts composés, à $6\frac{1}{4}$ %, souscrit au pair ?

CHAPITRE VIII

S É R I E S

Sommaire. I. Définitions. II. Conditions générales de convergence ou de divergence. III. Règles de d'Alembert et de Cauchy. IV. Séries alternées. V. Série harmonique. VI. Série μ . VII. Série de Newton.

I. DÉFINITIONS

On appelle *série* une suite illimitée de termes se succédant suivant une loi déterminée. Les progressions géométriques et les progressions arithmétiques, prolongées indéfiniment, sont des séries.

172. Les termes d'une série peuvent être représentés symboliquement par la notation suivante : $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots u_n$.

Le symbole u_k désignant le terme de rang k .

Déterminer le terme général d'une série consiste à exprimer un terme en fonction du nombre qui marque son rang. Dans la série : 1, 3, 5, 7, ... le terme général est $u_n = 2n - 1$. De même dans la série : 2, 4, 8, 16, 32 ... le terme général est $u_n = 2^n$.

N.B. Comme une série se prolonge indéfiniment, on peut considérer comme premier terme, un terme de rang quelconque.

EXERCICE LVII

Trouver le terme général des séries suivantes : on peut regarder comme premier terme de la série un terme quelconque.

8-1. 2, 4, 6, 8, 10 ... $2n$

8-2. .2, .3, .4, .5, ... $0.1n + 0.1$

8-3. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots$ $\frac{1}{n(n+1)}$

8-4. $\frac{1}{1.3^2} + \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.5^2} + \frac{1}{4.6^2} + \dots$ $\frac{1}{n(n+2)^2}$

8-5. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots$ $\frac{x^n}{n+1}$

$$8-6. \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

$$8-7. x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots$$

$$8-8. x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$8-9. 100x + \frac{(100x)^2}{2!} + \frac{(100x)^3}{3!} + \frac{(100x)^4}{4!} \dots$$

$$8-10. \frac{x}{3 \cdot 4^2} + \frac{x^2}{4 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{5 \cdot 6^2} + \frac{x^4}{6 \cdot 7^2} \dots$$

$$8-11. \frac{a}{xy} + \frac{a^2}{(x+1)(y+1)} + \frac{a^3}{(x+2)(y+2)} + \frac{a^4}{(x+3)(y+3)} \dots$$

Séries convergentes — Séries divergentes.

173. Une série est convergente lorsque la somme des n premiers termes tend vers une limite finie et déterminée quand n augmente indéfiniment. Cette limite est la **somme** de la série.

Une progression géométrique décroissante est une série convergente. Soit en effet, la progression géométrique :

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} \dots$$

la somme à l'infini de cette série est :

$$a \div (1-q) ; 1 \div (1-2/3), \text{ ou } 3.$$

Cette somme est donc bien déterminée : c'est une série convergente.

174. Une série est divergente lorsque la somme des n premiers termes augmente indéfiniment avec n , ou ne tend vers aucune limite.

La suite de termes $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$ ne constitue pas une série convergente, car, la somme des termes à l'infini n'est pas déterminée. Cette somme est 0, si le nombre de terme est pair ; 1, si le nombre de terme est impair.

La série $1 + 3 + 9 + 27 + 81 \dots$ augmente indéfiniment quand le nombre des termes tend vers l'infini : c'est une série divergente.

Remarque. Les séries divergentes ont parfois des propriétés paradoxales. Appelons S la somme d'une telle série, bien que cela n'ait pas de sens, étant donné que cette somme n'existe pas.

Ainsi, posons :

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$ que nous pouvons écrire

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots)$, ou

$S = 1 - S$; $2S = 1$, $S = \frac{1}{2}$.

Nous aboutissons aux conclusions suivantes : si le nombre de termes est pair, $S = 0$; s'il est impair, $S = 1$; s'il est simplement infini: $S = \frac{1}{2}$.

II. CONDITIONS GÉNÉRALES DE CONVERGENCE OU DE DIVERGENCE

175. Théorème. Une condition **nécessaire** mais **non suffisante** pour qu'une série soit convergente est que le terme à l'infini tende vers 0.

Désignons par S_n la somme des n premiers termes. Puisque S_n tend vers une limite fixe S lorsque n augmente indéfiniment, on peut choisir n assez grand pour que S_n diffère de la limite S d'une quantité plus petite que tout nombre donné; il est évident qu'il en sera encore ainsi de S_{n+1} .

$$\text{Donc :} \quad S_n - S < \alpha.$$

$$S_{n+1} - S < \alpha.$$

α étant plus petit que tout nombre donné dès que n est suffisamment grand. Or $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Donc, $u_{n+1} < 2\alpha$; c'est-à-dire que u_{n+1} tend vers 0 en même temps que n tend vers l'infini.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme on le verra bientôt par l'étude de la série harmonique.

176. Remarque. Pour rendre intuitive la dernière déduction $u_{n+1} < 2\alpha$, supposons que S_{n+1} , S_n et S désignent des sommes d'argent. On affirme que S_{n+1} diffère de S de moins d'un sou et que S_n diffère de S de moins d'un sou, en plus ou en moins; S_{n+1} diffère donc de S_n de moins de 2 sous.

EXERCICE LVIII

Examiner si, dans les séries suivantes, la condition nécessaire est réalisée. Il est possible de conclure lorsque la condition nécessaire n'est pas réalisée : si le terme à l'infini ne tend pas vers 0, la série est

divergente. Si le terme à l'infini tend vers 0, il y a encore doute, la série peut-être convergente.

$$8-12. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \dots \text{divergente}$$

$$8-13. \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} \dots \text{divergente}$$

$$8-14. \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \dots \text{divergente}$$

$$8-15. \quad \sec x + \sec 2x + \sec 3x + \sec 4x \dots \text{divergente}$$

$$8-16. \quad \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{4^2}{5^2} \dots \text{divergente}$$

$$8-17. \quad \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{11} + \frac{4^2}{18} \dots \frac{n^2}{n^2+2} \rightarrow 1 \text{ divergente}$$

$$8-18. \quad \frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \frac{4}{401} \dots \frac{n}{100+n+1} \rightarrow \frac{1}{100} \text{ divergente}$$

$$8-19. \quad \frac{1}{101} + \frac{2}{102} + \frac{3}{103} + \frac{4}{104} \dots \frac{n}{100+n} \rightarrow 1 \text{ divergente}$$

$$8-20. \quad \frac{1}{1001} + \frac{4}{1004} + \frac{9}{1009} + \frac{16}{1016} \dots \frac{n^2}{1000+n^2} \rightarrow 1 \text{ divergente}$$

$$8-21. \quad \frac{1}{27} + \frac{2}{29} + \frac{3}{31} + \frac{4}{33} \dots \frac{n}{25+2n} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ divergente}$$

$$8-22. \quad \frac{1}{26} + \frac{2}{29} + \frac{3}{34} + \frac{4}{41} \dots \frac{n}{25+n^2} \rightarrow 0 \text{ peut être convergente}$$

Quelques règles de convergence.

Pour étudier la convergence d'une série, il faut appliquer des théorèmes dont voici quelques-uns :

177. Théorème. Une série est convergente si ses termes en valeur absolue sont égaux ou inférieurs aux termes de même rang d'une série convergente à termes positifs.

Soient les deux séries $u_1 u_2 u_3 \dots$ et $v_1 v_2 v_3 \dots$ dont la première est convergente et à termes positifs. Si l'on a constamment les v_n plus petits que les u_n correspondants, la seconde série est également convergente.

Deux cas peuvent se présenter : les v_n sont tous positifs, ou les uns sont positifs, les autres négatifs.

Tous les termes v_n sont positifs. Si tous les termes sont positifs, la somme S'_n des v croît évidemment avec n , mais en restant inférieure à S_n , la somme des u_n . Par hypothèse, S_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment; il en résulte que S'_n qui augmente constamment tout en restant toujours inférieure à une limite S , tend elle-même vers une limite. Donc, la série des v est convergente.

Les termes de la seconde série ne sont pas tous positifs. Appelons A_n l'ensemble des termes positifs de la série v , tous les termes négatifs étant remplacés par 0. Appelons $-B_n$ l'ensemble des termes négatifs, les termes positifs étant remplacés par 0. La série A_n est évidemment convergente comme le montre le raisonnement précédent; de même, la série B_n , puisque le raisonnement précédent s'applique, les valeurs absolues des termes étant seules considérées. Or, la série proposée est la différence entre A_n et B_n ; comme chacune de ces valeurs tend vers une limite, la série donnée tend elle-même vers une limite, $A - B$.

178. Corollaire. *Une série alternée, ou à termes positifs et négatifs, est convergente si les valeurs absolues de ses termes forment une série convergente.*

Elle peut être convergente dans d'autres circonstances; c'est pourquoi la proposition réciproque n'est pas vraie : *une série alternée peut être convergente sans que la série formée par les valeurs absolues des termes soit elle-même convergente.* Par exemple, la série harmonique alternée est convergente (§186), tandis que la série harmonique elle-même ne l'est pas (§191).

179. *Inversement une série à termes positifs est divergente si, terme à terme, elle est plus grande qu'une série divergente à termes positifs.* Cette proposition est évidente.

Si une série alternée est plus grande, terme à terme qu'une série divergente à termes positifs, cette série alternée peut encore être convergente : elle sera semi-convergente.

Il sera démontré que la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$ est divergente (§191), tandis que la série $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \dots$ qui, terme à terme, est plus grande que la série harmonique, est cependant convergente.

EXERCICE LIX

Comparer les séries suivantes à quelque série connue, afin de déterminer leur caractère de convergence ou de divergence.

- 8-23. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} \dots$ *conver.*
 8-24. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{29} + \frac{1}{83} \dots$ *convergente*
 8-25. $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{36} \dots$ *convergente*
 8-26. $\frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{7}{28} + \frac{15}{82} + \frac{31}{244} \dots$ *convergente*
 8-27. $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} \dots$
 8-28. $1 + (\frac{3}{4})^{3/2} + (\frac{9}{16})^{3/2} + (\frac{27}{64})^{3/2} \dots$ *convergente*
 8-29. $\frac{2}{6} - \frac{8}{26} + \frac{26}{126} - \frac{89}{626} \dots$ *convergente*
 8-30. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{\frac{2}{27}} + \sqrt{\frac{2}{81}} \dots$ *convergente*
 8-31. $.8 + .80 + .728 + .6560 \dots$ *convergente*

III. SÉRIE HARMONIQUE

✓ 180. La série harmonique est divergente.

La série : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$ est appelée série harmonique.

Cette série peut s'écrire: $S = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8})$
 $+ (\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}) \dots$

Si dans chaque parenthèse, les termes sont remplacés par le dernier d'entre eux, la valeur de la série aura été diminuée, et l'on aura :

$$S > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} \dots) + \dots;$$

or, chacune des parenthèses vaut maintenant $\frac{1}{2}$; donc :

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots$$

Si le dernier terme écrit dans la dernière parenthèse est $\frac{1}{2^p}$, nous aurons :

$$S > 1 + \frac{p}{2}.$$

La somme S , étant toujours plus grande que $\left(1 + \frac{p}{2}\right)$ et p pouvant augmenter indéfiniment, il s'ensuit que S augmente indéfiniment.

Donc, la somme d'une série harmonique augmente indéfiniment.

EXERCICE LXIV

Étudier les séries suivantes :

8-32. $\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \frac{x^5}{\sqrt{5}} + \frac{x^6}{\sqrt{6}} \dots$

8-33. $\frac{x}{1+\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3+\sqrt{4}} + \frac{x^4}{4+\sqrt{5}} \dots$

8-34. $\frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{3}} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{4}} + \frac{x^4}{\sqrt[3]{5}} \dots$

IV. ÉTUDE DE LA SÉRIE (μ)

181. La série μ est convergente lorsque μ est plus grand que 1 ; elle est divergente lorsque μ est égal à 1, ou est plus petit que 1.

On appelle série μ la série suivante :

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} \dots$$

La série harmonique est un cas particulier de la précédente, lorsque $\mu = 1$.

En groupant les termes de la façon suivante, on obtient :

$$S = \frac{1}{1^\mu} + \left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} \right) + \left(\frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \frac{1}{7^\mu} \right) + \\ \left(\frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{9^\mu} + \frac{1}{10^\mu} + \dots + \frac{1}{15^\mu} \right) + \dots$$

Si chaque terme des parenthèses est remplacé par le premier, la série sera augmentée. Donc,

$$S < \frac{1}{1^\mu} + 2 \times \frac{1}{2^\mu} + 4 \times \frac{1}{4^\mu} + 8 \times \frac{1}{8^\mu} + 16 \times \frac{1}{16^\mu} \dots$$

Ou encore,

$$S < \frac{1}{1^{\mu-1}} + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \frac{1}{16^{\mu-1}} + \dots$$

Or, cette série est une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2^{\mu-1}}$.

$\mu > 1$ Si $\mu - 1 > 0$, la raison de la progression géométrique est plus petite que l'unité, et la série donnée est convergente.

$\mu = 1$ Si $\mu - 1 = 0$, la série est divergente, car, c'est la série harmonique (§180).

$\mu < 1$ Si $\mu - 1 < 0$, la série est divergente, car, elle est plus grande terme à terme, que la série harmonique, qui est divergente.

EXERCICE LX

Étudier les séries suivantes :

✓ 8-35. $\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} \dots$

✓ 8-36. $\frac{x}{1^1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{4^4} + \frac{x^5}{5^5} \dots$

8-37. $\frac{x}{\sqrt{1^3}} + \frac{x^2}{\sqrt{2^3}} + \frac{x^3}{\sqrt{3^3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4^3}} \dots$ pour $x = \pm 1$ convergent

8-38. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \frac{x^4}{17} \dots$ $\frac{x^n}{n^2+1}$ $\rightarrow \mu = 3/2$

8-39. $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^2}{\sqrt{4}} + \frac{x^3}{\sqrt{5}} + \frac{x^4}{\sqrt{6}} \dots$ $x=1 \rightarrow$ divergent
 $\hookrightarrow$ car $>$ série μ

8-40. $\frac{x^2}{2^2} + \frac{(2x)^2}{3^2} + \frac{(3x)^2}{4^2} + \frac{(4x)^2}{5^2} \dots$

$\hookrightarrow$ on met (x^2) en facteur. Terme général : $\frac{(n)^2}{(n+1)^2} \rightarrow$ divergent

181. Soient les séries : u_n et v_n à termes positifs, dont la seconde est convergente par hypothèse, si pour n suffisamment grand on a constamment :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

la série u_n est aussi convergente.

On a en effet : $\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{v_n}{v_{n-1}}$, et nous pouvons pour la simplicité de l'écriture numérotter les termes à partir de cette valeur de n ; nous aurons donc :

$$u_2/u_1 < v_2/v_1 ; u_3/u_2 < v_3/v_2 \dots\dots$$

$$\text{Soit donc : } u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

$$= u_1 \left(1 + u_2/u_1 + \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_4}{u_3} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_2}{u_1} \dots \right) :$$

Si les rapports : u_n/u_{n-1} sont remplacés par les rapports v_n/v_{n-1} , qui sont plus grands, on aura donc :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots < u_1 \left(1 + v_2/v_1 + \frac{v_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_1} + \frac{v_4 v_3 v_2}{v_3 v_2 v_1} \dots \right) \\ < \frac{u_1}{v_1} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \dots)$$

or la série v_n étant convergente — il suit que la série u_n l'est aussi.

V. RÈGLES DE CONVERGENCE DE D'ALEMBERT ET DE CAUCHY

Quand l'application des théorèmes généraux est difficile, il arrive souvent que quelques règles particulières fournissent la solution cherchée ; les principales de ces règles sont celles de d'Alembert et de Cauchy.

182. Règle de d'Alembert.

Une série est convergente si, à partir d'un certain rang, le rapport d'un terme au précédent, pris en valeur absolue, est constamment inférieur à un nombre donné k , moindre que l'unité.

Soit d'abord une série à termes positifs : $u_1, u_2, u_3, u_4 \dots$.
Par hypothèse u_{n+1}/u_n est plus petit que k , dès que n est suffisamment grand. De ces relations on déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &< k \cdot u_n \\ u_{n+2} &< k \cdot u_{n+1} < k^2 u_n \\ u_{n+3} &< k u_{n+2} < k^3 u_n \\ u_{n+4} &< k u_{n+3} < k^4 u_n \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Par conséquent, la série u_{n+k} est plus petite que la progression géométrique $ku_n + k^2u_n + k^3u_n + k^4u_n \dots$ de raison k , qui est convergente, puisque c'est une progression géométrique décroissante (173). Donc la série proposée est également convergente puisque terme à terme, elle est plus petite qu'une série convergente à termes positifs (177).

La proposition est évidemment encore vraie, lorsque les termes ne sont pas tous positifs.

183. Remarque. La règle de d'Alembert s'applique lorsque $k < 1$. Si $k = 1$, la règle ne donne rien. Si k tend vers l'unité en lui étant constamment supérieur, alors les termes n'allant pas en diminuant, la série est nécessairement divergente (175).

184. Dans les exercices qui suivent, on cherchera le nombre de d'Alembert. Si ce nombre est plus petit que l'unité, la série est convergente ; s'il est plus grand que l'unité, la série est divergente ; si c'est l'unité, une étude spéciale de la série s'impose.

Soit la série : $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} + \frac{x^6}{32} + \dots$

Le nombre de d'Alembert est :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+2}}{2^{n+1}} \div \frac{x^{n+1}}{2^n} = \frac{x}{2}$$

Si l'on a $x < 2$, la série est convergente (180).

Si $x > 2$, la série est divergente.

Pour $x = 2$, il y a doute ; il faut étudier la série en elle-même. Comme elle devient alors $2 + 2 + 2 + 2 \dots$ le terme général étant 2, la série est divergente (175).

EXERCICE LX

Étudier les séries suivantes, par la règle de d'Alembert.

$$8-41. \quad \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{27} + \frac{x^5}{81} \dots \begin{cases} -3 < x < 3 & \text{convergente} \\ x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 & \text{divergente} \end{cases}$$

$$8-42. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{16x^5} \dots \begin{cases} \frac{1}{2x} < 1 & \text{convergent} \\ \frac{1}{2x} > 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

$$8-43. \quad \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + \frac{3x^3}{4} + \frac{4x^4}{5} \dots$$

$$8-44. \quad x \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + x^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + x^3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + x^4 \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} \dots$$

$-1 < x < 0$ div
 $x = -1$ diver

$$8-45. \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+x^4} \dots \begin{cases} x > 1 & \text{diverg} \\ x < 1 & \text{conver} \end{cases}$$

$$8-46. \quad \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} + \sqrt{4x} \dots \rightarrow \text{Rais 183} \rightarrow \text{Diverg}$$

$$8-47. \quad \sqrt{x} + \sqrt{2x^2} + \sqrt{3x^3} + \sqrt{4x^4} \dots$$

$$8-48. \quad x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{25}x^3 - \frac{27}{125}x^4 \dots$$

$$8-49. \quad \frac{100x}{1!} + \frac{(100x)^2}{2!} + \frac{(100x)^3}{3!} + \frac{(100x)^4}{4!} \dots \text{Toujours convergentes}$$

$$8-50. \quad \frac{x}{100} + \frac{x^2 2!}{10000} + \frac{x^3 3!}{1000000} + \frac{x^4 4!}{100000000} \dots \text{Toujours divergente}$$

184.5 Règle de Duhamel et Raabe.

Soit la série : $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \dots$, si le rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a comme valeur : $1/1 + \alpha_n$, α_n étant tel que le produit $n \alpha_n$ tend vers une limite : k .

Si k est > 1 , la série est *convergente*

k est < 1 , la série est *divergente*

$k = 1$, il y a *incertitude*.

Soit en effet la série dont le terme général est : $\frac{1}{n^\mu}$

On sait que cette série est convergente si $\mu > 1$; divergente si $\mu < 1$, ainsi que si $\mu = 1$.

Le nombre de D'Alembert de cette série est :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{1}{(n+1)^\mu} \bigg/ \frac{1}{n^\mu} = \frac{n^\mu}{(n+1)^\mu} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu} = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} \dots} \end{aligned}$$

en sorte que si l'on écrit : $v_{n+1}/v_n = 1 + \alpha_n$

$$\text{on a : } \alpha_n = \frac{\mu}{n} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} \dots$$

et le produit $(n \alpha_n) = \mu$ à la limite, quand n tend vers l'infini.

Si on a une série u_n telle u_{n+1}/u_n a comme valeur $1/1+\alpha_n$ et si le produit $n\alpha_n$ tend vers un nombre $k > 1$, le rapport : u_{n+1}/u_n est donc plus petit que le rapport v_{n+1}/v_n de la série $1/n^k$ qui est une série convergente ; elle est donc convergente elle-même (§181.5).

Si le produit $(n\alpha_n)$ tend vers un nombre plus petit que l'unité la série est divergente, car le rapport de d'Alembert est alors plus grand que celui de la série harmonique.

Si la limite du produit $(n\alpha_n)$ tend vers l'unité, on ne peut rien conclure, sauf si ce produit est constamment plus petit que l'unité car alors la série serait divergente.

Soit la série dont le terme général est :

$$u_n = \frac{3.6.9 \dots 3(n-1)}{7.10.13 \dots 3n+1}$$

On trouve pour le nombre de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.6.9 \dots 3n}{7.10.13 \dots 3n+4} \bigg/ \frac{3.6.9 \dots 3n-1}{7.10.13 \dots 3n+1} = \frac{3n}{3n+4}$$

$$\text{Le nombre de d'Alembert est donc : } \frac{1}{1 + \frac{4}{3n}}$$

Ici, $\alpha = 4/3n$ et le produit : $n\alpha$ est $4/3$: la série est donc convergente.

185. Règle de Cauchy.

Une série à termes positifs est convergente si, à partir d'une valeur déterminée de n on a : $\sqrt[n]{u_n} < k$, k étant lui-même inférieur à l'unité, en valeur absolue.

CAUCHY, Augustin (1789-1857), mathématicien français.

Augustin Cauchy est l'un des mathématiciens les plus féconds qui aient existé ; il publia 789 mémoires divers dont quelques-uns très copieux. C'est à Cauchy que nous devons entre autres plusieurs points de théorie sur les séries convergentes, les imaginaires, les déterminants. Cauchy était un catholique d'une grande ferveur, un homme d'une probité scrupuleuse, d'un grand courage intellectuel et même politique. Ce savant a produit des travaux remarquables dans tous les domaines des sciences mathématiques, depuis les mathématiques pures jusqu'à la physique mathématique et même l'astronomie.

On a en effet :

$$u_n < k^n \quad (84)$$

de même :

$$u_{n+1} < k^{n+1}$$

$$u_{n+2} < k^{n+2}$$

$$u_{n+3} < k^{n+3}$$

etc ...

La série proposée étant plus petite, terme à terme, que la progression géométrique décroissante dont k est la raison, est convergente (§177).

186. La règle de Cauchy s'applique moins facilement que celle de d'Alembert ; complétée par le théorème suivant, elle est utile pour la démonstration d'un certain nombre de propositions.

187. Nombre de d'Alembert et nombre de Cauchy.

Le nombre L de la règle de d'Alembert et le nombre $L' = \sqrt[n]{u_n}$ de la règle de Cauchy sont un seul et même nombre.

Soit la série u_n . Montrons qu'il est absurde de supposer que le nombre de d'Alembert diffère de celui de Cauchy.

Considérons la série auxiliaire :

$$u_0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 \dots$$

Appliquons à cette série la règle de d'Alembert.

$$\text{On a : } \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \frac{u_{n+1} x^{n+1}}{u_n x^n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} x,$$

Si l'on appelle L , le nombre de d'Alembert de la série proposée, Lx est celui de la série auxiliaire; cette série auxiliaire sera convergente si $Lx < 1$ ou si $x < \frac{1}{L}$.

Appliquons à cette même série auxiliaire la règle de Cauchy. Nous trouvons alors comme nombre de Cauchy :

L/x , appelant L' la limite de $\sqrt[n]{u_n}$

$$\sqrt[n]{u'_n} = \sqrt[n]{u_n x^n} = x \sqrt[n]{u_n}.$$

D'après la première règle, la série auxiliaire est convergente si $x < \frac{1}{L}$. D'après la règle de Cauchy, la série auxiliaire est convergente, si $x < \frac{1}{L'}$. Or, si L diffère de L' , il y a des valeurs comprises entre $\frac{1}{L}$ et $\frac{1}{L'}$. Si l'on donne à x une de ces valeurs, la série auxiliaire serait convergente d'après une des règles et divergente d'après l'autre règle, ce qui est contradictoire. Donc, L ne peut différer de L' .

Remarque. Cette démonstration n'est valable que si l'on suppose l'existence des limites L et L' . On démontre que si le nombre de d'Alembert

existe, $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite égale à ce nombre; mais la réciproque n'est pas vraie : la racine $n^{\text{ième}}$ de u_n peut exister, sans que le rapport :

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite (voir 5, de LXI).

EXERCICE LXI

Dans les exercices qui suivent, appliquer la règle de d'Alembert : le nombre obtenu sera en même temps celui de Cauchy.

8-51. Chercher la limite de $\sqrt[2n]{n}$, lorsque n augmente indéfiniment.

Considérer la série : $1 + 2^{1/2} + 3^{1/2} + 4^{1/2} + 5^{1/2} + 6^{1/2} \dots$

8-52. Chercher la limite de $(n!)^{1/n}$, lorsque n augmente indéfiniment.

8-53. Chercher la limite de $(n!)^{-1/n}$.

8-54. Valeur limite de $(1+n)^{1/n}$, n augmentant indéfiniment. $\rightarrow 1$

On étudiera la série $(1+1)$, $(1+2)$, $(1+3)$, ...

8-55. Etudier la série : $1 + r \sin x + r^2 \sin 2x + r^3 \sin 3x + r^4 \sin 4x \dots$

Essayer d'appliquer la règle de d'Alembert; appliquer ensuite la règle de Cauchy.

Cauchy. $\sqrt[n]{r \sin nx} = r \sqrt[n]{\sin nx}$
Converge si $|r| < 1$

VI. SÉRIES ALTERNÉES

188. Théorème. *Une série à termes alternativement positifs et négatifs est convergente, si ses termes sont décroissants et si le terme général tend vers 0.*

Soit la série : $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 \dots$

Les termes de cette série peuvent être groupés comme suit :

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) \dots$$

Chaque parenthèse est positive puisque les termes de la série vont en décroissant. Donc, la série alternée croît constamment et est plus grande, par conséquent, que $(u_1 - u_2)$.

Les termes peuvent être groupés autrement :

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) \dots$$

où l'on voit encore que la série a une valeur limite plus petite que celle de son premier terme u_1 .

La série augmente tout en restant plus petite qu'un nombre donné ; donc, elle tend vers une limite.

D'ailleurs la condition nécessaire de convergence (§175) est satisfaite. *cf Cp 8-88*

189. Autre démonstration.

La démonstration suivante du théorème (§188) est intuitive. Soit la série alternée étudiée précédemment. Portons sur une droite indéfinie et orientée, les segments : $OA_1 = u_1$;

$$A_1A_2 = u_2 ; A_2A_3 = u_3 ; A_3A_4 = u_4 ; A_4A_5 = u_5 ; \dots$$

$$\underline{0 \quad A_2 \quad A_4 \dots \quad L \dots \quad A_5 \quad A_3 \quad A_1}$$

Comme les termes vont en diminuant, il est évident que les A_k sont de plus en plus rapprochés. À la limite, lorsque le terme u_n tend vers 0, les points A_k se rapprocheront de plus en plus d'un point L qui définit la limite de la série alternée.

EXERCICE LXII

Étudier les séries alternées suivantes :

$$8-56. \quad \frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} - \frac{x^4}{9} \dots$$

$$8-57. \quad \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{\sqrt{4}} + \frac{x^3}{\sqrt{5}} - \frac{x^4}{\sqrt{6}} \dots$$

$$8-58. \quad x \sqrt{\frac{1}{2}} - x^2 \sqrt{\frac{2}{3}} + x^3 \sqrt{\frac{3}{4}} - x^4 \sqrt{\frac{4}{5}} + x^5 \sqrt{\frac{5}{6}} \dots$$

$$8-59. \quad x \frac{1}{\sqrt{2}} - x^2 \frac{1}{\sqrt{4}} + x^3 \frac{1}{\sqrt{8}} - x^4 \frac{1}{\sqrt{16}} \dots$$

$$8-60. \quad x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 \dots$$

$$8-61. \quad x - x^{2!} + x^{3!} - x^{4!} + x^{5!} \dots$$

$$8-62. \quad \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^4} \dots$$

190. L'ordre des termes ne peut être changé dans une série alternée, sauf dans le cas où la série serait quand même convergente, si tous les signes étaient positifs: dans ce dernier cas la série est absolument convergente. La série alternée, qui ne serait plus convergente si tous les termes étaient positifs, n'est qu'une série semi-convergente.

La série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots$ est alternée, mais absolument convergente, car la série à termes positifs:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$$

est elle-même convergente. Mais, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \dots$, qui est convergente, est une série semi-convergente, puisque la série formée par les valeurs absolues des termes est la série harmonique, qui est divergente (§86).

Voici un paradoxe qui montre que l'ordre des termes d'une série semi-convergente ne peut être changé.

Soit la série $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$, série qui représente le logarithme népérien de 2 ou .693 147 (260).

Écrivons: $2S = 2 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \dots$

Cette valeur $2S$ peut encore s'écrire :

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

car, il n'y a qu'à grouper convenablement les termes pour obtenir ce résultat.

On aurait donc : $2S = S$, ou $S = 0$.

Donc, on ne peut changer l'ordre des termes d'une série semi-convergente. Ce paradoxe est emprunté à Rouse Ball, "Récréations mathématiques".

191. Théorème. *Dans une série alternée, l'erreur commise en prenant S_n pour S est moindre et de même signe que le premier terme de la partie négligée (ou que le dernier terme conservé, mais en signe contraire).*

En effet, soit $S = OL$, le vecteur-somme de la série considérée. Comme L est compris entre A_n et A_{n+1} (189) et que la différence entre OA_{n+1} et OA_n est u_{n+1} , il s'ensuit que l'erreur est plus petite en valeur absolue que u_{n+1} , ce qu'il fallait démontrer ; en ajoutant u_{n+1} (avec son signe), on va vers la limite L ; donc, l'erreur est du signe de u_{n+1} . Comme u_n est plus grand en valeur absolue que u_{n+1} , mais de signe contraire, la différence entre S et S_n est plus petite en valeur absolue que u_n , le dernier terme conservé.

192. Autre démonstration.

La somme S de la série se compose comme suit :

$$S = S_n + (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} \dots).$$

Or, la série entre parenthèses est plus petite en valeur absolue que son premier terme, car elle peut s'écrire :

$$u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) \dots$$

chaque parenthèse étant du signe de u_{n+1} : le reste négligé est plus petit que u_{n+1} en valeur absolue et de même signe. Comme u_n est plus grand en valeur absolue que u_{n+1} , mais de signe contraire, le reste est plus petit que u_n en valeur absolue.

• EXERCICE LXIII

On appliquera le théorème (§191) pour connaître l'approximation obtenue dans le calcul des valeurs numériques des séries alternées suivantes:

$$8-63. \quad 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} \dots$$

$$8-64. \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^5} \dots$$

$$8-65. \quad \text{Quelle est la somme de } \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} \dots ? \text{ alternée des termes}$$

$$8-66. \quad 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} \dots \right)$$

Remarque. La série (8-66) a un intérêt historique. Machin, mathématicien français (1680-1752) montra sa relation avec π ; on put calculer π par cette série très convergente avec un grand nombre de décimales. On connaît π avec 707 décimales actuellement (Shanks, 1873).

$$8-67. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots$$

$$8-68. \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \dots$$

193. S'il arrive que les règles de d'Alembert et de Cauchy sont impuissantes à montrer le caractère d'une série, il faut avoir recours à des règles plus générales dont on trouvera l'énumération et la démonstration dans des traités plus complets.

VII. SÉRIE DE NEWTON

194. Lorsque n est un entier, on a trouvé le développement suivant :

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 \dots$$

Lorsque n n'est pas un entier positif, cette série peut se continuer indéfiniment, car, les facteurs $(n-k)$ ne s'annulent pas et prennent des valeurs négatives de plus en plus grandes. Examinons les caractères de convergence de cette série

On trouve pour le nombre de d'Alembert de cette série :

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k}{\frac{n(n-1) \dots (n-k+2)}{(k-1)!} a^{n-k+1} x^{k-1}} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{x}{a} \\ &= -\frac{x}{a} \left(\frac{k-n-1}{k} \right) \\ &= -\frac{x}{a} \left(1 - \frac{n+1}{k} \right). \end{aligned}$$

Lorsque k augmente indéfiniment, le nombre de d'Alembert tend vers x/a en valeur absolue, et la série est alternée. Si nous remplaçons x/a par z , nous aurons donc les conclusions suivantes:

La série $(1+z)^n$, quel que soit n , est une série convergente, dès que z est inférieur à l'unité, car z ou $\frac{x}{a}$ étant inférieur à l'unité, le nombre de d'Alembert est plus petit que l'unité ; d'ailleurs, la série est alternée et le terme général tend vers 0.

Cette démonstration justifie les règles données précédemment (§169).

EXERCICE LXVI (REVUE)

Étudier les séries suivantes :

$$8-69. \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} \dots$$

$$8-70. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} \dots$$

$$8-71. \quad \frac{1}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} \dots$$

$$8-72. \quad \frac{2x}{2} + \frac{4x^2}{5} + \frac{6x^3}{10} + \dots + \frac{2nx^n}{n^2+1}.$$

8-73. Étudier la série suivante, a et b étant positifs :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots$$

8-74. $\frac{x}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x}{3!} + \frac{4x}{4!} \dots$

8-75. $1.2x + 2.3x^2 + 3.4x^3 + 4.5x^4 \dots$

8-76. Étudier la série dont le terme général est : $\frac{1}{1+x^n}$.

8-77. Étudier la série dont le terme général est : $\frac{n!}{n^n}$.

8-78. Étudier la série : $u_n = \frac{1}{(n+1)^{1/n}}$.

8-79. La série $u = \frac{3n-1}{n^4+1}$ est-elle convergente ?

8-80. Calculer à .001 près, la somme de

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9.10} + \frac{1}{11.12.13.14.15} \dots$$

8-81. Somme de : $1 + \frac{1}{(2!)^3} + \frac{1}{(3!)^3} + \frac{1}{(4!)^3} \dots$

8-82. Somme de : $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \dots$

CHAPITRE IX

D É T E R M I N A N T S

Sommaire. Chapitre IX. DÉTERMINANTS. 1. Historique — Définitions. II. Développement élémentaire d'un déterminant. III. Théorèmes généraux. IV. Déterminants mineurs. V. Développement d'un

déterminant quelconque. VI. Propriétés des déterminants. VII. Application à la résolution des équations du premier degré. VIII. Étude des équations homogènes du premier degré. IX. Équations de courbes obtenues par les déterminants.

DÉTERMINANTS

Il paraît que les Chinois 1100 ans avant Jésus-Christ, résolvait deux équations, du premier degré à deux inconnues par une règle équivalente à la méthode usuelle des déterminants, et la légende prétend que Seki Kowa (1642-1708), un Japonais, fit à peu près la même chose en 1683 (de notre ère).

Leibnitz (1693) donna une règle analogue à celle des déterminants pour la résolution des équations linéaires. Cette règle fut généralisée par G. Cramer (1704-1752) un Suisse, et simplifiée par E. Bezout (1730-1783), un Français. Cependant il est difficile de prétendre que ces précurseurs ont réellement introduit les déterminants ; ils ne donnaient que des règles pratiques pour la solution des équations.

C'est A.-T. Vandermonde, (1735-1796 France) qui améliora la notation des déterminants et en fit un objet isolé d'études. Laplace, en 1772, donna plus ou moins nettement une règle pour le développement des déterminants.

Binet (1786-1856 France) donna à peu près clairement les règles qui régissent les multiplications des déterminants, mais c'est Augustin Cauchy qui découvrit les théorèmes principaux. Jacobi, Allemand (1804-1851) utilisa les déterminants et Cayley, Anglais (1821-1895) présenta les déterminants sous la forme moderne d'un tableau carré renfermé entre deux traits verticaux. En 1920 les déterminants avaient été tellement étudiés que T. Muir (1844-1934 Écosse) trouva que cinq volumes, comptant en tout 2500 pages environ, étaient nécessaires pour écrire l'histoire des déterminants.

I. HISTORIQUE.

DÉFINITIONS

195. La théorie des déterminants a été développée progressivement par les grands mathématiciens : Leibnitz, Cramer, Laplace, Vandermonde, Gauss, etc. Elle fournit un langage fortement condensé et permet de montrer des relations symétriques que l'algèbre ordinaire ne mettrait que difficilement en évidence. La nécessité d'exposer logiquement cette théorie empêche d'en voir dès l'abord l'utilité ; mais le débutant s'aperçoit

vite qu'elle est facile, et féconde en applications inattendues.

196. Inversions. Soit une permutation des n premiers nombres. Dans cette permutation deux nombres forment une inversion, quand ils ne se succèdent pas dans leur ordre naturel. Par exemple, 1324 présente l'inversion 32 ; la permutation 1432 présente les inversions 43, 42, 32.

Étudier les inversions de 154623 ; 256134 ; 426153. Dans la première, il y a $0+3+2+2=7$ inversions ; dans la seconde $1+3+3=7$; dans la troisième $3+1+3+1=8$.

197. Classe d'une inversion. Une permutation est de première classe, quand le nombre des inversions y est nul ou pair ; elle est de deuxième classe, quand ce nombre est impair. La permutation 1234567 ... peut s'appeler permutation principale.

Quelles sont les classes des permutations suivantes :

146523, 615342, 316254, 165423, 145632, 156234 ?

198. Théorème. Dans une permutation, si deux termes sont échangés, la permutation change de classe.

Les termes échangés peuvent être consécutifs, ou ne pas l'être.

Supposons les termes consécutifs. Soit la permutation $AmnB$, où A et B représentent un ensemble de termes. Si l'on échange les deux termes m et n , on obtiendra : $AnmB$. Rien n'a été changé dans les rapports mutuels des éléments de A et B entre eux et avec m et n . Les deux termes mn formaient une inversion, et alors cette inversion a été détruite, ou bien ne formaient pas d'inversion, et le changement en a introduit une. Dans les deux cas, la classe a été changée, puisque le nombre d'inversions a été augmenté ou diminué d'une unité.

Supposons que les termes échangés ne sont pas consécutifs. Soit $AnBmC$ où A, B et C désignent des ensembles de termes. Pour passer de la première permutation à la seconde échangeons d'abord n avec chacun des éléments de B qui contient p termes : nous aurons changé la classe p

fois et aurons : $ABnmC$. Échangeons n et m , nous changeons de classe encore une fois, donc, $(p+1)$ fois en tout, nous avons alors $ABmnC$. Déplaçons maintenant m vers la gauche p fois, afin de lui faire occuper le rang que n occupait : cela occasionne p nouveaux changements de classe, en tout $2p+1$ changements; or, changer de classe un nombre impair de fois entraîne un changement final de classe.

Donc, si l'on échange deux termes d'une permutation, la classe de la permutation est changée.

199. Définition. Soient n^2 nombres disposés en tableau carré contenant n lignes et n colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & \dots & e \\ m & n & o & p & \dots & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & s & t & u & \dots & v \end{vmatrix}$$

On appelle déterminant de ces n^2 nombres, la somme algébrique de tous les produits de n facteurs obtenus en prenant un élément et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne, et en faisant précéder le produit partiel du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les permutations fournies par les numéros des lignes et par ceux des colonnes sont de même classe ou de classes différentes.

On représente un déterminant par le tableau carré des n^2 nombres placés entre deux traits verticaux. Les nombres de ce tableau sont les éléments du déterminant et les produits partiels en sont les termes.

II. DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT

EXERCICE LXVII

En se basant uniquement sur la définition précédente, développer les déterminants suivants :

$$9-1. \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad 9-2. \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad 9-3. \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix};$$

$$9-4. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

200. Soit un déterminant du troisième ordre. Nous allons donner au déterminant une forme symbolique où seront marquées les colonnes et les lignes : les colonnes par des exposants, les lignes par des indices.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Les termes de la première colonne ont tous l'exposant 1, ceux de la 2e colonne l'exposant 2 ... ; les termes de la première ligne sont affectés de l'indice 1, ceux de la deuxième ligne de l'indice 2.

On peut développer ce déterminant en partant de la définition.

Il faut dans chaque terme un élément et un seul de chaque ligne et de chaque colonne; mais on peut disposer les facteurs de façon que les colonnes soient dans l'ordre naturel 123, les lignes étant prises dans toutes leurs permutations. Supposons, en effet, le terme $a_2^3 a_1^1 a_3^2$; il est équivalent à $a_1^1 a_3^2 a_2^3$, car le produit ne serait pas changé; la classe des indices et celle des exposants seraient toutes deux changées en même temps, un certain nombre de fois (§198), mais le signe devant le terme ne serait pas changé. (§199).

Il y aura donc dans le développement autant de termes qu'il y a de permutations des trois nombres 1, 2, 3, c'est-à-dire 6. Comme les permutations de 123, sont 123, 132, 213, 231, 312, 321, nous obtenons le développement suivant :

$+ a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_3^1 a_1^2 a_2^3$
les signes devant chaque produit étant déterminés par la définition même du déterminant (§199). Devant $a_1^1 a_2^2 a_3^3$, le signe est +, puisque les deux permutations 123, 123 sont de même classe. Il faut placer - devant $a_1^1 a_3^2 a_2^3$, car 123 est de première classe et 132 de seconde classe, etc.

III. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

201. Théorème. *Lorsque dans un déterminant, on transpose deux rangées parallèles, le déterminant change de signe, mais garde sa valeur absolue.*

Soit le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{qui devient :} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 9 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

ces deux déterminants sont égaux, mais de signes contraires.

Soit un terme du premier déterminant : 6.4.8. Afin de connaître la classe de chacune des permutations des colonnes et des lignes, mettons en indices les numéros des lignes et en exposants les numéros des colonnes. Nous aurons ainsi : $6_2^1.4_1^2.8_3^3$; le terme correspondant du second déterminant est : $6_2^1.4_1^3.8_3^2$; ces deux produits sont évidemment égaux en valeur absolue. Les inversions inférieures sont les mêmes, mais dans les inversions des exposants, deux termes ont été échangés : la classe des indices est restée la même, tandis que celle des exposants est changée (§198), donc le signe du terme est changé. Comme cela est vrai pour chacun des termes, le nouveau déterminant diffère du premier par le signe seulement, il lui est égal en valeur absolue.

Corollaire. Si l'on fait deux changements de lignes ou de colonnes le déterminant reprend sa valeur primitive puisqu'il change deux fois de signes.

202. Théorème. *Si dans un déterminant, deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul.*

Soit Δ la valeur de ce déterminant. Si l'on échange deux colonnes, on obtient un nouveau déterminant Δ' dont la valeur est $-\Delta$. Mais puisque les deux lignes ou les deux colonnes étaient identiques, on a toujours le même déterminant. Donc $\Delta = \Delta' = -\Delta$, ou $2\Delta = 0$, et $\Delta = 0$, ce qui démontre le théorème.

203. Fonction linéaire et homogène de plusieurs quantités.

Une expression algébrique est dite fonction linéaire de x, y, z , lorsqu'elle ne contient x, y ou z qu'au premier degré. Les termes en xy et en x^2 doivent donc être absents, puisque ces termes sont du second degré.

Par exemple, l'expression : $4x + 7y - 3z + 2$ est une expression linéaire.

Une fonction linéaire est de plus **homogène**, lorsque chacun des termes contient soit x , soit y , soit z au premier degré et qu'il n'y a aucun terme ne contenant pas x, y , ou z . L'expression précédente n'est pas homogène, tandis que l'expression :

$2x - ay + 6z$ est linéaire et homogène en x, y et z .

204. Théorème. *Un déterminant est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne.*

On pourrait raisonner ainsi. Dans tout terme du déterminant, doit entrer un élément et un seul d'une ligne donnée; donc le déterminant est bien une fonction linéaire et homogène des éléments d'une ligne; de même pour une colonne.

On peut le vérifier sur le développement précédent (§200). Le déterminant peut être ordonné suivant les éléments de la première colonne :

$a_1^1 (a_2^2 \cdot a_3^3 - a_3^2 \cdot a_2^3) - a_2^1 (a_1^2 \cdot a_3^3 - a_3^2 \cdot a_1^3) + a_3^1 (a_1^2 \cdot a_2^3 - a_2^2 \cdot a_1^3)$
 Dans ce développement, les éléments de la première colonne sont évidemment présents dans tout terme et n'y sont qu'une fois.

Le développement du déterminant pourrait s'écrire symboliquement :

$$a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1.$$

205. Théorème. *Un déterminant contient un nombre de termes égal à P_n .* ou *no. ord. du déterminant*

En effet, on peut toujours placer les facteurs dans les termes de façon que les indices soient dans l'ordre naturel (§200), les exposants forment alors une des permutations de n termes, et à chacune de ces permutations correspond un terme du déterminant. Il y en a évidemment $P_n = n!$.

IV. DÉTERMINANTS MINEURS

206. Déterminants mineurs. On appelle *déterminant mineur de premier ordre* celui qui est obtenu en supprimant du déterminant principal une ligne et une colonne. Le symbole Δ_p^q désigne le mineur obtenu par la suppression de la ligne p et de la colonne q .

Le développement d'un déterminant du troisième ordre (§200) peut s'écrire :

$$a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

ou, en utilisant les notations des déterminants mineurs :

$$a_1^1 \Delta_1^1 - a_2^1 \Delta_2^1 + a_3^1 \Delta_3^1.$$

V. DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT QUELCONQUE

207. Développement d'un déterminant quelconque.

On démontre que le développement d'un déterminant d'ordre quelconque peut se faire suivant la forme suivante :

$$\Delta = (-1)^{p+1} a_p^1 \Delta_p^1 + (-1)^{p+2} a_p^2 \Delta_p^2 + (-1)^{p+3} a_p^3 \Delta_p^3 \\ + (-1)^{p+4} a_p^4 \Delta_p^4 \dots (-1)^{p+n} a_p^n \Delta_p^n$$

ici, le déterminant est développé suivant la ligne p ; le développement suivant une colonne s'obtient de même.

Le signe qui précède un mineur dépend de la *parité* de la somme des indices de la ligne et de la colonne enlevées pour constituer le mineur. En partant de l'élément de l'angle gauche supérieur avec le signe $+$, avançant en ligne droite ou tournant à angle droit, on obtient mécaniquement le signe qui doit précéder un terme dans le développement du déterminant : il suffit de compter alternativement $+$, $-$, $+$, $-$, $+$, $-$, $+$, ... jusqu'à ce que l'on arrive au terme qui nous intéresse.

EXERCICE LXVIII

Calculer les valeurs des déterminants suivants :

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{c} 9-5. \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-6. \\ \left| \begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-7. \\ \left| \begin{array}{ccc} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right| \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 9-8. \\ \left| \begin{array}{ccc} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-9. \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 4 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-10. \\ \left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right| \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 9-11. \\ \left| \begin{array}{ccc} 6 & 8 & 2 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-12. \\ \left| \begin{array}{ccc} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-13. \\ \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & 9 \end{array} \right| \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 9-14. \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 9 & 0 \\ 6 & 18 & 14 & 8 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-15. \\ \left| \begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 17 & 11 & 13 & 14 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-16. \\ \left| \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & -8 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 8 \end{array} \right| \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 9-17. \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 9 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 4 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-18. \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & 3 & 7 \\ 8 & 18 & 13 & 7 & 12 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-19. \\ \left| \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 9-20. \\ \left| \begin{array}{cccc} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & -5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ 5 & 5 & 9 & -5 \end{array} \right| \end{array} & \begin{array}{c} 9-21. \\ \left| \begin{array}{ccccc} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{array} \right| \end{array}
 \end{array}$$

VI. PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS

208. Théorème. *Si on multiplie tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne d'un déterminant par un même nombre, ce déterminant est multiplié par ce nombre.*

Comme le déterminant est une fonction linéaire et homogène des éléments de la rangée dont les éléments ont été multipliés par un nombre (§204), chaque terme sera multiplié par ce nombre, et il en est ainsi du déterminant.

Si l'on divise tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un nombre, le déterminant est divisé par ce nombre. La démonstration est la même.

209. Cette proposition (§208) permet de mettre *en facteur* devant le déterminant un diviseur commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne.

Soit, par exemple, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 7 & 12 & 22 \\ 14 & 6 & 33 \\ 21 & 18 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{on peut mettre en facteurs, 7, 6, 11} \\ \text{et obtenir :} \end{array}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

N.B. **210. Corollaire.** *Changer le signe de tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne change le signe du déterminant, car cela revient à multiplier par -1 les éléments d'une ligne ou d'une colonne.*

N.B. **211. Théorème.** *Un déterminant est nul si les éléments de deux lignes ou de deux colonnes sont proportionnels.*

$$\text{Soit le déterminant : } \begin{vmatrix} a & ka & b \\ a' & ka' & b' \\ a'' & ka'' & b'' \end{vmatrix}$$

On peut mettre k en facteur (§209) et l'on obtient :

$$k \begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

déterminant qui est nul, puisque deux des rangées sont identiques (§202).

212. Théorème. *Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne d'un déterminant sont composés de n nombres, le déterminant peut se mettre sous la forme d'une somme de n déterminants*

Soit le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & +b & +c & m & n \\ a' & +b' & +c' & m' & n' \\ a'' & +b'' & +c'' & m'' & n'' \end{vmatrix};$$

développé par rapport aux éléments de la première colonne il donne :

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} - (a'+b'+c') \begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix} + (a''+b''+c'') \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}$$

Cette expression est identique à la somme des suivantes :

$$\begin{aligned} & a \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix} \\ & b'' \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et ce nouveau développement est celui de la somme des trois déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & m & n \\ a' & m' & n' \\ a'' & m'' & n'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & m & n \\ b' & m' & n' \\ b'' & m'' & n'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & m & n \\ c' & m' & n' \\ c'' & m'' & n'' \end{vmatrix}$$

ce qui démontre la proposition.

213. Théorème. *Deux déterminants qui ne diffèrent que par une ligne ou par une colonne peuvent se composer en un seul.*

Cette proposition réciproque de la précédente se démontre de la même façon.

214. Théorème. *Un déterminant ne change pas lorsqu'aux éléments d'une ligne ou d'une colonne on ajoute ceux des autres lignes ou des autres colonnes multipliés par un nombre quelconque.*

Soit le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};$$

Il faut prouver que ce déterminant est égal à :

$$\begin{vmatrix} a & +mb & +nc & b & c \\ a' & +mb' & +nc' & b' & c' \\ a'' & +mb'' & +nc'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Or, ce déterminant peut se mettre sous la forme d'une somme de trois déterminants : (§212)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb & b & c \\ mb' & b' & c' \\ mb'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc & b & c \\ nc' & b' & c' \\ nc'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Ces deux derniers déterminants sont nuls, puisqu'ils ont deux colonnes proportionnelles (§211). Il reste donc le déterminant primitif.

215. Exemple. Soit le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

Dans ce déterminant la première colonne peut être remplacée par la somme des quatre colonnes (§214) :

$$\begin{vmatrix} 34 & 15 & 14 & 4 \\ 34 & 6 & 7 & 9 \\ 34 & 10 & 11 & 5 \\ 34 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

On peut mettre 34 en facteur (§209) :

$$34 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

Ajouter ensuite à chacune des lignes 2, 3, et 4 la première multipliée par -1 (§214), ce qui donne :

$$34 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 0 & -9 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix}$$

On peut développer ce déterminant par rapport à la première colonne (§207) et comme tous les éléments sont nuls, moins le premier, il vient :

$$34 \begin{vmatrix} -9 & -7 & 5 \\ -5 & -3 & 1 \\ -12 & -12 & 12 \end{vmatrix}$$

Mettant 12 en facteur dans la troisième ligne (209)

$$\Delta = 34 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -7 & 5 \\ -5 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ajoutant la troisième colonne à chacune des deux autres, nous obtenons :

$$34 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et ce dernier déterminant est nul ayant deux colonnes proportionnelles (§211).

EXERCICE LXIX

Calculer les déterminants suivants :

$$9-22. \begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

$$9-23. \begin{vmatrix} 19 & 21 & 3 & 10 & 12 \\ 25 & 2 & 9 & 11 & 18 \\ 1 & 8 & 15 & 17 & 24 \\ 7 & 14 & 16 & 23 & 5 \\ 13 & 20 & 22 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

= 5,070000

✓
4680000

$$9-24. \begin{vmatrix} 57 & 54 & 45 & 43 & 61 \\ 19 & 23 & 1 & 10 & 12 \\ 2 & 9 & 13 & 16 & 25 \\ 15 & 17 & 24 & 3 & 6 \\ 21 & 5 & 7 & 14 & 18 \end{vmatrix}$$

on ajoute

*les 3 dernières
lignes à la
1^{ère} = 0*

216. Théorème. *Si tous les éléments d'un même côté de la diagonale principale d'un déterminant sont nuls, le déterminant se réduit au terme principal, c'est-à-dire au produit des termes de la diagonale principale.*

$$\text{Soit le déterminant } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} ;$$

si nous le développons par rapport aux éléments de la première ligne, nous trouvons immédiatement que la valeur de ce déterminant est $a \cdot b' \cdot c''$.

217. Théorème. *On peut transformer un déterminant de manière que les éléments d'une ligne ou d'une colonne soient chacun l'unité.*

$$\text{Soit le déterminant : } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

si on divise tous les éléments de la première colonne par a , ceux de la seconde par b et ceux de la troisième par c , il vient :

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'/a & b'/b & c'/c \\ a''/a & b''/b & c''/c \end{vmatrix}$$

218. Corollaire. *On peut transformer un déterminant de façon que les éléments d'une ligne ou d'une colonne soient tous nuls, sauf l'un d'entre eux, qui aura comme valeur l'unité.*

On a vu (§217) que tout déterminant peut être amené à n'avoir comme éléments d'une même rangée, la première ligne, par exemple, que des unités ; si on soustrait alors une colonne de chacune des autres, tous les éléments de la première ligne seront des 0, sauf celui de la colonne soustraite.

218'. On appelle déterminants *algébriques* ceux qui ne contiennent que des lettres. Pour les développer, on appliquera tous les théorèmes démontrés, s'efforçant, en général, de mettre en évidence quelques facteurs communs.

219. Soit à développer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant la somme des colonnes on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{ou } \Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Par soustraction de la première ligne de chacune des lignes suivantes :

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

Développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

et l'on trouve en définitive, pour la valeur du déterminant :

$$D = -(a+b+c) (-a+b+c) (a-b+c) (a+b-c)$$

EXERCICE LXX

Développer les déterminants suivants :

$$9-25. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$9-26. \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$9-27. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$9-28. \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$9-29. \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$9-30. \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$9-31. \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

$$9-32. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$9-33. \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$9-34. \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ba & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$9-35. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$9-36. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$= a^2 b c$

$$9-37. \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$$

$$9-38. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$\sim x^3 (10+x)$

$$9-39. \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$9-40. \begin{vmatrix} \frac{-bc}{b+c} & b & c \\ a & \frac{-ca}{c+a} & c \\ a & b & \frac{-ab}{a+b} \end{vmatrix}$$

$$9-41. \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

VII. APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

220. Soit à résoudre le système $ax + by = c$;
 $a'x + b'y = c'$

Formons le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

que nous appellerons *déterminant principal*. Si nous multiplions la première équation par b' et la seconde par $-b$, la somme des deux équations sera comme suit :

$$b'(ax+by) - b(a'x+b'y) = b'c - c'b$$

que l'on peut écrire en introduisant les déterminants :

$$x \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b & b' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

Le coefficient de y est nul, celui de x est le déterminant principal. La valeur de x est donnée par le quotient de

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ par le déterminant principal.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

On trouverait de même, pour la valeur de y le quotient de

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ par le déterminant principal.}$$

221. Remarque. Si le déterminant principal est nul, ou si $ab' - a'b = 0$, les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont incompatibles. En géométrie analytique, on dirait que les droites que représentent ces équations sont parallèles (§69).

Si le déterminant principal est nul et si, en même temps, les déterminants numérateurs sont nuls, le système est indéterminé : les deux droites sont alors confondues (§69).

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES À TROIS INCONNUES.

222. Soient les trois équations :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}$$

Considérons le déterminant suivant que l'on appelle le déterminant principal :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Multiplions la première équation par le mineur qui correspond à a dans le développement du déterminant principal, la seconde par le mineur qui correspond à a' , la troisième par le mineur de a'' , nous obtenons :

$$\begin{aligned} (ax+by+cz) \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - (a'x+b'y+c'z) \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \\ + (a''x+b''y+c''z) \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ = d \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - d' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + d'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Or, ces expressions peuvent s'écrire de la façon suivante, en groupant les inconnues :

$$\begin{aligned} x \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c & b & c \\ c' & b' & c' \\ c'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les coefficients de y et z sont des déterminants nuls ayant deux colonnes identiques. La valeur de x est donc obtenue en divisant par le déterminant principal, le déterminant formé en remplaçant dans le déterminant principal la colonne des coefficients de x par les termes connus.

Les valeurs de y et z sont obtenues de la même façon : le dénominateur est, dans chaque cas, le déterminant principal ; le déterminant numérateur se déduit du déterminant principal en remplaçant la colonne des coefficients de l'inconnue considérée par les termes constants.

Si Δ désigne le déterminant principal, nous aurons :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\text{avec } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Le raisonnement s'applique sans modifications à un système linéaire de n équations à n inconnues.

EXERCICE LXXI

Résoudre par les déterminants les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} 9-38. \quad x + y + z &= 11 \\ 2x - y + z &= 5 \\ 3x + 2y + z &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9-39. \quad x + 4y - 8z &= -8 \\ 2x + 8y - z &= 44 \\ 8x - y - 4z &= 110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9-40. \quad x + y - 6z &= 9 \\ x - y + 4z &= 5 \\ -2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9-41. \quad &\text{On demande la valeur de } z \\ &\text{dans le système suivant :} \\ 3x + 5y + 2z + t &= 14 \\ 2x + 8y + 3z - 2t &= 21 \\ 2x + 2y + 9z + 3t &= 63 \\ 7x + 5y + 4z + 5t &= 28 \end{aligned}$$

9-42. Trouver x dans les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} 4x + 5y + 3z + t &= 40 \\ 5x + 6y + z - 17t &= 50 \\ -x + y + 3z - 15t &= -10 \\ x/2 + 7y + 4z + 12t &= 5 \end{aligned}$$

9-43. Trouver x , y et z dans :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 61 \\ 3x + 2y + z &= 54 \\ 5x - 2y + 3z &= 58 \end{aligned}$$

9-44. Trouver les trois inconnues dans :

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 28 \\ 3x + 2y - 5z &= 16 \\ 2x + y - 3z &= 10 \end{aligned}$$

9-45. Chercher x , y et z :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 53 \\ 3x + 5y - 4z &= 2 \\ 4x + 7y - 2z &= 31 \end{aligned}$$

9-46. On demande x , y , z et u dans :

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z - 4u &= -8 \\-4x + y - 2z + 3u &= 6 \\3x - 4y + z - 2u &= -8 \\-2x + 3y - 4z + u &= -2\end{aligned}$$

9-47. Quelles valeurs prennent des inconnues dans :

$$\begin{aligned}4x - 3z + u &= 10 \\5y + z - 4u &= 1 \\3y + u &= 17 \\x + 2y + 3u &= 25\end{aligned}$$

Quelles sont les valeurs des inconnues dans les systèmes suivants :

9-48. $4x - 3z = 10$
 $2y - 5u = 5$
 $z + 3v = 19$
 $3x + y = 13$
 $2y - 3u = 11$

9-49. $x + y + 2z + u = 3$
 $2y + 3z + 4u = 4$
 $5z - 6u = 1$
 $5x - 4y = 2$

9-50. $3x + 4y - 5z + 6u + 4t = 104$
 $2x - 6y + 5z + 2u - 2t = 8$
 $x + 7y + 5z + u - 6t = 24$
 $2x + 5y + 2z + 7u + 5t = 184$
 $3x + 6y - 3z - 2u + 3t = 40$

VIII. ÉTUDE DES ÉQUATIONS HOMOGÈNES ET DU PREMIER DEGRÉ

223. Système de trois équations à trois inconnues dont une n'est pas homogène.

$$\begin{aligned}ax + by + cz &= d \\ \text{Soit le système : } a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0\end{aligned}$$

et le déterminant principal :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Ce cas ne présente rien de particulier, il suffit d'appliquer les règles précédentes où $d' = d'' = 0$. La valeur de x , par exemple, est donnée par le quotient de :

$$\begin{vmatrix} d & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

par le déterminant principal.

224. Système de trois équations linéaires et homogènes à trois inconnues.

Si, dans le cas précédent, $d = 0$, les trois équations sont linéaires et homogènes (§203). Le déterminant numérateur contient des termes tous nuls dans une de ses colonnes; donc, ce qui est évident d'ailleurs, les trois équations admettent la solution $x = y = z = 0$.

A quelle condition peut-il exister un système de solutions différentes de 0 ? *Un système de solutions autres que 0 ne saurait exister si le déterminant principal ou dénominateur est lui-même différent de 0*, car, les numérateurs sont tous nuls. Mais si le déterminant principal est nul, les valeurs de x , y et z prennent la forme $0/0$ et sont indéterminées.

Donc il faut que le déterminant principal soit nul pour que trois équations linéaires et homogènes à trois inconnues admettent des solutions non toutes nulles.

225. Condition pour que trois équations à deux inconnues soient compatibles.

On pourrait dire en analytique : *condition pour que trois droites, dont on donne les équations, se rencontrent en un même point.*

Soient les trois équations :

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

$$a''x + b''y + c'' = 0$$

Rendons homogènes ces trois équations en remplaçant x par x/z et y par y/z . Si, ensuite, nous multiplions les deux membres par z , nous obtiendrons :

$$ax + by + cz = 0$$

$$a'x + b'y + c'z = 0$$

$$a''x + b''y + c''z = 0$$

système équivalent au précédent. Mais, pour que ce système admette des solutions en x , y , z non toutes nulles, il faut que

le déterminant principal soit nul. Donc, pour que les trois équations admettent une solution commune, il suffit que le déterminant "*caractéristique*", formé par les coefficients des trois équations et les termes constants, soit nul. Car, si ce déterminant est nul le système homogène précédent admet des solutions en x , y , et z et le système proposé admet comme solutions les valeurs $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$.

226. Autre démonstration. *Condition pour que trois équations du premier degré à deux inconnues soient compatibles, ou pour que trois droites données par leurs équations soient concourantes.*

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

Si ces trois équations admettent un système de solutions communes, il faut que les solutions des deux premières équations conviennent à la troisième.

Réolvons les deux premières équations :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Si ces valeurs de x et y résolvent la troisième équation, on doit avoir en y remplaçant x et y par leurs valeurs et en multipliant par le dénominateur :

$$a'' \begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix} + b'' \begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

relation qui peut se mettre sous la forme d'un déterminant du troisième ordre :

$$\begin{vmatrix} a & -c & b \\ a' & -c' & b' \\ a'' & -c'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

comme on le vérifie facilement en développant ce déterminant par rapport à la troisième ligne.

Si nous échangeons la deuxième et la troisième colonne et en même temps les signes de la colonne des c , la condition pour que la solution des deux premières équations soit en même temps solution de la troisième devient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Donc, pour que trois équations linéaires à deux inconnues soient compatibles, il faut que leur déterminant caractéristique soit nul.

Dans le langage de la géométrie analytique, on dirait : pour que trois droites données soient concourantes, leur déterminant caractéristique doit être nul.

Remarque. Généralisant, on démontrerait que, $(n+1)$ équations du premier degré à n inconnues sont compatibles, lorsque le déterminant principal est nul.

EXERCICE LXXII

9-51. Montrer que les droites suivantes sont concourantes :

$$2x + 7y = 20$$

$$3x - 5y = -1$$

$$2y = 4$$

9-52. Déterminer c pour que les trois droites suivantes soient concourantes :

$$7x + 3y = -3$$

$$3x + 5y = 21$$

$$6x + 5y + c = 0$$

$$c = -12$$

9-53. Montrer que les droites suivantes ne sont pas concourantes :

$$x + 4y - 8 = 0$$

$$4x + 8y - 1 = 0$$

$$8x - y - 4 = 0$$

VIII. ÉQUATIONS DE COURBES OBTENUES PAR DES DÉTERMINANTS

227. Équation d'une droite.

Une droite est donnée par son équation: par exemple, la droite $ax + by + c = 0$ est connue, non pas lorsque x et y sont déterminées, car x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite, mais lorsque a, b , et c sont connues. Pour déterminer une droite, on doit donc connaître les valeurs a, b, c ou d'une façon plus précise, des valeurs proportionnelles à a, b et c .

Soit, maintenant, une droite passant par les points : $(3,4)$, $(-1, 5)$. Si l'équation de cette droite est $ax + by + c = 0$, il faut déterminer a, b et c de façon que le lieu de cette équation passe réellement par ces points, ce que l'on exprime algébriquement en remplaçant x et y par les coordonnées des points donnés :

$$3a + 4b + c = 0$$

$$-a + 5b + c = 0$$

Supposons un point quelconque (x, y) de cette même droite, nous devons avoir entre les coordonnées de ce point la relation même $ax + by + c = 0$. Donc, a, b et c doivent vérifier les trois équations :

$$ax + by + c = 0$$

$$3a + 4b + c = 0$$

$$-a + 5b + c = 0$$

équations linéaires et homogènes, où les inconnues sont a, b et c . Pour que ces équations donnent pour a, b et c des valeurs autres que 0, il faut que le déterminant caractéristique du système soit nul (§224). Donc :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation fournit une relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite joignant les points $(3,4)$ et $(-1,5)$; c'est donc l'équation de cette droite.

EXERCICE LXXIII

Trouver l'équation des droites joignant les points :

9-54. (2,3) et (-4, 5). $2x + 6y - 22 = 0$

9-55. (-3,2) et (5,-4).

9-56. (2,-3) et (-3, 7). $10x + 5y - 5 = 0$

228. Courbes dont l'équation est donnée par un polynôme.

Il est facile d'étendre la théorie précédente à d'autres courbes. Soit, par exemple, une courbe du second degré en x et y . Elle sera déterminée, pourvu que l'on donne assez de points pour calculer les coefficients qui entrent dans l'équation.

Soit, par exemple, la courbe (cercle) :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Cette équation est déterminée, si l'on connaît a, b et c . Il y a trois inconnues, trois relations suffiront pour les déterminer. Soient les trois points : (2,3), (3,-6), (-2,5) ; prenons un quatrième point sur la courbe, le point (x,y) . Nous devons avoir :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$2^2 + 3^2 + 2a + 3b + c = 0$$

$$3^2 + (-6)^2 + 3a - 6b + c = 0$$

$$(-2)^2 + 5^2 - 2a + 5b + c = 0$$

Nous avons quatre équations entre trois inconnues, a, b et c qui doivent être compatibles : *il faut que leur déterminant caractéristique soit nul (§226)*. Donc, on doit avoir :

$x^2 + y^2$	x	y	1	<i>on développe par rapport à la 1^{re} ligne</i> $= 0$
13	2	3	1	
45	3	-6	1	
29	-2	5	1	

Cette relation entre x et y est l'équation de la courbe (ici, un cercle, passant par les trois points donnés). *l'équation est*

EXERCICE LXXIV

Trouver les équations des courbes genre conique qui passent par les points donnés :

9-57. Forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ passant par les points :

(2,8), (8,2), (2,2).

3x(x^2+y^2) - 208x - 144y + 1290 = 0

9-58. Même forme que (1), mais passant par les points :

$$(2, -2), \quad (-3, 6), \quad (-3, -2).$$

9-59. Équation de la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (qui est l'équation d'une conique quelconque) passant par les points :

$$(2, 4); (5, 0); (8, 4); (5, 8); 6, \left(\frac{12+8\sqrt{2}}{3} \right).$$

9-60. Équation de la conique passant par $(-1, 2); (1, 1); (6, 3)$
 $(5, 5); (2, 6).$

REVUE. EXERCICE LXXV

9-61. Montrer que le système suivant est indéterminé :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 8x - 2y + 5z &= 3 \\ 9x - y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

9-62. Résoudre par les déterminants :

$$\begin{aligned} 4x + 6y - 3z &= 17 \\ x + 7y + z &= 35 \\ 5x + 13y + 4z &= 82 \end{aligned}$$

9-63. Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} 4-x & 3 \\ 3 & 9-x \end{vmatrix} = 0$$

9-64. Trouver la valeur du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant donne l'équation du cercle passant par les points

$$(1, 2); (2, -3); (-1, -1)$$

9-65. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^3$$

9-66. Résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 & 1 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ x & 3 & 1 & 1 \\ 4 & x & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad x^2 - 12x + 26 = 0$$

9-67. Montrer que les deux déterminants suivants sont égaux :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

CHAPITRE X

FONCTION EXPONENTIELLE

Sommaire. I. Variation de a^x . II. a^x , fonction continue et croissante de x . III. Logarithmes. IV. Systèmes de logarithmes. V. Logarithmes népériens. VI. Séries. VII. Développement de e^x et de a^x . VIII. Constructions des tables de logarithmes.

I. VARIATION de a^x

229. Théorème. *Les puissances entières successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et dépassent tout nombre donné.*

Soit un nombre p tel que $p = 1 + q$, q étant positif.

On a : $p - 1 = q$; en multipliant les deux termes de l'égalité par p , on obtient :

$$p^2 - p = q \times p = q(1+q) = q + q^2$$

En enlevant q^2 , on tire facilement la relation :

$$p^2 - p > q$$

En multipliant les deux membres par p , on obtient de même :

$$p^3 - p^2 > qp = q(1+q) = q + q^2.$$

On en conclut : $p^3 - p^2 > q$

et de même : $p^4 - p^3 > q$.

La relation vraie jusqu'à k est encore vraie jusqu'à $(k+1)$.

Supposons : $p^k - p^{k-1} > q$.

Multiplions les deux membres par p , il vient :

$$p^{k+1} - p^k > qp = q(1+q) = q + q^2.$$

Donc : $p^{k+1} - p^k > q$

la relation est encore vraie pour $(k+1)$, donc elle est vraie pour toute valeur entière de k , car elle est vérifiée pour $k=2, 3, 4 \dots$

Comme on a toujours quel que soit l'entier positif k :

$$p^{k+1} - p^k > q$$

il est évident que les puissances successives de p croissent avec l'exposant de la puissance.

Pour démontrer que p^n augmente indéfiniment avec n , faisons la somme des inégalités.

$$p - 1 = q$$

$$p^2 - p > q$$

$$p^3 - p^2 > q$$

$$p^{k+1} - p^k > q$$

$$p^n - p^{n-1} > q.$$

$$\text{il vient : } p^n > 1 + nq$$

Or n peut augmenter indéfiniment, donc p^n augmente indéfiniment et devient par conséquent plus grand que tout nombre donné.

230. Théorème. Si l'exposant x de la fonction exponentielle a^x prend des valeurs entières négatives, la fonction a^x diminue et tend vers 0 quand x augmente en valeur absolue.

Si x est négatif, posons : $x = -n$.

Il vient alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, où n est positif. Mais a^n augmente indéfiniment, quand n tend vers l'infini ; donc a^{-n} diminue indéfiniment, quand n tend vers l'infini : à la limite, $a^{-n} = 0$.

231. Théorème. Les racines entières successives d'un nombre plus grand que l'unité diminuent quand l'indice augmente et ont pour limite l'unité.

Soit a un nombre plus grand que l'unité.

Il faut $\sqrt[n]{a} > 1$, car de $\sqrt[n]{a} < 1$, on déduirait $a < 1$, en élevant les deux membres à la puissance n .

Démontrons que $\sqrt[n]{a}$ diminue quand n augmente. Comparons $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[p]{a}$. Supposons $n > p$; nous pouvons appliquer à ces quantités les théorèmes des radicaux arithmé-

tiques : donc, ${}^n\sqrt{a} = {}^{np}\sqrt{a^p}$ puisqu'on peut multiplier par un même nombre l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.

De même ${}^p\sqrt{a} = {}^{np}\sqrt{a^n}$.

Puisque $a^n > a^p$ quand n est plus grand que p (§229), on a : ${}^{np}\sqrt{a^n} > {}^{np}\sqrt{a^p}$, ou ${}^p\sqrt{a} > {}^n\sqrt{a}$, lorsque $n > p$.

232. La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre plus grand que l'unité diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée, quand n augmente indéfiniment.

Supposons toujours réalisée l'inégalité ${}^n\sqrt{a} > 1+e$, quelque grand que soit n . On aurait évidemment en élevant les deux membres à la puissance n , $a > (1+e)^n$ quel que soit n , ce qui est impossible, puisque $(1+e)^n$ augmente indéfiniment avec n (§229).

Donc, ${}^n\sqrt{a}$ se rapproche indéfiniment de l'unité tout en lui restant toujours supérieur.

233. Les puissances successives d'un nombre positif plus petit que l'unité vont en décroissant et deviennent plus petites que toute quantité donnée.

Soit q , un nombre positif plus petit que l'unité. On peut écrire : $q = \frac{1}{p}$, p étant plus grand que l'unité, et $q^n = \frac{1}{p^n}$.

Or, p^n augmente indéfiniment ; la fraction $\frac{1}{p^n}$ diminue donc indéfiniment, et tend à devenir plus petite que tout nombre donné.

234. Théorème. Les racines successives d'un nombre positif plus petit que l'unité vont en croissant quand l'indice augmente et ont pour limite l'unité.

Supposons $a < 1$. Puisque $a = 1/p$, p étant plus grand que l'unité, dès lors ${}^n\sqrt{a} = \frac{1}{{}^n\sqrt{p}}$; or, ${}^n\sqrt{p}$ diminue quand n augmente (§231), il s'ensuit que ${}^n\sqrt{a}$ augmente quand n augmente :

Comme ${}^n\sqrt{p}$ tend vers l'unité, ${}^n\sqrt{a}$ augmente et approche de plus en plus de l'unité.

II. FONCTIONS CONTINUES

235. Si $y = 4x + 2$, y dépend de x : on dit que *c'est une fonction de x* . Si x prend des valeurs entre 0 et 100 par exemple, il est facile de calculer les valeurs de y correspondantes. Lorsque x augmente d'une très petite valeur, y augmente également très peu : y est une fonction continue de x .

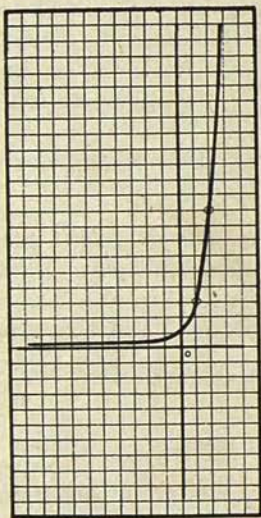


Fig. 12

La courbe représente la fonction $y = 3^x$. Pour x négatif, y varie depuis 0 (x infini négatif) jusqu'à 1, pour $x = 0$; lorsque x devient positif, y prend toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à l'infini.

En général une fonction est continue dans un intervalle a, b , quand elle y est bien déterminée, qu'elle conserve une valeur finie pour toute valeur de x prise dans cet intervalle, et que l'accroissement de la fonction tend vers 0, lorsque l'accroissement de la variable tend vers 0. Cette notion de fonction continue sera mieux précisée plus tard.

La fonction $y = \sin x$ est une fonction continue de x ; y se calcule facilement lorsque x est connu, et si x augmente d'une très petite quantité, $\sin x$ n'augmente que d'une très petite quantité.

La fonction $\operatorname{tg} x$ n'est pas continue dans le voisinage de $x = 90$ degrés, car pour x très près de 90 degrés, $\operatorname{tg} x$ est très grand et positif. Si x augmente très peu mais devient plus grand que 90 degrés, la valeur de $\operatorname{tg} x$ passe brusquement à une valeur négative très grande. Pour un faible accroissement de x , la valeur de y subit donc un changement très grand, tendant vers l'infini, donc la fonction $\operatorname{tg} x$ n'est pas continue dans le voisinage de $x = 90$ degrés.

236. Théorème. *Si x varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x croît d'une manière continue de 0 à l'infini, quand a est plus grand que l'unité.*

Nous supposons $a > 1$, alors a^x augmente avec x .

Nous avons en effet : $a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1)$. Le nombre h étant très petit, est compris entre les deux valeurs $1/N$, et $1/N'$, N et N' étant des nombres très grands et entiers. Or $a^{1/N}$ et $a^{1/N'}$ sont toujours supérieurs à l'unité mais (§231) tendent vers l'unité, quand N et N' sont suffisamment grands. Donc a^h tend vers l'unité, mais reste toujours supérieur à l'unité : posons $a^h = (1 + e)$, e étant un nombre très petit positif. Alors : $a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1) = a^x \cdot e > 0$.

Donc, si $a > 1$, $a^{x+h} > a^x$, dès que $h > 0$.

mais comme e tend vers 0, il en est ainsi de a^x . e et $a^{x+h} - a^x$ tend vers 0 en même temps que h : la fonction a^x est donc continue.

Nous avons vu (§229) que a^x augmente indéfiniment quand x entier augmente indéfiniment. Le raisonnement précédent montre que si x varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, la fonction a^x croît constamment lorsque x varie d'une manière continue, c'est-à-dire par quantités infiniment petites.

237. L'équation $a^x = b$, a toujours une racine et une seule pourvu que b représente un nombre positif.

En effet, la fonction a^x prenant toutes les valeurs positives, prendra nécessairement la valeur b ; comme cette fonction est toujours croissante (§236), elle ne peut repasser par la même valeur, autrement, elle serait alternativement croissante et décroissante. Donc a^x prend la valeur b une fois et une seule fois.

238. Posons $a = 1/b$, b étant un nombre plus grand que l'unité. Nous aurons : $a^x = 1/b^x$. Si x croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, b^x croît d'une manière continue depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et par suite a^x décroît d'une manière continue, depuis l'infini jusqu'à 0.

Dans le cas où $a < 1$, la proposition (§237) est donc encore valable.

EXERCICE LXXVI *exercice*

10-1. Construire la courbe : $y = 2^x$ et résoudre graphiquement l'équation : $10 = 2^x$. — Trouver la solution par logarithmes.

10-2. Construire la courbe $y = 3^x$. Résoudre graphiquement $8 = 3^x$.
Vérifier par logarithmes.

pas exercice 10-3. Construire la courbe $y = 5^x$. Résoudre graphiquement et par logarithmes : $10 = 5^x$

10-4. Construire la courbe $y = (\frac{1}{2})^x$; résoudre graphiquement et par logarithmes l'équation : $3 = (\frac{1}{2})^x$

✓ 10-5. Trouver les valeurs de x telles que $2^x < .001 \rightarrow 2^x > 1000 \text{ si } x > 10$

✓ 10-6. Résoudre : $3^x = 177147$

✓ 10-7. Résoudre : $(\frac{3}{4})^x = 51.5$

10-8. Résoudre : $3^{x/2} = 768$

10-9. Résoudre : $3\sqrt{x} = 243$

10-10. Résoudre : $5x^2 - 3x = 625$

10-11. Résoudre : $x^2 - 7x + 12 = 1$

10-12. Résoudre : $3^x + 1 + \frac{18}{3^x} = 29$

10-13. Résoudre par rapport à x : $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

10-14. Résoudre le système : $x + y = 65$ et $\log x + \log y = 3$

10-15. Résoudre : $x^2 + y^2 = 425$;
 $\log x + \log y = 2$.

10-16. Résoudre : $x^4 + y^4 = 641$
 $2 \log x + 2 \log y = 2$.

10-17. Résoudre : $\log x + \log y = 3/2$
 $\log x - \log y = 1/2$.

10-18. Résoudre : $\sqrt{x+y} = 2$
 $(y+x)3^x = 279936$

III. LOGARITHMES

✓ 239. On appelle logarithme d'un nombre b dans un système de base a , l'exposant dont il faut affecter le nombre a pour obtenir le nombre b .

Si $a^x = b$, x par définition est le logarithme de b dans le système de base a . On écrira : $x = \log_a b$

240. Il a été démontré (§236) que la fonction a^x , où a est un nombre positif, prend toutes les valeurs réelles et positives. Donc, on peut trouver une valeur x telle que $a^x = b$, quel que soit b , pourvu que b soit réel et positif. *Tout nombre positif possède donc un logarithme dans un système de base a .*

EXERCICE LXXVII

10-19. Construire la courbe $y = 2^x$ et trouver graphiquement, avec toute la précision possible, les logarithmes des nombres suivants :

1.5, 2.5, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

10-20. Construire de même la courbe $y = 3^x$ et trouver graphiquement les logarithmes des nombres de (1).

10-21. Procéder de la même façon avec la courbe $y = 5^x$.

10-22. Construire la courbe $y = 10^x$ et procéder comme en (1).

241. *Identité des logarithmes définis par les progressions ou comme exposants.*

La définition des logarithmes donnée en algèbre se ramène à la définition actuelle.

On a défini les logarithmes comme étant les termes d'une progression arithmétique correspondant aux termes d'une progression géométrique.

Soient les deux progressions :

1	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5	...	q^n	...
0	r	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	...	nr	...

par définition nr est le logarithme de q^n . Les propriétés des logarithmes sont ensuite démontrées.

Nous pouvons obtenir les mêmes logarithmes avec les exponentielles. Écrivons : $a^r = q$, c'est-à-dire, prenons $a = q^{1/r}$.

Dans cette hypothèse : $q = a^r$; $q^2 = a^{2r}$; $q^3 = a^{3r}$... ; et enfin $q^n = a^{nr}$, et l'on voit qu'à la progression géométrique q correspond une progression arithmétique de raison r telle que nr soit le logarithme de q^n .

Puisque $q^n = a^{nr}$, nr serait par définition, le logarithme de q^n , dans le système a (§239).

IV. SYSTÈMES DE LOGARITHMES

✓ 242. Posons : $a^x = b$. Par définition, x est le logarithme de b dans le système de base a . On peut écrire : $x = \log_a b$. Il y a autant de systèmes différents de logarithmes qu'il y a de nombres pouvant servir de base : donc un nombre infini.

✓ 243. *Changement de système de logarithmes.* Les logarithmes d'un nombre dans deux systèmes différents sont liés entre eux par une relation que nous allons établir.

Posons : $b^x = y$. Par définition, $x = \log_b y$.

Nous aurons ainsi l'identité de définition :

$$b^{\log_b y} = y$$

Les logarithmes des deux membres dans le système de base a donneront les résultats suivants. Le logarithme de $b^{\log_b y}$ s'obtient en multipliant le logarithme de b par l'exposant $\log_b y$, donc : $\log_b y \cdot \log_a b$. Le logarithme du second membre est évidemment $\log_a y$, et nous aurons l'équation :

$$\log_b y \cdot \log_a b = \log_a y, \text{ d'où :}$$

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

c'est-à-dire que le logarithme d'un nombre dans le système b est égal au quotient du logarithme du même nombre dans le système a , par le logarithme de la base b dans le système a .

✓ 244. *Corollaire.* Le rapport des logarithmes de deux nombres est indépendant de la base du système.

Soient les deux nombres y et N , nous aurons :

$$\frac{\log_b N}{\log_b y} = \frac{\frac{\log_a N}{\log_a b}}{\frac{\log_a y}{\log_a b}}$$

ou : $\frac{\log_b N}{\log_b y} = \frac{\log_a N}{\log_a y}$

EXERCICE LXXVIII

Construire les courbes :

10-23. $y = 2^x$ 10-25. $y = 9^x$

10-24. $y = 3^x$ 10-26. $y = 4^x$

10-27. $y = 10^x$

Trouver graphiquement les logarithmes des nombres 2, 3, 4, 8, 9, 10, dans les systèmes (10-28.) 2; (10-29.) 3; (10-30.) 4; (10-31.) 9; (10-32.) 10.

10-33. Dresser le tableau des rapports des logarithmes de ces nombres dans la base 2 aux logarithmes des mêmes nombres dans la base 3. Quelle est la valeur constante de ce rapport ?

10-34. Procéder de la même façon en comparant les logarithmes de ces divers nombres dans la base 2 aux logarithmes des mêmes nombres dans la base 4.

10-35. Comparer les $\log_3 y$ aux $\log_4 y$.

10-36. Comparer les $\log_2 y$ aux $\log_{10} y$.

245. Les progressions suivantes définissent des logarithmes ; nous supposons q et r positifs.

1	q	q^2	q^3	q^4	...	q^n	...
0	r	$2r$	$3r$	$4r$	...	nr	...

Nous pouvons insérer entre deux termes consécutifs de la progression géométrique et entre les termes de la progression arithmétique un même nombre de moyens, soit $(m-1)$ moyens.

Dans le premier cas, puisque entre q^n et q^{n+1} il y a $(m-1)$ moyens géométriques, q^{n+1} est le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique de raison q' telle que $q^{n+1} = q^n \times (q')^m$. Donc $q' = (q^{n+1}/q^n)^{1/m}$; si m est suffisamment grand cette racine $m^{\text{ième}}$ q approchera indéfiniment de l'unité (§232).

Nous pourrions écrire : $q' = 1 + \alpha$, α étant infiniment petit quand m est infiniment grand.

La raison de la nouvelle progression arithmétique est $\beta = \frac{1}{m} [(n+1)r - nr]$ ou $\beta = \frac{r}{m}$, valeur qui devient très petite en même temps que m devient très grand.

Les progressions précédentes sont ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1+\alpha & (1+\alpha)^2 & (1+\alpha)^3 & (1+\alpha)^4 & \dots & (1+\alpha)^n \\ 0 & \beta & 2\beta & 3\beta & 4\beta & & n\beta \end{array}$$

et ces progressions qui sont les précédentes élargies peuvent évidemment être substituées aux primitives pour définir le même système de logarithmes.

246. *Tout nombre positif a un logarithme.*

On peut montrer que le nombre N possède un logarithme. En effet, si le nombre $(m-1)$ de moyens est suffisamment grand, la différence entre deux termes de la progression géométrique peut devenir très petite. Il existe donc un de ces termes très voisin de N , mais plus petit, et un autre très voisin de N mais plus grand (sans compter le cas où il existe un terme égal à N). Ces nombres ont tous leurs correspondants dans la progression arithmétique ; le logarithme du nombre N , sera compris entre les logarithmes des nombres entre lesquels il est placé et qui diffèrent d'aussi peu que l'on veut, si le nombre de moyens $(m-1)$ est suffisamment grand.

Remarque. La définition des logarithmes (§239) permet une démonstration immédiate. On sait que l'équation $a^x = b$, a toujours une racine et une seule (§237), donc on a toujours, quel que soit b , $x = \log_a b$.

247. Module. Les bases des progressions sont prises arbitrairement, on peut choisir β et α c'est-à-dire q et r de façon que β/α soit un nombre donné M , alors $\beta = M\alpha$, les progressions de (§245) deviennent :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1+\alpha & (1+\alpha)^2 & (1+\alpha)^3 & (1+\alpha)^4 & \dots & (1+\alpha)^n \\ 0 & M\alpha & 2M\alpha & 3M\alpha & 4M\alpha & \dots & nM\alpha \end{array}$$

Le nombre M s'appelle le module du système et à toute valeur de M , correspond un système particulier de logarithmes.

V. LOGARITHMES NÉPÉRIENS

248. On appelle logarithmes népériens les logarithmes définis par les progressions précédentes (§247) lorsque le module M est l'unité.

Les progressions définissant les logarithmes népériens sont donc les suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1+\alpha & (1+\alpha)^2 & (1+\alpha)^3 & (1+\alpha)^4 & \dots & (1+\alpha)^n \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha & 4\alpha & \dots & n\alpha \end{array}$$

α étant une quantité très petite, tendant vers 0.

Les logarithmes de module M sont, par définition, M fois les logarithmes népériens.

Puisque nous avons (243):

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b} = \frac{\log_{\text{nép}} y}{\log_{\text{nép}} b} = M \times \log_{\text{nép}} y \quad (247),$$

on conclut que M est l'inverse du logarithme de la base nouvelle dans le système népérien,

$$\text{ou: } M = \frac{1}{\log_{\text{nép}} b}.$$

249. Comment passer du système népérien de logarithmes aux logarithmes vulgaires. En particulier, pour passer du système népérien au système vulgaire, où la base est 10, il suffit de multiplier, les logarithmes népériens par l'inverse du logarithme népérien de 10 (§248). Le logarithme népérien de 10 est 2.3026, l'inverse de ce nombre est .43429.

La relation suivante est donc toujours vraie :

$$\log_{\text{vulgaire}} y = .43429 \times \log_{\text{nép}} y.$$

Ici, M est .43429, ou, plus exactement :

$$M = .4342944819 \dots$$

On désigne le logarithme népérien par les symboles : $\log_e N$, ou, plus simplement, par $L N$.

250. Base du système Népérien. On appelle base d'un système de logarithmes le nombre qui, dans ce système, a l'unité comme logarithme.

La définition des logarithmes déduite de la relation : $a^x = y$, où x est le logarithme de y dans la base a , fait voir immédiatement que le nombre dont le logarithme est l'unité, est nécessairement a .

Si $(1+\alpha)^n$ est la base du système népérien, il faut que le logarithme de ce nombre soit l'unité. Comme le logarithme de $(1+\alpha)^n$ est $n\alpha$, on doit avoir $n\alpha \doteq 1$, ou $\alpha = 1/n$, n tendant vers l'infini puisque α tend vers 0.

Il sera démontré que la valeur de cette base, que l'on appelle e , est la somme à l'infini de la série :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots$$

la valeur de e est : $e = 2.7182818284590452\dots$

VI. LA SÉRIE e

251. On appelle série e la série précédente :

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

La série e est **convergente**. En effet, terme à terme, elle est plus petite que la série $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 \dots$ puisque la série e est, en négligeant le premier terme,

$$1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 \dots$$

D'ailleurs le nombre de d'Alembert de cette série est :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = \frac{1}{n}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, ce nombre de d'Alembert tend vers 0, et la série est convergente.

252. La série e est comprise entre 2 et 3.

Il est évident que e est plus grand que 2.

De même :

$$e < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \right); \text{ or, la série entre}$$

parenthèses est une progression géométrique convergente dont la raison est $1/2$, le premier terme 1, et la somme 2.

On a donc, $e < 1 + 2 = 3$.

Donc, la relation est établie : $2 < e < 3$.

✓ 253. Valeur du reste de la série e lorsque la somme est calculée jusqu'au terme $\frac{1}{n!}$.

La série étant calculée jusqu'à $\frac{1}{n!}$, le reste de la série est :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} \dots$$

et ce reste peut s'écrire :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \dots \right)$$

si l'on remplace $(n+2)$, $(n+3)$, $(n+4)$... par $(n+2)$, la somme des termes compris dans la parenthèse sera augmentée. Donc :

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots \right),$$

la progression géométrique entre parenthèses dont la raison est $\frac{1}{n+2}$, est convergente et a pour somme :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{(n+2)}} \quad \text{ou} \quad \frac{n+2}{n+1};$$

il s'ensuit que r_n est plus petit que $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$,

$$\text{ou, enfin, } r_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Nous allons démontrer que le facteur $\frac{n+2}{(n+1)^2} < 1$ dès que n dépasse 1.

$$\text{L'inégalité } \frac{n+2}{(n+1)^2} < 1, \text{ entraîne } n+2 < (n+1)^2, \\ \text{ou, } n^2 + n - 1 > 0.$$

Or, les racines de $n^2 + n - 1$ sont $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$; dès que n dépasse la plus grande des racines, $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, qui est plus petite que 1, la relation est vraie.

Donc $r_n < \frac{1}{n!}$, ou encore, $r_n = \frac{\theta}{n!}$, θ étant un nombre plus petit que l'unité.

254. Le nombre e est incommensurable.

Un nombre est commensurable lorsqu'il est entier ou qu'il peut se mettre sous forme d'un quotient d'entiers.

Si le nombre e est une fraction $\frac{m}{n}$ irréductible, nous aurons :

$$e = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!} + r_n$$

en multipliant les deux membres par $n!$ et en remplaçant r_n par sa valeur $\frac{\theta}{n!}$ (253), nous obtenons à gauche un entier, et, à droite, une somme d'entiers, plus le nombre θ plus petit que l'unité.

Nous aurions l'égalité suivante : $E = E' + \theta$ égalité impossible, puisque la différence entre deux entiers ne saurait évidemment être un nombre plus petit qu'un entier. Donc, e ne saurait être le quotient de deux entiers, c'est un nombre incommensurable.

LE NOMBRE e .

Le nombre e a été introduit dans la science, vers 1748, par le mathématicien Suisse Euler (1707-1783). Le nombre e est transcendant, c'est-à-dire que non seulement il n'est pas égal au quotient de deux nombres entiers, mais, il ne peut être racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des entiers : cette propriété a été démontrée en 1873 par le mathématicien français Hermite (1822-1905).

255. Calcul de e .

Supposons que l'on calcule chaque terme de la série e avec 8 décimales, l'erreur possible sur chaque terme est moindre que la moitié d'une unité de l'ordre de la dernière décimale conservée, puisque l'on

prend toujours l'entier le plus proche. S'il y a n termes en tout, l'erreur à craindre est donc inférieure à $\frac{n}{2}$ unités de l'ordre de la dernière décimale.

De plus, le reste négligé est moindre, en valeur absolue, que la valeur du dernier terme calculé (§253). Il est donc facile de connaître la limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au terme de rang n .

Le calcul se fait par opérations simples et la valeur de e est : 2. 7182818284590452 ...

VII. DÉVELOPPEMENT DE e^x ET DE a^x .

La série e est la limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$, lorsque n augmente indéfiniment.

256. LEMME. Si $a, b, c, \dots l$ sont des nombres positifs plus petits que l'unité, le produit:

$(1-a)(1-b)(1-c)\dots(1-l) = 1 - \theta(a+b+c\dots+l)$,
où θ est un nombre plus petit que l'unité.

Dans le cas de deux facteurs :

$$(1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab$$

le produit est plus grand que $1 - (a+b)$, puisque ab est positif. On peut donc écrire : $(1-a)(1-b) = 1 - \theta(a+b)$, θ étant un nombre plus petit que l'unité.

Si on multiplie les deux membres de la relation précédente par $(1-c)$, la relation :

$(1-a)(1-b)(1-c) = [1 - \theta(a+b)](1-c) = 1 - \theta'(a+b+c)$ sera évidemment vérifiée, car la relation vraie pour deux facteurs s'applique aux deux facteurs :

$$[1 - \theta(a+b)](1-c),$$

et donne :

$$\begin{aligned} [1 - \theta(a+b)](1-c) &= 1 - \theta''[\theta(a+b) + c], \\ &= 1 - \theta'(a+b+c). \end{aligned}$$

Supposons la relation vraie pour k facteurs, c'est-à-dire que nous ayons :

$$(1-a)(1-b)\dots(1-k) = 1 - \theta_k(a+b+c\dots+k).$$

Si nous multiplions les deux membres par $(1-n)$, nous aurons encore le produit de deux facteurs :

$$(1-n) [1 - \theta_k(a+b+c\dots+k)]$$

et ce produit est égal à

$$1 - \theta'_{k+1}[n + \theta_k(a+b+c\dots+k)] = 1 - \theta_{k+1}(a+b+c\dots+k+n)$$

La relation vraie jusqu'à k est encore vraie pour $k+1$, donc, elle est générale.

Remarque. $\theta_k(a+b+c\dots+k)$ est nécessairement inférieur à l'unité, car chacun des facteurs du produit étant

différent de 0, le produit lui-même est différent de 0; donc, la parenthèse est inférieure à 1.

✓ **257. Développement de $(1 + x/n)^n$ quand n , nombre positif, augmente indéfiniment.**

Appliquant la formule du binôme qui est valable, puisque x/n est plus petit que l'unité (§169), nous avons :

$$\begin{aligned} (1 + x/n)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot \frac{x^k}{n^k} \dots \end{aligned}$$

Ce développement peut encore prendre la forme suivante :

$$\begin{aligned} &= 1 + x + \frac{(1 - 1/n)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 \\ &+ \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n)(1 - 3/n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 \dots \\ &\frac{(1 - 1/n) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x^k \dots \end{aligned}$$

L'application du lemme précédent (§256) permet de simplifier :

$$\begin{aligned} &= 1 + x + \frac{(1 - 1/n)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(1 - \theta_3 \times \frac{3}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 \\ &+ \frac{(1 - \theta_4 \times \frac{6}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{(1 - \theta_5 \times \frac{10}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot x^5 \dots \\ &+ \frac{[1 - \theta_k \cdot \frac{k(k-1)}{2n}] x^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} + \dots \end{aligned}$$

En groupant les termes convenablement, mettant sur une première ligne le premier terme de chaque parenthèse et sur la seconde ligne l'autre terme, on trouve :

$$(1 + \frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^k}{k!} \dots$$

$$- \frac{x^2}{2n} (1 + \frac{\theta_3}{1} x + \frac{\theta_4}{2!} x^2 + \frac{\theta_5}{3!} x^3 + \frac{\theta_6}{4!} x^4 \dots + \frac{\theta_k}{(k-2)!} x^{k-2} \dots).$$

Or, la série contenue dans la parenthèse de la première ligne est convergente, puisque le nombre de d'Alembert pour cette série est $\frac{x}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{x}{n},$$

et ce nombre tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment. La série contenue dans l'autre parenthèse étant, terme à terme, plus petite que la précédente est nécessairement convergente.

Le produit de cette dernière série par $\frac{x^2}{2n}$ est donc nul, puis-

que $\frac{x^2}{2n}$ tend vers 0. A la limite, quand n augmente indéfiniment :

$$(1 + \frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^k}{k!} \dots$$

Comme cas particulier, lorsque $x = 1$, on a le développement suivant :

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

= donc la série e

Remarque.

$$(1 + 1/n)^n = (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

lorsque α tend vers 0, puisque l'on peut écrire $\alpha = 1/n$; en faisant tendre n vers l'infini, α tend vers 0.

258. Développement de e^x .

$$\text{Identiquement : } (1 + x/n)^n = \left((1 + \frac{x}{n})^{\frac{n}{x}} \right)^x;$$

or, si l'on écrit $x/n = \alpha$, α tend vers 0 en même temps que n tend vers l'infini. Donc, $(1 + x/n)^{n/x} = (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$.

Et, d'après le développement précédent :

$$(1 + x/n)^n = \left[(1 + \frac{x}{n})^{\frac{n}{x}} \right]^x = e^x.$$

Cette expression fournit le développement de e^x .

$$(1 + \frac{x}{n})^n = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots \quad (257).$$

Lorsque $x = 1$, on retrouve la série e .

Le développement précédent a été obtenu pour x ayant une valeur finie quelconque, positive ou négative.

Pour développer e^x , x étant quelconque mais réel (la valeur imaginaire de x n'ayant pas été étudiée), le développement précédent est donc valable.

259. Développement de a^x . Comme $a \equiv e^{\log_e a}$ (242).

$$a^x = e^{x \log_e a} = 1 + \frac{x \log_e a}{1} + \frac{(x \log_e a)^2}{2!} + \frac{(x \log_e a)^3}{3!} + \dots$$

EXERCICE LXXX

10-37. Calculer la valeur de $e^{1/2}$, par un développement en série.

10-38. Quelle est la valeur limite de $(1 + 2/n)^n$. $= e^2$

10-39. Calculer la racine cinquième de e par un développement en série.

10-40. Calculer la valeur de e^2 par un développement en série.

10-41. Quelle est la racine quatrième de e ; trouver cette valeur par un développement en série.

10-42. Valeur limite de $(1 + \sin x)^{1/x}$, quand x tend vers 0. $= e$

10-43. Valeur limite de $(1 + x^2)^{1/x}$, quand x tend vers 0. $= 1$

10-44. Valeur limite de $(1 + x/2)^{1/x}$, quand x tend vers 0. $= e^{1/2}$

10-45. Valeur limite de $(1 + 1/x^2)^{x^3}$, quand x tend vers l'infini. $= \infty$

10-46. Valeur limite de $(1 + x^2)^{1/x}$, quand x tend vers 0.

10-47. Valeur limite de $(1 + n)^{1/n}$, quand n augmente indéfiniment.
Voir (185.)

10-48. Quel est le montant de \$1 000 000 placées à intérêts composés, à 6%, pour 20 ans, l'intérêt se composant tous les ans ? $10^6 (1+0.06)^{20}$

10-49. Même que 12, l'intérêt se compose tous les 6 mois.

10-50. Même que 12, l'intérêt se compose tous les mois.

10-51. Même que 12, l'intérêt se composant tous les instants. suppose alors que dans une année il y a n instants, n étant un nombre indéfiniment grand. $10^6 \cdot e^{1.2}$

10-52. Quelle est la base du système de logarithmes, lorsque le logarithme de 8 est 2 ? base $= 2\sqrt{2}$

10-53. Si le logarithme de 17 est 4, quelle est la base du système ? base $= \sqrt[4]{17}$

10-54. Le logarithme de 37 est 4.5 dans un système, quel sera le logarithme de 370 dans ce même système ? $\log 370 =$

10-55. Si le logarithme de 7 est 7 dans un certain système, quel sera le logarithme de 343 dans ce même système ?

VIII. CONSTRUCTION DE LA TABLE DE LOGARITHME

260. Série logarithmique.

Posons :

$$y = L(1+x) =$$

log. nép. de $(1+x)$.

Donc : $(1+x) = e^y$ (239), puisque e est la base du système népérien.

$$L n = \log_e n$$

SÉRIE LOGARITHMIQUE

C'est Nicolas Mercator (né dans le duché de Holstein vers 1620) qui découvrit la série logarithmique :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$$

Rouse Ball, p. 317.

$$\text{et } (1+x) = e^y = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \quad (258)$$

pour n augmentant indéfiniment.

Inversement, pour n tendant vers l'infini :

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + x\right)^{\frac{1}{n}} \text{ et } y = n \left(1 + x\right)^{\frac{1}{n}} - n.$$

Développons $\left(1 + x\right)^{\frac{1}{n}}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{n} x + \frac{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}-1\right)}{1 \cdot 2} x^2 \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}-1\right) \left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}-1\right) \left(\frac{1}{n}-2\right) \left(\frac{1}{n}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \dots \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } n \left(1 + x\right)^{\frac{1}{n}} - n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots$$

lorsque n tend vers l'infini, et

$$N.O. \quad y = \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \dots \quad (1)$$

c'est la série logarithmique.

$$\text{De même } \log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \dots$$

$$\text{et } \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right).$$

$$\text{Prenons : } x = \frac{1}{2z+1};$$

$$\text{il vient alors : } \frac{1+x}{1-x} = \frac{z+1}{z},$$

$$\text{et } \log_e \left(\frac{z+1}{z} \right) = 2 \left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right) \quad (2)$$

d'après ce qui précède....

Calcul du logarithme népérien d'un nombre.

De la formule (2) précédente, on tire :

$$\log_e(z+1) = \log_e z + 2 \left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right) \quad \text{N.B.}$$

formule qui s'applique dès que z est positif, puisque la précédente en x s'appliquait pour $x < 1$.

Nous obtiendrons ainsi $\log_e 2 = 0 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \dots \right)$

$$\log_e 2 = .693147 \dots$$

De même pour $\log_e 3$.

Remarque. On trouve immédiatement :

$$\log_e 2 = \log_e (1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \quad (1)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \dots \right) = .693147 \dots \quad (2)$$

EXERCICE LXXIX

Calculer les logarithmes népériens de :

10-56. 2	10-57. 3	10-58. 4	10-59. 5
10-60. 10	10-61. 15	10-62. 25	

260'. Logarithmes pour des bases quelconques.

On a : $\log_{10} n = \frac{\log_e n}{\log_e 10}$

Donc, pour trouver le logarithme vulgaire d'un nombre, calculer le logarithme népérien (§260) de ce nombre, puis multiplier par l'inverse du logarithme népérien de 10 soit : .434 294 481 9 (§249).

$\log_a = \frac{1}{\log_b a}$ _____

CHAPITRE XI

IMAGINAIRES

Sommaire. I. Définition. II. Calcul algébrique des imaginaires. III. Calcul géométrique des imaginaires. IV. Formule de Moivre. V. Applications de la formule de Moivre.

I. DÉFINITION

261. Lorsque le calcul algébrique conduit à une équation du second degré, il peut arriver qu'il soit impossible de trouver des solutions. Si l'on demande un nombre tel que son carré augmenté de 2 ait 0 comme somme, on demande une chose impossible, car tout carré étant un nombre positif, ce nombre positif augmenté de 2 ne peut évidemment pas donner 0. L'équation $x^2 + 2 = 0$ est une équation sans solution.

Dans un but de généralisation, on a introduit de nouvelles quantités appelées quantités imaginaires. Le problème précédent : $x^2 + 2 = 0$, admettra deux racines imaginaire :

$$x = \pm \sqrt{-2}$$

C'est ainsi que l'imaginaire $\sqrt{-2}$ sera définie comme une quantité telle que son carré soit -2 .

262. Il y a une imaginaire qui joue un rôle important dans toute la théorie, c'est l'imaginaire i . *L'imaginaire i , par définition, est la racine carrée de -1 , on posera :*

$$i = \sqrt{-1}.$$

De là, appliquant les principes de la théorie des radicaux arithmétiques et rappelant la définition de i , on tire :

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$$

On remarquera que i^k se calcule simplement. En effet, k est un multiple de 4 exact, ou un multiple de 4 augmenté de 1, 2, ou 3 :

$$k = 4p + r, \text{ donc } i^k = i^{4p+r}$$

Mais $i^{4p} = (i^4)^p = 1^p = 1$;

donc : $i^k = 1 \times i^r = i^r$

$i^k = 1$, pour $r = 0$

$i^k = i$, pour $r = 1$

$i^k = -1$, pour $r = 2$

$i^k = -i$, pour $r = 3$

lorsque $k = 4p + r$.

263. Quantité imaginaire. On appelle quantité imaginaire une expression de la forme $a+bi$, où a et b sont des quantités réelles, i étant le nombre qui vient d'être défini.

Si la partie réelle disparaît, il reste seulement bi et on a une imaginaire *pure*.

Si, au contraire, $b = 0$, la partie imaginaire disparaît et la quantité est *réelle*.

264. Imaginaires nulles.

Soit une imaginaire $a+bi$ que l'on suppose nulle. Il est évident que a et bi étant des quantités de genres différents, il faut que séparément chaque partie de la somme soit nulle pour que la somme soit nulle. Autrement, nous aurions $a = -bi$, c'est-à-dire que a serait une quantité imaginaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc si l'on a : $a + bi = 0$, il faut à la fois $a = 0$, $b = 0$

265. Imaginaires égales

Supposons $a+bi = m+ni$, alors

$$(a-m) + (b-n)i = 0$$

et cette imaginaire sera nulle si séparément :

$$a-m=0, \text{ ou } a=m \text{ et}$$

$$b-n=0, \text{ ou } b=n \text{ (§264).}$$

Pour que deux imaginaires soient égales il faut donc que la partie réelle de l'une égale la partie réelle de l'autre et que la partie imaginaire de l'une égale la partie imaginaire de l'autre.

266. Module d'une imaginaire.

On appelle module de l'imaginaire, $a+bi$ le nombre positif $\sqrt{a^2+b^2}$ et l'on écrit :

$$\text{mod. } (a+bi) = \sqrt{a^2+b^2} = |a+bi| \neq \text{valeur absolue de } a+bi$$

Il suit de cette définition que les imaginaires :
 $a+bi$, $-a+bi$, $a-bi$, $-a-bi$ ont toutes le même module :

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

267. Le module d'une imaginaire ne peut être nul que si a et b sont nuls séparément. D'après cela, *si le module d'une imaginaire est nul, cette imaginaire est nulle et réciproquement.*

EXERCICE LXXXI

1. Donner la forme $a+bi$ aux imaginaires suivantes :

- 11-1. $4 + \sqrt{-9}$, 11-2. $7 - \sqrt{-64}$, 11-3. $6 - \sqrt{-37}$,
 11-4. -29 , 11-5. 7 , 11-6. $3 + \sqrt{-5}$,
 11-7. $-8i$, 11-8. $10 + 60i$, 11-9. $4 + 6\sqrt{-5}$,
 11-10. $4ab + 2\sqrt{(a^2 - b^2)}$ où $(b) > (a)$

II. CALCUL ALGÈBRIQUE DES IMAGINAIRES

268. Addition d'imaginaires.

Par définition, la somme de plusieurs imaginaires est une imaginaire ayant pour partie réelle la somme des parties réelles et pour coefficient de i la somme des coefficients de i dans les imaginaires données.

Lorsque la somme de deux imaginaires est nulle, on dit que les imaginaires sont égales et de signes contraires.

EXERCICE LXXXII

- 11-11. Somme de $(14+3i) + (-5+7i) + (2-3i) + 4i + (-15) + (2+3i)$.
 11-12. $(7+2i) + 3-i + (-7+7i) + (8-6i) + (-11-2i)$.
 11-13. $(2+2i) + (\sqrt{3}+3i) + (\sqrt{5}-5i) + (\sqrt{7}+i)$.
 11-14. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.
 11-15. $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8$.
 11-16. $1 + 3i + 9i^2 + 27i^3 + 81i^4 + 243i^5$

269. Soustraction d'imaginaires.

Par définition, soustraire $c+di$ de $a+bi$, c'est trouver une imaginaire $x+yi$ qui ajoutée à $c+di$ reproduira $a+bi$.

On devra donc avoir :

$$(c+di) + (x+yi) = (a+bi)$$

De cette égalité de définition, on tire :

$$c+x = a \text{ et } d+y = b ;$$

$$x = a-c \text{ avec } y = b-d$$

Il vient donc : $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

EXERCICE LXXXIII

$$11-18. (17 - 2i) - (4 + 7i)$$

$$11-19. (2 + \sqrt{-9}) - (7 + \sqrt{-16})$$

$$11-20. (3 + \sqrt{-16}) - (4 + i)$$

270. Multiplication d'imaginaires.

Le produit de $(a+bi)$ par $(c+di)$ s'obtient en effectuant le produit des deux binômes, comme à l'ordinaire, puis en remplaçant dans le résultat i^2 par -1 .

Nous trouvons ainsi :

$$(a+bi) \times (c+di) = ac + (ad+bc)i + bd.i^2$$

$$\text{donc : } (a+bi) \times (c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

Le produit de deux imaginaires est une imaginaire qui peut d'ailleurs se réduire dans certains cas à sa partie réelle, si le coefficient de i est nul.

Le produit de deux imaginaires est réel, lorsque $ad+bc=0$.

Le produit de deux imaginaires est une imaginaire pure lorsque $ac-bd = 0$

EXERCICE LXXXIV

Effectuer les opérations suivantes .

$$11-21. (2i\sqrt{3} + 3i\sqrt{2}) (4\sqrt{3}i - 5\sqrt{2}i).$$

$$11-22. (3i\sqrt{7} - 5i\sqrt{2}) (3i\sqrt{7} + 5i\sqrt{2}).$$

$$11-23. \left(y - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(y - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$11-24. (\sqrt{-7} + \sqrt{-9}) \times (\sqrt{-7} - \sqrt{-9}).$$

$$11-25. \sqrt{-2} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-7} \times \sqrt{-14} \times \sqrt{-12} \times \sqrt{-48}.$$

$$11-26. (4 + 5i) \times (4 - 5i) \times (16 - 25).$$

271. Théorème. *Le produit de deux imaginaires conjugués est égal au carré de leur module.*

Soient $a+bi$ et $a-bi$, on dit que ces imaginaires sont conjuguées : leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont de signes contraires.

Le produit $(a+bi) \times (a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$, ce qui démontre le théorème.

272. Théorème. *Le module du produit de plusieurs imaginaires est égal au produit des modules de ces imaginaires.*

Soient les imaginaires :

$$(a+bi), (c+di), (e+fi) \dots$$

dont le produit est une imaginaire : $p + qi$.

Le produit des imaginaires conjuguées s'obtiendra en remplaçant i par $-i$ dans le produit $(p + qi)$, c'est-à-dire que le produit des imaginaires conjuguées sera $(p - qi)$. En effet, dans le produit primitif, le symbole i peut se rencontrer à des puissances paires $i^2, i^4 \dots$ et à des puissances impaires $i, i^3 \dots$. Le remplacement de i par $-i$ n'a rien changé aux puissances paires car $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = i^2$, de même $(-i)^4 = (-1)^4 \times (i)^4 = i^4$. Quant aux puissances impaires, i et i^3 par exemple, elles sont devenues :

$$-i = -i$$

$$(-i)^3 = -1 \times i^3 = -i^3.$$

Comme seules les puissances paires de i sont présentes dans les quantités réelles p et q , p et q ne changent pas, seul le signe placé devant q est changé.

Nous avons donc :

$$(a+bi)(c+di)(e+fi) \dots = p + qi$$

$$(a-bi)(c-di)(e-fi) \dots = p - qi$$

Si nous multiplions membre à membre, en groupant les imaginaires conjuguées, nous obtenons :

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \cdot (e^2 + f^2) \dots = p^2 + q^2$$

où l'on voit immédiatement que le module du produit égale le produit des modules.

EXERCICE LXXXV

Effectuer les opérations suivantes ; trouver le module de chacun de facteurs, — le module du produit, — et vérifier que le produit des module égale bien le module du produit.

11-27. $(3 - 7i)(-14 + i)$

11-28. $(2 + 3i)(-3 + 4i)$

11-29. $(17 + i)(-5 - i)$

11-30. $(2+3i)(7-i)(1+i)(2-i)(6+10i)$

11-31. $(1+2i)(2+3i)(3+2i)(3-2i)(2-3i)(1-2i)$

TRANSFORMER UN PRODUIT EN UNE SOMME DE DEUX CARRÉS

273. Mettre les produits suivants sous la forme d'une somme de deux carrés. On remarquera que chacun des facteurs doit être lui-même la somme de deux carrés. Dès lors chacun des facteurs peut être considéré comme le carré du module d'une certaine imaginaire ; on effectuera le produit de ces imaginaires et le carré du module du produit donnera une somme de deux carrés précisément égale au produit des facteurs donnés (§272).

Soit 13×29 ou $(9+4)(25+4)$; ces deux facteurs peuvent être considérés comme les carrés des modules des imaginaires :

$$(3+2i), (5+2i) \text{ dont le produit est : } 11+16i$$

Le carré du module du produit étant : $11^2 + 16^2$ on a :

$$13 \times 29 = 11^2 + 16^2.$$

Comme les imaginaires $(3 - 2i)$ et $(3 + 2i)$ ont même module, il s'ensuit que $(3 - 2i)$ aurait pu être prise plutôt que $(3 + 2i)$; le produit alors aurait été $(19 - 4i)$ et le carré du module de ce produit est : $19^2 + 4^2$, ce qui fournirait un autre système de solution etc.

$$13 \times 29 = 11^2 + 16^2 = 19^2 + 4^2.$$

EXERCICE LXXXVI

Mettre les produits suivants sous la forme d'une somme de deux carrés.

11-32. $5 \times 13 \times 29$

11-33. 5×53

11-34. 65×72

11-35. 10×234

11-36. $13 \times 40 \times 89$

11-37. $289 \times 674 \times 1850$

11-38. $(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)$

11-39. $[(a+b)^2 + (m+n)^2] \times (t^2 + m^2)$

274. Puissance d'une imaginaire. On appelle puissance $n^{\text{ième}}$ d'une imaginaire, n étant un entier positif, le produit de n facteurs égaux à cette imaginaire.

Pour calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une imaginaire, on procédera comme s'il s'agissait de quantités réelles, remplaçant i^2 par -1 dans le produit effectué.

On trouve donc : $(a+bi)^n =$

$$\begin{aligned} & \left(a^n - \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 \dots \right) \\ & + i \left(\frac{n}{1} a^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 \right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-5} b^5 \dots \right). \end{aligned}$$

EXERCICE LXXXVII

11-40. Calculer: $(1 + i)^6$.11-41. Calculer: $(-1 + i)^5$,11-42. Calculer: $(2 + 3i)^4$.

275. Division des imaginaires. *Diviser $(a+bi)$ par $(c+di)$ c'est trouver une imaginaire $x+yi$ telle que le produit de $(x+yi)$ par $(c+di)$ donne le dividende $(a+bi)$.*

Par définition, il faut donc avoir :

$$(c+di)(x+yi) \equiv a+bi$$

Si l'on identifie les deux membres, après avoir effectué le produit, il vient :

$$cx - dy + i(dx + cy) \equiv a + bi$$

ce qui donne : $cx - dy = a$

$$dx + cy = b$$

système qu'il faut résoudre par rapport à x et y . On trouve:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

L'expression $x + yi$ est le quotient de $(a+bi)$ par $(c+di)$.

276. Remarque. On pourrait trouver ce résultat plus rapidement en rendant rationnel le dénominateur de $\frac{a+bi}{c+di}$, appliquant pour cela le théorème qui suit (§277):

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} \times \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$\frac{ac+bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

277. Théorème. *On peut multiplier les deux termes d'un quotient par un même nombre réel ou imaginaire sans changer la valeur du quotient.*

Soit $x + yi$ le quotient de $a + bi$ par $c + di$ en sorte que identiquement : $(c + di)(x + yi) = a + bi$

Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $r + si$, on obtient :

$$(c + di)(x + yi)(r + si) = (a + bi)(r + si)$$

et cette égalité peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{(a + bi)(r + si)}{(c + di)(r + si)} = x + yi$$

Donc, en multipliant par un même nombre les deux termes d'un quotient on ne change pas la valeur de ce quotient.

On admet que le produit de plusieurs facteurs imaginaires ne change pas lorsque l'on intervertit l'ordre des facteurs (§289).

EXERCICE LXXXVIII

11-43. Rendre rationnel le dénominateur de : $\frac{1}{3 - \sqrt{-2}}$

11-44. Rendre rationnel le dénominateur de : $\frac{3\sqrt{2} + 2i\sqrt{5}}{3\sqrt{2} - 2i\sqrt{5}}$

11-45. Simplifier : $\frac{3 + 2i}{2 - 5i} + \frac{3 - 2i}{2 + 5i}$

11-46. Trouver le quotient de : $(3 + 5i)$ par $(2 - 3i)$. $= -\frac{9}{13} + \frac{19}{13}i$

11-47. Quel est le quotient de : $(1 + i)$ par $(1 - i)$?

11-48. Calculer l'expression : $\frac{(1 + i)^2}{3 - i}$, lui donnant la forme $m + ni$. $= -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

278. Racines cubiques de l'unité.

Soit l'équation $x^3 = 1$ ou $x^3 - 1 = 0$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

IMAGINAIRES

Les racines de l'équation proposée sont donc celle de

$$x - 1 = 0, \text{ soit } x = 1,$$

et celles de $x^2 + x + 1 = 0$ ou $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Il y a donc trois racines distinctes. L'une de ces racines est $+1$, les deux autres sont imaginaires. Celle qui correspond au signe $+$, par exemple, sera appelée α , l'autre α' .

Entre ces deux racines cubiques de l'unité existe la relation curieuse suivante : *le carré de l'une égale l'autre.*

Formons, en effet, le carré de $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ nous obtenons

$$\alpha^2 = \frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha';$$

et si nous formons le carré de cette dernière racine, nous obtenons comme résultat la valeur de la première.

D'ailleurs il doit en être ainsi. Si α est une des racines cubiques de l'unité, α^2 doit aussi être racine cubique de l'unité, car α^2 au cube donnera la sixième puissance de α , donc le carré de l'unité, c'est-à-dire l'unité.

Les trois racines cubiques de l'unité sont donc :

$$1, \alpha, \alpha^2; \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

nous avons $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, l'on se sert de cette propriété pour simplifier les opérations

EXERCICE LXXXIX

Si 1, x et x^2 sont les racines cubiques de l'unité, calculer les expressions suivantes :

11-49. $(1 + x^2)^4 = 5 + 6\alpha + 5\alpha^2 = 2$

11-50. $(1 - x + x^2)(1 + x - x^2) = 4$

11-51. $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^8)$.

11-52. $(2 + 5x + 2x^2)^6$.

11-53. $(2 + 2x + 5x^2)^6 = 3^6$

279. Racine carrée d'une imaginaire.

On appelle racine carrée de $a+bi$ une imaginaire $x+yi$ telle que :

$$(x+yi)^2 = a + bi$$

De même, on appelle racine $m^{i\text{ème}}$ d'une imaginaire, une imaginaire $x+yi$ telle que $(x+yi)^m = a + bi$.

Pour calculer la racine carrée de $(a + bi)$, on aura donc à résoudre l'équation suivante :

$$(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

Nous aurons deux imaginaires égales : la partie réelle de l'une doit donc égaler la partie réelle de l'autre ; et la partie imaginaire de l'une, la partie imaginaire de l'autre (§265).

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

En remplaçant y par sa valeur $b/2x$, tirée de la seconde équation, on obtient en définitive :

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

équation bicarrée dont les racines en x^2 sont les suivantes :

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Comme x^2 est positif, puisque x est réel, le signe $(-)$ doit être écarté, car x^2 aurait alors une valeur négative, la quantité sous le radical étant plus grande que le carré de a . Il reste la seule valeur acceptable de x^2 :

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

De cette relation on tire pour x deux valeurs égales et de signes contraires. Les valeurs de y s'en déduisent par la relation : $y = b/2x$.

Le signe de y change en même temps que celui de x ; il y aura deux valeurs égales et de signes contraires pour la racine carrée de l'imaginaire $a + bi$:

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{bi}{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \right)$$

L'imaginaire a a donc bien deux racines égales et de signes contraires.

EXERCICE XC

- 11-54. Calculer la racine carrée de $(-11 - 60i)$. $\pm (5 - 6i)$
 11-55. Racine carrée de $(-47 + 8i\sqrt{3})$.
 11-56. Quelle est la racine carrée de $-8i$?
 11-57. Racine carrée de $x^2 - 1 + 2xi$.
 11-58. Valeur de la racine carrée de $-5 + 12i$.
 11-59. Racine carrée de $4 + 6\sqrt{-5}$.
 11-60. Racine carrée de $4ab + 2i(a^2 - b^2)$.

III. FORME GÉOMÉTRIQUE DE L'IMAGINAIRE *pas demandé*

280. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires. A toute imaginaire $a + bi$, correspond un point M ayant pour coordonnées (a, b) , a étant l'abscisse de M et b l'ordonnée.

La longueur OM dont la valeur est $\sqrt{a^2 + b^2}$ est évidemment celle du *module* de l'imaginaire (266).

Le point M est appelé l'*affiche* de l'imaginaire $a + bi$.

Pour qu'une imaginaire soit déterminée, il ne suffit pas que le module soit connu — car alors le point M pourrait être quelconque sur la circonférence du centre O et de rayon égal au module — il faut encore connaître l'angle que forme OM avec OX, cet angle s'appelle l'*argument* de l'imaginaire.

Le module de l'imaginaire $a + bi$ est représenté par le symbole ρ et l'argument de la même imaginaire par ω .

On voit immédiatement sur la figure que les relations suivantes existent entre les diverses quantités qui représentent la même imaginaire.

La quantité a est donnée par la relation suivante :

$$a = \rho \cos \omega$$

et la valeur b par $b = \rho \sin \omega$.

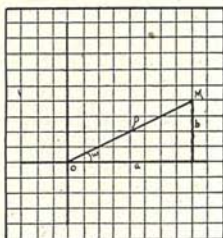


Fig. 13

Le point M est l'afixe de l'imaginaire $a + bi$; l'angle que forme OM avec l'axe des x est l'argument de la même imaginaire.

Les nombres imaginaires n'existent pour les mathématiciens que depuis peu d'années. On ne songeait même pas à les représenter par des symboles et lorsque des équations présentaient des solutions que nous qualifierions maintenant d'imaginaires on se contentait de dire que les problèmes étaient impossibles ou bien que les données étaient contradictoires.

On décida cependant d'appliquer à ces quantités les lois de la logique et on développa des calculs ou intervenaient ces quantités nouvelles. On se rendit compte que l'introduction de ces nombres se faisait sans contradiction et qu'il était même possible de leur faire représenter des opérations réelles extrêmement curieuses.

La théorie des fonctions analytiques ne distingue pas entre les nombres réels et les nombres imaginaires. Le monde des nombres complexes ou imaginaires est comme une sorte d'univers mathématique élargi où les nombres réels ne sont que des coupures, des cas particuliers dans l'infinie variété.

C'est un arpenteur norvégien C. Wessel (1745-1818) qui interpréta géométriquement les imaginaires (1797). Un Français J.-R. Argand (1768-1822) aboutit aux mêmes conclusions en 1806 mais Argand recueillit seul la gloire de cette interprétation magnifique. Le Français d'ailleurs ignore constamment les travaux de son contemporain et devancier Wessel.

De même, ρ est donné par la relation :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et l'angle ω est fourni par :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}$$

On a donc :

$$a = \rho \cos \omega; b = \rho \sin \omega$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}$$

Il est donc possible d'écrire l'imaginaire $a+bi$ sous la forme :

$$a+bi = \rho (\cos \omega + i \sin \omega), \quad \text{N.B.}$$

l'angle ω étant déterminé à un multiple près de 2π .

On a donc :

$$a + bi = \rho [(\cos (\omega + 2k\pi) + i \sin (\omega + 2k\pi))]$$

Le nombre ρ s'appelle encore le *tenseur* de l'imaginaire.

EXERCICE XCI

Donner aux imaginaires suivantes la forme $\rho(\cos \omega + i \sin \omega)$ qui est la forme canonique de l'imaginaire.

11-61. $3 + 2i$.

11-66. $-6 - i$.

11-62. $4 - i$.

11-67. -5 .

11-63. $-2 + 3i$.

11-68. $+9$.

11-64. $-1 - 5i$.

11-69. $4i$.

11-65. $-3 + 7i$.

11-70. $-6i$.

281. Si $a+bi$ est représenté par l'affixe M, $a-bi$ le sera par M' symétrique de M par rapport à XX'; $-a-bi$ sera représenté par M'', enfin $-a+bi$ par M'''. Ces imaginaires ont toutes le même module : il est évident que tous les affixes sont sur une même circonférence de centre 0.

Les affixes des imaginaires pures se trouvent sur YY' ; les affixes des nombres réels sur XX' , les nombres positifs à droite et les nombres négatifs à gauche.

Deux imaginaires égales ont même affixe et par conséquent même module; les arguments peuvent différer entre eux de multiples de 2π .

282. Addition géométrique de deux imaginaires.

Soient $a + bi$ et $a' + b'i$ deux imaginaires données. Leur somme a pour partie réelle la somme des parties réelles des deux imaginaires et pour partie imaginaire la somme des parties imaginaires (§268). La construction géométrique qui fournit l'imaginaire-somme est tout de suite indiquée: *par l'affixe de la première imaginaire mener un vecteur équipollent au vecteur qui joint l'origine à l'affixe de l'autre imaginaire.* L'extrémité du nouveau vecteur donne l'affixe de l'imaginaire somme: M_{12} .

283. Le module de la somme de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules.

Le triangle OM_1M_{12} montre immédiatement que OM_{12} , troisième côté d'un triangle, est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés. Donc le module de la somme est compris entre la somme et la différence des modules.

Une relation trigonométrique fournit une autre démonstration. Le carré du troisième côté d'un triangle a comme valeur la somme des carrés des deux autres côtés moins 2 fois le produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

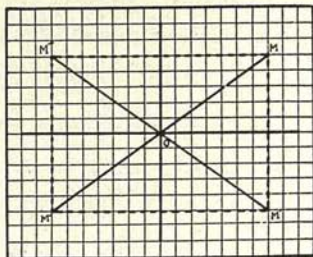


Fig. 14

Les imaginaires qui ont pour affixes les sommets du rectangle $MM'M''M'''$ ont toutes le même module OM .

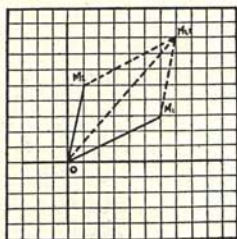


Fig. 15

La somme géométrique des deux imaginaires OM_1 et OM_2 s'obtient en menant par M_1 un vecteur équipollent à OM_2

Ici : $(OM_{12})^2 =$

$$(OM_1)^2 + (M_1 M_{12})^2 - 2 \times OM_1 \cdot M_1 M_{12} \cdot \cos OM_1 M_{12},$$

or l'angle $OM_1 M_{12}$ est le supplément de $\omega_2 - \omega_1$;

la relation précédente peut donc s'écrire :

$$\rho_{12}^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos (\omega_2 - \omega_1)$$

On voit immédiatement que le carré est compris entre

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \text{ et } \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2,$$

puisqu'un cosinus peut varier entre $+1$ et -1 .

Donc, le module de la somme de deux imaginaires est bien compris entre la somme et la différence des modules.

Le module de la somme de deux imaginaires est *égal à la somme* des modules, lorsque $\omega_2 = \omega_1$; dans ce cas les deux imaginaires sont portées sur la même droite et dirigées dans le même sens.

De même le module de la somme de deux imaginaires est *la différence* des modules lorsque $\omega_2 = \omega_1 + \pi$; les deux imaginaires sont portées sur une même droite mais dirigées en sens contraires.

Dans les autres cas, *le module de la somme de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules.*

284. Pour démontrer par l'algèbre que le module de la somme de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules, montrons que l'on a toujours :

$$\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} < \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Si cette inégalité est vraie, on peut élever au carré les deux membres puisque des deux côtés ce sont des termes positifs ; nous aurons alors :

$$a^2 + a'^2 + 2aa' + b^2 + b'^2 + 2bb' < a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$\text{ou } aa' + bb' < \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Démontrons que cette inégalité est vérifiée pour les valeurs absolues des lettres : on peut élever encore au carré et il vient :

$$0 < (ab' - a'b)^2$$

ce qui est évident. Or, si la relation

$$aa' + bb' < \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

est vraie lorsque a, a', b, b' sont pris en valeurs absolues, à plus forte raison si l'une ou l'autre des lettres est négative.

285. Somme géométrique de plusieurs imaginaires.

Soient $a+bi, a'+b'i, a''+b''i$... des imaginaires ayant pour affixes les points A, B et C. Menons la droite AD équipollente à OB ; par le point D, menons DE équipollent à OC : OE est le module de la somme des trois imaginaires et l'angle de OE avec OX en est l'argument.

En effet, la projection de OE sur l'un quelconque des axes est égale à la somme des projections sur le même axe des côtés OA, AD, DE de la ligne brisée OADE. Donc, en appelant x et y les coordonnées de E, on a :

$$x = a + a' + a'' ; y = b + b' + b''.$$

Si la ligne brisée se ferme, c'est-à-dire si le point E se confond avec O, la somme des imaginaires est nulle : c'est ce qui arrive si l'on fait la somme d'un nombre pair d'imaginaires dont les affixes sont symétriques deux à deux par rapport à l'origine.

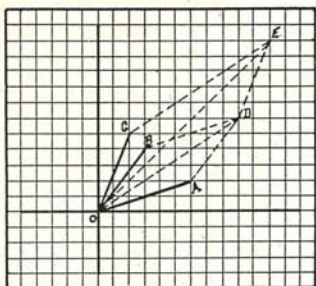


Fig. 16

Pour déterminer l'affixe de la somme de trois imaginaires, par l'affixe A de la première mener AD équipollent à OB ; par D mener ensuite DE équipollent à OC.

EXERCICE XCII

11-71. Additionner géométriquement :

$$(1+2i) + (2+3i) + (-2+4i) + (-1+3i).$$

11-72. Additionner géométriquement :

$$(2+i) + (-1+i) + (1+2i) + (1-2i).$$

11-73. $(-3+2i) + (1-i) + (1-2i) + (2+2i).$

11-74. $(-2.5+i) + (3+1.5i) + (1+2i) + (1.5-2i).$

11-75. $(5+7i) + (-2+3i) + (-1-5i) + (1/2-2i).$

11-76. $(7+i) + (-3+2i) + (-3-3i) + (1+i).$

286. Soustraction de deux imaginaires par la méthode géométrique.

Procédant comme pour la somme, on voit que pour soustraire une imaginaire, il faut la changer de signe et l'ajouter à la première. Par l'affixe de la première imaginaire on mène donc un vecteur équipollent au vecteur joignant l'affixe de la seconde à l'origine des coordonnées mais dirigé en sens contraire.

De même le module de la différence de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces deux imaginaires, ce qui n'exige aucune démonstration nouvelle puisque la soustraction se ramène à une addition.

287. Multiplication de deux imaginaires : *le module du produit est le produit des modules (§272); l'argument du produit est la somme des arguments des facteurs.*

Soit à multiplier

$$\rho (\cos \omega + i \sin \omega) \text{ par } \rho' (\cos \omega' + i \sin \omega')$$

On trouve immédiatement comme produit :

$$\rho \rho' [(\cos \omega \cos \omega' - \sin \omega \sin \omega') + i (\cos \omega \sin \omega' + \sin \omega \cos \omega')]$$

c'est-à-dire :

$$\rho\rho' [\cos (\omega + \omega') + i \sin (\omega + \omega')]$$

Le module de la dernière imaginaire est bien $\rho\rho'$ car en donnant à cette imaginaire la forme $a+bi$,

$$a = \rho\rho' \cos (\omega + \omega') \text{ et } b = \rho\rho' \sin (\omega + \omega') \text{ et}$$

$$a^2 + b^2 = \rho^2\rho'^2 [\cos^2 (\omega + \omega') + \sin^2 (\omega + \omega')] = \rho^2\rho'^2 \text{ et}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \rho\rho'.$$

On vérifie immédiatement que le module du produit de deux imaginaires est le produit des modules.

L'argument du produit des deux imaginaires est $(\omega + \omega')$. On constate que l'argument du produit de deux imaginaires est la somme des arguments des facteurs à des multiples près de 2π .

Propriété d'une imaginaire no 296

288. Remarque. Les nombres *positifs* peuvent être considérés comme des imaginaires dont l'argument est nul ou égal à $2k\pi$:

$$7 = 7 (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi).$$

Les nombres *négatifs* sont des imaginaires dont l'argument est égal à un nombre impair de π :

$$-3 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Les théorèmes établis pour le produit, la somme et la différence de deux imaginaires s'appliquent immédiatement, comme cas limites, aux nombres positifs et négatifs.

Par exemple :

$$2 \times (-3) = 2(\cos 0 + i \sin 0) \times 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= 6 (\cos \pi + i \sin \pi) = \text{donc } -6.$$

289. Représentation géométrique du produit de deux imaginaires.

SOLUTION GRAPHIQUE

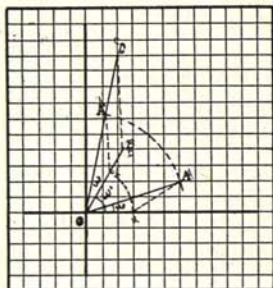


Fig. 17

L'affixe C du produit des deux imaginaires dont A et B sont les affixes, est obtenu en construisant l'angle $A'OB$ égal à l'angle w , en portant OU sur OB , OA sur OA' et en menant BC parallèle à $U'A'$.

Soient A et B les affixes de deux imaginaires.

Pour obtenir l'affixe du produit, menons une demi-droite formant avec OB un angle égal à w et prenons sur cette demi-droite une longueur OC dont la mesure soit égale en valeur absolue au produit des longueurs OA et OB . Le point C, ainsi obtenu, est l'affixe du produit. En effet, l'imaginaire dont le point C est l'affixe a bien pour module le produit des modules des deux autres, et son argument est bien la somme de leurs arguments (287).

Si OU est le segment pris pour unité de mesure, on devra avoir : $OC \cdot OU = OA \cdot OB$. Cette relation écrite sous une autre forme donne :

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OU}.$$

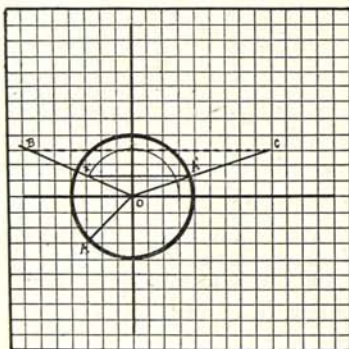


Fig. 18

L'imaginaire $(-1 - i)$ dont l'affixe est A, multipliée géométriquement par $(-2 + i)$, donne l'imaginaire $(3 + i)$ d'affixe C. (On a pris 3 petites côtés pour l'unité).

Comme l'angle COB a été pris égal à AOU , les triangles AOU et COB sont semblables, ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Le point C est donc le troisième sommet d'un triangle directement semblable au triangle UOA construit sur OB , homologue de OU .

On peut remarquer d'ailleurs que les triangles UOB et AOC sont également sem-

blables, ce qui pourrait démontrer intuitivement que le produit de deux imaginaires ne change pas, si l'on intervertit l'ordre des facteurs.

REGLE PRATIQUE

passé 290. La construction de l'imaginaire-produit est parfois embarrassante, mais les règles suivantes enlèvent toute hésitation.

Soient les imaginaires facteurs dont les affixes sont A et B.

Prendre $OU = 1$, sur OX.

Construire un angle $BOC = UOA$.

Sur OB prendre $OU' = OU$, en décrivant un arc de centre O et de rayon OU.

Sur OC prendre $OA' = OA$, en décrivant un arc de cercle de centre O et de rayon OA.

Joindre $U'A'$, et par B mener une parallèle à $U'A'$: la rencontre de cette parallèle avec la direction OC déterminera le point C.

Quelles que soient les positions des lignes de la figure la construction précédente fournira l'affixe du produit.

Soit à multiplier les deux imaginaires $(-1-i)$ par $(-2+i)$. Appliquer la règle à la lettre et le point C est obtenu. Le produit est $(3+i)$.

EXERCICE XCH

Par le procédé géométrique, multiplier les imaginaires suivantes : On pourra contrôler les résultats en multipliant algébriquement les mêmes imaginaires.

11-77. $(2+i) \times (3+2i)$.

11-78. $(1+i) \times (2+3i)$.

11-79. $(2+3i) \times (3+i)$.

11-80. $(-1+2i) \times (2+2i)$.

11-81. $(-1+i) \times (-2+i)$.

11-82. $(-3+2i) \times (-2+3i)$.

passé 11-83. $(2+i) \times (2-i)$.

291. Si le nombre des facteurs dépasse deux : multiplier les deux premières imaginaires, le produit par la troisième, le nouveau produit, par la quatrième, etc. Pratiquement le dessin devient compliqué et sauf dans le cas des puissances, il est difficile d'arriver à quelque précision.

EXERCICE XCIV

11-84. $(2+i) \times (3+2i) \times (1+2i) \times (1+i).$

11-85. $(1+i)^4.$

292. Division de deux imaginaires.

Soit à diviser l'imaginaire $\rho (\cos \omega + i \sin \omega)$ par $\rho' (\cos \omega' + i \sin \omega').$

En désignant le quotient cherché $\rho'' (\cos \omega'' + i \sin \omega'')$, doit avoir :

$$\rho (\cos \omega + i \sin \omega) = \rho' \rho'' (\cos \omega' + i \sin \omega') (\cos \omega'' + i \sin \omega''),$$

ou $\rho (\cos \omega + i \sin \omega) = \rho' \rho'' [\cos (\omega' + \omega'') + i \sin (\omega' + \omega'')];$

$$\text{donc : } \rho = \rho' \rho'' \text{ et } \rho'' = \frac{\rho}{\rho'};$$

$\omega = \omega' + \omega''$ et $\omega'' = \omega - \omega'$, à un multiple près de 2π , car à la place de ω , on peut mettre $\omega + 2k\pi$ et à la place de ω' , $\omega' + 2k'\pi$; il vient donc,

$$\omega'' = \omega + 2k\pi - \omega' - 2k'\pi \text{ ou } \omega'' = \omega - \omega' + 2k''\pi.$$

293. Représentation géométrique de la division de deux imaginaires.

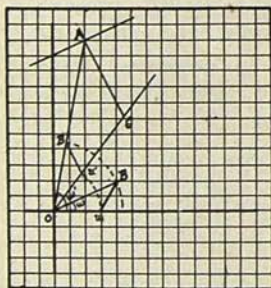


Fig. 19

L'affixe C du quotient des deux imaginaires est obtenu en construisant l'angle AOC égal à l'angle BOU, mais de sens contraire; en portant OU' égal à OU, OB' égal à OB et en menant AC parallèlement à B'U'.

Soit A l'affixe du dividende, B l'affixe du diviseur. OU l'unité portée sur OX. Construire sur OA un triangle OAC semblable à OBU et pour cela prendre l'angle

$$AOC = BOU,$$

et déterminer OC de manière que

$$OC = OA \div OB.$$

Le point C ainsi déterminé est l'affixe du quotient, car le module de C est le quotient des modules, et l'argument de C est la différence entre les arguments du dividende et du diviseur.

parce **294. Règle pratique.** Construire un angle AOC égal à BOU, cet angle devant être soustrait de l'angle UOA ; une direction OC est ainsi déterminée.

Porter OU sur OC; déterminer ainsi OU'.

Porter OB sur OA, déterminant ainsi OB'.

Par A, mener une parallèle à B'U', le point de rencontre de cette parallèle avec la direction OC détermine C, affixe de l'imaginaire quotient.

EXERCICE XCV

Effectuer géométriquement les opérations suivantes:

11-86. Diviser $(5+7i)$ par $(3+i)$.

11-87. Diviser $(-7-3i)$ par $(1+5i)$.

11-88. Diviser $(4+2i)$ par $(4+i)$.

11-89. Diviser $(-7+2i)$ par $(2+2i)$.

11-90. Diviser $(-7+3i)$ par $(1+4i)$.

✓ **295. Remarque.** $\frac{1}{\cos a + i \sin a} = \cos a - i \sin a$.

On le constate en multipliant les deux termes de la fraction par $(\cos a - i \sin a)$. On peut encore déduire ce résultat de la règle donnée pour la division des imaginaires. Le numérateur, en effet, peut se mettre sous la forme de l'imaginaire $(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$. Le module du dénominateur est évidemment l'unité. Le module du quotient est donc l'unité et l'argument du quotient est la différence des arguments, ici $(0 - a) = -a$. Le quotient est donc: $(\cos -a + i \sin -a)$ ou $(\cos a - i \sin a)$. On trouverait de

même que $\frac{1}{\cos a - i \sin a} = (\cos a + i \sin a)$.

296. Puissances entières d'une imaginaire.

Soit une imaginaire $\rho (\cos \omega + i \sin \omega)$.

Pour élever cette imaginaire à la seconde puissance, il n'y a qu'à appliquer les théorèmes précédents. Le module de la seconde puissance sera le carré du module de l'imaginaire, et l'argument, le double de celui de l'imaginaire donnée.

En effet $\rho (\cos \omega + i \sin \omega) \times \rho (\cos \omega + i \sin \omega) =$
 $\rho^2 (\cos 2\omega + i \sin 2\omega)$.

De même pour le cube d'une imaginaire, le module sera le cube du module de l'imaginaire donnée, et l'argument, le triple de celui de l'imaginaire donnée, car,

$$\begin{aligned} [\rho(\cos \omega + i \sin \omega)]^3 &= [\rho(\cos \omega + i \sin \omega)]^2 \cdot \rho(\cos \omega + i \sin \omega) \\ &= \rho^2(\cos 2\omega + i \sin 2\omega) \rho(\cos \omega + i \sin \omega) \\ &= \rho^3(\cos 3\omega + i \sin 3\omega). \end{aligned}$$

De même pour la quatrième puissance, la cinquième, ...

$$[\rho(\cos \omega + i \sin \omega)]^4 = \rho^4(\cos 4\omega + i \sin 4\omega).$$

EXERCICE XCVI

1. Appliquant la théorie précédente, trouver :

11-91. $\left(1 + \frac{i}{2}\right)^5$

11-93. $(-2+i)^4$

11-94. $(-1+i)^6$

11-92. $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)^4$

11-95. $(\frac{1}{2} + i .866)^6$

IV. FORMULE DE MOIVRE

Un anglais Cotes (1682-1716) découvrit une formule analogue à celle de De Moivre. Le théorème de De Moivre est de 1730 alors qu'il ne fut démontré que pour n entier. Euler (1743-48) étendit les résultats pour n quelconque.

297. La théorie précédente a montré que la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une imaginaire a pour module celui de l'imaginaire élevé à la puissance m ,

et pour argument m fois celui de l'imaginaire ; les choses se simplifient, lorsque le module est l'unité ; on obtient alors la formule suivante connue sous le nom de formule de Moivre :

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^n = (\cos n\omega + i \sin n\omega).$$

Évidemment cette formule est vraie si $n = 2$, car,

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^2 = (\cos 2\omega + i \sin 2\omega).$$

Si $n = 3$, la formule se vérifie encore, car

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^3 = (\cos \omega + i \sin \omega)^2 \times (\cos \omega + i \sin \omega);$$

et appliquant les théorèmes précédents, nous aurons :

$$\begin{aligned} (\cos \omega + i \sin \omega)^3 &= (\cos 2\omega + i \sin 2\omega) (\cos \omega + i \sin \omega) \\ &= (\cos 3\omega + i \sin 3\omega). \end{aligned}$$

Démontrons que si la formule est vraie jusqu'à k elle est encore vraie pour $(k+1)$.

Nous avons $(\cos \omega + i \sin \omega)^k = (\cos k\omega + i \sin k\omega)$, k étant un entier positif,

or, $(\cos \omega + i \sin \omega)^{k+1}$

$$\begin{aligned} &= (\cos \omega + i \sin \omega)^k \times (\cos \omega + i \sin \omega) \\ &= (\cos k\omega + i \sin k\omega) \times (\cos \omega + i \sin \omega) \\ &= [\cos (k+1)\omega + i \sin (k+1)\omega] \end{aligned}$$

et la formule vraie jusqu'à k , est encore vraie pour $k+1$; or, elle a été vérifiée pour $k=1, 2, 3$; donc, elle est vraie pour $k = 4, 5, \dots$

La formule suivante :

$$\begin{aligned} (\cos \omega + i \sin \omega)^n &= \\ (\cos n\omega + i \sin n\omega) \end{aligned}$$

est donc démontrée dans le cas où n est un nombre entier positif.

On démontrera qu'elle est encore vraie, n étant un nombre quelconque (§303, §304).

298. Représentation géométrique de la formule de Moivre dans le cas des puissances entières.

La formule de Moivre est

$$\begin{aligned} (\cos \omega + i \sin \omega)^n &= \\ (\cos n\omega + i \sin n\omega). \end{aligned}$$

Si l'on mène une demi-droite OA_1 de longueur unité faisant, avec l'axe des x , un angle égal à l'argument de l'imaginaire, les affixes de toutes les puissances de l'imaginaire se trouveront sur la circonférence de centre O et de rayon OA_1 , puisque toutes les puissances ont comme module l'unité; les arguments seront des multiples de l'argument de l'imaginaire. On

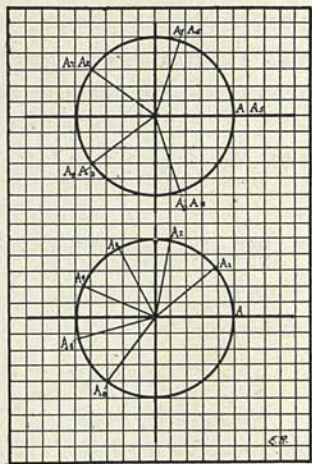


Fig. 20

Les points $A_2, A_3, A_4, \dots$ sont les affixes des puissances de l'imaginaire dont l'affixe est A_1 , et dont le module est l'unité.

portera donc sur la circonférence des arcs $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \dots$ égaux à AA_1 , et les points ainsi déterminés seront les affixes des puissances diverses de l'imaginaire dont l'affixe est A_1 .

Si l'angle ω , argument de l'imaginaire A_1 , est un diviseur entier de 360° , on reviendra à A après un tour complet de la circonférence, et les points A_k seront aux divers sommets d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence.

Dans les autres cas, les points A_n seront les sommets une ligne polygonale régulière.

EXERCICE XCVII

11-96. Construire les diverses puissances de $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^n$.

11-97. Construire les puissances diverses de $(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^k$.

11-98. Quelles sont les affixes des diverses puissances de :
 $(.866 + i \times \frac{1}{2})^n$.

11-99. Puissances diverses de : $(-\frac{1}{2} + .866 i)^n$.

299. Racines d'une imaginaire.

Soit $\rho (\cos \omega + i \sin \omega)$ une imaginaire donnée qui peut s'écrire sous la forme :

$$\rho [\cos (\omega + 2k\pi) + i \sin (\omega + 2k\pi)].$$

On appelle racine $m^{\text{ième}}$ une imaginaire qui, élevée à la puissance m , reproduit l'imaginaire donnée.

Désignons par $r(\cos x + i \sin x)$ l'imaginaire cherchée, en sorte que l'on ait : $[r(\cos x + i \sin x)]^m$

$$= \rho [\cos (\omega + 2k\pi) + i \sin (\omega + 2k\pi)]$$

puisque $[r(\cos x + i \sin x)]^m = r^m (\cos mx + i \sin mx)$, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{aligned} r^m &= \rho \quad \text{et} \\ mx &= \omega + 2k\pi. \end{aligned}$$

Comme ρ est nécessairement positif, il est toujours possible de déterminer un nombre r positif tel que $r^m = \rho$.

On a ensuite $mx = \omega + 2k\pi \dots$ k désignant un nombre entier positif ou négatif. La valeur de x est ainsi donnée par

$$\frac{(\omega + 2k\pi)}{m}$$

La racine $m^{\text{ième}}$ d'une imaginaire $\rho(\cos \omega + i \sin \omega)$ est

$$\text{donc : } \rho^{1/m} \left[\cos \frac{(\omega + 2k\pi)}{m} + i \sin \frac{(\omega + 2k\pi)}{m} \right].$$

✓ **300. Une imaginaire admet m racines $m^{\text{ièmes}}$ distinctes, m étant un entier.**

Dans la formule précédente, donnons à k les m valeurs successives : $0, 1, 2, 3 \dots m-1$. Nous obtiendrons ainsi pour l'expression de la racine $m^{\text{ième}}$, m valeurs distinctes, puisque les arguments de deux quelconques de ces valeurs seront différents les uns des autres.

Il n'est pas possible d'obtenir plus de m valeurs distinctes. Soit, en effet, une valeur k quelconque. Ce nombre k peut s'écrire : $k = mp + h$, h étant le reste de la division de k par m , l'un des nombres $0, 1, 2 \dots (m-1)$.

La valeur de la racine :

$$\rho^{1/m} \left[\cos \frac{\omega + 2(mp+h)\pi}{m} + i \sin \frac{\omega + 2(mp+h)\pi}{m} \right]$$

devient

$$\rho^{1/m} \left[\cos \left(\frac{\omega}{m} + \frac{2h\pi}{m} + 2p\pi \right) + i \sin \left(\frac{\omega}{m} + \frac{2h\pi}{m} + 2p\pi \right) \right].$$

Or, cette dernière valeur a été déterminée précédemment, puisque l'on a donné à k toutes les valeurs que h peut prendre. Il existe donc m valeurs distinctes, mais m seulement, de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une imaginaire quelconque.

En particulier, l'unité possède trois racines cubiques distinctes.

$$x^3 = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi ;$$

$$x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$$

$$x_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ ; x_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ . \text{ (Voir §278)}$$

✓ 301. Représentation géométrique de la racine $m^{\text{ème}}$ d'une imaginaire.

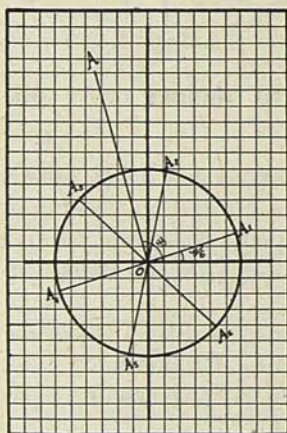


Fig. 21

Les points $A_1, A_2, A_3 \dots$ sont les affixes des racines $m^{\text{èmes}}$ de l'imaginaire dont l'affixe est A .

Supposons que l'imaginaire ait le point A pour affixe. Comme chacune de ses m racines a comme module la racine $m^{\text{ème}}$ du module de l'imaginaire donnée, les affixes se trouvent sur une circonférence ayant comme rayon la racine arithmétique $m^{\text{ème}}$ du module de cette imaginaire.

Menons ensuite la droite OA_1 faisant avec OX un angle $\frac{\omega}{m}$. A_1 est ainsi l'affixe de l'une des racines de l'imaginaire.

Comme les autres racines ont même module, mais des arguments qui diffèrent de multiples de $\frac{2\pi}{m}$,

il suffit de porter à partir de A_1 des arcs égaux à $\frac{360}{m}$. Les divers points obtenus seront aux sommets d'un polygone régulier inscrit dans la circonférence.

EXERCICE XCVIII

11-100. Construire les trois racines cubiques de l'unité.

11-101. Construire les trois racines cubiques de : $(1 + 7i)$.

11-102. Construire les cinq racines cinquièmes de : $(4 + 4i)$.

11-103. Construire toutes les valeurs des racines cinquièmes de 32.

V. APPLICATIONS DE LA FORMULE DE MOIVRE

302. Résolution de l'équation binôme.

On appelle équation binôme une équation du genre : $x^n + A = 0$. Pour certaines valeurs de n , cette équation est facilement résoluble par les méthodes algébriques ordinaires. Mais, l'application de la formule de Moivre permet de résoudre complètement et simplement toute équation binôme, que A soit réel ou imaginaire.

En effet, écrivons : $x^n = -A$; $-A$ peut se mettre sous la forme; $\rho [\cos (\omega + 2k\pi) + i \sin (\omega + 2k\pi)]$. (§288)

Il ne reste plus qu'à extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de l'imaginaire $\rho [\cos (\omega + 2k\pi) + i \sin (\omega + 2k\pi)]$, ce qui se fait par la méthode précédente.

$$x = \rho^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\omega}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\omega}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

On donnera à k les valeurs 0, 1, 2... (n-1).

EXERCICE XCIX

11-104. Résoudre : $x^4 - 1 = 0$.

11-105. Résoudre : $x^5 - 1 = 0$.

11-106. Racines de : $x^8 + 1 = 0$.

11-107. Racines de : $x^6 - 729 = 0$.

11-108. Racines de : $x^{10} - 1024 = 0$.

303. Extension de la formule de Moivre

La formule de Moivre démontrée pour n entier et positif, nous a donné :

$$(\cos x + i \sin x)^n = (\cos nx + i \sin nx).$$

Cette formule s'étend au cas où n est négatif et entier.

Soit $(\cos x + i \sin x)^{-n}$.

$$\text{Par définition, } (\cos x + i \sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + i \sin x)^n}.$$

Nous pouvons appliquer au dénominateur la formule de Moivre démontrée lorsque n est un entier positif; donc

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{-n} &= \frac{1}{(\cos x + i \sin x)^n} \\ &= \frac{1}{(\cos nx + i \sin nx)}. \end{aligned}$$

La remarque de (§295) s'applique maintenant :

$$\frac{1}{\cos nx + i \sin nx} = \cos(-nx) + i \sin(-nx).$$

Donc : $(\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos(-nx) + i \sin(-nx)$ et la formule de Moivre s'étend au cas où n est entier négatif.

304. La formule de Moivre s'applique lorsque n est une fraction.

Si l'imaginaire est $[\cos(\omega + 2k\pi) + i \sin(\omega + 2k\pi)]$, on sait que la racine $p^{\text{ième}}$ de cette imaginaire est donnée par

$$\left(\cos \frac{\omega + 2k\pi}{p} + i \sin \frac{\omega + 2k\pi}{p} \right) \quad (§299).$$

L'exposant $\frac{m}{p}$ s'interprète comme suit : il faut élever la quantité à la puissance m , puis en extraire la racine $p^{\text{ième}}$; or, $[\cos(\omega + 2k\pi) + i \sin(\omega + 2k\pi)]^m = \cos(m\omega + 2km\pi) + i \sin(m\omega + 2km\pi)$, la racine $p^{\text{ième}}$ de cette dernière valeur sera donc :

$$\begin{aligned} (\cos \omega + i \sin \omega)^{m/p} &= \left(\cos \frac{m\omega + 2km\pi}{p} + i \sin \frac{m\omega + 2km\pi}{p} \right) \\ &= \left(\cos \frac{m\omega}{p} + i \sin \frac{m\omega}{p} \right) \left(\cos \frac{2km\pi}{p} + i \sin \frac{2km\pi}{p} \right) \end{aligned}$$

ce qui montre que la formule de Moivre s'applique au cas où n est fractionnaire. On démontre comme précédemment que le symbole peut avoir p valeurs distinctes.

→ La formule de Moivre est donc vraie quel que soit n , entier positif ou négatif, ou nombre fractionnaire.

EXERCICE C

11-109. Par l'application de la formule de Moivre, trouver le développement de $\cos 3x$ et de $\sin 3x$.

Développer $(\cos x + i \sin x)^3$; mettre ensemble les valeurs réelles et ensemble les valeurs imaginaires.

Appliquer ensuite la formule de Moivre et égaler les valeurs réelles des deux membres, ce qui fournira $\cos 3x$. Procéder de même pour les valeurs imaginaires ce qui donnera $\sin 3x$.

11-110. Procéder de même pour $\cos 4x$, $\sin 4x$.

$$(\cos x + i \sin x)^4$$

Développer par le binôme séparé la partie réelle et la partie imaginaires. Appliquer la formule de Moivre.

Égaler les deux résultats.

Les parties réelles sont égales.

Les parties imaginaires sont égales.

$$\sqrt[5]{1}$$

$$1 = (\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$$

$$\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$$

$$\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$$

Angles: 0, 72, 144, 216, 288, 360°

CHAPITRE XII

NOTIONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Sommaire. I. Notion de fonction. II. Exemples de fonctions continues et de fonctions discontinues. III. Notion de dérivée. IV. Différentielle. V. Dérivées des fonctions élémentaires. VI. Propriétés de la dérivée. VII. Maximum et minimum d'une fonction. VIII. Dérivée seconde. IX. Construction des courbes. X. Équation d'une courbe expérimentale. XI. Fonctions circulaires. XII. Fonctions implicites.

I. Notion de fonction — Fonction continue.

306. Fonction. On dit que y est une fonction de x si, à chaque valeur donnée à x , correspond pour y une valeur bien déterminée.

Nous avons vu précédemment la définition d'une fonction continue : Une fonction est continue dans un intervalle (a, b) quand elle y est bien déterminée, qu'elle y conserve une valeur finie, et que l'accroissement de la fonction tend vers 0, lorsque l'accroissement de la variable tend vers 0. Si donc, $y = f(x)$ est une fonction continue, lorsque x varie infiniment peu, y varie de même infiniment peu.

Soit $y = x^2$. Si x positif augmente d'une très petite quantité, il en est ainsi de y : la fonction $y = x^2$ est une fonction continue de x .

Si nous examinons la fonction $y = \frac{1}{x}$, nous voyons que pour toutes les valeurs de x sauf pour $x = 0$, la fonction varie infiniment peu lorsque x varie infiniment peu. Mais, pour $x = 0$, il n'en est pas ainsi. Supposons x très petit, égal à -0.0001 , par exemple, la valeur de y est alors -10000 ; mais, si x augmente de très peu et devient positif, en augmentant de 0.0002 , la valeur de y passe brusquement de $-10\ 000$ à $+10\ 000$. Une variation petite de x occasionne donc une variation très grande de y : pour cette valeur de x , la fonction $y = \frac{1}{x}$ n'est pas continue.

II. EXEMPLES DE FONCTIONS CONTINUES ET DE FONCTIONS DISCONTINUES

307. Analogie avec une expérience quotidienne.

La fortune d'un spéculateur croît généralement par sauts brusques : cette fortune n'est donc pas une fonction continue du temps, puisque le temps augmentant d'une valeur très petite, la fortune du spéculateur peut varier beaucoup. La fortune d'un commerçant figurera assez bien une fonction continue, car cette fortune varie avec le temps et augmente peu en peu de temps.

308. Fonction continue et fonction discontinue tirée de la physique.

Les lois de la physique présentent des fonctions continues, en général, mais qui peuvent être discontinues dans certaines conditions. Soit, par exemple, la fonction représentant la quantité de chaleur qu'il faut fournir à une masse d'eau pour la porter de -50°C à 150°C .

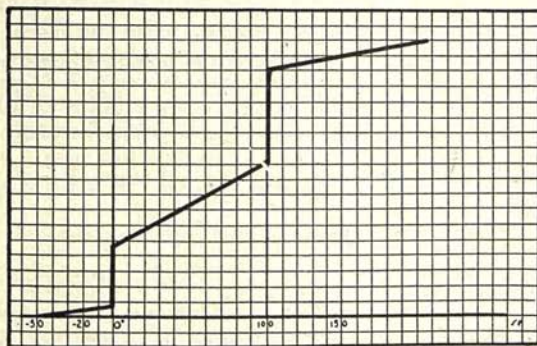


Fig. 22

Le graphique montre qu'aux points 0° et 100° , il y a discontinuité.

On construira un graphique mettant en abscisses les températures et en ordonnées les quantités de chaleur représentées par le nombre de pieds cubes de gaz qu'il a fallu dépenser pour chauffer l'eau. La courbe monte régulière-

ment lorsque la température monte de -50 degrés jusqu'à 0° ; la quantité de chaleur est à peu près proportionnelle à l'élévation de température; donc si l'élévation de température est faible, il en sera ainsi de la chaleur dépensée: la chaleur dépensée est fonction *continue* de la température. Mais à 0° se présente un fait particulier; alors même que l'on chauffe, la température n'augmente pas, car la chaleur fait uniquement fondre la glace. A 0° , une augmentation très faible de température exige une dépense très grande de chaleur. Pour faire passer 100g d'eau de $-0^\circ 1$ à $+0^\circ 1$, il faut fournir au moins 8000 calories. Si, la glace étant fondue, on continue de chauffer l'eau, la courbe monte progressivement d'une façon continue jusqu'à 100°C , où de nouveau il y a une forte discontinuité, la chaleur étant employée à transformer l'eau en vapeur — puis la courbe redevient régulière.

Dans les chapitres suivants nous ne traiterons que de fonctions continues, ou, au moins, de fonctions continues en tous les points sauf en quelques points exceptionnels.

EXERCICE CI

Étudier les fonctions suivantes pour les valeurs indiquées. On se rendra compte que les fonctions sont continues, en remplaçant x par la valeur donnée, diminuée d'abord puis augmentée ensuite de .01 par exemple; si la variation de la fonction n'est pas petite quand la variation de x est très petite, la fonction n'est pas continue pour cette valeur.

12-1. Étudier la fonction $y = \frac{1}{x-2}$ pour $x = 1$ et pour $x = 2$.

12-2. Fonction $y = \frac{1}{\sin x}$, pour $x = 0^\circ$ et pour $x = 90^\circ$.

12-3. Fonction $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ pour $x = 1$.

12-4. Fonction $y = \tan x$ pour $x = 45^\circ$ et pour $x = 90^\circ$.

12-5. Fonction $y = \frac{1}{x^2}$, pour $x = 0$.

12-6. Fonction $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, pour x positif.

12-7. Fonction $y = \frac{1}{\sin x - \sin a}$, pour $x = a$.

12-8. Fonction $y = \sin x$, pour $x = 0^\circ$ et pour $x = 90^\circ$.

III. NOTION DE DÉRIVÉE

309. *La vitesse d'un mobile à un instant donné est fournie par une dérivée.*

La vitesse moyenne d'un mobile en mouvement varié s'obtient en divisant l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir. La vitesse moyenne d'une automobile qui parcourt 150 milles en 6 heures est 25 milles à l'heure.

Cette vitesse moyenne renseigne mal sur la vitesse du mobile à un instant donné. Mais, le mouvement sera sensiblement uniforme pendant un temps très court.

On pourra dire que la vitesse à l'époque t est donnée par le quotient de l'accroissement du chemin parcouru par l'accroissement du temps, lorsque l'accroissement du temps est court. Nous désignerons l'accroissement du chemin par Δe et l'accroissement du temps par Δt . La vitesse moyenne pendant le

temps Δt est donnée par le quotient : $\frac{\Delta e}{\Delta t}$.

310. Exemple. Supposons l'équation $e = 10t^2$, où e désigne le chemin parcouru au bout du temps t ; quelle serait au bout de trois secondes la vitesse du mobile soumis à cette loi ?

Le chemin parcouru au bout de 3 secondes est 10×3^2 ; et au bout de 3.01 secondes : 10×3.01^2 . L'accroissement du chemin est donc : $\Delta e = 10 \times 3.01^2 - 10 \times 3^2$, ou :

$$10 (6 \times .01 + .0001).$$

L'accroissement du temps étant de .01 de seconde, la vitesse moyenne pendant ce centième de seconde a été :

$$\frac{\Delta e}{.01} \text{ ou } 10 (6 + .01), \text{ soit } 60.1.$$

Si l'accroissement du temps au lieu d'être d'un centième de seconde, avait été de .001 de seconde, la vitesse moyenne aurait été de 60.01. En raisonnant sur un accroissement de .0001 seconde, la vitesse moyenne aurait été 60.001, et ainsi de suite. Les vitesses moyennes pendant des accrois-

sements de temps de plus en plus faibles après la troisième seconde *tendent donc vers une limite qui est 60 : c'est la vitesse instantanée à l'instant 3.*

311. La dérivée. Nous avons $e = 10t^2$, le chemin était donné en fonction du temps. La variable indépendante étant t , e est une variable dépendante, fonction de t .

Écrivons : $e = f(t)$.

Lorsque le temps augmente de très peu Δt , le chemin augmente d'une très petite quantité également Δe . Le quotient de ces deux accroissements s'appelle *dérivée de la fonction par rapport à la variable indépendante*, pourvu que les deux accroissements tendent simultanément vers 0.

Il est facile de calculer cette dérivée dans le cas précédent. L'accroissement Δe est lié à l'accroissement Δt par la relation : $\Delta e = 10 [(t + \Delta t)^2 - t^2] = 10 [2t \Delta t + (\Delta t)^2]$

Le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ vaut donc : $10 (2t + \Delta t)$.

Lorsque l'accroissement Δt devient infiniment petit, le rapport précédent tend, en général, vers une limite. Dans le cas présent la limite est $20t$.

Le rapport limite est marqué par le symbole : $\frac{de}{dt}$, l'accroissement infiniment petit de e étant désigné par de et celui de t par dt . Nous verrons bientôt que ces quantités sont les *différentielles de e et de t* .

La dérivée de e par rapport à t , lorsque e et t sont liés par l'équation $e = 10t^2$, est donc : $\frac{de}{dt} = 20t$. Pour abrégé on écrit : $e' = 20t$.

Lorsque $t = 3$, la valeur de e' devient 20×3 , ou 60 : la vitesse instantanée est 60, à l'époque 3, comme il a été trouvé précédemment.

312. La pente de la tangente d'une courbe en un point est la valeur de la dérivée en ce point.

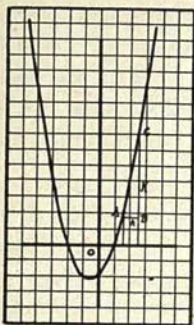


Fig. 23

La pente de la sécante AC a comme valeur k/h . Quand h tend vers 0, la sécante devient la tangente en A dont la pente est fournie par la valeur de la dérivée en A.

Soit un trinôme du second degré :

$$x^2 + x - 2.$$

Construisons la courbe :

$$y = x^2 + x - 2.$$

Soit A, un point de la courbe dont l'abscisse est 1.5; l'ordonnée y se calcule alors aisément: $y = 1.75$. Si l'abscisse x du point A augmente d'une très petite quantité h l'ordonnée augmentera d'une quantité très petite k , et un nouveau point de la courbe sera ainsi trouvé, le point C. Les coordonnées de C étant $(1.5 + h)$ et $(1.75 + k)$.

La valeur k est donnée par la relation :

$$k = [(x+h)^2 + (x+h) - 2] - (x^2 + x - 2) \text{ ou } k = 2xh + h + h^2$$

Le rapport $\frac{k}{h}$, c'est-à-dire le rapport $\frac{BC}{AB}$, est donc :

$2x + 1 + h$. Si h devient très petit, la limite du rapport

$$\frac{k}{h} \text{ est } 2x + 1.$$

Cette limite du rapport de l'accroissement de y à l'accroissement de x sera, par définition, la dérivée de y par rapport à x . Nous écrirons encore :

$$y' = \limite \text{ de } \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = 2x + 1.$$

L'interprétation géométrique est immédiate. L'accroissement de x est marqué par AB: c'est h ; l'accroissement de y est marqué par BC: c'est k . Le rapport k/h est donc la pente de la droite AC avec l'axe des x , c'est la tangente trigonométrique de l'angle que la droite AC forme avec l'axe des x .

Si le point C se rapproche indéfiniment de A, h tend évidemment vers 0 ainsi que k , et la droite AC devient la tangente au point A. A la limite donc, la valeur de la dérivée en A est précisément la pente de la tangente en A. Dans le cas où les coordonnées de A sont (1.5, 1.75) la pente de la tangente en A est donnée par $y' = 2x + 1 = 2 \times 1.5 + 1 = 4$. On trouve 76° environ pour la valeur de l'angle que forme la tangente avec l'axe des x .

EXERCICE CII

On donne le chemin parcouru par les lois suivantes. Calculer les vitesses moyennes pendant le dixième de seconde, le centième de seconde, le millième de seconde qui suit l'époque indiquée et trouver la limite de cette vitesse lorsque l'accroissement du temps devient infiniment petit.

12-9. Soit $e = 3t^2 + 5t - 6$, on demande la vitesse à l'époque $t = 5$.

12-10. Soit $e = \frac{1}{2}gt^2 - 10t$, où $g = 9.81$; on demande la vitesse à l'époque $t = 5$.

12-11. Si $e = t^3 - t^2 + 2t + 7$, on demande la vitesse à l'époque $t = 3$.

12-12. Construire la courbe $y = 2x - 7$ et trouver la pente de la tangente au point dont l'abscisse est 2.

12-13. Construire la courbe $y = 5x^2 - 10x + 1$, et trouver la pente de la tangente au point dont l'abscisse est 1.

Par un calcul numérique, trouver la pente approximative des tangentes de chacune des courbes suivantes au point donné :

12-14. $y = x^2$ au point (2,4).

12-15. $y = x^3$ au point (1,1).

12-16. $y = x$ au point (2,2).

313. La dérivée. Nous avons indiqué deux interprétations de la dérivée. Lorsqu'un chemin parcouru est fonction du temps la dérivée indique une *vitesse*. Lorsque l'ordonnée d'un point est liée à l'abscisse par une fonction, la dérivée de cette fonction donne la *pente de la tangente* en ce point.

La dérivée ne donne pas nécessairement une vitesse ou une pente, mais dans tous les cas la dérivée d'une fonction est la limite du rapport qui existe entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable lorsque ces accroissements tendent simultanément vers 0.

IV. LA DIFFÉRENTIELLE

314. Dans les paragraphes précédents, nous avons désigné la dérivée d'une fonction $y = f(x)$ par y' , ou encore par le quotient $\frac{dy}{dx}$.

Puisque $y' = \frac{dy}{dx}$, nous pouvons écrire : $dy = y' \times dx$.

Nous appellerons *différentielle d'une fonction le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement de la variable*. Puisque $dy = y' \cdot dx$, dy est la différentielle de la fonction $y = f(x)$.

Nous avons également défini $\frac{dy}{dx}$ comme la limite du rapport $\Delta y / \Delta x$ des accroissements de y et de x , lorsque ces accroissements tendent vers 0. Nous avons donc : $\Delta y / \Delta x = (y' + e)$ ou $\Delta y = y' \times \Delta x + e \cdot \Delta x$, e tendant vers 0 en même temps que les accroissements des variables. Nous voyons immédiatement que la *partie principale de l'accroissement de y est $y' \cdot dx$ ou la différentielle de la fonction*.

Si $y = x$, nécessairement $y' = 1$, et $dy = dx$. Dès lors nous pouvons donner une nouvelle définition de la dérivée d'une fonction : *la dérivée d'une fonction est le quotient de la différentielle de cette fonction par la différentielle de la variable*.

EXERCICE CIII

12-17. La surface d'un cercle est donnée par la relation $S = \pi \cdot r^2$, montrer que cette surface constitue une fonction de r dont la dérivée a comme valeur le nombre qui exprime la longueur de la circonférence.

Pour établir ce fait géométriquement étudier la surface de la couronne comprise entre le cercle de rayon r et le cercle de rayon $(r + \Delta r)$. Trouver le rapport entre cet accroissement de la surface et l'accroissement de r .

12-18. Le volume d'une sphère est donné par la formule : $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$.

Montrer que la dérivée de cette fonction de r est le nombre même qui donne la surface de la sphère. Établir le fait géométriquement.

12-19. La surface d'un carré est donnée par $S = x^2$, où x est le côté du carré. Calculer la dérivée de cette fonction de x . Justifier géométriquement.

12-20. La surface d'un triangle équilatéral est donnée par $.433 x^2$, où x est le côté du triangle équilatéral. Calculer la dérivée de cette fonction par une méthode géométrique.

V. CALCUL DES DÉRIVÉES

315. Dérivée de $y = Ax^m$.

Posons $y = Ax^m$ et faisons croître x de la valeur h ; il vient, en appelant k l'accroissement de y :

$$k = A(x+h)^m - Ax^m.$$

Développons $(x+h)^m$ par la formule du binôme :

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}h^2 + \dots$$

en sorte que $k = A(m \cdot x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}h^2 \dots)$

et le rapport $\frac{k}{h} = mAx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} Ax^{m-2}h \dots$;

lorsque h tend vers 0, le rapport $\frac{k}{h} = mAx^{m-1} = y'$.

La dérivée de $y = Ax^m$ est $y' = Am x^{m-1}$.

EXERCICE CIV

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

12-21. $y = 3x^4$

12-22. $y = 6x^7$

12-23. $y = (m+3)x^5$

12-24. $y = \frac{1}{4}x^7$

12-25. $y = 3x^n + 4$

12-26. $y = 7x^{8-b}$

12-27. $y = \frac{x^6}{m+1}$

316. La dérivée d'une constante est nulle.

Une constante ne variant pas, son accroissement est évidemment nul, donc la dérivée d'une constante est nulle.

317. Dérivée d'une somme.

Soit $y = u + v - w$

Il est évident que l'accroissement de y est la somme des accroissements de u , de v et de $-w$. Le rapport de ces accroissements à l'accroissement de x donnant des dérivées, il s'en suit que l'on a à la limite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées des parties de cette somme.

318. Dérivée d'un polynôme.

Le théorème précédent permet de calculer la dérivée d'un polynôme. *La dérivée d'un polynôme est la somme des dérivées des termes de ce polynôme.*

EXERCICE CV

Calculer les dérivées des polynômes suivants :

12-28. $y = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7.$

12-29. $y = \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - p.$

12-30. $y = (a+7)x^2 + (2b-9)x + c.$

12-31. $y = 7ax^5 + 2bx^4 + cx^2 + d.$

319. Dérivée d'une fonction de fonction.

Cette expression *fonction de fonction* signifie que y , qui dépend de x , n'en dépend que par l'intermédiaire d'une autre fonction u . La fonction y dépend immédiatement de u , la fonction u elle-même dépendant de x .

On a donc directement : $y = f(u)$

avec $u = f(x);$

d'où, en définitive: $y = F(x).$

Si par exemple: $y = u^2$, avec $u = (3x-5)$, la fonction intermédiaire sera u .

Comme évidemment : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$, il s'ensuit que la dérivée par rapport à x est égale au produit de la dérivée

de la fonction par rapport à u , par la dérivée de u par rapport à x .

$$\text{Si } y = f(u), \quad y' = f'(u) \cdot u'.$$

EXERCICE CVI

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

12-32. $y = (u)^3$ avec $u = 4x^2$, ou $y = (4x^2)^3$.

12-33. $y = (3x)^3$.

12-34. $y = (2x^3)^3$.

12-35. $y = (3x^2 - 4x + 7)^2$.

12-36. $y = (2x - 5)^4$.

12-37. $y = (x^2 - x - 1)^3$.

12-38. $y = (x+7)^2 + 3(x+7) + 9$.

12-39. $y = (2x + 2)^5 + 3(2x+2)^3$.

320. Dérivée d'un produit.

Soit le produit $y = uv$, u et v étant des fonctions de x qui admettent des dérivées.

Donnons à x un accroissement Δx , alors u prend un accroissement Δu , et v prend un accroissement Δv , tandis que y croît de Δy .

$$\begin{aligned} \text{Nous aurons : } \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv, \\ \text{ou } \Delta y &= u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Si nous divisons tous les termes de l'égalité par Δx , nous obtiendrons en faisant tendre Δx vers sa valeur limite dx :

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

le dernier terme étant négligeable à la limite puisqu'il est le produit d'un nombre infiniment petit du , par un nombre fini, $\frac{dv}{dx}$.

Donc si l'on a $y = uv$, on aura : $y' = u'v + uv'$.

La dérivée d'un produit de deux facteurs égale le produit du second facteur par la dérivée du premier, augmenté du produit du premier facteur par la dérivée du second.

EXERCICE CVII

Calculer les dérivées des produits suivants :

12-40. $y = (x^2 + 1) (x^3 - 1).$

12-41. $y = 2x (x^3 + 2x + 3).$

12-42. $y = (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1).$

12-43. $y = (7x + 5) (x^2 + 2x + 2).$

12-44. $y = (3x + 1) (x^2 + 2x + 1).$

12-45. $y = (3x^2 + 6x + 1) (5x^2 + 10x + 5).$

321. *Dérivée d'un produit de plusieurs facteurs.*

Soit $y = uvw$. Chacune des fonctions u, v, w étant une fonction de x .

Le produit peut s'écrire sous la forme : $y = (uv)w$.

Dès lors la dérivée $y' = (uv)'w + (uv)w'$ (§320) en développant $(uv)'$, on obtient $u'v + uv'$; il vient donc :

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

formule qu'il est facile de généraliser dans le cas de n facteurs.

La dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chacun des facteurs par le produit des autres.

EXERCICE CVIII

Trouver la dérivée des produits suivants :

12-46. $y = (x-1) (x-2) (x-3).$

12-47. $y = (2x-7) (2x-5) (4x-7).$

12-48. $y = (7x+2) (x+8) (3x-4).$

322. *Dérivée d'une puissance.*

Soit $y = u^m$, où u est une fonction de x .

Il n'y a qu'à appliquer le théorème sur les fonctions de fonctions (§319).

$$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'.$$

On pourrait considérer ce cas comme un cas particulier du théorème précédent. En effet $y = u^m = u \cdot u \cdot u \dots u$

La dérivée d'un tel produit égale la somme des produits de la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres; comme il y a m facteurs, on a encore : $y' = m \cdot u^{m-1} u'$.

EXERCICE CIX

Calculer la dérivée des expressions suivantes :

$$12-49. \quad y = (x^2 + 1)^3.$$

$$12-50. \quad y = (x/5 + 7)^5.$$

$$12-51. \quad y = (2ax + b)^4.$$

$$12-53. \quad y = (5 + 3x)^4.$$

323. Dérivée d'un quotient.

Soit la fonction $y = \frac{u}{v}$, u et v étant des fonctions continues de x admettant des dérivées. Si x prend un accroissement Δx , alors u et v prennent des accroissements Δu et Δv , et y un accroissement Δy ; il vient alors :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

Si, après avoir divisé tous les termes par Δx , nous faisons tendre Δx vers 0, nous aurons $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$, puisque dans le dénominateur le produit $(v \cdot \Delta v)$ est négligeable.

La dérivée d'une fraction est donc une fraction ayant comme numérateur le produit par le dénominateur de la dérivée du numérateur, moins le produit par le numérateur, de la dérivée du dénominateur; et comme dénominateur le carré de celui de la fraction.

$$y = \frac{u}{v}; \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

EXERCICE CX

Calculer les dérivées des fractions suivantes :

$$12-54. \quad y = \frac{x-a}{x+a}$$

$$12-55. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$$

$$12-56. \quad y = \frac{2x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 6x + 1}$$

$$12-57. \quad y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$$

$$12-58. \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$12-59. \quad y = \frac{5}{x^3 + x^2 + 1}$$

$$12-60. \quad y = \frac{4}{x+4}$$

$$12-61. \quad y = \frac{a}{bx+c}$$

324. Dérivée d'un radical.

Soit la fonction $y = \sqrt{u}$, u étant une fonction continue de x admettant une dérivée.

Donnons à x un accroissement Δx ; il vient alors :

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u} ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}}{\Delta x} ;$$

si nous multiplions les deux membres par l'expression conjuguée du numérateur, nous obtenons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x [\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}]} .$$

Donc, à la limite, lorsque Δx tend vers dx , nous aurons :

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \text{ de } \frac{\Delta u}{\Delta x (2\sqrt{u})} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} .$$

La dérivée d'un radical du second degré a comme valeur la dérivée de la fonction sous le radical, divisée par le double du radical.

325. Remarque. Nous aurions pu écrire $y = u^{1/2}$, et appliquer la règle démontrée pour le calcul des dérivées de puissances (§322) et des fonctions de fonctions (§319) :

$$y' = \frac{1}{2} \cdot u^{1/2-1} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

VI. PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE

326. Une fonction est **croissante** lorsque sa valeur augmente en même temps que celle de la variable. Une fonction est **décroissante** lorsque sa valeur diminue en même temps que la valeur de la variable augmente.

La fonction $y = x^2$, est une fonction croissante lorsque x est positif, tandis que la fonction $y = \frac{4}{x}$ est une fonction décroissante.

Dans une fonction croissante, l'accroissement de la variable est du signe de l'accroissement de la fonction, tandis que dans une fonction décroissante, l'accroissement de la fonction et celui de la variable sont de signes contraires.

Dans une fonction croissante, la dérivée est donc positive puisque les deux accroissements sont de même signe.

La dérivée d'une fonction décroissante est donc négative puisque l'accroissement de la fonction est de signe contraire à celui de l'accroissement de la variable.

Inversement, si la dérivée est positive, la fonction est croissante, puisque la fonction croît en même temps que la variable. Si la dérivée est négative la fonction est décroissante puisque l'accroissement de la fonction est de signe contraire à celui de l'accroissement de la variable.

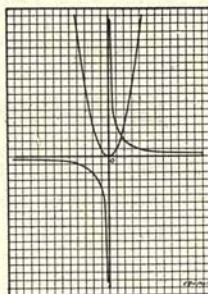


Fig. 24

La courbe $y = x^2$ représente une fonction décroissante lorsque x est négatif et croissante pour x positif; la courbe $y = 4/x$ représente une fonction décroissante.

EXERCICE CXII

12-62. Soit la fonction $y = 1/x$. Calculer la dérivée de la fonction. Quel est le signe constant de cette dérivée ? Quelle est la conclusion au sujet de la fonction ? Construire la courbe et vérifier.

12-63. Une tige de métal de 20 mètres de longueur est pliée en forme de rectangle dont l'un des côtés est x . Trouvez les valeurs de x pour lesquelles un accroissement de x détermine un accroissement de l'aire du rectangle et celles pour lesquelles il y a une diminution ?

12-64. Dans un triangle isocèle ayant 20 comme base et 10 comme hauteur, on inscrit un rectangle dont la base est x . Trouver le changement produit sur l'aire de ce rectangle par un accroissement de x .

12-65. Une lampe est à 60 mètres au-dessus du sol. On laisse tomber une pierre d'un point situé à 20 mètres de la lampe, dans le même plan horizontal. Calculer la vitesse de l'ombre sur le sol après une seconde.

12-66. Une pierre est lancée verticalement à la vitesse de 100m à la seconde. L'espace parcouru au bout de t secondes est $e = 100t - \frac{gt^2}{2}$.

Prenant $g = 9.80$; pendant combien de temps l'espace grandira-t-il avec le temps ?

12-67. Soit $y = x^2 - 6x + 11$. Trouver la dérivée de cette fonction. Pour quelles valeurs de cette dérivée, la fonction est-elle croissante ? Pour quelles valeurs est-elle décroissante ? Quand la courbe cesse-t-elle de décroître pour devenir croissante ?

12-68. Construire la courbe $y = x^4 - 8x^2 + 10$. Calculer la dérivée de la fonction. Vérifier que la dérivée est positive lorsque la fonction est croissante et négative lorsqu'elle est décroissante.

VII. MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION

327. Si dans un intervalle, une fonction d'abord croissante devient décroissante, elle est passée par un maximum comme on le voit sur la courbe, en A. Pendant que la fonction était croissante, la dérivée était positive, elle est devenue négative lorsque la fonction est devenue décroissante ; comme la dérivée a changé de signe, elle s'est annulée. Lorsque la courbe présente un maximum, la dérivée s'annule pour la valeur de la variable qui correspond au maximum, de plus la dérivée positive avant le maximum est négative après.

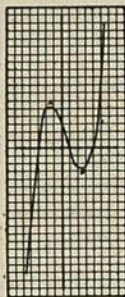


Fig. 25

La courbe présente un maximum en A et un minimum en B.

328. Minimum d'une fonction. Une fonction passe par un minimum, si après avoir été décroissante elle devient croissante, comme cela a lieu en B.

Comme dans le cas du maximum, la dérivée a dû s'annuler mais en passant du signe moins au signe plus.

EXERCICE CXIII

12-69. Quelles valeurs de x rendent maximum ou minimum la fonction :

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16?$$

12-70. Valeurs de x rendant maximum ou minimum la fonction :

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 84.$$

12-71. Maximum et minimum de $y = 5(x - x^2)$.

12-72. Maximum et minimum de $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

12-73. Maximum et minimum de $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

12-74. Déterminer a, b, c , et d de façon que $ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit maximum pour $x = 1$ et minimum pour $x = 2$.

12-75. Inscire dans un cône droit de révolution un cylindre dont la surface totale soit maximum. La hauteur du cône est 12 m et le rayon de la base 4m.

12-76. On enlève un carré à chacun des coins d'un rectangle mesurant 20 pouces par 30 pouces. Avec la partie restante on forme une boîte. Que doit être le côté des carrés enlevés pour que le volume de la boîte soit maximum.

12-77. Un jardinier doit construire un parterre ayant la forme d'un secteur circulaire. S'il a vingt mètres de fil pour l'enclore, quel rayon donnera-t-il au cercle pour que la surface du secteur soit maximum ?

12-78. Un réservoir ouvert ayant une base carrée et des côtés verticaux doit avoir une capacité de $4\,000\text{ m}^3$. Trouver les dimensions du réservoir pour que le prix de revêtement de plomb à l'intérieur soit minimum.

12-79. Une boîte droite à base carrée, ouverte au sommet doit être fabriquée avec une quantité donnée de matériaux. En supposant que l'épaisseur des matériaux n'entre pas en ligne de compte, et qu'il n'y ait aucune perte, quelles sont les dimensions de la plus grande boîte.

12-80. Une rivière a ses deux rives parallèles. Un homme se trouve en A et veut atteindre un point sur le côté opposé distant de 10 kilomètres du point B en face de A. La distance AB est de 2 km. L'homme peut atteindre ce point en ramant à 3 km à l'heure, puis en marchant à 5 km à l'heure. Quelle route prendra le moins de temps ?

12-81. Un bateau vogue directement vers le nord à 10 km à l'heure. Un autre bateau est à 190 km plus au nord et vogue en suivant la route $S60^\circ E$ à la vitesse de 15 km. Quand la distance qui les sépare sera-t-elle minimum ?

12-82. Quel est le triangle isocèle d'aire maximum que l'on puisse découper dans un demi-cercle, la base étant parallèle au diamètre.

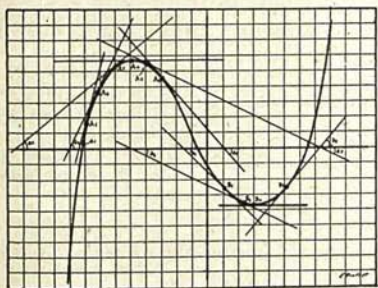


Fig. 26

Aux points A_k , la courbe est tournée vers les y négatifs et la dérivée seconde est négative dans cette région. Dans la région des B, la dérivée seconde est positive.

329. Lorsqu'une fonction passe par un maximum A, A', A'' , la dérivée de cette fonction passe du signe positif au signe négatif. Si donc la dérivée est elle-même une fonction continue de x , c'est une fonction décroissante dans la région du maximum.

La dérivée seconde qui est la dérivée de la dérivée première doit donc être négative aux environs d'un maximum.

Lors d'un minimum, la dérivée seconde doit être positive car si la dérivée première est continue, elle passe du signe — au signe + dans la région du minimum, ce qui montre que la dérivée première doit être une fonction croissante, donc la dérivée seconde est positive lors d'un minimum et négative lors d'un maximum.

En A, dérivée première nulle; dérivée seconde négative.

En B, dérivée première nulle; dérivée seconde positive.

330. Sens de la concavité d'une courbe. Le signe de la dérivée seconde renseigne sur l'allure de la courbe représentative de la fonction. Supposons la courbe en cintre ou en voûte à concavité tournée vers le bas en A, A', A''. Si, x croissant, nous menons la tangente à cette courbe en différents points, nous constatons que la pente de cette tangente décroît constamment. La dérivée première doit être une fonction décroissante et la dérivée seconde négative, lorsque la concavité est tournée vers le bas. Inversement, la dérivée seconde, négative indique que la dérivée première décroît, donc que la courbe est ouverte vers le bas (fig. 26).

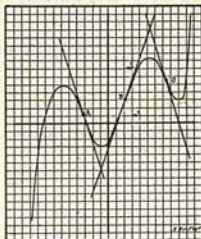


Fig. 27

Aux points A, B et C où la courbure change de sens se trouvent les points d'inflexion; en ces points, la dérivée seconde s'annule.

Si la courbe est ouverte vers le haut, on voit que la pente de la tangente augmente; donc la dérivée seconde est positive.

Lorsqu'en un point la courbe est en voûte ou en cintre la dérivée seconde est négative; lorsque la courbe est en chaînette la dérivée seconde est positive. On remarquera qu'au voisinage d'un maximum la courbe est en forme de voûte, tandis qu'au minimum elle offre la forme d'une chaînette.

331. Point d'inflexion. Souvent une courbe change d'orientation; ouverte vers le haut d'abord, elle se tourne vers le bas comme on le voit sur une sinusoïde: le point de transition entre ces deux formes s'appelle point d'inflexion.

En général, la courbe, au point d'inflexion, passe à travers sa tangente: A, B, C (fig. 27).

Puisque l'orientation de la courbure change de sens, au point d'inflexion, la dérivée seconde y'' change de signe : la dérivée seconde s'annule donc au point d'inflexion.

EXERCICE CXIV

Trouver les points d'inflexion des courbes suivantes.

12-83. $6y = x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

12-84. $12y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 2x + 1$.

12-85. $y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 6x - 8$.

12-86. $y = 3x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 20x - 5$.

IX. CONSTRUCTION DE COURBES

332. On peut construire point par point des courbes simples, mais les dérivées sont indispensables dans les courbes un peu compliquées.

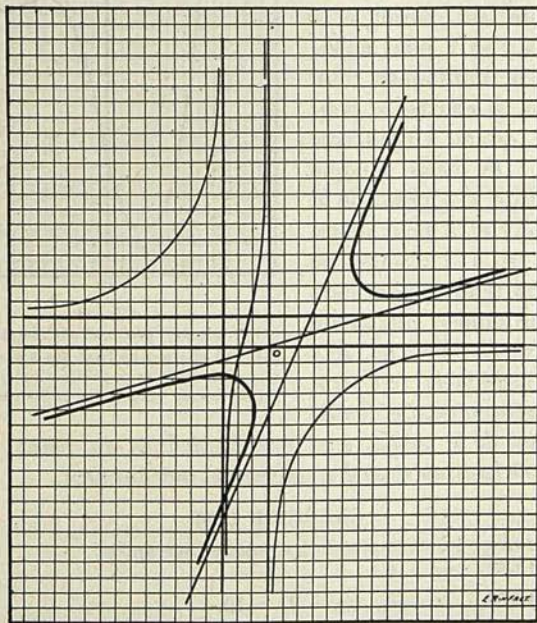


Fig. 28

Les courbes diverses de la figure présentent des exemples d'asymptotes : horizontales, verticales, quelconques (333).

Pour construire méthodiquement une courbe, déterminer d'abord s'il est possible les points où elle rencontre les axes.

Calculer la dérivée. Les valeurs qui annulent la dérivée fournissent les maximums et les minimums de la courbe.

La dérivée seconde permettra de distinguer les maximums des minimums ; le signe de la dérivée seconde fournira le sens des courbures. Les points qui annulent la dérivée seconde sont ordinairement des points d'inflexion.

333. Détermination des asymptotes d'une courbe.

On appelle *asymptotes* d'une courbe des droites telles que la distance d'un point de la courbe à l'une de ces droites tende vers 0 lorsque x augmente indéfiniment. Si une asymptote est parallèle à l'axe des x et a pour équation $y=b$, l'ordonnée d'un point de la courbe a pour limite b , quand x tend vers l'infini. De même lorsque l'asymptote est parallèle à l'axe des y et a pour équation : $x = a$, l'abscisse de la courbe tend vers a lorsque l'ordonnée augmente indéfiniment. (Voir fig. 28).

Si l'asymptote est une droite quelconque, l'ordonnée d'un point de la courbe tend vers l'ordonnée du point correspondant de la droite quand x augmente indéfiniment.

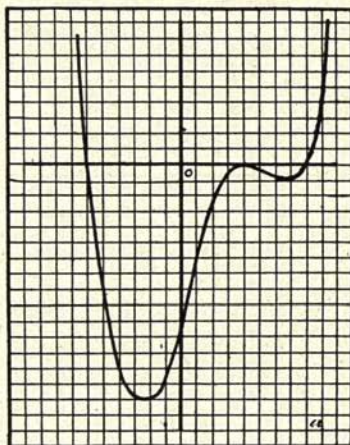


Fig. 29

La courbe présente un maximum au point où elle touche l'axe des x et deux minimums; elle a deux points d'inflexion. On a pris comme unité, deux petits côtés (334).

EXERCICE CXV

Déterminer les asymptotes des courbes suivantes :

12-87. $xy = 4$.

12-88. $(x + 7)(y - 3) = 10$.

12-89. $y = e^x$.

12-90. $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$.

$$12-91. \quad y = \frac{3}{x^2(x+3)}.$$

$$12-92. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$$

334. Exemple de construction de courbe.

Soit à construire la courbe $y = (x-2)^2(x+3)(x-4)$.

L'ordonnée y s'annule pour les valeurs : $x = -3, 2, 4$;

$x = 2$ est une racine double.

La dérivée y' devient, après simplifications :

$$y' = (x-2)(4x^2 - 7x - 2).$$

La dérivée $y'' = 12x^2 - 30x - 8$.

La dérivée première s'annule pour $x = 2$ et pour

$$x = \frac{7 + \sqrt{401}}{8},$$

soit pour les valeurs $\frac{27}{8}$ et $-\frac{13}{8}$ environ.

Les signes de la dérivée dans les intervalles suivants sont :

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & \alpha & -\frac{13}{8} & + & 2 & + & \frac{27}{8} & + & \alpha \\ y' & - & \alpha & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \alpha \end{array}$$

La dérivée seconde est négative entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{11}{4}$

La dérivée seconde s'annule pour $x = \frac{1}{12}(15 \pm \sqrt{321})$
ou pour $\frac{11}{4}$ et $-\frac{1}{4}$ environ. (Voir fig. 29, p. 235.)

EXERCICE CXVI

12-93. Construire la courbe $y = x^2(x-1)^3$. Calculer les dérivées première et seconde ; étudier le signe de chacune de ces dérivées.

12-94. Construire la courbe : $y = \frac{x^2 + 8x}{x^2 - 10x + 9}$.

12-95. Construire $y = \frac{x-3}{(x-2)(x-5)}$.

12-96. Construire $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 6x - 7}$.

12-97. Construire $y^2 = x^2 - 9x + 20$.

12-98. $y = (x - 1)^2 (x - 2)^3$.

12-99. $y = x^3/12 - x$.

12-100. $y = x^3 - 3x^2 + 6x$.

12-101. $y = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

12-102. $y = 1/4 x^4 - 1/3 x^3 - 1/2 x^2 + 2x - 1$.

12-103. $y = (3x - 1) (x + 1)^2 (x - 2)^2$.

12-104. $y = x^4 - 5/4 x^2 + 1/4$.

12-105. $y = \frac{(x^2 - 25)}{x + 1}$.

12-106. $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$.

12-107. $y = x - \frac{4}{x - 5}$.

X ÉQUATION D'UNE COURBE EXPÉRIMENTALE

335. Soit la courbe expérimentale suivante. — Une courbe de ce genre est obtenue dans la graduation du spectroscopie en longueurs d'ondes. — On peut se proposer de trouver une formule représentant la courbe.

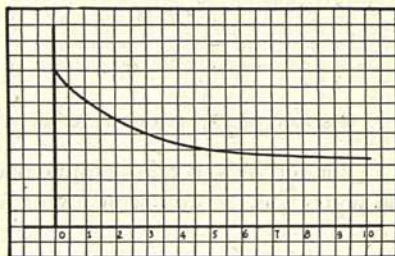


Fig. 30

Supposons la relation
 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

On assimile la courbe expérimentale à une courbe de la forme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. En remplaçant x par des valeurs convenables et en mesurant les valeurs correspondantes de y , on obtient des équations qui permettent de calculer les coefficients.

On prendra pour x quatre valeurs choisies convenablement : $x = 0, 2, 4, 6$ par exemple. On mesurera sur la courbe les valeurs correspondantes de y .

Remplaçant x par les valeurs précédentes et y par les valeurs observées, il y aura quatre équations pour déterminer a, b, c et d . On trouvera approximativement l'équation suivante :

$$y = -.017 x^3 + .23 x^2 - 1.22x + 5.$$

On pourra vérifier que les valeurs calculées pour d'autres valeurs de x sont en harmonie avec la courbe.

XI. FONCTIONS CIRCULAIRES

336. Dérivée de la fonction $y = \sin x$.

Soit la fonction $y = \sin x$. Si x augmente de Δx , y augmente de Δy donné par

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x.$$

Cette différence de sinus peut se mettre sous forme de

$$\text{produit : } \Delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

La dérivée de la fonction est la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

$$\text{donc : } \frac{dy}{dx} = \cos (x) \times \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}}$$

Le dernier rapport tend vers l'unité quand dx tend vers sa limite 0 (§60). Il reste donc :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

337. Dérivée de la fonction $y = \cos x$.

Comme $y = \cos x = \sin (90 - x)$, il n'y a qu'à appliquer le théorème sur les fonctions de fonctions (§319) :

$$y = \sin u ; y' = \cos u \times u'$$

$$\text{ici : } y' = \cos (90 - x) \times (-1) = -\sin x.$$

EXERCICE CXVII

12-108. Construire la courbe $y = \sin x$.

Calculer les dérivées première et seconde. Trouver les maximums et les minimums de la courbe, les points d'inflexion etc.

12-109. Étudier de même $y = \sin 2x$.

12-110. Étudier la fonction $y = \sin \frac{x}{2}$.

338. Dérivée de la fonction $y = \operatorname{tg} x$

On peut écrire $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, et appliquer à cette fraction les règles ordinaires (§323):

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

EXERCICE CXVIII

12-111. Retrouver la formule de la dérivée de $y = \operatorname{tg} x$, en partant de la définition de la dérivée.

12-112. Construire la courbe $y = \operatorname{tg} x$. Étudier la courbe dans ses particularités. Remarquer en particulier les asymptotes.

339. Dérivée de la fonction $y = \operatorname{cotg} x$.

$$\text{Comme } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(\sin x)^2}$$

340. Dérivée de la fonction : $y = \sec x$.

$$\text{La fonction } \sec x = y = \frac{1}{\cos x};$$

$$y' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

341. Dérivée de la fonction : $y = \operatorname{cosec} x$.

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x};$$

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

XII. DÉRIVÉES DES FONCTIONS IMPLICITES

342. Les équations :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$xy = 40$$

$$y \sin x - x = 1$$

établissent un rapport entre x et y . Les valeurs diverses que peut prendre y dépendent de celles de x : la variable y est donc une fonction de x et comme l'équation n'est pas résolue par rapport à y , on dit que y est une fonction implicite de x .

Supposons que nous ayons l'équation :

$$xy + x^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

et que nous voulions calculer la dérivée de y par rapport à x ,

ou trouver $\frac{dy}{dx}$. Nous rappelant que y est une fonction de x ,

différentions par rapport à x . Chaque fois que nous aurons à différencier un terme ou un facteur contenant y , nous appliquerons la théorie des fonctions de fonctions (§319); nous différentierons donc d'abord par rapport à y , puis nous multiplierons par dy/dx .

En différentiant l'expression précédente nous aurons donc :

$$y + x \frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

et nous pourrions déduire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x}$$

Soit encore l'équation :

$$x^2 + y^2 = 25$$

Calculons la dérivée par rapport à x , nous rappelant toujours que y est une fonction de x , dont la dérivée est $\frac{dy}{dx}$, nous aurons :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{d'où : } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Dans les cas précédents il nous était possible de trouver y explicitement en fonction de x . Dans (1) par exemple, nous

$$\text{trouvons : } y = \frac{1-x^2}{x}$$

$$\text{et dans (2) : } y = \sqrt{25-x^2}.$$

Mais la dérivée $\frac{dy}{dx}$ peut s'obtenir alors même que l'équation où figurent x et y ne donnerait que difficilement y en fonction de x , ou même ne pourrait le donner.

Soit l'équation : $y^5 + 3x^3 - 7xy + x - y = 40$
Il serait impossible d'obtenir une formule simple donnant y explicitement en fonction de x , mais nous pouvons facilement calculer dy/dx . En effet, différentiant par rapport à x , nous avons :

$$5y^4 \frac{dy}{dx} + 9x^2 - 7y - 7x \frac{dy}{dx} + 1 - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{ou : } \frac{dy}{dx} (5y^4 - 7x - 1) = 7y - 1 - 9x^2$$

$$\text{et } \frac{dy}{dx} = \frac{7y - 1 - 9x^2}{5y^4 - 7x - 1}$$

L'équation est vérifiée pour $x = 2$ et $y = -1$, on a donc comme valeur de dy/dx au point $(2, -1)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7 - 1 - 36}{5 - 14 - 1} = \frac{22}{5}.$$

343. Application. Soit à calculer la dérivée de y par rapport à x dans la relation :

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y - 6 = 0$$

$$f'_x = 2x - 3y - 5,$$

$$f'_y = -3x + 4y + 7,$$

$$\text{donc } y' = -\frac{2x - 3y - 5}{-3x + 4y + 7}.$$

La pente de la tangente en un point donnée sera obtenue en remplaçant x et y par les coordonnées du point.

EXERCICE CXIX

12-113. Construire $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$. Trouver les pentes des tangentes aux points ayant comme abscisses 0, 1, -1.

12-114. Construire $xy + 3x + 4y + 2 = 0$; trouver les pentes des tangentes aux points dont les abscisses sont 0, 1, 3.

12-115. Construire la courbe $x^2 + 3y^2 = 12$; mener les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.

12-116. Construire : $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8 = 0$; tracer les tangentes aux points dont les abscisses sont 0 et 1.

Dans 5, 6, 7, donner des valeurs à x et trouver y . Aux points déterminés, mener les tangentes, la pente étant calculée d'après (342).

12-117. Construire $x^2 + 4xy + 2y^2 - 4x - 5y - 4 = 0$.

12-118. Construire $x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 5y - 3 = 0$.

12-119. Construire $x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y - 2 = 0$.

CHAPITRE XIII

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

Sommaire. I. Racines entières. II. Racines égales. III. Première méthode d'approximation. IV. Formule de Newton. V. Méthode en "spirale ou en escalier". VI. Méthode graphique.

I. RACINES ENTIÈRES

344. Si a est racine de $f(x) = 0$, $f(x)$ étant un polynôme entier en x ; on a identiquement :

$$f(x) \equiv (x-a) F(x), \text{ quel que soit } x.$$

Si dans cette identité on fait $x = 1$, il faut :

$$f(1) = (1-a) F(1);$$

donc $1-a$ ou $a-1$ doit diviser $f(1)$.

De même, si $x = -1$, il vient :

$$f(-1) = (-1-a) F(-1)$$

et $(-a-1)$ ou $a+1$ doit diviser $f(-1)$.

Si $f(x)$ contient un terme indépendant de x , il est évident que a doit être un diviseur de ce nombre, pourvu que le coefficient du terme en x du plus haut degré dans $f(x)$ soit l'unité. Si $f(x)$ ne contient pas de terme indépendant de x , a devra diviser le coefficient du terme du plus bas degré

Donc toute racine entière de $f(x) = 0$ doit être un diviseur du coefficient du terme du plus faible degré dans $f(x)$;

$$a-1 \text{ doit diviser } f(1) ; \quad a+1, f(-1).$$

344. Dans la pratique, on essaiera les diviseurs du terme indépendant de x , afin de découvrir les racines entières de l'équation proposée.

$$\text{Soit } x^3 - 2x^2 - 45x + 126 = f(x).$$

$$\text{On trouve } f(1) = 80 \text{ et } f(-1) = 168.$$

Les diviseurs de 126 sont: $+1, -1, +7, -7, +6, -6, +3, -3, \dots, 21, \dots$

Ni $+1$, ni -1 ne sont racines ; $a+1$ doit diviser 168 et $a-1$, 80.

Si l'on prend $a = 7$: $(7+1)$ divise 168, mais $(7-1)$ ne divise pas 80.

Si $a = -7$, $(-7+1)$ divise 168, $(-7-1)$ divise 80, donc -7 peut être racine.

De même 6 et 3 peuvent être des racines. On essaiera les nombres 3, 6, -7 qui sont d'ailleurs les racines.

EXERCICE CXX

Résoudre les équations suivantes :

13-1. $x^4 - 16x^3 + 83x^2 - 160x + 100 = 0$.

13-2. $6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$ (équation réciproque).

13-3. $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$.

13-4. $x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48 = 0$.

13-5. $x^4 - 20x^3 + 137x^2 - 370x + 336 = 0$.

II. RACINES ÉGALES

345. Soit une équation admettant une racine multiple $x = a$, d'ordre n .

On doit avoir : $f(x) = (x-a)^n F(x)$.

La dérivée : $f'(x) = n(x-a)^{n-1} F(x) + (x-a)^n F'(x)$

ou $f'(x) = (x-a)^{n-1} [n.F(x) + (x-a) F'(x)]$

On voit que si a est racine d'ordre n de $f(x) = 0$, elle est aussi racine d'ordre $(n-1)$ de $f'(x) = 0$.

On cherchera le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ et ce plus grand commun diviseur renfermera le produit de tous les facteurs correspondant aux racines multiples. Les racines d'ordre n paraîtront au degré $(n-1)$ dans ce plus grand commun diviseur.

Les racines doubles de $f(x)$ sont donc des facteurs simples du plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$.

Inversement, si $f(x)$ et $f'(x)$ ont un plus grand commun diviseur contenant $(x-a)^{n-1}$, a sera racine d'ordre n de $f(x) = 0$. — Il faut que a soit racine de $f(x) = 0$ puisque $(x-a)$ est un des facteurs de $f(x)$. Supposons que a soit racine d'ordre m , alors le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ comprendrait $(x-a)^{m-1}$; comme ce plus grand commun diviseur doit être identique au précédent il faut $m-1 = n-1$ ou $m = n$.

EXERCICE CXXI

13-6. Racines de $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$.

13-7. Racines de $x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 20x + 16 = 0$.

13-8. Racines de $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$.

13-9. $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$.

13-10. $x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 38x^4 - 31x^3 - 61x^2 + 96x - 36 = 0$.

III. RACINES INCOMMENSURABLES

MÉTHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES

346. Soit une équation $f(x) = 0$. Supposons construite la courbe $y = f(x)$. Pour $x = a$, l'ordonnée prend la valeur $f(a)$ et pour $x = b$, la valeur $f(b)$.

Nous aurons ainsi les points: $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Si les points A et B ont été convenablement choisis, la courbe dans le voisinage de AB peut être remplacée par la corde AB. Cette corde AB, prolongée si nécessaire, rencontrera l'axe des x en un point C qui sera voisin du point où la courbe coupe l'axe des x , et fournira une valeur approchée de la racine.

Pour déterminer C, on aura le rapport :

$$\frac{a - OC}{b - OC} = \frac{f(a)}{f(b)},$$

et cette égalité est vraie en signe également.

Si l'on pose $OC = a + z$, la proportion devient :

$$\frac{z}{a + z - b} = \frac{f(a)}{f(b)} \quad \text{ou} \quad z = - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}$$

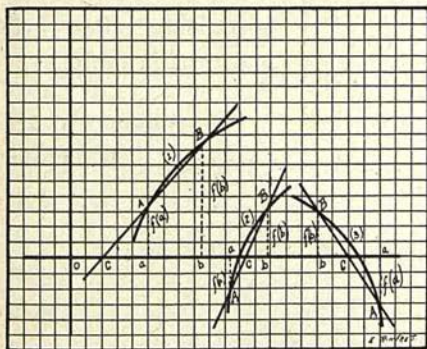


Fig. 31

La corde AB coupe l'axe des x au point C. Ce point donne approximativement le point de rencontre de la courbe avec l'axe des x .

et la valeur approchée de la racine est

$$x' = a + \frac{(a-b) f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

On choisira généralement les points A et B de façon que $f(b)$ et $f(a)$ soient de signes contraires. Si l'on suppose $a < b$, la corde coupera l'axe des x entre a et la racine réelle de l'équation si la concavité de la courbe est vers les x né-

gatifs et entre la racine et b si la concavité est tournée vers les x positifs. Dans le premier cas, on aura une valeur par défaut, dans le second une valeur par excès.

EXERCICE CXXII

Au moyen de la méthode démontrée précédemment trouver les racines des équations suivantes voisines de la valeur indiquée.

13-11. $x^4 - 3x^2 + 5x - 19 = 0$, racine voisine de 2.

13-12. $x^4 + 2x^3 - 58x^2 + 109x - 36 = 0$, racines voisines de 5, 2, 0,5, -9.

13-13. $x^5 - 30 = 0$, racine voisine de 2.

13-14. $x^2 + \sqrt{x} = 100$, racine voisine de 10.

13-15. $x^3 + \sqrt[3]{x} = 7$, racine voisine de 2.

IV. MÉTHODE DE NEWTON

MÉTHODE DE NEWTON pour la solution numérique des équations.

Viète, mathématicien français (1540-1603) donna une méthode générale de solution d'une équation numérique quelconque et la méthode qu'il inventa ainsi est essentiellement celle que l'on appelle méthode de Newton (découverte en 1669) et exposée dans tous les traités d'algèbre spéciale.

347. Il est possible de déduire la formule de Newton de l'expression précédente dont elle constitue la limite.

Supposons a très rapproché de b et posons $b = a + h$.

La formule précédente (346) devient alors :

$$x' = a - \frac{(a+h-a) f(a)}{f(a+h) - f(a)}$$

$$\text{ou } x' = a - \frac{f(a)}{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

À la limite, lorsque h tend vers 0, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers

$f'(a)$, donc il vient :

$$x' = a - \frac{f(a)}{f'(a)};$$

c'est la formule de Newton. Cette formule s'applique à toute équation, non seulement aux polynômes mais même aux équations transcendentes.

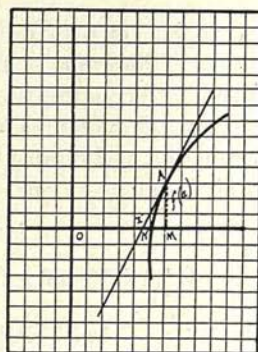


Fig. 32

La tangente en A coupe l'axe des x en un point très voisin du point N qui correspond à la racine.

Intuitivement (fig. 32),

$$ON = x' = OM - NM = a - NM$$

$$\text{or } \operatorname{tg} ANM = \frac{f(a)}{NM} = f'(a) \quad (312),$$

puisque la pente de la tangente en A est $f'(a)$, donc

$$NM = \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{et} \quad x' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

EXERCICE CXXIII

Appliquer la formule de Newton au calcul des racines des équations suivantes. On se contentera de deux décimales.

- 13-16. $x^3 + 2x^2 - 3x - 9 = 0$, racine voisine de 2.
- 13-17. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$, racine voisine de 2.5.
- 13-18. $x^5 + 12x^4 + 59x^3 + 150x^2 + 201x - 207 = 0$ voisine de 0.5.
- 13-19. $x^3 - 63 = 0$, voisine de 4.
- 13-20. $2x^4 - 12x^3 + 12x - 3 = 0$, voisine de 6, et une autre voisine de 1.
- 13-21. $4 = x - \operatorname{tg} x$.
- 13-22. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1000$, voisine de 4.
- 13-23. $2x^5 + 10x - 1 = 0$, racine voisine de 0.1.

V. MÉTHODE D'APPROXIMATION DITE " EN SPIRALE OU EN ESCALIER "

348. Voici un procédé qui permet parfois de trouver la valeur numérique d'une des racines. La méthode consiste à séparer l'équation en deux parties par le signe = et à égaler chacun des membres à une inconnue auxiliaire y . Pour que l'équation soit résolue, il faut évidemment que cette inconnue y ait la même valeur dans les deux équations.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE DITE EN SPIRALE

349. Soit à trouver une des racines de l'équation :

$$x^3 + x^2 + x - 5 = 0.$$

Nous pouvons écrire cette équation :

$$x^2 = \frac{5 - x}{x + 1}.$$

Construisons les deux courbes :

$$\text{Courbe (1) : } y = x^2.$$

$$\text{Courbe (2) : } y = \frac{5 - x}{x + 1}$$

Donnons à x la valeur 0 dans la courbe (2), nous obtenons ainsi le point A' tel que $y = 5$.

Si nous cherchons le point A_2 de (1) qui a même ordonnée, nous obtenons pour l'abscisse de ce point, la valeur 2.24.

Un point A_3 de (2) a comme abscisse 2.24 et son ordonnée est .853.

Sur (1), le point A_4 qui a même ordonnée que A_3 a comme abscisse .925.

Sur (2) le point A_5 qui a .925 comme abscisse a pour ordonnée 2.12.

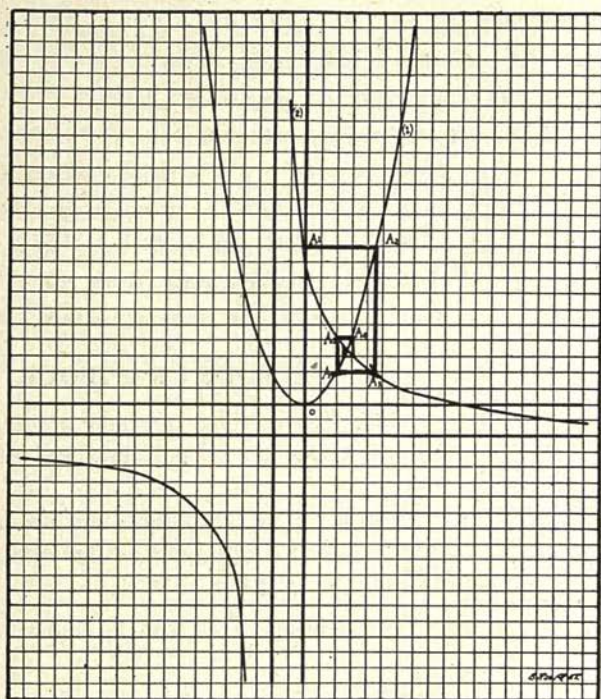


Fig. 33

Le contour en spirale $A_1 A_2 A_3 \dots$ fait voir géométriquement le fonctionnement de la méthode d'approximation.

Le point A_6 de (1) qui a 2.12 pour ordonnée a comme abscisse 1.46, etc. En joignant les divers points A , la ligne dessinée rappelle la spirale : d'où le nom de la méthode

Dans le cas actuel on arriverait à peu près à la racine 1.27.

Afin d'éviter un travail inutile, il sera bon de déterminer graphiquement d'abord la racine que l'on veut préciser avant d'utiliser l'une des méthodes précédentes.

EXERCICE CXXIV

Appliquer la méthode précédente pour trouver l'une des racines des équations suivantes :

13-24. $x^4 - x^2 + x - 5 = 0$, racine voisine de 1.5.

13-25. $x^3 + 10x^2 + 5x - 2600 = 0$, racine voisine de 10.

13-26. $x^3 + x^2 - 500 = 0$, racine voisine de 7.

13-27. $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$, racine voisine de 3.5.

13-28. $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$, voisine de 5.

13-29. $x^3 - 17x^2 + 54x - 350 = 0$.

13-30. $x^2 + 2^x = 10$, racine voisine de 2.

13-31. $x + \log x = 2$, racine voisine de 1.5.

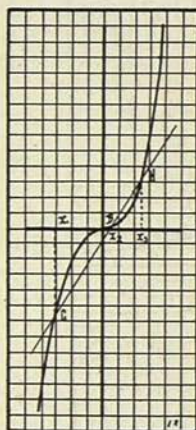


Fig. 34

La courbe $y = x^3$ rencontre la droite

$$y = -px - q$$

en des points dont les abscisses sont les racines de $x^3 + px + q = 0$.

VI. MÉTHODE GRAPHIQUE

350. Une méthode graphique intéressante se rattache aux considérations précédentes.

Soit à trouver graphiquement les racines d'une série d'équations du 3e degré, de la forme : $x^3 + px + q = 0$.

Construisons avec soin la courbe
 $y = x^3$.

Construisons maintenant la droite
 $y = -px - q$.

Cette droite rencontre la courbe en des points dont les abscisses fournissent les racines de l'équation proposée.

Soit en effet A (x' , y'), un de ces points. Ce point étant sur chacune des deux courbes, on a : $y' = x'^3$, de même $y' = -px' - q$.

On a donc : $x'^3 = -px' - q$, ou $x'^3 + px' + q = 0$; c'est-à-dire que x' est une des racines de l'équation proposée.

EXERCICE CXXV

Résoudre graphiquement par la méthode (350) les équations suivantes :

13-32. $x^3 - 2x + 5 = 0$.

13-33. $x^3 - x + 5 = 0$.

13-34. $x^3 - 20x - 10 = 0$.

Exercices divers à résoudre par l'une ou l'autre des méthodes d'approximations :

13-35. $x + \sin x = 2$, valeur de x voisine de 63 degrés. Il faut trouver x en radians.

13-36. $2^x = 3x$, racine voisine de 3.5.

13-37. $2^x = 5x + 10$ racine voisine de 5.

13-38. $x^3 + \operatorname{tg} x = 10$.

13-39. $x^4 = 100x + 200$.

CHAPITRE XIV

ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

Sommaire. I. Forme générale de l'équation. II. Réduction à la forme $x^3 + px + q = 0$. III. Conditions de réalité des racines. IV. Résolution de l'équation réduite. V. Discussion. VI. Équation du quatrième degré.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Les Babyloniens auraient réussi à résoudre une forme d'équation du troisième degré : $x^3 + px^2 + q = 0$. Le procédé employé était celui-ci : ils avaient construit une table donnant la valeur de $x^3 + px^2$ pour diverses valeurs de p et de x ; c'est en consultant cette table qu'ils trouvaient pour une valeur donnée de q et de p la valeur de x correspondante.

Omar Khayyan (qui mourut en 1123), Arabe, classa les équations du troisième degré et découvrit une méthode géométrique de solution pour les équations numériques dans les limites du système de numération alors connu.

Development of Mathematics, p. 94.

La solution de l'équation du troisième degré fut faite complètement vers 1575. Toutefois il faut remarquer que les racines négatives ou imaginaires n'étaient pas alors connues, ou interprétées. Le nom de l'italien Cardan (1501-1576) sera toujours attaché à la solution de cette équation, il n'en fut pas cependant le découvreur car il l'avait apprise, de l'italien Tartaglia et s'était engagé au secret, mais, en 1545, Cardan dans son *Ars Magna* publia la solution en s'en donnant tout le mérite. Tartaglia (1500-1557) (personnage connu sous ce surnom dont la signification veut dire le bègue), est donc le véritable découvreur de la méthode telle que nous la proposons ordinairement dans les ouvrages d'algèbre.

Development of M., p. 110.

351. Pour résoudre une équation du troisième degré, essayer d'abord les méthodes générales pour les racines entières (§344).

C'est ainsi que les équations suivantes du troisième degré se résolvent facilement.

EXERCICE CXXXI

- 14-1. $x^3 - 8x^2 - 49x + 392 = 0$.
- 14-2. $x^3 - 21x^2 + 143x - 315 = 0$
- 14-3. $x^3 - 11x^2 + 40x - 60 = 0$.
- 14-4. $x^3 - 8x^2 - 23x + 210 = 0$.

I. FORME GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

352. Toute équation du troisième degré à une inconnue peut se mettre sous la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Il faut que a diffère de 0 autre-

ment l'équation ne serait que du second degré. Lorsque a tend vers 0, la théorie des équations montre qu'une des racines augmente indéfiniment.

Supposons a différent de 0. Comme on peut diviser tous les coefficients par a , on obtient une équation de la forme suivante, le coefficient de x^3 étant l'unité :

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

II. RÉDUCTION À LA FORME: $x^3 + px + q = 0$

353. Si l'on remplace x par $(x' + v)$, v peut être calculé pour que la nouvelle équation ne contienne pas de terme en x'^2 . En effet, on obtient :

$$(x' + v)^3 + b(x' + v)^2 + c(x' + v) + d = 0.$$

expression qui, développée, devient :

$$x'^3 + x'^2(3v + b) + x'(3v^2 + 2bv + c) + (v^3 + bv^2 + cv + d) = 0.$$

Si l'on pose : $3v + b = 0$, ou $v = -\frac{b}{3}$, le terme en x'^2 disparaît et l'équation transformée est :

$$x'^3 + x'(3v^2 + 2bv + c) + (v^3 + bv^2 + cv + d) = 0$$

où v doit être remplacé par $\left(-\frac{b}{3}\right)$.

354. Remarque. Remarquons les particularités suivantes :

Posons $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$$x = x' + v; \quad v = -\frac{b}{3}.$$

Dans l'équation transformée, $x'^3 + px' + q = 0$:

$p = 3v^2 + 2bv + c$, donc $p = f'(v)$, où $v = -\frac{b}{3}$,

$q = v^3 + bv^2 + cv + d$, ou $q = f(v)$,

l'équation peut donc s'écrire :

$$x'^3 + f'\left(-\frac{b}{3}\right)x' + f\left(-\frac{b}{3}\right) = 0.$$

355. Racines cubiques de l'unité.

Nous avons trouvé précédemment les trois racines cubiques de l'unité et leurs propriétés (§278).

Reprenons cette équation par la formule de Moivre :

$$x^3 = 1 = \cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k$$

$$\text{Donc } x = \cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k \quad (304).$$

Donnant à k les valeurs 0, 1 et 2, nous avons :

$$x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$$

$$x_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$$

$$x_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ.$$

On remarque que $x_2 = (x_3)^2$ puisque

$$(x_3)^2 = \cos 480^\circ + i \sin 480^\circ \quad (296)$$

$$= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = x_2$$

$$\text{De même } x_3 = (x_2)^2.$$

$$\text{Écrivons : } x_2 = \alpha \text{ et } x_3 = \alpha^2;$$

$$\text{on sait que } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad (278).$$

356. Soit maintenant à résoudre l'équation : $y^3 = A$.

Si y_1 est une des trois racines cubiques de A , les deux autres seront $y_1 \alpha$ et $y_1 \alpha^2$.

En effet, par hypothèse $y_1^3 = A$, donc

$$(y_1 \alpha)^3 = A \times \alpha^3 = A.$$

Donc, $y_1 \alpha$ sera aussi une racine cubique de A , ainsi que $y_1 \alpha^2$.

III. CONDITION DE RÉALITÉ DES TROIS RACINES DE L'ÉQUATION

$$x^3 + px + q = 0$$

357. Si $a+bi$ est racine de l'équation $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont réels, il en est ainsi de $a-bi$.

Nous démontrerons plus loin que l'équation $x^3 + px + q = 0$ n'a que trois racines.

Si les coefficients p et q sont réels, l'équation $x^3 + px + q = 0$ ne peut admettre la seule racine imaginaire $(a+bi)$. Supposons que $(a+bi)$ soit racine. En remplaçant x par $(a+bi)$ dans l'équation donnée, nous aurions une imaginaire $M + Ni$ et puisque le résultat doit être nul, il faudrait $M=0$ et $N=0$.

En remplaçant x par $(a-bi)$, le résultat serait $M-Ni$ puisqu'il suffit de remplacer i par $-i$: ce résultat serait encore nul, puisque $M=N=0$. Donc si une imaginaire est racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels, l'imaginaire conjuguée est également racine. Le nombre des racines imaginaires est donc pair.

358. Remarque. Le raisonnement précédent s'applique à toute équation algébrique à coefficients réels: si une imaginaire est racine, il en est ainsi de l'imaginaire conjuguée.

359. Théorème. Si les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ sont réelles, les racines de la dérivée $3x^2 + p$ sont réelles et comprises entre les racines de la proposée. Si l'une des racines de la dérivée est en même temps racine de $x^3 + px + q = 0$, l'équation a deux racines égales (345).

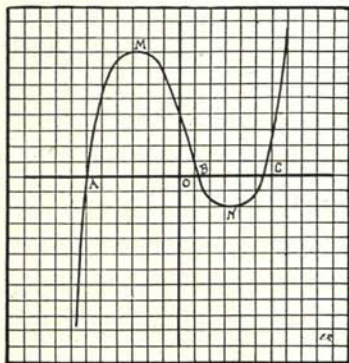


Fig. 35

La courbe $y = x^3 + px + q$ doit couper l'axe des x en trois points A, B et C, si les trois racines de $x^3 + px + q = 0$ sont réelles.

CARDAN, Jérôme (Italien, 1501-1576).

Né à Pavie, il professa successivement la dialectique, la métaphysique, les mathématiques. Il exerça la médecine à Milan. Il publia l'ouvrage fameux *Ars Magna* somme des connaissances algébriques de son temps. On trouve dans cet ouvrage la solution de l'équation du 3^e degré ; on sait que l'auteur véritable de la solution est Tartaglia et non Cardan. Cardan fut à la fois malheureux et scélérat. Il pratiquait l'astrologie et fixa lui-même l'année et le jour de sa mort ; on prétend qu'il se laissa mourir de faim afin que sa prédiction fût justifiée.

Construisons la courbe $y = x^3 + px + q$. Si nous supposons que l'équation a trois racines réelles, la courbe coupera l'axe des x en trois points A, B, et C. Cette courbe devra présenter un maximum entre A et B et un minimum entre B et C. La dérivée doit donc s'annuler pour une valeur de x comprise entre les abscisses des points

A et B et pour une autre valeur comprise entre les abscisses des points B et C, puisque la dérivée s'annule aux maximums et aux minimums (327).

Au point M, où la dérivée s'annule, il y a maximum : l'ordonnée est nécessairement positive ; au point N, où il y a minimum, la dérivée s'annule, et l'ordonnée doit être négative. Ces deux remarques vont permettre de trouver les conditions de réalité des trois racines.

La valeur de x qui annule la dérivée en M est :

$$x = -\sqrt{-p/3} ;$$

puisque y doit être alors positif, il faut :

$$[-(\sqrt{-p/3})]^3 - p(\sqrt{-p/3}) + q > 0.$$

La valeur de x qui annule la dérivée, en N, doit être

$$x = +\sqrt{-p/3} ;$$

puisque y doit être alors négatif, on doit avoir :

$$(\sqrt{-p/3})^3 + p\sqrt{-p/3} + q < 0.$$

Après quelques simplifications (remarquant en particulier que le carré de $\sqrt{-p/3}$ est $-p/3$), les relations précédentes deviennent :

$$-\frac{2}{3} p \sqrt{-p/3} + q > 0,$$

$$+\frac{2}{3} p \sqrt{-p/3} + q < 0.$$

Multipliant terme à terme ces inégalités, le produit doit être négatif.

$$\text{Donc, on doit avoir : } q^2 - \frac{4}{9} p^2 (-p/3) < 0$$

$$\text{ou : } q^2 + \frac{4}{27} p^3 < 0$$

$$\text{ou enfin : } (q/2)^2 + (p/3)^3 < 0.$$

C'est la condition de réalité des racines.

360. Si cette condition n'est pas réalisée, la courbe ne coupe l'axe des x qu'en un point, car les ordonnées qui correspondent aux maximums et aux minimums étant de même signe (puisque leur produit est positif), la courbe après avoir coupé une fois l'axe des x reste constamment au-dessus ; ou, si les ordonnées sont toutes deux négatives, les maximums et minimums ont eu lieu avant que la courbe n'ait coupé l'axe des x une fois.

Si la courbe est tangente à l'axe des x , au point BC par exemple, on voit que la dérivée et l'ordonnée s'annulent en ce point, car

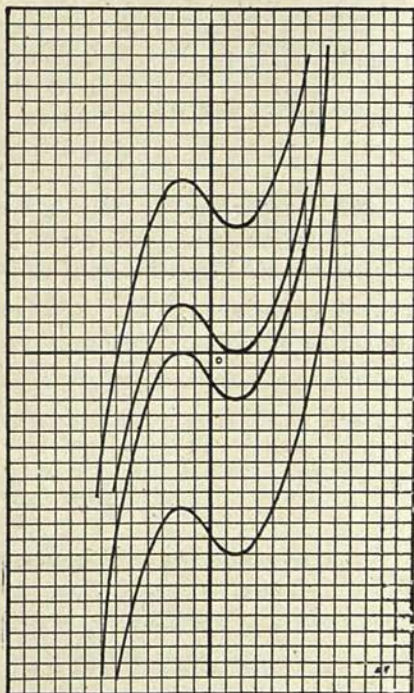


Fig. 36

Les courbes $y = x^3 + px + q$ correspondent aux cas où l'équation $x^3 + px + q = 0$ a deux racines imaginaires ou deux racines égales.

c'est nécessairement un maximum ou un minimum; mais la courbe tangente rencontre l'axe des x en deux points conondus; autrement dit, l'équation admet une racine double.

On sait d'ailleurs que si l'équation admet une racine double, cette racine annule en même temps la dérivée (§345).

Donc, pour qu'une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$ admette une racine double, il faut

$$(+\sqrt{-p/3})^3 + p(\sqrt{-p/3}) + q = 0$$

expression qui, transformée, devient : $(p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$.

361. En résumé, la discussion de la réalité des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ donne les résultats suivants :

$$\text{Si } (q/2)^2 + (p/3)^3 \begin{cases} < 0, \text{ les trois racines sont réelles.} \\ > 0, \text{ deux racines sont imaginaires.} \\ = 0, \text{ deux des racines sont égales.} \end{cases}$$

362. Remarque. La dérivée devant s'annuler au maximum et au minimum doit avoir des racines réelles, si les trois racines de l'équation sont réelles. Comme ces racines ont pour expression ; $\pm \sqrt{-p/3}$, il faut donc $p < 0$. La condition $p < 0$, est une condition *nécessaire* de réalité, mais *ce n'est pas une condition suffisante*. D'ailleurs pour

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0, \text{ il faut nécessairement } p < 0.$$

EXERCICE CXXVII

Étudier les équations suivantes au point de vue de la réalité des racines.

14-5. $x^3 - 3x + 2 = 0$.

14-6. $x^3 - 14x - 8 = 0$.

14-7. $x^3 - 26x - 60 = 0$.

14-8. $x^3 - 75x + 250 = 0$.

14-9. $x^3 + 4x - 16 = 0$.

14-10. $x^3 + 100x - 47 = 0$.

14-11. $x^3 + x - 100 = 0$.

IV. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION: $x^3 + px + q = 0$

Résolvons l'équation du second degré par une méthode semblable à celle que nous allons employer pour résoudre l'équation du troisième degré.

Soit à résoudre :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Posons :

$$x = y + z. \text{ Il vient :}$$

$$a(y+z)^2 + b(y+z) + c = 0$$

$$a(y^2 + z^2) + y(2az + b) + bz + c = 0.$$

$$\text{Posons : } 2az + b = 0, \text{ ou : } z = -b/2a.$$

Il vient :

$$a\left(y^2 + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$\text{d'où : } y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{On a donc : } x = y + z = -b/2a + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{363. Posons : } x = y + z$$

Il vient : $(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0$; ou, en développant :

$$y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 + p(y+z) + q = 0,$$

$$\text{ou, } y^3 + z^3 + (y+z)(3yz + p) + q = 0.$$

On peut imposer entre y et z une autre relation. Posons :

$$3yz + p = 0,$$

$$\text{d'où l'on tire : } z = \frac{-p}{3y}.$$

LES TROIS RACINES DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Cardan, ou mieux Tartaglia fut le premier à montrer qu'une équation du troisième degré a trois racines. Il ne put cependant résoudre l'équation dans le cas intéressant où les trois racines de l'équation sont réelles: ce fut alors le cas irréductible. Le premier à reconnaître que les trois racines de l'équation étaient réelles toutes les trois dans le cas irréductible fut R. Bombelli, en 1572. — C'est Cardan qui trouva le moyen de simplifier l'équation du troisième degré en faisant disparaître le terme en x^2 .

Substituant dans l'équation précédente, on obtient, après avoir fait disparaître les dénominateurs en y^3 :

$$y^6 + qy^3 - (p/3)^3 = 0,$$

équation du second degré en y^3 .

Les racines en y^3 de cette équation sont les quantités que nous appellerons A et B :

$$A = y^3 = -q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}.$$

$$B = y^3 = -q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}.$$

Il existe entre A et B, racines de l'équation du second degré en y^3 , la relation suivante : $A \cdot B = (-p/3)^3$.

En résolvant ces deux équations, on obtient pour y six valeurs, ce qui semblerait fournir six racines pour l'équation du troisième degré, mais nous allons montrer que les racines forment deux groupes de racines égales.

364. *L'équation $x^3 + px + q = 0$ a trois racines distinctes.*

a. Nous avons posé : $y^3 = A$. Soit y_1 une des racines de cette équation, les deux autres racines seront $y_2 = y_1 \alpha$ et $y_3 = y_1 \alpha^2$ (§356).

Les valeurs des z correspondants se déduisent par la relation $yz = -p/3$. Nous avons donc :

$$z_1 = \frac{-p}{3y_1}; \quad z_2 = \frac{-p}{3y_2} = \frac{-p}{3y_1\alpha} = \frac{-p\alpha^2}{3y_1};$$

$$z_3 = \frac{-p}{3y_3} = \frac{-p}{3y_1\alpha^2} = \frac{-p\alpha}{3y_1}.$$

Les valeurs de x sont donc les suivantes :

$$x_1 = y_1 + z_1; \quad x_2 = y_2 + z_2; \quad x_3 = y_3 + z_3$$

$$\text{ou, } x_1 = y_1 - \frac{p}{3y_1}; \quad x_2 = y_1\alpha - \frac{p\alpha^2}{3y_1}; \quad x_3 = y_1\alpha^2 - \frac{p\alpha}{3y_1}.$$

b. Étudions maintenant le système fourni par l'équation :

$$y^3 = B$$

$$\text{Puisque } AB = (-p/3)^3, B = \frac{(-p/3)^3}{A};$$

$$\text{et comme } A = y_1^3, \text{ nous pouvons écrire: } B = \left(\frac{-p}{3y_1} \right)^3,$$

en sorte que l'une des racines cubiques de B est

$$y_4 = \frac{-p}{3y_1}.$$

Les autres racines cubiques de B seront :

$$y_5 = y_4 \alpha = \frac{-p\alpha}{3y_1} \quad \text{et} \quad y_6 = y_4 \alpha^2 = \frac{-p\alpha^2}{3y_1}.$$

La simple inspection des résultats précédents montre que

$$y_4 = z_1; \quad y_5 = z_3 \quad \text{et} \quad y_6 = z_2.$$

Les valeurs des z se déduisent de la relation : $z_k = -\frac{p}{3y_k}$

$$\text{Donc : } z_4 = \frac{-p}{3y_4} = \frac{-p}{3\left(\frac{-p}{3y_1}\right)} = y_1;$$

$$z_5 = \frac{-p}{3y_5} = \frac{-p}{3\left(\frac{-p\alpha}{3y_1}\right)} = \frac{y_1}{\alpha} = y_1 \alpha^2 = y_3;$$

$$\text{de même } z_6 = y_2.$$

$$\text{Il vient donc : } x_4 = y_4 + z_4 = z_1 + y_1 = x_1;$$

$$x_5 = y_5 + z_5 = z_3 + y_3 = x_3;$$

$$x_6 = y_6 + z_6 = z_2 + y_2 = x_2.$$

Donc l'équation du troisième degré n'admet que trois racines distinctes, puisque les trois dernières ne font que répéter les premières.

V. DISCUSSION DE L'ÉQUATION

$$x^3 + px + q = 0$$

où p et q sont des quantités réelles.

365. Premier cas.

Supposons d'abord $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$.

Deux des racines sont alors imaginaires (§359), l'une étant la conjuguée de l'autre (§357).

La quantité A représente cependant une valeur réelle, puisque le nombre sous le radical est positif.

Soit y_1 une des racines cubiques de A .

D'après ce qui précède, z_1 est la racine cubique de B (§364); entre y_1 et z_1 existe la relation : $y_1 z_1 = -p/3$.

Les autres racines de A seront $y_1 \alpha$ et $y_1 \alpha^2$, les z correspondants étant $z_1 \alpha^2$ et $z_1 \alpha$ de façon que constamment le produit de y par le z correspondant soit $-p/3$.

Les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ seront donc : $x_1 = y_1 + z_1$; $x_2 = y_1 \alpha + z_1 \alpha^2$; $x_3 = y_1 \alpha^2 + z_1 \alpha$.

En remplaçant α et α^2 par leurs valeurs

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \quad (§278),$$

on obtient les trois racines :

$$x_1 = y_1 + z_1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}(y_1 + z_1) + \frac{\sqrt{-3}}{2}(y_1 - z_1)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(y_1 + z_1) - \frac{\sqrt{-3}}{2}(y_1 - z_1);$$

y_1 étant la racine cubique arithmétique de : $= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

$$A = -q/2 + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

z_1 la racine cubique de : $= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

$$B = -q/2 - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

366. Deuxième cas. $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = 0$

Deux des racines sont égales.

On a alors : $A = B = (-\frac{q}{2})$;

$$y_1 = z_1 = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2})} = \sqrt[6]{(\frac{q}{2})^2} = \sqrt[6]{(-\frac{p}{3})^3} \\ = \sqrt{(-\frac{p}{3})} = z_1.$$

Les racines seront : $x_1 = y_1 + z_1 = 2 \sqrt{(-\frac{p}{3})}$;

$$x_2 = y_1 \alpha + z_1 \alpha^2 = \frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}(-1 + \sqrt{-3})}{2} + \frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}(-1 - \sqrt{-3})}{2} \\ = -\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

$$x_3 = y_1 \alpha^2 + z_1 \alpha = \frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}(-1 - \sqrt{-3})}{2} + \frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}(-1 + \sqrt{-3})}{2} \\ = -\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Le signe de $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ est celui de $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, donc celui de $-q$.

Les racines sont donc :

$$x_1 = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}}; \quad x_2 = x_3 = -\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

le radical ayant le signe de $-q$.

367. Troisième cas. $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$.

Les trois racines sont alors réelles. Cependant A et B sont imaginaires. Ce cas a été appelé *irréductible*, car l'algèbre seule ne peut le résoudre; il faut le concours de la trigonométrie ou de la théorie des imaginaires.

$$\text{On a : } A = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \\ = -\frac{q}{2} + i \sqrt{-(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}.$$

On peut donner à A la forme normale :

$$\rho (\cos \omega + i \sin \omega).$$

On trouve le carré du module de A :

$$\rho^2 = (\frac{q}{2})^2 + [-(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3] = (-\frac{p}{3})^3,$$

car le carré d'une quantité placée sous un radical du second degré s'obtient en enlevant le radical.

Le cosinus de l'argument est donné par le rapport ordinaire :

$$\cos \omega = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{(-\frac{p}{3})^3}} \quad (280),$$

et l'imaginaire A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3} [\cos (\omega + 2k \pi) + i \sin (\omega + 2k \pi)].$$

Si l'on écrit $y^3 = A$, les valeurs diverses de y seront :

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} (\cos \omega/3 + i \sin \omega/3),$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} [\cos (\omega/3 + 120^\circ) + i \sin (\omega/3 + 120^\circ)],$$

$$y_3 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} [\cos (\omega/3 + 240^\circ) + i \sin (\omega/3 + 240^\circ)].$$

Le nombre B est l'imaginaire conjuguée de A.

Donc, $B = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3} [\cos -(\omega + 2k \pi) + i \sin -(\omega + 2k \pi)]$
et les z sont :

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} (\cos \omega/3 - i \sin \omega/3)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} [\cos (\omega/3 + 120^\circ) - i \sin (\omega/3 + 120^\circ)]$$

$$z_3 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} [\cos (\omega/3 + 240^\circ) - i \sin (\omega/3 + 240^\circ)]$$

Les différentes valeurs des z sont les valeurs conjuguées des valeurs correspondantes des y. La somme des y et des z donnera des valeurs réelles pour x puisque l'on fait alors la somme d'imaginaires conjuguées.

Il vient, pour les valeurs diverses de x :

$$x_1 = 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \omega/3$$

$$x_2 = 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos (\omega/3 + 120^\circ)$$

$$x_3 = 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos (\omega/3 + 240^\circ)$$

pour déterminer ω , on a : $\cos \omega = \frac{(-\frac{q}{2})}{\sqrt[3]{(-\frac{p}{3})^3}}$

368. Règles pour résoudre une équation du troisième degré.

1. Faire l'application des propriétés des polynômes entiers en x afin de trouver les racines entières de l'équation. Si la méthode ne réussit pas:

2. ramener l'équation à la forme: $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$;

3. réduire l'équation à la forme: $x^3 + px + q = 0$, en prenant $v = b/3$; $p = f'(-b/3)$ et $q = f(-b/3)$;

4. étudier le signe de $[(q/2)^2 + (p/3)^3]$: *le réalisant*.

5. Si le réalisant est *négalif*, les trois racines sont réelles: appliquer les formules de (367).

6. Si le réalisant est *nul*, deux racines sont égales entre elles: appliquer les formules de (366).

7. Si le réalisant est *positif*, deux des racines sont imaginaires: appliquer les formules de (365).

8. Ne pas oublier d'ajouter $v = -\frac{b}{3}$ aux trois racines ainsi déterminées.

369. Vérification. Il existe entre les trois racines les relations suivantes.

Si les racines sont x_1, x_2, x_3 , on sait (§34) que

$$(x^3 + px + q) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

On doit donc avoir: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

$$p = + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1);$$

$$- q = x_1 x_2 x_3$$

Si l'on remonte aux racines de $x^3 + bx^2 + cx + d$, on doit avoir entre les trois racines les relations:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = -b$$

$$x'_1 x'_2 + x'_2 x'_3 + x'_3 x'_1 = c$$

$$x'_1 x'_2 x'_3 = -d.$$

370. Application. L'exemple que nous allons traiter complète le problème étudié en (§372).

$$\text{Soit l'équation : } x^3 - 660 x^2 + 140288 x - 9437184 = 0.$$

Il faut prendre $v = 220$; l'équation devient :

$$x^3 + f'(220) x + f(220) = 0.$$

Les calculs faits, nous obtenons :

$$x^3 - 4912 x + 130176 = 0.$$

Les trois racines sont réelles,

$$\text{et } \cos \omega = \frac{-65088}{\sqrt{\left(\frac{4912}{3}\right)^3}}$$

qui donne pour la valeur de cet angle : $\omega = 169^\circ 14' 23''$.

Les valeurs de x sont :

$$x_1 = 2 \sqrt{\frac{4912}{3}} \cos 56^\circ 24' 48''$$

$$x_2 = 2 \sqrt{\frac{4912}{3}} \cos 176^\circ 24' 48''$$

$$x_3 = 2 \sqrt{\frac{4912}{3}} \cos 296^\circ 24' 48''.$$

Les opérations faites donnent les résultats suivants :

$$x_1 = 44.769; \quad x_2 = -80.769; \quad x_3 = 36.000$$

Les racines de la proposée sont donc :

$$264.769; \quad 139.231; \quad 256.000$$

Vérification :

$$264.769 \times 139.231 \times 256.000 = - (-9437184).$$

Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré dans le cas où les trois racines sont réelles.

Nous venons de voir comment au moyen des imaginaires il est possible de résoudre l'équation du troisième degré dans le cas dit "irréductible", alors que les trois racines sont réelles.

Voici une méthode trigonométrique pure pour obtenir la même solution.

$$\text{Nous avons : } \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad (1)$$

Posons : $\cos a = x$, l'équation devient :

$$\cos 3a = 4x^3 - 3x$$

$$\text{ou } 4x^3 - 3x - \cos 3a = 0 \quad (2)$$

Or, si $\cos a = x$ est racine, il en est ainsi de $\cos(a+120^\circ)$ et de $\cos(a+240^\circ)$, car dans ces deux cas $\cos 3a$ ne change pas.

Soit donc l'équation sous la forme : $x^3 + px + q = 0$; posons : $x = ky$ et l'équation devient :

$$k^3 y^3 + pky + q = 0$$

et identifions cette équation avec la précédente (2). Il faut :

$$\frac{k^3}{4} = \frac{pk}{-3} = \frac{q}{-\cos 3a} = m$$

$$\text{d'où : } k^3 = 4m ; \quad pk = -3m ; \quad q = -m \cos 3a$$

$$\text{et on déduit : } m = k^3/4 = -pk/3 ;$$

$$\text{d'où : } 3k^3 = -4pk ; \quad k^2 = -4p/3$$

$$\text{et } \cos 3a = -q/m = 3q/pk, \text{ puisque } m = -pk/3$$

$$= \frac{3q}{p\sqrt{-4p/3}} = \frac{3q}{p} \sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

Pour que $\cos 3a$ soit réel, il faut que $p < 0$ et comme un cosinus est < 1 en valeur absolue, on doit avoir :

$$\frac{9q^2}{p^2} \cdot \frac{-3}{4p} < 1, \text{ ou } 27q^2 + 4p^3 < 0$$

$$\text{ou } (q/2)^2 + (p/3)^3 < 0.$$

On peut donc obtenir ainsi les racines de l'équation du 3e degré, lorsque les trois racines sont réelles, sans passer par les imaginaires.

Soit par exemple l'équation:

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

où $p = -19$ et $q = 30$.

$$\text{On a: } \cos 3a = \frac{3 \times 30}{-19} \sqrt{\frac{-3}{-76}} = \frac{90}{-19} \sqrt{\frac{3}{76}}$$

On trouve ainsi: $3a = 160^\circ 14'$

$$\text{et } a = 53^\circ 25', 173^\circ 25', 293^\circ 25'.$$

$$\text{Enfin: } x = ky = \cos a \sqrt{\frac{76}{3}}$$

$$\text{et } x = 3, 2, -5.$$

EXERCICE CXXVIII

14-12. $x^3 - x^2 - 40x + 108 = 0.$

14-13. $x^3 - 4x^2 - 24x + 48 = 0.$

14-14. $x^3 - 12x - 16 = 0.$

14-15. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

14-16. $x^3 - 6x - 2 = 0.$

14-17. $x^3 - 5x^2 + 2x + 12 = 0.$

14-18. $x^3 - 5x - 3 = 0.$

14-19. $x^3 - 27x - 36 = 0.$

14-20. $x^3 - 7x^2 + 14x - 20 = 0.$

14-21. $x^3 + 6x - 88 = 0.$

14-22. $x^3 - 8x^2 - 6x + 9 = 0.$

14-23. $x^3 - 6x - 6 = 0.$

14-24. $x^3 + 9x - 6 = 0.$

14-25. $x^3 - 6x - 4 = 0.$

14-26. $105x^3 - 105x^2 + 21x - 1 = 0.$

14-27. $x^3 - 2x^2 + 48x - 96 = 0.$

14-28. $8x^3 - 20x^2 + 14x - 3 = 0.$

14-29. On donne le cosinus d'un angle : $\cos x = .09$. On demande de calculer le tiers de cet angle.

14-30. On donne le sinus d'un angle : $\sin x = .7$. On demande le sinus du tiers de cet angle.

14-31. On donne $\operatorname{tg} x = 4$, on demande le tangente de $\frac{x}{3}$.

14-32. Partager une demi-sphère de rayon 1, en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base. Prendre comme inconnue la distance du plan au centre de la sphère.

14-33. Les côtés d'un hexagone irrégulier *inscrit* sont respectivement 3, 3, 4, 4, 5, 5. Calculer le rayon du cercle circonscrit. R. : 4.0279

La relation à appliquer est :

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

quand $A + B + C = 180^\circ$.

Il faut résoudre : $4r^3 - 50r - 60 = 0.$

VI. ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

La résolution de l'équation du quatrième degré est due à Ferrari (1522-1565) Italien. Ce personnage vivait comme Cardan et Tartaglia à une époque malheureuse de cruauté et de violence et on prétend que ce Tartaglia mourut empoisonné par sa propre sœur.

371. Méthode de Descartes.

Pour résoudre l'équation du quatrième degré, il suffit de la décomposer en un produit de deux facteurs du second degré.

Soit une équation

complète du quatrième degré :

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Cette équation peut être considérée comme le produit des deux équations suivantes :

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b').$$

La multiplication effectuée donne :

$$x^4 + (a+a') x^3 + (aa'+b+b') x^2 + (ab'+a'b) x + bb'.$$

En identifiant les deux expressions, on est amené à résoudre le système :

$$a + a' = n,$$

$$aa' + b + b' = p,$$

$$ab' + a'b = q,$$

$$bb' = r.$$

Si l'on pose : $a = \frac{n}{2} + z$; $a' = \frac{n}{2} - z$, il vient :

$$b + b' = p - \frac{n^2}{4} + z^2,$$

$$z(b' - b) + (b + b') \times \frac{n}{2} = q,$$

$$bb' = r$$

On tire facilement la valeur de $b' - b$:

$$b' - b = \frac{q - \frac{n}{2}(p + z^2 - \frac{n^2}{4})}{z}.$$

On a l'identité :

$$(b' + b)^2 \equiv (b' - b)^2 + 4bb'.$$

En portant dans cette identité les valeurs de $(b' + b)$, de $(b' - b)$ et de bb' , on obtient, après avoir multiplié par z^2 :

$$z^2 [(z^2 + p - \frac{2}{4})^2 - 4r] - [\frac{n}{2}(z^2 + p - \frac{n^2}{4}) - q]^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en z^2 .

Elle admet une racine positive au moins, car pour $z = 0$ l'équation prend la valeur $-[\frac{n}{2}(p - \frac{n^2}{4}) - q]^2$; c'est donc une valeur négative. Tandis que pour z tendant vers $+\infty$, le signe de la fonction est celui du coefficient de z^6 , c'est-à-dire le signe positif.

La valeur de z^2 étant connue, celles de a , a' , b , b' se déduisent facilement.

Il ne restera qu'à résoudre deux équations du second degré.

372. Application.

Soit à résoudre l'équation: $x^4 + 24x^3 - 114x^2 - 24x + 1 = 0$.

Nous aurons : $a + a' = 24$,

$$aa' + b + b' = -114$$

$$ab' + a'b = -24,$$

$$bb' = 1.$$

Posons : $a = 12 + z$; $a' = 12 - z$;

$$\text{alors } aa' = 144 - z^2,$$

$$\text{et } b + b' = -114 - aa' = z^2 - 258.$$

$$ab' + a'b = (12+z)b' + (12-z)b$$

$$= 12(b+b') + z(b'-b) = -24;$$

$$\text{il vient : } b' - b = \frac{-24 - 12(z^2 - 258)}{z}.$$

Portons dans l'identité : $(b' + b)^2 \equiv (b' - b)^2 + 4bb'$,

$$(z^2 - 258)^2 = \frac{(-24 - 12z^2 + 3096)^2}{z^2} + 4,$$

$$\text{ou } z^2(z^4 - 516z^2 + 66\,564)$$

$$= 9\,437\,184 - 73728z^2 + 144z^4 + 4z^2,$$

et, en définitive : $z^6 - 660z^4 + 140\,288z^2 - 9\,437\,184 = 0$.

Cette équation est du troisième degré en z^2 : c'est celle qui a été étudiée (370). Une des valeurs obtenues pour z^2 est 256.

Donc : $z = +16$.

$$a = 12 + 16 = 28,$$

$$a' = 12 - 16 = -4,$$

$$b + b' = 256 - 258 = -2,$$

$$b' - b = \frac{-24 - 12(256 - 258)}{16} = \frac{-24 + 24}{16} = 0.$$

$$\text{Il vient : } b = b' = -1,$$

et les équations sont : $x^2 + 28x - 1 = 0$,

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

On obtient pour les racines de la première équation :

$$-14 \pm \sqrt{197};$$

et pour celles de la seconde : $2 \pm \sqrt{5}$.

L'équation proposée est une équation réciproque que l'on peut résoudre par une méthode plus élémentaire. (Voir Cours d'Algèbre).

Après avoir appris comment on peut résoudre les équations du troisième et du quatrième degré il est naturel de chercher à résoudre des équations d'un degré supérieur. Or il a été démontré qu'il est impossible de résoudre complètement les équations d'un degré supérieur au quatrième en utilisant uniquement des radicaux.

Il est bon de faire remarquer ici que la solution d'une équation *numérique* est possible alors même que son degré dépasse le quatrième. La méthode de résolution de Newton par exemple s'applique à une multitude d'équations numériques. On voudrait pouvoir résoudre complètement toute équation par des procédés analogues à ceux que nous avons employés pour les équations des quatrième, troisième, second et premier degrés : c'est cela qui n'est pas possible.

EXERCICE CXXIX

- 14-33. $x^4 - 19x^3 + 132x^2 - 302x + 200 = 0$
14-34. $x^4 - 27x^3 + 162x^2 + 356x - 1200 = 0$.
14-35. $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$.
14-36. $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$.
14-37. $x^4 - 36x^2 + 72x - 36 = 0$.
14-38. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$.
14-39. $x^4 + 24x^3 - 114x^2 - 24x + 1 = 0$.
14-40. $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 22x - 6 = 0$.
14-41. $x^4 - 22x^3 + 172x^2 - 560x + 640 = 0$.
14-42. $x^4 - 26x^3 + 131x^2 + 294x + 120 = 0$.
14-43. $x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 40x + 14 = 0$.
14-44. $x^4 - 23x^2 + 22x + 60 = 0$.
14-45. $x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 58x - 36 = 0$.
14-46. $8x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 25x - 6 = 0$.
14-47. $x^4 - 13x^3 + 45x^2 - x - 112 = 0$.
14-48. $x^4 - 18x^3 + 98x^2 - 225x + 648 = 0$.
14-49. $x^4 - 322x^2 + 1056x + 5985 = 0$.
-

CHAPITRE XV

NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL

Sommaire. I. Préliminaires. II. Fonctions primitives. III. Notion d'intégrale définie. IV. Intégration. V. Calcul graphique des intégrales définies.

I. PRÉLIMINAIRES

373. Nous accepterons la notion intuitive d'aire. Soit une courbe à coordonnées positives ayant comme équation,

$$y = f(x).$$

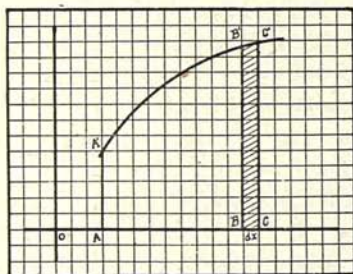


Fig. 37

L'aire comprise entre la courbe, $y = f(x)$ l'axe des x , et les parallèles à l'axe des y menées par A et B est une fonction, $F(x)$ de l'abscisse de B, telle que la dérivée de $F(x)$ est $f(x)$.

L'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x , et des parallèles à l'axe des y menées par A et B, dépend évidemment de la position du point B, le point A restant fixe : l'abscisse du point B étant x , l'aire est une fonction de x : écrivons :

$$S = F(x).$$

Si x augmente d'une quantité très petite, l'aire augmente d'une quantité également très petite. L'augmentation de l'aire, ou l'augmentation de la fonction $F(x)$, lorsque l'abscisse croît de Δx , est la différentielle de la fonction $F(x)$, c'est-à-dire le produit de la dérivée de S par Δx (314). A la limite, si Δx devient dx , on a :

$$dS = F'(x) dx.$$

Mais lorsque l'aire a augmenté de l'élément $BB'C'C$ dont la surface est comprise entre

$$f(x) \cdot \Delta x \text{ et } f(x + \Delta x) \cdot \Delta x,$$

si la fonction $f(x)$ est croissante constamment ou décroissante constamment, on voit que l'accroissement de l'aire a comme limite $f(x)dx$, lorsque l'accroissement Δx est infiniment petit.

Il s'ensuit que $F'(x) dx = f(x) dx$.

D'où : $F'(x) = f(x)$; la dérivée de $F(x)$ est donc présentement $f(x)$, ou encore : $F'(x)$ est la fonction qui a $f(x)$ comme dérivée.

II. FONCTION PRIMITIVE

374. On appelle fonction primitive d'une fonction $f(x)$, une fonction qui admet $f(x)$ comme dérivée.

Trouver une fonction primitive revient à trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée. C'est un problème difficile que nous n'étudions ici que dans les cas élémentaires. Ordinairement, chercher une fonction primitive d'une autre fonction s'appelle *intégrer* cette fonction. Ces deux expressions : *fonction primitive* et *intégrale* d'une fonction, seront considérées comme synonymes.

375. Une fonction primitive peut être augmentée d'une constante quelconque, car la dérivée

NEWTON, ISAAC (1642-1727)

Le grand savant naquit dans le Lincolnshire, en Angleterre. Jeune écolier, il ne manifesta aucun goût particulier pour l'étude. On raconte que étudiant Euclide il trouva cet ouvrage immortel enfantin et insignifiant ; plus tard, Newton revisa son jugement.

Newton découvrit les principes fondamentaux du calcul infinitésimal ainsi que la loi de la gravitation avant qu'il n'eût atteint 25 ans. Son ouvrage fameux « Principia » l'un des livres les plus importants qui aient jamais été écrits, fut composé de 1684 à 1686, à la demande et aux frais de l'astronome Halley.

Newton cessa de s'intéresser aux sciences à l'âge de cinquante ans bien que ses facultés intellectuelles incomparables l'aient servi jusqu'à la fin de sa longue vie. Ce n'est que malgré lui, pour ainsi dire, que Newton publia ses ouvrages de science, car il détestait par-dessus tout la polémique et on sait que la priorité de ses découvertes lui fut disputée par les partisans de l'allemand Leibnitz. Il est démontré que Leibnitz, dont les travaux d'ailleurs sont postérieurs à ceux de Newton, découvrit à peu près les mêmes théories indépendamment.

Newton s'intéressa beaucoup aux problèmes d'ordre théologique et il estimait ses travaux sur l'explication de l'Apocalypse beaucoup plus importants que ses œuvres scientifiques.

d'une constante étant nulle, cela ne change rien à la propriété que possède $F(x)$ d'avoir (x) comme dérivée. Donc, si $F(x)$ a $f(x)$ comme dérivée, il en est ainsi de $F(x) + C$, C étant une constante.

La surface étudiée précédemment s'exprimera donc par :

$$S = F(x) + C;$$

et il le faut bien, car si la fonction $F(x)$ tient compte du point x où se termine la courbe, il faut quelque chose dans la fonction qui fournit l'aire qui tiennne compte de l'origine, supposée constante, de l'aire.

376. *La fonction primitive d'une somme de fonctions est la somme des fonctions primitives de ces fonctions.*

Si l'on a $y = u + v + w$, la fonction primitive Y de y , sera la somme des fonctions primitives de u , v , w , c'est-à-dire que l'on aura :

$$Y = U + V + W + C,$$

car, en dérivant, on retrouverait l'équation dont on est parti.

377. *Le produit d'une fonction par une constante a comme fonction primitive, le produit par cette constante de la primitive de cette fonction, plus une constante.*

En effet, si $y = mu$,

$Y = mU + C$, car en dérivant, on retrouverait $y = mu$, puisque y est la dérivée de Y et u la dérivée de U .

378. On trouve immédiatement les fonctions primitives ou les intégrales des fonctions suivantes :

$$y = x^m \quad ; \quad Y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \quad (315)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad Y = 2\sqrt{x} + C. \quad (324)$$

$$y = \sin x \quad ; \quad Y = -\cos x + C. \quad (337)$$

$$y = \cos x \quad ; \quad Y = \sin x + C. \quad (336)$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad Y = \operatorname{tg} x + C. \quad (338)$$

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} \quad ; \quad Y = -\operatorname{cotg} x + C. \quad (339)$$

EXERCICE CXXX

Trouver les fonctions primitives de :

15-1. $y' = x^2 + x + 3$; il est évident que la fonction :

$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + C$ a comme dérivée la fonction proposée.

15-2. $y' = 3x^2 + 2x + 3$.

15-3. $y' = x^5 + x^4 + x^3 + 2x$.

15-4. $y' = 5x^4 + 6x^2 - 3x$.

15-5. $y' = \frac{3}{\sqrt{x}}$.

15-6. $y' = \frac{3}{x^2} + x/2$.

15-7. $y' = 3x + \cos x$.

15-8. $y' = -x^2 + \sin x$.

15-9. $y' = x - \sin x - \cos x$.

15-10. $y' = \frac{3}{\cos^2 x}$.

15-11. $y' = \frac{2}{\sin^2 x}$.

III. NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE

379. Nous venons de voir que l'aire de la courbe étudiée en (373) est donnée par $S = F(x) + C$.

Cette surface sera évidemment nulle, si le point X coïncide avec le point A. Cette circonstance va permettre de déterminer la constante C. Si le point X coïncide avec A, où $x = a$, l'aire est nulle; il faut donc :

$$F(a) + C = 0, \text{ ou } C = -F(a).$$

L'aire précisée a donc comme expression :

$$S = F(x) - F(a).$$

380. On représente autrement l'aire d'une courbe. On peut admettre que l'aire étudiée provient de la somme d'un nombre infini de petits rectangles ayant chacun, comme base

la valeur infiniment petite dx et, comme hauteur, la valeur de la fonction au point considéré : donc $f(x) dx$. La somme de ces rectangles élémentaires peut être symbolisée par le signe conventionnelle $\int$. En sorte que la surface étudiée pourra être représentée par $\int_a^x f(x) dx$. (Voir fig. 38.)

381. Comme précédemment (§379), nous avons trouvé une autre expression de la surface; nous pouvons écrire :

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

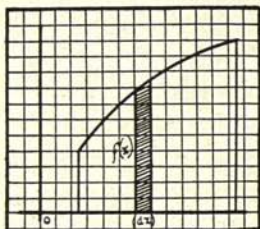


Fig. 38

L'aire peut être considérée comme la somme des aires des petits rectangles ayant comme surface : $f(x) \cdot dx$.

On dit que l'on a une intégrale définie. Cette intégrale est appelée définie parce que les limites entre lesquelles se fait l'intégration sont indiquées. Lorsque ces limites ne sont pas indiquées, l'intégrale est dite indéfinie. Chercher une fonction primitive d'une fonction donnée, ou chercher une intégrale indéfinie de cette fonction, est une seule et même chose.

Ainsi : $\int \cos x, dx$ est une intégrale indéfinie; c'est en même temps la fonction primitive de $\cos x$ dont la valeur est $(\sin x + C)$; tandis que $\int_0^3 x^2 dx$ est une intégrale définie.

IV. INTÉGRATION

382. Intégrer une fonction, c'est chercher une fonction primitive de cette fonction, c'est-à-dire une fonction qui admet comme dérivée la fonction à intégrer (374). Il n'existe pas de méthode générale pour intégrer toutes les fonctions, mais il existe un grand nombre de méthodes particulières permettant de trouver des fonctions primitives ou des intégrales indéfinies.

383. De même que la dérivée ne s'emploie pas uniquement lorsqu'il s'agit de trouver des vitesses ou des tangentes, de même l'intégrale convient à autre chose qu'à rechercher des aires. Le calcul intégral permet de trouver des longueurs d'arcs, des lois de mouvements, des trajectoires ...

384. *Tout procédé qui permet de trouver une fonction primitive ayant comme dérivée une fonction donnée, fournit une méthode d'intégration.* Les fonctions primitives, obtenues par des procédés divers, ne peuvent différer les unes des autres que par une *constante* bien que souvent, en apparence, il n'en soit pas ainsi.

385. *Pour calculer une intégrale définie, on trouve une fonction primitive de la fonction à intégrer, et l'intégrale définie cherchée est la différence entre la valeur de la fonction primitive pour la limite supérieure de l'intégrale et pour la limite inférieure (381).*

386. Application. Soit à calculer l'aire formée par le segment parabolique $y = x^2$, l'axe des x , l'ordonnée correspondant au point dont l'abscisse est 3, et enfin l'origine où l'abscisse est 0.

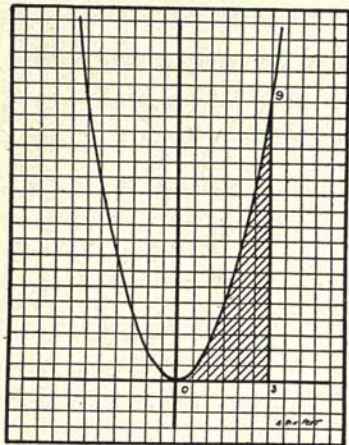


Fig. 39

La surface comprise entre la courbe et l'axe des x a comme aire une intégrale définie. (L'unité est deux petits côtés).

Cette aire est exprimée par : $\int_0^3 x^2 \cdot dx$.

La fonction primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3} + C$;

on a donc : $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$.

L'aire est donnée par : $F(3) - F(0)$ (339).

La valeur cherchée est donc : $\frac{3^3}{3} - 0 = 9$.

La vérification *matérielle* se fait immédiatement en comptant les petits carrés contenus dans l'aire étudiée.

EXERCICE CXXXI

15-12. Aire d'un segment parabolique compris entre la courbe, l'axe des x et l'ordonnée correspondant à l'abscisse x : L'équation de la parabole

$$\text{est } y = \frac{x^2}{2p}$$

15-13. Aire d'une sinusoïde $y = \sin x$, comprise entre la courbe et l'axe des x , x variant depuis 0 jusqu'à 3.1416.

15-14. Aire comprise entre la droite $\frac{-x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, l'axe des x et les ordonnées des points qui ont 1 et 4 pour abscisses.

15-15. Trouver approximativement l'aire limitée par la droite $y = 2x + 3$, les ordonnées $x = 1$ et $x = 2$, et l'axe des x , en considérant l'aire comme la somme de petits rectangles dont les bases seraient 0.2, dans une première approximation, et 0.1 dans une seconde approximation.

Calculer la même aire par les intégrales définies.

15-16. Trouver approximativement l'aire limitée par l'axe des x et la portion de la courbe $y = x - x^2$ qui est au-dessus de l'axe des x , en considérant l'aire comme la somme des rectangles dont les bases sont 0.1.

Appliquer à la même aire les intégrales définies.

15-17. Trouver approximativement l'aire limitée par la courbe $y = 1/x$ les ordonnées $x = 2$, $x = 3$ et l'axe des x , en considérant la somme des rectangles dont les bases sont 0.1.

15-18. Trouver l'aire limitée par la courbe $y = \sqrt{x}$, les ordonnées $x = 1$ et $x = 4$ et l'axe des x , en considérant la somme des rectangles dont les bases sont 0.2.

15-19. Quelle est l'aire limitée par l'axe des x , la portion de la courbe $y = 10 - 11x - 6x^2$ située au-dessus de l'axe des x ? Trouver d'abord les points de rencontre de la courbe et de l'axe des x . Calculer graphiquement, puis par l'intégrale définie.

15-20. Trouver l'aire limitée par l'axe des x et la portion de la courbe $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ située au-dessus de l'axe des x .

15-21. Trouver l'aire limitée par la parabole $y = \frac{1}{4}x^2$ et la droite $3x - 2y - 4 = 0$. Il faut d'abord trouver les points de rencontre de la droite et de la courbe.

15-22. Trouver l'aire du croissant comprise entre les courbes $y = x^2 + 5$ et $y = 2x^2 + 1$.

V. CALCUL GRAPHIQUE DES INTÉGRALES

DÉFINIES

387. Les exemples précédents ont introduit le *calcul graphique* auquel il faut avoir recours, parfois, lorsque les procédés directs font défaut ou que les calculs sont trop compliqués. En procédant avec soin, on peut obtenir une très bonne approximation du résultat cherché.

388. Soit à calculer l'intégrale définie : $\int_a^b f(x) \cdot dx$.

Construisons la courbe $y = f(x)$. Prenons comme ordonnées limitant la courbe les ordonnées correspondant aux bornes supérieures et inférieures de l'intégrale définie. L'aire calculée mécaniquement ou géométriquement fournit une valeur approximative de l'intégrale définie.

EXERCICE CXXXII

Les intégrales définies suivantes peuvent, en général, être facilement calculées directement en cherchant les fonctions primitives ; le calcul graphique de l'intégrale fournira cependant un exercice utile.

$$15-23. \int_0^3 x \cdot e^x \cdot dx.$$

$$15-24. \int_0^2 x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx.$$

$$15-25. \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot dx.$$

$$15-26. \int_0^2 x^2 \cdot e^x \cdot dx.$$

$$15-27. \int_0^1 \operatorname{arc} \sin x \cdot dx.$$

$$15-28. \int_0^1 x^2 \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx.$$

$$15-29. \int_0^1 x \cdot \cos x \cdot dx.$$

$$15-30. \int_0^1 \sec^3 x \cdot dx.$$

$$15-31. \int_0^3 \sqrt{x^2 + 3^2} \cdot dx.$$

$$15-32. \int_1^{10} \log x \cdot dx.$$

15-33. Construire la courbe $x^4 + y^4 = 2$ et calculer l'aire limitée par la courbe. Il faut calculer graphiquement l'intégrale définie qui correspond à l'intégrale indéfinie :

$$4 \times \int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2 - x^4}} dx.$$

12. Un cheval est attaché en un point de la circonférence d'une grange circulaire. Le diamètre de la grange est 20 pieds, la longueur de la corde 40 pieds. On demande la surface du pré où il peut brouter.

Le triangle élémentaire RST a comme surface :

$\frac{1}{2} RS^2 \cdot \sin \text{SRT}$, soit $\frac{1}{2} (40 - 10\theta)^2 d\theta$, où θ est l'angle AOR, en radians. La surface ARSTM (M étant le point le plus bas de la courbe) est donnée par l'intégrale :
 $\frac{1}{2} \int_0^{\theta} (40 - 10\theta)^2 d\theta$, où θ varie depuis 0, jusqu'à la valeur appropriée de θ .

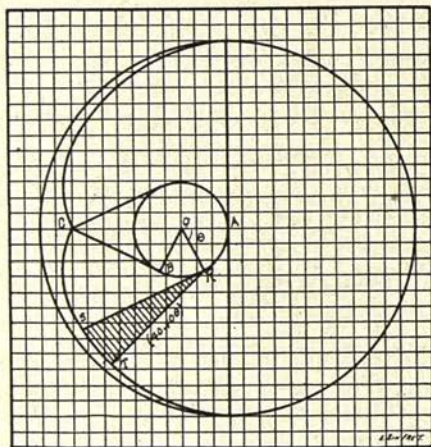


Fig.40 L'aire à calculer est la somme des aires élémentaires des triangles curvilignes TRS (3 petits côtés représentent 10 pieds.)

Au point C, θ prend la valeur fournie par l'équation :

$$\text{tg} (180 - \theta) = \frac{40 - 10\theta}{10}.$$

Pour déterminer cette valeur limite, il faut donc résoudre l'équation : $4 = \theta - \text{tg} \theta$.

On trouve pour la valeur approchée de θ : 117° ou 2.04 radians.

Dès lors, la surface ARBCSM se calcule par l'intégrale définie :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2.04} (40 - 10\theta)^2 d\theta.$$

L'autre partie de la solution est élémentaire.

L'aire est : 4500 p.c. environ.

CHAPITRE XVI

NOTES SUR LA RÈGLE A CALCUL

Sommaire. Chapitre XVI. RÈGLE A CALCUL. I. Historique. II. Construction. III. Multiplication et division. IV. Carrés et racines carrées. V. Cubes et racines cubiques. VI. Logarithmes des nombres. VII. Fonctions circulaires. VIII. Précision des calculs faits à la règle. IX. Échelles Log-Log. X. Curiosités.

I. HISTORIQUE

389. Dès la fin du XVI^e siècle, on rencontre un instrument du genre règle à calcul inventé par un anglais Wm. Oughtred. L'introduction du coulisseau est de Seth Partridge; en France, Sauveur (vers 1700); en Angleterre, Leadbetter; en Allemagne, Lambert furent des précurseurs. Vers 1820, la règle à calcul est fabriquée couramment en France.

La forme actuelle de la règle à calcul est due à Amédée Mannheim, lieutenant de l'artillerie française. Depuis, de nombreux perfectionnements ont été ajoutés par divers constructeurs. Les échelles Log-Log dues à Peter Roget ont été décrites dans la revue "Philosophical Transactions" de 1815.

II. CONSTRUCTION

390. La règle à calcul est un instrument qui permet de faire mécaniquement plusieurs opérations mathématiques. C'est une échelle graphique de logarithmes disposés commodément pour effectuer des multiplications, des divisions et les opérations qui s'y rattachent.

391. Manipulation préparatoire très importante. La méthode la plus simple pour comprendre la règle à calcul est d'en construire une soi-même, si rudimentaire soit-elle. On peut procéder comme suit :

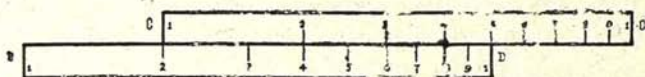
1. Prendre une bande de papier fort de 11 pouces de longueur sur 2 pouces de largeur.

2. Par le milieu, dans le sens de la longueur, tirer deux traits parallèles, distants de $\frac{1}{8}$ de pouce, par exemple.

3. Appeler C le trait supérieur, et D le trait inférieur.

4. Prendre sur C un point à gauche, à un demi-pouce du bord de la bande de papier, marquer 1' en ce point. Mesurer 10 pouces sur C à partir de 1' et marquer 10' au point obtenu. Procéder de la même façon sur D, marquer aux points respectifs 1 et 10.

5. Il faut maintenant partager les échelles C et D en longueurs proportionnelles aux logarithmes des nombres de 2 à 10. Ces longueurs devraient être : 3 po. 01, 4.77, 6.02, 6.99, 7.78, 8.45, 9.03, 9.54, 10 mesurées à partir de 1; mais sans erreur appréciable les longueurs suivantes peuvent être substituées : 3 po., $4\frac{3}{4}$, 6, 7, $7\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{2}$, 9, $9\frac{1}{2}$, 10 po.



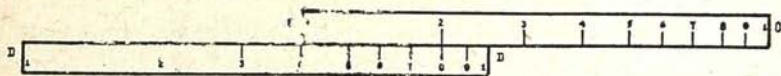
6. Les points de divisions étant repérés sur les échelles D et C et marqués par de petits traits verticaux, les numérotés 1, 2, 3, 4, ... Nous avons ainsi des échelles de logarithmes. Pour simplifier, nous dirons que ces longueurs sont les logarithmes des nombres.

7. Couper la feuille entre les deux traits de manière à laisser une échelle sur chaque partie, l'échelle C et l'échelle D.

392. Pour multiplier, il faut additionner les logarithmes des facteurs. Soit à faire le produit de 2 par 3. Prendre sur D le point 2, la distance 1-2 est le logarithme de 2. Placer maintenant le 1' de C en face du 2 de D; sur C prendre le point 3': la distance 1'-3' sur C est le logarithme de 3. La distance 1-3' (1 sur D, 3' sur C) est donc la somme des logarithmes de 2 et de 3; cette distance est le logarithme du produit 2×3 et le nombre trouvé sur D en regard de 3' est bien 6, le produit cherché.

393. L'opération de la division se fera par un procédé similaire, sauf qu'il faut soustraire les logarithmes au lieu de les additionner. Pour diviser 8 par 2, prendre 8 sur D, mettre en face 2' de C, puis lire sur D le nombre en regard de 1' de C. Comme $8-1$ est le logarithme de 8, $1'-2'$ le logarithme de 2, la distance $1-1'$ est la différence entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur: c'est le logarithme du quotient.

394. Dans les règles à calcul, les bandes de papier sont remplacées par une règle fixe (D) et un coulisseau (C) plus résistants et plus commodes. Les longueurs portées sur D et C sont toujours proportionnelles aux logarithmes des nombres.



La règle comprend un certain nombre d'échelles dont les principales sont A,B,C,D, celles des sinus (S), des tangentes (T), des logarithmes (L). Nous étudierons d'abord les échelles C et D et les opérations au moyen de ces échelles.

395. Remarque. Les indications très simples pour l'usage de la règle à calcul exigent pourtant que le lecteur ait sous les yeux l'instrument lui-même: autrement il faudrait multiplier les croquis et, même alors, le sens des opérations échapperait souvent.

LECTURE DES NOMBRES SUR L'ÉCHELLE D

396. Nous retrouvons d'abord les grandes divisions des règles en papier (391) 1,2,3 ... 9, 10.

L'espace compris entre 1 et 2 est divisé en 10 parties inégales pour les nombres 11, 12, 13, ... 19. De même l'espace entre 2 et 3 est divisé en 10 parties qui donnent 21, 22, 23 ... et ainsi de suite ... nous trouvons 10 divisions entre 8 et 9 donnant 81, 82, 83 ... Nous n'avons pas lu 1.1, 1.2, 1.3 ... mais bien 11, 12, 13: ... ce qui est sans incon-

vénients, car les logarithmes de ces nombres sont les mêmes quant à la mantisse.

Les nombres de 10 à 100 se lisent donc facilement, car le point 1 peut aussi bien marquer 10, le point 2 marquer 20, et le point 9.1 peut se lire indifféremment 9.1 ou 91.

Les nombres de 100 à 1000 se lisent de la même façon en supposant l'indice 1 remplacé par 100, le 2 marque alors 200, le 3, 300 etc.

Entre 100 et 110 on trouve 10 divisions qui sont 101, 102, 103 ... qui peuvent encore se lire 1.01, 1.02, 1.03 ... Entre 200 et 210, il n'y a en général que 5 divisions, et on lit par conséquent 202, 204, 206 ... ou 2.02, 2.04, 2.06 ... Entre 400 et 410, entre 600 et 610 etc., il n'y a qu'une division, on doit y lire : 405, ou 4.05, 605 ou 6.05, ou 60.5.

Entre 1000 et 1010 il n'y a pas de divisions, si on veut trouver le nombre 1003, il faut interpoler à l'œil.

On peut donc lire sur la règle un nombre quelconque. Soit le nombre 23168, par exemple.—La position du point décimal n'intervient pas dans la lecture.—Le nombre donné se trouvera entre 23 et 24, entre 230 et 232 ; pour placer le curseur, définitivement, remarquer que le nombre est plus rapproché de 232 que de 230, *à l'œil on fera l'interpolation.*

Les nombres décimaux se lisent de la même façon, sans s'occuper du point décimal, qui n'intervient que lorsqu'il s'agit d'écrire la réponse. Le nombre .00023168 se lira comme 23168.

On vient de voir que les nombres de plus de 3 chiffres ne se trouvent pas explicitement sur la règle (ordinaire), il faut interpoler à l'œil. La règle à calcul possède à peu près la précision d'une table de logarithmes à trois décimales.

397. Termes employés pour décrire la règle à calcul. Il y a d'abord les *échelles A, B, C et D* déjà mentionnées.

Le **coulisseau** est la partie mobile de la règle portant les échelles B et C.

Le **curseur** portant un trait de repère peut se déplacer tout le long de la règle.

Les **indices** sont les extrémités de la règle, ordinairement les extrémités de C.

Nous appellerons **indice 1**, l'indice gauche et **indice 10** celui de droite.

Placer le curseur sur les nombres suivants. Ne pas s'occuper du point décimal, ou de la virgule décimale, mais confondre : 3.7 avec 37, 370, 3 700 et 0.037 comme on doit le faire lorsque l'on cherche le logarithme d'un nombre.

1) 3,4,5,7,9, 10, 3.5, 4.5, 5.5, 8.5

2) 9,8,6,4,3,2,1, 8.5, 7.5, 4.5, 3.5.

3) 2, 1.9, 1.8, 1.5, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0

4) 1.1, 110, 104, 103, 102, 101, 100

5) 101, 1010, 1005, 1004, 1003, 1002, 1001 — Ces derniers nombres ne sont pas indiqués sur la règle : on doit les interpoler entre 100 et 101.

6) 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 3, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 9.7, 9.8, 9.9
1.21, 1.22, 1.215, 1.216, 1.217, 1.219, 1.22.

7) Placer l'indice 1 sur chacun des nombres qui suivent : 17, 18 ; 25, 26 ; 96, 95 ; 105, 106, 58, 59, 61, 62, 68, 71.

8) Placer l'indice 10 sur chacun des nombres : 25, 30, 46, 59, 68, 97, 101, 102, 103, 1001, 1003.

III. MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS À LA RÈGLE

398. Soit à multiplier 25 par 35. Prendre 25 sur D. Transporter le curseur en ce point. Mettre l'indice 1' de C sous le curseur. Transporter ensuite le curseur sur 35 de C. Lire le produit sous le curseur, sur D : 875 (392).

Procéder ainsi en général. *Prendre le multiplicande sur D, transporter le curseur en ce point. Mettre l'indice 1' de C sous le curseur. Transporter le curseur sur le multiplicateur pris sur C. Le produit est lu, sur D, sous le curseur.*

L'espace (1 — multiplicateur) sur D est le logarithme du multiplicateur. L'espace (1' — multiplicande) sur C est celui du multiplicande.

L'espace (1 — multiplicande) est donc la somme des logarithmes du multiplicateur et du multiplicande, donc le logarithme du produit.

Trouver les produits suivants :

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1. 19×18 | 2. 49×37 | 3. 17×25 | 4. 22×37 |
| 5. 49×20 | 6. 22×39 | 7. 45×45 | 8. 33×27 |
| 9. 21×15 | 10. 101×1.03 | 11. 1.09×1.17 | 12. 91×1.03 |
| 13. 36×22 | 14. 17×26 | 15. 32×34 | 16. 1.14×2.05 |
| 17. 3.5×1.09 | 18. 49×1.07 | 19. 84×1.06 | 20. 1.7×1.29 |

399. Il arrive souvent que le produit tombe ainsi en dehors de D.

Soit à multiplier 45 par 55; en procédant comme en (398) le produit tombe en dehors de l'échelle D. Dans ce cas, *changer d'indice*, prendre l'indice 10 de C au lieu de l'indice 1, puis opérer comme précédemment. On trouvera pour produit 2475.

S'il y avait une autre échelle D prolongeant la première et placée à la suite, le produit se lirait aisément sur cette seconde échelle : 2475. Mais cette échelle qui n'existe pas peut être remplacée par la première : le point 2475 lu sur l'échelle D fictive, se retrouve à gauche sur l'échelle D réelle, à la distance d'une longueur d'échelle. En changeant d'indice, on fait cette conversion, on trouve sur l'échelle réelle le point qui se lirait sur une autre prolongeant la première.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. 47×63 | 2. 45×37 | 3. 76×58 | 4. 42×24 |
| 5. 59×38 | 6. 69×56 | 7. 17×96 | 8. 33×58 |
| 9. 22×27 | 10. 23×26 | 11. 17×98 | 12. 33×47 |
| 13. 17×18 | 14. 26×93 | 15. 17×29 | 16. 79×46 |
| 17. 76×33 | 18. 18×29 | 19. 47×76 | 20. 27×28 |
| 21. 37×76 | 22. 37×77 | 23. 15×93 | 24. 48×77 |
| 25. 76×72 | | | |

400. Si l'on a plusieurs facteurs : $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \dots$ multiplier les deux premiers qui donneront un produit sur D (6). Le curseur est en face de 6, mettre l'indice 1' de C sous le curseur; déplacer le curseur jusqu'à 4 de C; sous le curseur, sur D, lire le produit, (24). Déplacer le coulisseau pour que l'indice 1 ou 10 de C soit sous le curseur; transporter le curseur jusqu'à 5 de C etc. Le produit $1.2.3.4.5.7.8$ est 40320.

16-1. EXERCICES DE MULTIPLICATIONS

Effectuer les multiplications suivantes : les facteurs sont en tête des colonnes et au commencement des lignes : mettre les produits à la rencontre des colonnes et des lignes :

	47×29	36×2.2	4.763	37×29	1.07×1.09	7.3×8.9	47×59
72							
24							
12.3							
10.07							

2. $4.69 \times .5396 \times 7.65 \times .894 \times 7.76 \times 6.59.$
3. $1.1 \times 1.2 \times 1.3 \times 1.4 \times 1.01 \times 1.02 \times 1.03 \times 1.04 \times 1.05.$
4. $.00045 \times .00075 \times .00756 \times 8756 \times 3456.$

401. Division. Pour diviser, placer le curseur en face du dividende, sur D. Déplacer le coulisseau de façon que le diviseur sur C soit sous le curseur. Le quotient se lira sur D, en face de l'indice 1 ou 10 de C.

Diviser 39 par 3 = 13.

Le segment (1 — dividende) sur D, est le logarithme du dividende. Le segment (1' — diviseur), sur C, est celui du diviseur.

Le segment (1D, 1'C) est donc la différence des deux logarithmes : c'est le logarithme du quotient.

16-2. EXERCICES SUR LA DIVISION

Mettre à la rencontre des lignes et des colonnes le quotient de l'indice de la colonne par le nombre placé au commencement des lignes.

	536	1004	213	104	602
227					
328					
477					
103					

Faire successivement les opérations suivantes :

$$2. \quad 457 \times 328 \div 279 \div 436.$$

$$3. \quad \frac{30\ 000}{4.27 \times 3.36 \times 202 \times 10.7 \times .408}.$$

$$4. \quad \frac{40\ 000}{847 \times 204 \times 306 \times 407 \times 729 \times 958}.$$

$$5. \quad \frac{170\ 000}{29.2 \times 47.6 \times 38.4 \times 27.6 \times 1008}.$$

POSITION DU POINT DÉCIMAL.

402. Dans les opérations pratiques, on connaît ordinairement l'ordre de grandeur du résultat, le calcul n'intervient que pour préciser : il n'y a donc pas à s'occuper du point décimal.

Voici cependant deux méthodes qui permettent de placer le point décimal ; la première exige une opération auxiliaire, la seconde se fait par la règle à calcul elle-même.

403. La première méthode, consiste à substituer, aux facteurs, *des nombres ronds*, avec lesquels les opérations sont faciles. Soit le dernier problème (401,5). On peut remplacer les facteurs par les nombres suivants :

$$\frac{170\ 000}{30 \times 50 \times 40 \times 30 \times 1000} = \frac{17}{180\ 000}.$$

c'est-à-dire approximativement 0.0001. Comme on trouve à la règle 1145, la réponse est 0.000 1145. Cette méthode s'applique à la multiplication et à la division ; elle se fait à l'œil avec un peu de pratique.

404. L'autre procédé se passe de calculs. La règle à appliquer est simple. Pour multiplier, *additionner d'abord les caractéristiques des facteurs*, comme dans les calculs logarithmiques. *Lorsque pour multiplier on devra tirer le coulisseau vers la gauche, ou partir de 10' C, additionner + 1 à la somme des caractéristiques* (si l'on tire le coulisseau à

droite ne rien ajouter). La somme obtenue, l'opération terminée, est la caractéristique du produit.

La remarque de (399) aidera à comprendre le fondé de cette règle. Le produit normalement devrait tomber en dehors de D sur une échelle D fictive prolongeant à droite l'échelle D réelle. Mais les nombres lus sur cette nouvelle échelle seraient ceux de D multipliés par 10, donc ayant comme logarithme 1 de plus que ceux de D. Lors donc que la multiplication exige l'emploi de 10' il faut ajouter +1 aux caractéristiques parce que la réponse qui est lue sur D devrait en réalité être lue sur une autre échelle prolongeant D et portant des nombres 10 fois plus grands.

Soit l'opération suivante :

$$4.59 \times .5396 \times 7.65 \times .894 \times 7.76 \times 6.59.$$

La somme des caractéristiques est

$$0 + (-1) + 0 + (-1) + 0 + 0 = -2.$$

Pour multiplier 4.69 par .5396, le coulisseau est tiré à gauche donc, +1;

le produit multiplié par 7.65 donne encore, +1;

la multiplication par .894 donne, +1;

de même par 7.76, +1;

enfin, pour multiplier par 6.59 le coulisseau étant tiré à droite, +0.

La caractéristique du produit est donc : $-2 + 4 = +2$: le produit est 886.

Trouver les produits suivants, en découvrant la position du point décimal d'après les principes précédents.

1. $2.17 \times 39.8 \times 76.7 \times 0.0047$

2. $3.09 \times 7.25 \times 0.00293 \times 476.3$

3. $18.24 \times 16.7 \times 0.0047 \times 0.00049$

4. $27\,000 \times 25 \times 0.7 \times 0.004 \times 0.316$

5. $490 \times 760 \times 0.876 \times 0.000038 \times 2900$

405. Pour la division, retrancher la somme des caractéristiques du diviseur de celle du dividende, puis retrancher 1 chaque fois que le coulisseau aura été tiré à gauche.

Soit la division :
$$\begin{array}{r} 30\ 000 \\ 4.27 \times 3.36 \times 202 \times 10.7 \times .408 \end{array}$$

Caractéristique du dividende : $+4$

Caractéristique du diviseur : $0+0+2+1+(-1) = +2$

La différence des caractéristiques est : $4 - 2 = 2$

30 000 divisée par 4.27 donne -1 puisque le coulisseau est tiré à gauche. $-1;$

le quotient par 3.36 donne, $0;$

le quotient par 202, $0;$

le quotient par 10.7, $-1;$

le quotient par 408 donne, $0.$

En tout : $2 - 1 - 1 = 0;$

et la réponse doit se lire : 2.37.

On expliquerait le -1 comme on a expliqué le $+1$. Lorsque l'on doit substituer $10'$ à $1'$, c'est que le quotient serait tombé en dehors de D mais vers la gauche, sur une échelle prolongeant D vers la gauche, et portant des valeurs qui seraient celles de D divisées par 10.

§ 405. Calculer les quotients suivants. On appliquera les règles énoncées pour la position du point décimal.

1. $\frac{49}{24}$

2. $\frac{4.9}{.26}$

3. $\frac{72}{29.6}$

4. $\frac{72}{96.7}$

5. $\frac{109}{82.7}$

6. $\frac{917}{817}$

7. $\frac{9.22}{97.6}$

8. $\frac{17.6}{47.8}$

9. $\frac{1000}{39 \times 54.5}$

10. $\frac{228}{3.7 \times 46.5}$

11. $\frac{4.5 \times 56}{9.5 \times 67}$

12. $\frac{1.09 \times 5.67}{2.26 \times 69}$

406. Échelles CF et DF.

Certaines règles portent les échelles CF et DF qui sont tout simplement les échelles C et F "pliées" (folded). Leur usage permet de s'abstenir de déplacer le coulisseau jusqu'au bout dans certaines opérations.

Pour multiplier 3×5 par exemple, placer le curseur sur 3D mettre 1 de CF sous le curseur, transporter le curseur à 5CF, lire le produit sur D (15).

L'échelle DF fournit immédiatement le produit de 3.1416 par les nombres pris sur D.

Prenant 5 sur D. nous lisons 15.708 sur DF.

407. Échelle CI

L'échelle CI (inverted) ou C renversée, fournit immédiatement les inverses des nombres. Prenant 5CI, nous lisons sur C ou sur D, 2 (ou .2) valeur de l'inverse de 5.

Cette échelle CI permet de multiplier $5 \times 7 \times 12$ plus rapidement que par l'usage des seules échelles C et D.

On peut interpréter le produit comme suit

$$5 \div (1/7) \times 12 = 5 \times 7 \times 12.$$

Donc, placer le curseur sur 5D, sous le curseur 7CI, transporter ensuite le curseur en 12C : lire le produit 420 sur D.

Le nombre d'opérations est ainsi diminué.

L'échelle CIF s'emploie relativement à CI, comme CF par rapport à C.

Trouver les produits suivants utilisant l'échelle CI.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1. $4 \times 7 \times 6$ | 2. $17 \times 29 \times 36$ | 3. $4.7 \times 3.2 \times 5.7$ |
| 4. $8 \times 7 \times .3$ | 5. $22 \times 35 \times 72$ | 6. $4.9 \times 3.7 \times 5.7$ |
| 7. $5 \times 6 \times 7.3$ | 8. $9.2 \times 3.5 \times 5.6$ | 9. $2.03 \times 3.5 \times 7.67$ |
| 10. $4.9 \times 4.5 \times 5.8$ | | |

408. Cancellation. Lorsque les opérations de multiplication et de division sont nombreuses, il est avantageux d'alterner multiplications et divisions.

$$\text{Soit l'opération suivante : } \frac{46 \times 57 \times 65 \times 78}{45 \times 56 \times 38 \times 89}$$

On pourrait faire le produit des termes du numérateur, puis diviser par chacun des termes du dénominateur, mais il est plus rapide de procéder comme suit. Prendre 46 sur D, diviser par 45, multiplier le quotient par 57, diviser par 56 ...

409. Position du point décimal dans une cancellation.

Appliquer les règles précédentes (403).

La première donne à l'œil : $\frac{46}{45} = 1$; $\frac{57}{56} = 1$; $\frac{65}{38} = 1.5$; $\frac{78}{89} = 1$, donc le produit est voisin de 1.5 : on trouve 1.558.

Seconde règle (404).

Après une opération, compter +1 ou -1 s'il y a lieu afin de déterminer la caractéristique finale. Lorsque le coulisseau a été tiré vers la gauche, il faut additionner +1 si c'est pour une multiplication et soustraire 1 si c'est une division.

$$46 \div 45 (0) \times 57 (0) \div 56 (0) \times 65 (0) \div 38 (0) \times 78 (+1) \\ \div 89 (-1).$$

La somme des caractéristiques du numérateur égale la somme des caractéristiques du dénominateur, la caractéristique du résultat est $0 + 0 = 0$, la réponse est 1.558.

16-3.

EXERCICES

1. $\frac{3.45 \times 3.45 \times 2.34}{6.50 \times 5.67 \times 45}$
2. $\frac{378 \times 476 \times 578 \times 897}{6.78 \times 489 \times 7.89 \times 8}$
3. $\frac{37 \times 45 \times 68 \times 75 \times 87 \times 95}{47 \times 90 \times 38 \times 45 \times 37 \times 57}$
4. $\frac{437 \times 328 \times 659 \times 267 \times 102 \times 1003}{998 \times 601 \times 202 \times 101 \times 1004 \times 17}$
5. $\frac{789 \times 376 \times 482 \times 108 \times 122 \times 176}{624 \times 437 \times 667 \times 889 \times 769 \times 102}$
6. $\frac{276445 \times 876342 \times 8436290}{17526840 \times 829335 \times 2812097}$
7. $\frac{83 \times 62 \times 51 \times 43 \times 27 \times 36 \times 68 \times 12 \times 15 \times 17}{74 \times 57 \times 29 \times 88 \times 77 \times 76 \times 51 \times 47 \times 32 \times 22}$
8. $\frac{72 \times 32 \times 45 \times 49 \times 56 \times 64 \times 72 \times 84}{16 \times 28 \times 42 \times 60 \times 64 \times 64 \times 81 \times 98}$
9. $\frac{56 \times 60 \times 72 \times 81 \times 92 \times 99 \times 95 \times 104 \times 105}{36 \times 55 \times 64 \times 69 \times 75 \times 76 \times 84 \times 91 \times 108}$
10. $\frac{28 \times 39 \times 48 \times 68 \times 72 \times 96 \times 168 \times 195 \times 408 \times 432}{24 \times 34 \times 65 \times 72 \times 56 \times 84 \times 117 \times 204 \times 288 \times 288}$
11. $\frac{112 \times 121 \times 128 \times 210 \times 231 \times 315 \times 360}{64 \times 75 \times 126 \times 132 \times 180 \times 242 \times 392}$
12. $\frac{486 \times 585 \times 648 \times 824 \times 1080 \times 1470 \times 2420}{396 \times 405 \times 576 \times 1236 \times 1296 \times 2205 \times 3575}$
13. $\frac{192 \times 288 \times 320 \times 405 \times 525 \times 756 \times 840}{162 \times 216 \times 224 \times 360 \times 576 \times 750 \times 980}$
14. $\frac{368 \times 275 \times 288 \times 297 \times 351 \times 378 \times 392}{168 \times 216 \times 273 \times 315 \times 330 \times 396 \times 552}$
15. $\frac{192 \times 294 \times 308 \times 312 \times 324 \times 340 \times 405}{104 \times 240 \times 264 \times 272 \times 315 \times 378 \times 378}$

410. Proportions. Les proportions peuvent être résolues immédiatement par la règle à calcul. Si $x/y = a/b$, alors : $\log (x/y) = \log (a/b)$.

Prenons a sur C en face de b sur D, nous aurons x sur C en face de y sur D.

C.....x.....a.....

D.....y.....b.....

Si x était l'inconnue, sa valeur serait lue immédiatement.

411. Dans la plupart des cas, on préférera calculer x d'après la formule algébrique $x = \frac{ay}{b}$. Le procédé (410) se recommande lorsqu'il y a plusieurs rapports égaux.

1. Le total des notes de certaines compositions est 635; ce maximum doit être réduit à 25 : quelles seront les notes réduites des élèves qui ont obtenu : 437, 618, 325, 417, 236, 117, 487, 631?

2. Le total des notes étant 877, quelles sont les valeurs % des résultats suivants : 477, 505, 785, 637, 178, 227?

412. Passer d'un système d'unités à un autre.

Sur le dos de certaines règles, ou dans les fascicules fournis avec les règles, il y a des proportions permettant de changer de système d'unités de mesure. La transformation est immédiate.

16-4. Transformer 29 pouces en centimètres.

2. Réduire 3m 75 en pieds.

3. La vitesse d'un navire est de 22 nœuds, traduire cette vitesse en milles à l'heure.

4. Quelle est la surface en cm^2 d'un carré de 6 po. de côté.

5. Réduire 1500 acres en milles carrés.

6. Quel est le volume du litre exprimé en pouces cubes.

7. Quel est le poids de l'eau d'un réservoir dont les dimensions sont 3 pieds, par 4 pieds, par 2 pieds.

8. Contenance en litres du réservoir précédent.

9. Traduire 75 kg en livres.

10. Exprimer en livres par pouce carré la pression de 7 atmosphères.

11. Quelle est la puissance en watts d'une machine de 250 H.P?

12. Calculer les logarithmes népériens des nombres suivants :

1,5, 15, 150, 1500.

IV. CARRÉS ET RACINES CARRÉES

413. Échelles A et B.

Les échelles A et B sont divisées en deux parties égales chacune étant semblable à C et D. *On lira de 1 à 10 dans la première moitié, et de 10 à 100 dans la seconde moitié.* Cette façon de parler sera adoptée pour plus de clarté, 69 marquera le nombre de la moitié de droite et 6.9 le nombre correspondant de gauche.

414. Racines carrées.

Remarquer que si l'on place le curseur sur un nombre de D, on lit le carré de ce nombre, sous le curseur, sur A.

Inversement, si l'on met le curseur sur un nombre de A, sous le curseur, sur D, on lit la racine carrée de ce nombre.

Pour trouver la racine carrée d'un nombre, commencer par le *diviser en tranches de deux chiffres* partant du point décimal et allant vers la gauche, si le nombre est plus grand que l'unité et vers la droite, s'il est plus petit que l'unité. 3456.78 devient ainsi 34 56.78 et .0003456 devient .00 03 45 6.

Prendre ensuite le nombre formé par les chiffres de la première tranche. Si cette tranche est de *deux chiffres*, l'assimiler aux nombres sur A compris entre 10 et 100, si elle n'est que *d'un chiffre* la prendre sur A entre 1 et 10 ; placer le curseur sur A au point convenable, la racine carrée est lue sur D.

Il y a autant de chiffres avant le point dans la racine qu'il y a de tranches dans le nombre. Si c'est une fraction décimale, il y aura autant de 0 après le point décimal qu'il y a de tranches formées uniquement de zéros après le point dans la fraction décimale donnée.

La racine carrée de 34567.75 ou 3 45 67.75 est 1863 donc 186.3 ; tandis que la racine carrée de .000003457 ou 00 00 03 45 7 devient .001863.

16-5.

EXERCICES

Quelles sont les racines carrées des nombres suivants :

1) 17	2) 170	3) 2725
4) 272.5	5) 789	6) 8790
7) 634	8) 63400	9) 634000
10) 0000567	11) .000567	12) .00567
13) .0008456	14) .008456	

415. Opérations avec racines carrées.

La règle à calcul se prête d'une façon intéressante aux opérations comprenant des racines carrées. On peut multiplier ou diviser par les racines carrées avec la plus grande facilité, il suffit de lire les nombres sur B au lieu de les lire sur C.

Pour multiplier ou diviser par un radical du second degré, opérer comme si c'était un nombre ordinaire, sauf qu'il faut lire le nombre sur l'échelle B à droite ou à gauche suivant que le nombre de chiffres de la première tranche est deux ou un. La réponse sera lue sur D.

Pour savoir le nombre de chiffres de la réponse, procéder comme dans les opérations sans racines. Il faut supposer la racine carrée connue pour avoir la caractéristique : la caractéristique de $\sqrt{220}$ est 1, celle de $\sqrt{2200}$ sera 1 également, celle de $\sqrt{22}$, 0. Le reste des opérations se fait comme à l'ordinaire.

16-6.

EXERCICES

Comme précédemment, multiplier les indices des colonnes par le nombre placé au commencement des lignes.

1.	39	27	$\sqrt{315}$	$\sqrt{479}$	$\sqrt{102}$
47					
$\sqrt{315}$					
$\sqrt{62.9}$					
$\sqrt{338}$					

À la rencontre des lignes, mettre le quotient des indices des colonnes par le premier terme des lignes.

2.	470	$\sqrt{470}$	4709	$\sqrt{4709}$	$\sqrt{29.7}$	$\sqrt{297}$
29	...					
$\sqrt{876}$	...					
$\sqrt{8760}$	...					

Effectuer les opérations suivantes contenant des racines carrées.

3.
$$\frac{2.17 \times \sqrt{365} \times 4.24 \times \sqrt{3.17}}{487 \times \sqrt{39.6} \times 6.27 \times \sqrt{32.5}}$$
4.
$$\frac{7.65 \times \sqrt{26.4} \times \sqrt{25.9}}{38.7 \times 4.89 \times \sqrt{5.18}}$$
5.
$$\frac{7 \times \sqrt{255} \times \sqrt{365} \times \sqrt{445} \times \sqrt{1750} \times 8000 \times 4.5}{\sqrt{9750} \times \sqrt{876} \times 91 \times 329 \times 2460 \times 17 \times .9}$$
6.
$$\frac{7.8 \times \sqrt{.0859} \times 3.05 \times 4.17 \times \sqrt{3.29}}{126 \times 3.36 \times \sqrt{265} \times \sqrt{436} \times \sqrt{296}}$$
7.
$$45.35 \times \sqrt{45.76} \times 65 \times \sqrt{89} \times .00007896$$
8.
$$\frac{296 \times \sqrt{337} \times \sqrt{652} \times \sqrt{3280} \times \sqrt{876}}{444 \times \sqrt{1348} \times \sqrt{2608} \times \sqrt{205} \times \sqrt{219}}$$
9.
$$\frac{879 \times \sqrt{437} \times \sqrt{876} \times \sqrt{1001} \times \sqrt{101}}{\sqrt{404} \times \sqrt{9009} \times \sqrt{219} \times \sqrt{1748} \times 1753}$$
10.
$$\sqrt{\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{20 \times 21 \times 22 \times 23 \times 13 \times 14 \times .1 \times .2 \times .3}}$$

416. Carrés des nombres.

Les carrés des nombres lus sur D se trouvent sur A ; ceux des nombres de C se lisent sur B.

Si un carré est trouvé sur la moitié droite de A, il contient un nombre pair de chiffres et autant de tranches qu'il y a de chiffres à gauche du point décimal dans le nombre dont on cherche le carré. Si le carré est sur la moitié gauche

de A, il contient un nombre impair de chiffres mais autant de tranches que le nombre donné a de chiffres à gauche du point décimal.

S'il s'agit du carré d'un nombre décimal, il y aura d'abord autant de tranches de 2 zéros que le nombre possédait de 0 à droite du point décimal, et la tranche suivante commencera par 0 si le carré est à gauche ; sinon, on lira immédiatement le nombre sur A.

16-7.

EXERCICES

Trouver les carrés des nombres suivants :

1. 2.34	2. 23.4	3. 7.29
4. 1.09	5. 6.24	6. .0037
7. .079	8. .000473	9. .763
10. .624	11. .00219	12. .000179

V. CUBES ET RACINES CUBIQUES

417. La racine cubique d'un nombre peut s'obtenir de plusieurs façons.

Racine cubique *au moyen des logarithmes*. Trouver sur la règle le logarithme du nombre, le diviser par trois, chercher le nombre correspondant.

Racine cubique *par l'échelle K*.

Si la règle porte une échelle K ou des cubes, la racine cubique sera donnée immédiatement. Après avoir partagé le nombre en tranches de trois chiffres, la première tranche indique en quelle partie de l'échelle K il faut placer le nombre. Le premier tiers correspond aux tranches de 1 chiffre ; le second tiers, aux tranches de deux chiffres ; les tranches de trois chiffres seront trouvées dans le troisième tiers. Le curseur étant placé convenablement, la racine cubique se lit sous le curseur, sur D.

Inversement, le cube d'un nombre se lit sur K. Placer le curseur sur le nombre lu sur D sous le curseur, sur K, on trouve le cube du nombre.

418. La racine cubique peut s'obtenir sur une règle ne possédant pas l'échelle K par le procédé suivant. Soit 22 345 678 un nombre dont on cherche la racine cubique.

Chercher le premier chiffre de la racine cubique; ici, c'est 2.

Prendre le nombre sur l'échelle A à gauche ou à droite.

Déplacer ensuite le coulisseau de manière que le nombre lu sur B, sous le curseur, soit le même nombre que celui qui est lu sur D en face de l'indice, ce nombre devant commencer par 2. Après quelques tâtonnements, on obtient 281.

Avec le nombre 2 234 567.8, le premier chiffre étant 1, on aurait obtenu 130.5 ; enfin avec le nombre 223 456.76 le premier chiffre étant 6, on aurait trouvé 60.6.

419. Pour justifier cette méthode, soit x la racine cubique cherchée. Puisque l'on a x sur B et sur D, en face de l'indice, on trouverait sur D, sous le curseur, x fois la racine carrée de x et en A le carré du nombre en D, soit le carré de $x\sqrt{x}$ ou x^3 .

Il faut le premier chiffre de la racine cubique, car pour 8, 80 ou 800 on procéderait de la même façon, mais le premier chiffre de la racine prévient la confusion.

16-8.

EXERCICES

Trouver les racines cubiques des nombres suivants :

1) 327 2) 3270 3) 32 700 — comme vérification faire le produit des trois racines cubiques : le produit doit être 3270.

4) 1.71

5) 17.1

6) 171

7) 29

8) 392

9) 467

10. Calculer : $8^3 \sqrt{29} \sqrt{29}$.

11. Trouver r quand le volume d'une sphère est 390 po. cubes.

12. Calculer la valeur de $\frac{17 \times 29 \times \sqrt[3]{390}}{\sqrt[3]{8700}}$.

Trouver les cubes des nombres suivants :

13) 17

14) 18

15) 22

16) 24

17) 9.2

18) 8.7

19. Calculer les valeurs du polynôme suivant pour $x = 1.237$ et pour $x = 2.802$

$$3.7x^3 - 1.29x^2 + 2.37x - 5.19.$$

420. Cubes. Échelle K. On trouve immédiatement les cubes sur l'échelle K. Le nombre dont on veut le cube est pris sur D; si le cube est dans le premier tiers à gauche de K, le nombre de chiffres de x^3 est $3k+1$, si c'est dans le deuxième tiers, le nombre de chiffres est $3k+2$, si c'est dans le troisième tiers le nombre de chiffres est $3k+3$, k étant le nombre de chiffres de x , à gauche du point décimal.

Si x est une fraction décimale, le cube commence par autant de tranches de 3 zéros qu'il y a de zéros à droite du point décimal dans x , la tranche suivante est le nombre lu sur K, cette dernière tranche débutant par deux 0, si le cube est lu dans le premier tiers, par un 0 si c'est dans le second tiers, et sans 0 si c'est dans le troisième tiers.

16-9.**EXERCICES**

Trouvez les cubes des nombres suivants:

- | | | |
|----------|-----------|---------|
| 1. 1.17 | 2. 2.79 | 3. 4.69 |
| 4. 8.26 | 5. .976 | 6. .237 |
| 7. .0194 | 8. .00426 | |

421. Enfin, on peut trouver le cube d'un nombre en multipliant ce nombre trois fois par lui-même.

Ou en multipliant ce nombre par sa racine carrée, ce qui donne $x\sqrt{x}$ lu sur D, et en lisant sur A le nombre correspondant, c'est-à-dire le carré de $x\sqrt{x}$ ou x^3 .

422. Opérations avec les échelles A et B.

On peut opérer sur A et B comme sur D et C avec cet avantage que si l'on fait attention de prendre à gauche les nombres qui n'ont qu'un chiffre dans leur première tranche, et à droite ceux qui en ont deux, les produits obtenus seront connus quant à la parité du nombre de chiffres.

Partant de A pour la multiplication et la division, comme on partait de D et opérant avec B comme auparavant avec C, la réponse sera obtenue sur A.

L'avantage des échelles A et B vient surtout de ce que les opérations avec les carrés peuvent se faire d'un seul coup de règle. Ce point sera étudié après l'exercice suivant.

16-10.

EXERCICES

Mettre les produits au point de rencontre des rangées. On opérera sur A et B.

	3.69	3.6×2.9	2.75	2.9×3.7
4.7×2.8				
8.774				
7.69				

423. Remarque. Les opérations comportant des radicaux ne peuvent se faire immédiatement sur les échelles A et B sans opérations préliminaires.

424. Opérations avec les carrés des nombres. Les calculs renfermant les carrés des nombres se font d'un seul coup de règle si l'on opère sur les échelles A et B. Pour cela, partir de A et continuer sur B pour les facteurs du premier degré, mais *prendre sur C les facteurs au carré* pour la multiplication et pour la division.

Soit à calculer l'expression suivante :

$$\frac{20}{981} \times \frac{(325 \times 2 \times 3.1416)^2}{60^2} \times 7.65.$$

Prendre 20 sur A, à droite, puis mettre en regard 981 sur B, à gauche. Procéder pour 325, comme si l'on avait à multiplier par 325 sur C ; diviser de même par 60 sur C ; puis multiplier par 2 sur C etc. On trouvera comme réponse 181 environ.

16-11.

EXERCICES

1. $6 \times 2.7^2 \times 3.9^2 \times .76^2 \times 4.37.$

2. $876 \times 39^2 \times 475^2 \times 76^2 \times 279$

$558 \times 438 \times 78^2 \times 95^2 \times 38^2$

Calculer les surfaces des cercles dont les rayons sont :

3. 2.7 4.09 3.29 .476 6.92 1.04 .00578 .267

Quelles sont les surfaces des sphères qui ont pour rayons :

4. 2.07 3.09 2.7 4.09 4.14 8.75 6.85?

Quelles sont les surfaces des sphères dont les diamètres sont :

5. 3.28 4.37 6.27 3.24 4.55 1.08 9.85?

VI. LOGARITHMES DES NOMBRES

425. Les logarithmes des nombres sont lus immédiatement quant à la mantisse sur la réglette tournée du côté convenable. Calculer la caractéristique comme d'habitude, puis prendre le nombre sur D : le logarithme se lit immédiatement sous le curseur transporté sur le nombre.

16-12.

EXERCICES

Trouver les logarithmes des nombres suivants :

- | | |
|----------|------------|
| 1) 339 | 4) 1.789 |
| 2) 33.9 | 5) .001789 |
| 3) .0274 | 6) 1789. |

Calculer par logarithmes :

- 7) $4.76 \times 3.09^5 \times 1.705^6 \times .017^4$.
 8) $(376.4)^{1/6}$.
 9) $(376.4)^{1/4}$.
 10) 2750×1.06^{30} .
 11) 875×1.05^{20} .
 12) $2750 = (1+r)^{25}$ on demande r..
 13)
$$\frac{4750}{(1.06)^{20} \times (1.07)^{22}}$$

 14)
$$\frac{(8275)^2}{3.9^3 \times 2.9^4 \times 5.8^6 \times 4.84^3}$$

426. Remarque. Pour trouver les logarithmes on peut indiquer une autre méthode ; au lieu de retourner le coulisseau, le logarithme est lu sous un trait derrière la réglette après que l'indice 1C a été placé sur le nombre (pris sur D) dont on cherche le logarithme.

VII. FONCTIONS CIRCULAIRES

427. Fonction $\sin x$ et $\cos x$; $\sec x$ et $\csc x$.

Trouver le sinus. La lecture des valeurs de la fonction sinus se fait immédiatement sur les échelles A ou B, le coulisseau étant tourné convenablement. Mettre le curseur sur le trait de S marquant l'angle dont on cherche le sinus.

Le sinus lu sur la partie gauche est en centièmes, donc précédé de .0; tandis qu'il est lu en dixièmes sur la partie droite.

16-13.

EXERCICES

Calculer les sinus des angles suivants :

1. 30°	5. 80°	9. $1^\circ 30'$
2. 42°	6. 85°	10. $45'$
3. 53°	7. 10°	11. $39'$
4. 75°	8. 5°	

428. Trouver le cosinus.

La recherche du cosinus se fait de la même façon, en remarquant que le *cosinus de l'angle x est le sinus du complément de x* . On trouvera le sinus du complément de l'angle : ce sera le nombre cherché.

16-14.

EXERCICES

Chercher les cosinus des angles suivants :

1. 60°	2. 48°	3. 37°
4. 15°	5. 10°	6. 5°
7. 80°	8. 85°	9. $88^\circ 30'$
10. $89^\circ 15'$	11. $89^\circ 21'$	

429. Inversement, trouver les angles dont les sinus sont les nombres suivants. On prendra ces nombres sur A et l'angle sur S. Prendre à gauche les angles dont les sinus commencent par .0, à droite les autres.

16-15.

EXERCICES

Quels angles ont pour *sinus* les nombres suivants :

1. .01	2. .02	3. .075	4. .097
5. .117	6. .275	7. .678	8. .90

Trouver les angles qui ont pour *cosinus* les nombres :

9. .01	10. .02	11. .075	12. .097
13. .117	14. .275	15. .678	16. .90

430. Opérations contenant des sinus et des cosinus.

Les opérations avec les sinus et les cosinus, lorsque ces expressions ne contiennent que des nombres à la première puissance, se font immédiatement et d'un seul coup de règle sur l'échelle A. Il faut un plus grand nombre d'opérations lorsque l'échelle D est utilisée.

Sur l'échelle A, les opérations se font immédiatement comme si l'on avait à multiplier ou à diviser par les nombres mêmes marqués par les degrés que l'on trouve sur S. Lorsque les sinus et les cosinus se présenteront, le coulisseau sera retourné et l'on opérera avec l'échelle S comme on opérerait avec l'échelle B.

Soit à calculer :

$$\frac{45 \times \sin 27^\circ \times \sin 18^\circ \times \sin 70^\circ \times 39}{38 \times \cos 27^\circ \times \sin 36^\circ \times \sin 12^\circ \times 49}$$

Opérer comme si l'on avait à multiplier: $45 \times 27 \times 18 \times \dots$ etc. avec B mais en ayant soin de lire 27, 18 sur S la règle retournée. On trouve comme réponse : 1.141.

16-16.**EXERCICES**

1. $12 \sin 60^\circ$

2. $627 \sin 23^\circ 30'$

3. $627 \sin 66^\circ 30'$

4. $72.15 \sin 39^\circ 34'$

5. $\frac{500 \sin 123^\circ 12'}{\sin 10^\circ 12'}$

6. $\frac{795 \sin 55^\circ 20'}{\sin 79^\circ 59'}$

7. $\frac{804 \sin 35^\circ 4'}{\sin 99^\circ 55'}$

8. $\frac{53.276 \sin 57^\circ 13'}{\sin 108^\circ 50'}$

431. Fonctions sec x et cosec x.

La fonction sec x et la fonction cosec x étant l'une l'inverse du cosinus, l'autre l'inverse du sinus, ne demandent aucune explication. Pour calculer une sécante on divisera l'unité par la valeur du cosinus ; pour calculer une cosécante on divisera l'unité par le sinus.

432. Sinus des angles très petits. Lorsque les angles sont très petits on utilise la formule : $\sin x = x$ fois $\sin 1'$: le sinus d'un angle est x fois le sinus de l'angle de $1'$, si l'angle est exprimé en minutes et x fois le sinus de l'angle de $1''$, si l'angle est exprimé en secondes. Ces formules sont vraies si x est suffisamment petit.

On a $\sin 1' = 0.000\ 2908882$, pratiquement 0.00029 .

$\sin 1'' = 0.0000048481$, pratiquement $.0000048$.

16-17.

EXERCICES

1. $\sin 29'$

2. $\sin 28''$

3. $\cos 89^\circ 30' 17''$

4. $\cotg 89^\circ 20'$

5. $\tg 10'$

6. $\tg 12''$

433. Fonctions $\tg x$ et $\cotg x$.

La réglette étant convenablement tournée, on lira sur D, sous le curseur, la tangente d'un angle pris sur l'échelle T. Les opérations avec la tangente se font comme si l'on avait des facteurs ordinaires que l'on prendrait sur T au lieu de les prendre sur C. Le résultat se lit sur D.

S'il s'agit d'angles plus grands que 45° , on trouvera les tangentes en divisant l'unité par la tangente de l'angle complémentaire.

La tangente d'un angle très petit a la même valeur que le sinus de cet angle on la lira donc sur l'échelle des sinus (427, 432).

La cotangente d'un angle est l'inverse de la tangente de cet angle.

16-18.

EXERCICES

Calculer les tangentes des angles suivants :

1. 15°

2. 35°

3. 47°

4. 50°

5. 40°

6. 25°

7. 12°

8. 8°

9. $2^\circ 30'$

10. $3^\circ 22'$

11. $4^\circ 7'$

12. $30'$

13. $19'$

434. Angles dont les tangentes ou les cotangentes sont données.

Lorsque la tangente est donnée, sa valeur peut être comprise entre .1 et 1 : prendre sur D le nombre donné et lire immédiatement l'angle sur T.

Si la valeur est *plus petite que .1*, procéder comme si le sinus du même angle étant donné on demandait cet angle (429).

Si la valeur est *plus grande que l'unité* prendre l'inverse de ce nombre, qui sera la tangente du complément de l'angle cherché. Chercher le complément, et en déduire l'angle.

16-19.

EXERCICES

Quels sont les angles dont les tangentes ont les valeurs suivantes :

1. .1	2. .2	3. .3
4. .55	5. .65	6. .72
7. 1.05	8. 1.15	9. 2.12
10. 4.29	11. 25	12. 50
13. .02	14. .0002	15. 000056

435. Opérations contenant sinus, cosinus, tangentes, racines carrées.

Opérer sur les échelles C et D. Il faudra procéder comme si les fonctions *sinus*, *cosinus*, *sécante*, *cosécante* étaient *présentes au carré*, car leurs valeurs réelles sont lues sur A ou B et les nombres de A et B ne valent que par leurs racines carrées sur C et D. Il n'y aurait aucun avantage à utiliser l'échelle D avec des sinus et des cosinus seulement ; mais dans les opérations où interviennent encore, les racines carrées de ces mêmes lignes trigonométriques, les tangentes, les cotangentes, les racines carrées des nombres, en faisant autrement, on s'imposerait des calculs préliminaires. Les exemples suivants choisis à dessein parmi les exercices difficiles montreront l'avantage du procédé indiqué.

16-20.

EXERCICES

1. $\frac{17 \sin 33^\circ \cos 27^\circ \sqrt{29}}{\operatorname{tg} 17^\circ \times \operatorname{tg} 29^\circ}$
2. $\frac{28 \times \cos 65^\circ \times \operatorname{tg} 49^\circ \times \operatorname{tg} 58^\circ}{\sin 39^\circ \times \operatorname{tg} 12^\circ \times \sqrt{291}}$
3. $\frac{14 \times \sqrt{29} \times \sqrt{290} \times \sin 73^\circ \times \sin 47^\circ}{292 \times 36 \times 47 \times \cos 27^\circ \times \operatorname{tg} 42^\circ}$
4. $8 \operatorname{tg} 41^\circ \times \sin 37^\circ$
5. $17 \times \sqrt{29} \times \operatorname{tg} 29^\circ \times \sin 17^\circ$
6. $292 \times \sqrt{40} \times \cos 49^\circ \times \operatorname{tg} 71^\circ$
7. $472 \times \sqrt{37} \times \sin 3^\circ \times \operatorname{tg} 5^\circ$
8. $327 \times \sqrt{39} \times \sin 0^\circ 0' 30''$
9. $876 \times \sqrt{329} \times \operatorname{tg} 89^\circ 32' \times \sin 3''$
10. $\frac{4876 \times \sqrt{459} \times \sqrt{327} \times 59^2 \times \sin 27^\circ}{8272 \times \sqrt{329} \times \sin 47^\circ \times 33^2 \times \operatorname{tg} 15^\circ}$
11. $\frac{110 \times 3.1 \times .653}{33 \times 7.854 \times 1.7}$
12. $\frac{15 \times .37 \times 26 \times .16}{11 \times 8 \times .18 \times 6.67}$
13. $\frac{78 \times 52 \times 1605}{338 \times 767 \times 431}$
14. $\frac{.5 \times .315 \times 428}{.317 \times .973 \times 43.7}$
15. $\sqrt{\frac{3500}{1.06^5}}$
16. $\sqrt{\frac{.434 \times 96^4}{64 \times 1500}}$
17. $2^{1/2} \times (1/2)^{2/3} \times \sqrt[3]{(3\frac{1}{2})} \times (.1)^{1/2}$
18. $\frac{50 \times 2^{3.5}}{8^{1.63}}$

Exercices. Au moyen des formules trigonométriques :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

calculer les angles des triangles :

1. Angle A lorsque $a = 37$, $b = 13$, $c = 40$
2. Angle A lorsque $a = 37$, $b = 13$, $c = 30$
3. On donne : $a = 51$, $b = 65$, $c = 20$: calculer les trois angles du triangle.
4. Les trois côtés d'un triangle sont : $a = 19$, $b = 34$, $c = 49$: calculer les trois angles.

VIII. PRÉCISION DES CALCULS FAITS À LA RÈGLE

436. Erreur à craindre dans une opération exécutée à la règle.

Il est difficile d'apprécier exactement l'erreur à craindre dans l'usage de la règle à calcul. Cette erreur dépend de la précision de la règle elle-même, de l'habileté de l'opérateur, du nombre des opérations, etc. On propose la formule suivante :

$$p = e \sqrt{m+1}.$$

La quantité p constitue l'erreur probable finale — e l'erreur dans une seule opération — m est le nombre d'opérations. Cette formule est basée sur le calcul des probabilités ; l'erreur dépend de la racine carrée seulement du nombre d'opérations, car il est probable que les erreurs se compensent quelque peu.

436. Pour apprécier la précision dans les calculs à la règle on propose l'exercice suivant :

I. — Faire la somme d'une suite de nombres : 297, 336, 434, 876 .. puis diviser chacun des nombres par la somme trouvée et multiplier le résultat par 100 : cela revient à trouver

quel % de la somme est chacune de ses parties. La somme des % doit nécessairement être 100.

L'erreur finale p est liée à l'erreur e par la formule précédente : $p = e\sqrt{m+1}$.

Dans le cas actuel on a obtenu les résultats suivants :

nombres	%
297	9.15
336	10.36
675	20.80
434	13.38
629	19.40
876	27.00
3247	100.09

On a donc : $.09 = e\sqrt{7}$

$$\text{d'où } e = \frac{.09}{\sqrt{7}} = .034.$$

L'erreur serait donc de 1/30 de 1% environ, ou de 1 sur 3000.

En général une précision de 1 sur 1000 est bonne.

II. — Voici une deuxième série d'exercices permettant de calculer la précision de la règle à calcul.

Soit la suite des quotients suivants dont le produit est évidemment 1, puisque tout terme qui figure au numérateur figure de même au dénominateur.

$$\frac{29}{37} \quad \frac{37}{72} \quad \frac{72}{107} \quad \frac{107}{129} \quad \frac{129}{76} \quad \frac{76}{32} \quad \frac{32}{29}$$

Calculer séparément chacun des quotients. On trouve ici, dans une suite d'opérations à la règle :

$$0.782, 0.514, 0.672, 0.829, 1.7, 2.37, 1.104.$$

Et le produit de tous ces quotients obtenu de même à la règle est 0.994. Comme le produit devrait être exactement 1.000, l'erreur est donc de 0.6%.

Or le nombre d'opérations est 13 (sept divisions, six multiplications) appliquant la formule précédente, nous avons : $.6 = e \sqrt{14}$.

D'où $e = 0.16$ et l'erreur sur mille est de 1.6 analogue à l'erreur précédente.

Il est probable que la dernière série de calculs donne un résultat plus acceptable car toutes les opérations sont différentes tandis que dans le premier cas, le diviseur est toujours le même : la somme des nombres.

VI. ÉCHELLES LOG — LOG

437. Les règles plus complètes comprennent à part les échelles ordinaires, quatre échelles marquées LL1, LL2, LL3 et LLO. Elles vont depuis $e^{.01}$ jusqu'à e^{10} pour les trois premières, c'est-à-dire depuis 1.01005 jusqu'à 22 026.3.

438. *L'échelle LL3 donne immédiatement les puissances de e (251) correspondant aux exposants lus sur C.*

Inversement les nombres de C sont les logarithmes népériens des nombres lus sur LL3. Par exemple, 10 sur LL3 correspond à 2.3026 sur C: le logarithme népérien de 10 est donc 2.3026 (249).

439. Logarithme d'un nombre dans une base quelconque (242).

Les échelles Log-Log fournissent les logarithmes des nombres dans un système de base quelconque. Si l'on veut obtenir les logarithmes vulgaires ou de base 10, mettre 1 de C en face de 10, LL3; les nombres de LL3 auront pour logarithmes vulgaires les nombres de C: le logarithme de 100

est 2, celui de 200 est 2.301... Si l'on voulait les logarithmes des nombres dans le système de base 2, on prendrait 2 sur LL2 et en regard 1C : les logarithmes se liraient sur C. On a ainsi $\log_2 8 = 3$ etc.

16-21.

EXERCICES

Chercher les logarithmes suivants:

- | | | |
|------------------|--------------------|---------------------|
| 1) $\log_e 50$ | 2) $\log_e 2.7$ | 3) $\log_{10} 1.04$ |
| 4) $\log_e 200$ | 5) $\log_e 1.04$ | 6) $\log_{10} 1.6$ |
| 7) $\log_e 1.48$ | 8) $\log_e 1.0545$ | 9) $\log_{10} 1.15$ |

440. Les échelles LL2, LL1 sont disposées de telle façon que *tout nombre lu sur une échelle inférieure est la racine 10e du nombre correspondant de l'échelle supérieure*. Inversement tout nombre d'une échelle supérieure correspond à la dixième puissance du nombre correspondant de l'échelle inférieure.

Si l'on prend 1.03 sur LL1, et qu'on transporte le curseur sur ce nombre, en LL2, sous le curseur, on lira 1.344 ou est 1.03^{10} et sur LL3, 19.2 qui est la dixième puissance de 1.344 ou la centième puissance de 1.03.

441. L'échelle LL0 s'étend depuis 0.97 jusqu'à 0.05 et elle est disposée de façon que $e^{-.1}$ corresponde aux indices de A et B et e^{-1} à l'indice du centre. On peut utiliser l'échelle LL0 pour trouver les puissances des fractions décimales. Elle est basée sur A et B comme les autres échelles le sont sur C et D.

Soit à trouver le cube de .71. Prendre .71 sur LL0 mettre en regard l'indice 1 de B ; transporter le curseur sur 3B, lire le résultat sur LL0 : .358.

Inversement : trouver la racine 6^{ième} de 0.2. Prendre .2 sur LL0, mettre en regard le 6 de B et lire sur LL0 le nombre correspondant à l'indice de B : .765.

442. Puissance N^{ième} d'un nombre.

Pour obtenir la puissance n^{ième} d'un nombre, la 3e puissance de 1.03, par exemple, transporter le curseur sur 1.03

de LL1, puis l'indice 1 de C sous le curseur, enfin transporter le curseur sur 3 de C; on lira alors sur LL1, 1.0926. La 30e puissance de 1.03 aurait été lue sur LL2, soit 2.45.

Pour la quatrième puissance de 1.03, il aurait fallu changer d'indice. La quatrième puissance aurait été lue sur LL2, sous le curseur transporté sur 4C, soit 1.251; la quarantième puissance lue sur LP3 est 3.26.

16-22.

EXERCICES

- | | | |
|------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) 1.01^{100} | 7) 1.02^{90} | 13) $5.12^{3 \cdot 23}$ |
| 2) 1.015^{75} | 8) 1.035^{76} | 14) $2.263^{4 \cdot 18}$ |
| 3) 1.025^{50} | 9) 1.06^{45} | 15) 19100^{91} |
| 4) 1.05^{25} | 10) 1.023^{36} | 16) $(3.77)^8$ |
| 5) 1.0135^{25} | 11) $443^{1 \cdot 1}$ | 17) $(5.57)^9$ |
| 6) 1.01^{67} | 12) $38.4^{2 \cdot 72}$ | 18) $(3.1)^{10}$ |

443. Racines N^{ièmes} d'un nombre.

Inversement les racines d'indices quelconques sont obtenues sur les échelles LLk. Soit à calculer la racine cubique de 27. On transportera le curseur sur 27 de LL3, puis, sous le curseur, mettre le 3 de C; sous l'indice 1 de C, sur LL3, on trouve la racine cubique de 27, 3. La racine 30e de 27 serait lue par la même opération, sauf qu'il faudrait lire sur LL2, soit 1.1161. La racine 300e serait donnée de même sur LL1, soit 1.01105. On lirait la racine quatrième de 27 sous l'indice 10 sur LL2, soit 2.28 et la racine 40e sous le même indice sur LL1, soit 1.086, pourvu que le 4 de C soit sous le curseur placé sur 27, LL3.

- | | | |
|-------------------|-------------------------|--------------------------|
| 16-23. $30^{1/6}$ | 2. $300^{1/20}$ | 3. $3000^{1/100}$ |
| 4. $45^{1/29}$ | 5. $325^{1/37}$ | 6. $2^{1/15}$ |
| 7. $2.5^{1/20}$ | 8. $3^{1/40}$ | 9. $2.76^{1/40}$ |
| 10. $3.08^{1/50}$ | 11. $^{95}\sqrt{1.923}$ | 12. $^{36}\sqrt{1.0778}$ |
| | 13. $^{87}\sqrt{.081}$ | 14. $^{29}\sqrt{4.72}$ |

444. Il existe un certain nombre de règles spéciales, d'opérations abrégées etc., que l'on apprend ou que l'on trouve par la pratique ; il nous a semblé inutile de les introduire dans ces notes rédigées uniquement en vue de montrer le maniement général de la règle à calcul.

CURIOSITÉS.

Quelques opérations possibles à la règle.

A titre de curiosités nous donnons les procédés suivants pour résoudre les équations du second degré et du troisième degré.

445. Résolution de l'équation du second degré.

Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$ à racines réelles.

Cette équation peut s'écrire : $x(x+p) = -q$.

Pour résoudre cette équation, mettre le curseur au point q sur D ; puis déplacer le coulisseau de façon que le nombre lu sur C , sous le curseur, soit égal au nombre augmenté de p lu sur D , en face de l'indice. Le nombre lu sur D est la racine cherchée.

Remarquer que le produit $x(x+p)$ étant égal à $-q$, les deux facteurs sont du même signe ou de signes contraires suivant que $-q$ est positif ou qu'il est négatif.

Soit à résoudre $x^2 + 3x = 7$.

Les deux facteurs x et $x+3$ doivent être de même signe. Plaçons le curseur sur $D7$, et après quelques tâtonnements nous aurons 5.54 sur C , sous le curseur et 1.54 sur D , en face de l'indice.

$1.54 (1.54+3) = 7$ et $x = 1.54$ est une racine.

Si nous avons pris x et $x+3$ tous deux négatifs, nous aurions eu par le même procédé : $-4.54 (-4.54+3) = 7$.

16-24.

EXERCICES

Résoudre :

1) $x^2 + 4x = 7$

5) $x^2 + 65x + 750 = 0$

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$

6) $x^2 - 65x + 300 = 0$

3) $x^2 - 9x + 14 = 0$

7) $x^2 - 12x + 10 = 0$

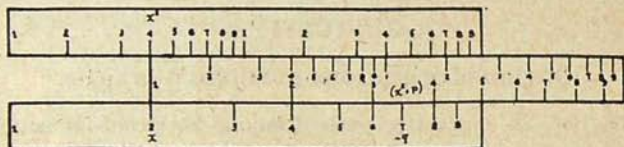
4) $x^2 - 155x = 750 = 0$

8) $x^2 - 100x + 1600 = 0$

446. Trouver une des racines de l'équation du troisième degré.

Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$ qui peut s'écrire :

$$x(x^2 + p) = -q.$$



On prendra donc $-q$ sur D, comme précédemment.

On lira x sur D, sous l'indice.

On lira x^2 sur A, au-dessus de l'indice. On en déduira $x^2 + p$. On devra, après quelques essais, trouver $x^2 + p$ sous le curseur, sur C.

Soit à résoudre : $x^3 + 3x = 140$.

On trouve $x = 5$.

16-25.

EXERCICES

1) $x^3 + x = 222$

2) $x^3 + 2x = 357$

3) $x^3 - 2x - 5 = 0$

4) $x^3 - 20x - 50 = 0$

5) $x^3 - 3x^2 + 7 = 0$

6) $x^3 + 7x + 20 = 0$

7) $x^3 + 7x + 2 = 0$

8) $x^3 - 7x + 2 = 0$

447. Addition et soustraction à la règle à calcul.

De même qu'il est possible d'additionner deux nombres au moyen des logarithmes, ainsi en est-il par la règle à calcul. Il est évident, que si l'on utilise une échelle régulière comme celle qui donne les logarithmes des nombres, l'addition se ferait immédiatement, puisque toutes les divisions de cette échelle sont égales, mais le problème consiste à additionner avec les échelles C et D.

Soit à trouver $s = a + b$.

$$\text{Écrire : } s = a \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Déterminer m tel que le $\text{tg } m = \frac{b}{a}$;

$$\text{il vient : } s = a(1 + \text{tg } m) = a \sqrt{2} \frac{\sin (45^\circ + m)}{\cos m}.$$

Pour additionner $(7 + 5)$, par exemple, écrivons :

$$7+5 = 7(1+\frac{5}{7}).$$

Cherchons l'angle dont la tangente est $\frac{5}{7}$: on trouve $35^\circ 34'$.

Il vient alors : $7+5 = 7(1 + \text{tg } 35^\circ 34')$

$$= 7 \times \left(\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \frac{\sin 35^\circ 34'}{\cos 35^\circ 34'} \right)$$

$$= 7 \times \sqrt{2} \frac{\sin 80^\circ 34'}{\cos 35^\circ 34'} = 12.$$

De même, pour la soustraction.

PROBLÈMES DE REVUE

1. Si $ax^3 + bx^2 + cx + d$ est divisible par $x^2 + h^2$ prouver que $ad = bc$.

2. Déterminer a et b pour que le polynôme :

$$x^4 + ax^2 + bx^2 + 2x(a-1) + 9$$

soit un carré parfait.

3. Déterminer a et b pour que :

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + 27$$

soit un cube parfait.

4. En divisant un polynôme entier en x par $x-1$ et par $x-2$ on trouve les restes 6 et 18. Quel est le reste de la division du même polynôme par le produit : $(x-1)(x-2)$?

5. Montrer que si : $x^5 - 5qx + 4r$ est divisible par $(x-c)^2$, on doit avoir : $r^4 = q^5$.

6. En divisant un polynôme entier en x par $x+1$, $x-1$ et $x-2$ les restes sont 1, 3 et 9. Quel est le reste de la division de ce polynôme par $(x+1)(x-1)(x-2)$.

7. Démontrer que l'on peut déterminer les constantes a , b et c de telle façon que :

$$3x^2 + 16x + 23 = a(x+2)(x+3) + b(x+3)(x+1) + c(x+1)(x+2)$$

et trouver les valeurs de ces constantes.

8. Montrer que si $x^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D$ est divisible par $x^2 + 2Bx + C$, le premier polynôme est un cube, et le second un carré.

9. Chercher deux fonctions linéaires à coefficients entiers, telles que la somme de leurs carrés soit :

$$8x^2 + 8xy + 10y^2 - 16x + 10$$

10. Déterminer m et n de manière que :

$$mx^3 - (2m^2 + 3n)x^2 + (m^2 + 6mn)x - 3m^2n$$

soit un cube parfait.

11. Par la méthode des coefficients indéterminés, établir la formule donnant la somme des n premiers termes de la suite :

$$1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + 4.5^2 \dots + n(n+1)^2$$

12. Établir une formule donnant la somme de :

$$1^4 + 2^4 + 3^4 \dots + n^4.$$

13. Décomposer en fractions rationnelles simples :

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

14. Décomposer :

$$\frac{5-2x}{(2-3x+x^2)^2}$$

15. Décomposer : $\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ en une somme de fractions rationnelles simples et d'une constante.

16. Décomposer : $\frac{3 - 2x^2}{(2 - 3x + x^2)^2}$

17. Décomposer : $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$

18. Décomposer : $\frac{x^4 + 2x^3 + 18x}{(x+2)(x^3+8)}$

19. Décomposer : $\frac{x^3 - 5x + 2}{(x-1)^3 (x^2+x+1)^2 (x^2+1)}$

20. Décomposer : $\frac{x}{(x+1)^9 (x^2+x+1)}$

21. Décomposer : $\frac{x^3 - 2x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)^3}$

22. Décomposer : $\frac{x^3 + x^2}{(x^2+x+1)(x-2)}$

23. Limite de $\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$, quand x tend vers 0.

24. Que devient : $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{(x-a)}$, quand x tend vers a ?

25. Limite de : $\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$, quand x tend vers a ?

26. Limite de : $\frac{(x+3) + \frac{x+1}{x-2}}{x + \frac{x^2}{x-2}}$, quand x tend vers 2.

27. Limite de : $\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$
quand x tend vers 1.

28. Limite de : $\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$, quand x tend vers l'infini.

29. Limite de : $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{4+x^2} - 2}$, quand x tend vers 0.

30. Limite de : $\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1}$, quand x tend vers 1.

31. Limite de : $\frac{\sqrt[3]{(x-3)} + 1}{x-2}$, quand x tend vers 2.
32. Limite de : $\frac{1+x - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$, quand x tend vers 0.
33. Limite de : $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x}-2}$, quand x tend vers 2.
34. Limite de : $\frac{a^x - b^x}{x}$, quand x tend vers 0.
35. Trouver la valeur limite de : $\frac{\sin x - \sin a}{\sin x/2 - \sin a/2}$,
quand x tend vers a .
36. Quelle est la valeur limite de : $\frac{\sin 2x - \sin 2a}{\cos x - \cos a}$,
quand x tend vers a .
37. Valeur limite de : $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, quand x tend vers 0.
38. Lorsque x est une quantité très petite montrer que :
$$\frac{\sqrt{4-3x} - \sqrt{8+3x}}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} = 4(1-x)$$
 approximativement.
39. Valeur limite de : $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, quand x tend vers 0.
40. Quelle est la plus grande valeur de x telle que
 $7x^2 + 11 > x^3 + 17x$
41. Montrer que : $(1^4 + 2^4 + 3^4 \dots + n^4)^n > n^n (n!)^4$
42. Montrer que : $x^3 + 13a^2x > 5ax^2 + 9a^3$, si $x > 0$.
43. On demande de déterminer le nombre et les signes des racines de l'équation : $x^2 - (a-1)x + b - 2 = 0$
pour les diverses positions du point (a, b) dans un plan donné.
44. Étant donnée : $(69+4m)x^2 - 15(9-m)x + 25(4-m) = 0$.
On demande de déterminer le nombre et le signe des racines quand m croît de $-\infty$ à $+\infty$.
45. Résoudre en nombres entiers : $159x + 205y + 104 = 0$
46. Résoudre en nombres entiers l'équation suivante où a représente un entier : $7x - 11y = (a+1)^2$.
47. Quelle est la forme générale des nombres qui divisés par 7 et par 17 donnent pour restes 3 et 15 ?

48. Chercher le plus petit nombre qui divisé par 3, 7 et 11 donne respectivement pour restes : 1, 6 et 3.

49. Chercher des nombres impairs consécutifs divisibles respectivement par 3, 5 et 7.

50. Chercher trois nombres entiers en progression arithmétique et divisibles respectivement par 3, 7 et 10.

51. Un même nombre est représenté par les mêmes chiffres dans la base 11 et dans la base 7, mais l'ordre des chiffres est renversé, et le chiffre du milieu est 0. Quel est ce nombre exprimé dans notre système décimal ?

52. Résoudre en entiers l'équation suivante où a est un entier :

$$3x + 8y = 48a + 5.$$

53. Résoudre en nombres entiers l'équation :

$$2x^2 + xy - 37x - 3y + 57 = 0.$$

54. Résoudre en nombres entiers :

$$2xy - 3x^2 + y - 1 = 0.$$

55. Résoudre en nombres entiers :

$$3x^2 - 2x - 3y + 1 = 0.$$

56. Quelle est la somme des nombres de 4 chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3, 4 chacun des chiffres pouvant être répété au plus 2 fois ? *nombre de nombre = 2043.*

$$57. C_m^{r+p} = C_m^{r-p} \text{ donne : } \frac{36}{4}(1+2+3+4)111 + \frac{24}{4}(1+2+3+4)111$$

$$58. C_{2m}^1 + C_{2m}^2 + C_{2m}^3 = 387m. \quad + \frac{144}{4}(1+2+3+4)111$$

$$59. C_m^n = C_m^{n+1} \text{ et } 4C_m^n = 5C_m^{n-1}$$

60. Parmi les permutations des lettres du mot ARRANGEMENT combien y en a-t-il dans lesquelles 5 lettres consécutives forment le mot NATAN.

61. Même que précédemment, mais il suffit que les lettres du mot NATAN soient consécutives sans que le mot natan lui-même soit toujours formé.

62. Établir la formule :

$$C_m^1 C_m^2 C_m^3 C_m^4 \dots C_m^m = \frac{(m!)^{m-1}}{(1!2!3!4! \dots (m-1)!1!}.$$

63. De combien de manières peut-on ranger 10 élèves quand deux élèves occupent toujours l'un la première place l'autre la dernière.

64. Même que précédemment, mais les deux élèves occupent toujours soit la 1re soit la dernière. $1 \times 8!$

65. Combien y a-t-il de nombres formés de trois chiffres significatifs différents :

... de trois chiffres significatifs ?

66. Combien y a-t-il de nombres formés de trois chiffres pairs différents et de deux chiffres impairs différents ?

67. A, B et C jouent au jeu suivant. A prend une carte dans un jeu de 32 cartes ; si c'est une carte rouge il gagne, sinon B joue et ainsi de suite. Quelles sont les probabilités de gagner de A, B et C. ?

68. Treize personnes sont assises autour d'une table ronde. Montrer que la probabilité pour que deux personnes soient voisines est $1/6$.

69. Quelle est la probabilité de trouver trois rois dans un jeu de 5 cartes extraites d'un paquet de 32 cartes ?

70. D'un jeu de 32 cartes on tire trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité de tirer :

- a) Trois cartes de la même couleur ;
- b) Trois rois ; c) Un as et deux rois ;
- d) Trois cartes marquantes ; e) Trois cartes dont deux ont la même couleur ; f) Deux rouges et une noire ; g) Un as, un roi, une dame ; h) un pique, un carreau, un trèfle.

71. On donne un test de 40 questions auxquelles il faut répondre : Oui ou Non. Un élève ne sait rien sur la matière de ces questions et il écrit au hasard : Oui, Non. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 20 bonnes réponses ?

72. On jette les six dés, quelle est la probabilité d'amener : 1,2,3,4,5,6 ?

73. On a n nombres pairs et k nombres impairs. On écrit ces nombres à la suite les uns des autres. De combien de façons peut-on le faire sachant que deux nombres impairs ne doivent pas se suivre.

74. On a dix lettres différentes. Combien peut-on former de mots de six lettres de manière que chaque mot contienne trois lettres désignées d'avance :

- a) quand on peut séparer ces trois lettres ;
- b) quand elles sont inséparables et toujours dans le même ordre ;
- c) quand elles sont inséparables mais dans un ordre quelconque.

75. Combien de nombres différents de 6 chiffres peut-on former avec les chiffres 243056, les chiffres n'étant pas répétés et 024356 étant un nombre de 5 chiffres, donc non compté. Quelle est la somme de ces nombres différents ?

76. De combien de façons peut-on placer 5 livres latins, 4 livres grecs, 3 livres français sur une tablette de façon que les livres d'une même langue soient ensemble ?

77. Un comité de 6 personnes doit être choisi entre 10 hommes et 7 femmes, de combien de manières différentes peut-on le former :

- a) de façon qu'il y ait au moins trois femmes.

b) de façon qu'il y ait au moins deux hommes, mais trois d'entre eux refusent d'en faire partie ;

c) trois d'entre les hommes n'en feront partie que si leurs épouses en font également partie et il en est ainsi des épouses de ces trois hommes — il est entendu d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire que les trois couples en fassent partie ensemble ou même que l'un d'entre eux en fasse partie.

78. Démontrer que la somme des nombres de n chiffres obtenus en permutant n chiffres de toutes les manières possibles est égale à :

$$(n-1)! \frac{10^n - 1}{9} S \text{ où } S \text{ désigne la somme des } n \text{ chiffres.}$$

79. Démontrer que : $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$

80. Calculer le coefficient de $a^2b^2c^4$ dans $(a+b+c)^9$.

81. Calculer le coefficient de $a^2b^2c^4$ dans $(a+2b+c)^9$.

82. Calculer le coefficient de $a^2b^2c^4$ dans $(3a - 2b + c)^9$.

83. Calculer le coefficient de x^6 dans : $(1+2x+3x^2+4x^3)^5$.

84. Calculer le coefficient de x^8 dans : $(1+2x+2^2x^2+2^3x^3)^5$.

85. Supposons que x soit une quantité suffisamment petite pour que x^2 soit négligeable, ainsi que les puissances supérieures, on demande quelle sera alors la valeur de :

$$\frac{(1 + \frac{2}{3}x)^{-5} + \sqrt{4 + 2x}}{\sqrt{(4 + x)^3}}$$

86. Prouver que si m est premier, chaque coefficient du binôme, sauf les coefficients extrêmes, est un multiple de m .

87. Quelle relation doit exister entre r et n pour que les coefficients du $(r+3)$ ème terme et du $(2r-3)$ ème terme du développement de $(1+x)^{2n}$ soient égaux.

88. Trouver le plus grand terme du développement de $(1+4x)^8$ pour $x = 1/3$

89. Quel est le plus grand terme du développement de : $(1 - \frac{2}{3}x)^{-\frac{5}{2}}$, lorsque $x = 6/7$.

90. Le plus grand terme du développement de $(x+y)^{28}$ lorsque $x = 9, y = 4$

91. Trouver le plus grand terme du développement de : $(2x+3)$, pour $x = 5/2$ et $m = 15$

92. Calculer la somme des produits des coefficients du binôme pris deux à deux.

93. Quatre termes consécutifs du développement du binôme sont : 2916, 4860, 4320, 2160. Quel est ce binôme et quels sont les rangs des termes ?

94. Montrer que $1.2 + 2.3 + 3.4 \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

95. Montrer que : $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 \dots$
 $+ n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

96. Montrer que la somme :
 $1.2.3 \dots p + 2.3.4 \dots (p+1) + 3.4.5 \dots (p+2) + \dots$
 $n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1) = \frac{(n+p)(n+p-1) \dots n}{(p+1)}$

97. Développer : $\frac{3+x}{3-x}$ suivant les puissances croissantes de x et définir les valeurs pour lesquelles le développement conduit à une véritable identité entre la série obtenue et l'expression donnée.

98. étudier la série :

$$x - x^{-1} + x^2 - x^{-2} + x^3 - x^{-3} + x^4 - x^{-4} \dots \quad S.O$$

99. Étudier la série : $2x + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{9} + \frac{5x^4}{16} \dots$

100. Étudier la série : $1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3!} + \frac{4^p}{4!} \dots \quad S.D$

101. Étudier la série dont le terme général est :
 $u_n = \sqrt[n]{n^3 + 1} - n$

102. Étudier la série :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{4^4}{5^5} + \dots$$

103. Étudier la série :

$$1 + \frac{1 \cdot x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots$$

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (4n-7) \cdot x^{2(n-1)}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 4(n-1)}$$

104. Étudier la série :

$${}^2\sqrt{10} - {}^3\sqrt{10} + {}^4\sqrt{10} - {}^5\sqrt{10} + {}^6\sqrt{10} -$$

et $({}^2\sqrt{10} - {}^3\sqrt{10}) + ({}^4\sqrt{10} - {}^5\sqrt{10}) + ({}^6\sqrt{10} - {}^7\sqrt{10})$

105. Démontrer que la somme à l'infini de la série :

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

est $\frac{3}{4}$

106. Calculer :

$$\begin{vmatrix} b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ac & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}$$

107. Exprimer sous forme d'un seul déterminant la somme algébrique des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

 108. Calculer le déterminant suivant sachant que ω est l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité :

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

109. Mettre le déterminant sous la forme d'un produit .

$$\begin{vmatrix} x+z & y & z \\ x^2+z^2 & y^2 & z^2 \\ yz+xy & zx & xy \end{vmatrix}$$

 110. Résoudre : $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$

 111. Résoudre : $5^{2x} \cdot 7^{2y} = 9156$

$$3^x \cdot 11^y = 3497$$

112. Montrer que :

$$\log_e (1+3x+2x^2) = 3x - \frac{5x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} - \frac{17x^4}{4} \dots$$

113. Montrer que :

$$2\left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \dots\right) = e^{-1}$$

114. Calculer :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots$$

115. Trouver la vraie valeur de :

$$\sqrt[n]{\frac{10^n - 1}{(n-1)!}}, \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

 116. On demande le logarithme de 2 : $\log_e 2 = 0.693147\dots$

 117. Calculer le logarithme de 17 et le logarithme de $\sqrt{17}$.

 118. Résoudre : $x^4 + y^4 = 641$; $2\log x + 2\log y = 2$.

 119. Résoudre : $\log_e (x/b) - ab = \log_e C$.

120. Quel est le logarithme de : .0625 dans la base 2 ?

121. Quel est le logarithme de : $\sqrt[3]{a^{-1/5}}$ dans la base a .

122. Montrer que : $\log \sqrt[4]{729} \sqrt[3]{9^{-1} 27^{-1/3}} = \log 3$.

123. Montrer que : $\log 75/16 - 2 \log 5/9 + \log 32/243 = \log$.

124. Résoudre : $a^{2x} \cdot b^{3y} = m^5$

$$a^{3x} \cdot b^{2y} = m^{10}.$$

125. Résoudre : $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = (a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$.

126. Démontrer que : $\log_e \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \log_e \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

127. Résoudre : $x^{\log x^9} = x - 1$

128. Résoudre : $\log_x 5 = \log_5 x$

129. Résoudre : $2 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} + 3^x - 2 = 0$.

130. Résoudre : $\log (35 - x^2) = 3 \log (5 - x)$.

131. Résoudre : $x^6 + \log x = 0.24^9 (3 \log 2 + \log 3)$.

132. Résoudre : $7^x = 2y$; $2^x = 7y$

133. Résoudre : $5^{\frac{x}{7}} = 7^{\frac{x}{5}}$.

134. Résoudre : $17^{x+1/x-1} = 71^{x-1/x+1}$.

135. Calculer la limite de $(e^x + x)^{1/x}$, quand x tend vers 0.

136. Résoudre : $x^4 = -8 - 8i$ et mettre les racines sous la forme : $a + bi$.

137. Calculer : $\sqrt[3]{-1}$.

138. Résoudre : $x^4 + 4 - 3i = 0$.

139. Résoudre algébriquement : $x^2 = 7 + 6i\sqrt{2}$.

140. Calculer les racines cubiques des nombres :

$$8, \quad -8, \quad 8i, \quad -8i.$$

141. Résoudre : $x^{11} + i = 0$.

142. Calculer $\sin 5x$ et $\cos 5x$ par la formule de Moivre.

143. Conditions pour que l'équation : $x^2 + (a+bi)x + a' + b'i = 0$. admette : 1) Deux racines opposées ; 2) Deux racines imaginaires conjuguées ; 3) Deux racines égales ; 4) Deux racines réelles ; 5) Deux racines imaginaires pures ; 6) Une racine nulle ; 7) Une racine imaginaire pure.

144. Montrer que le produit des $2n$ facteurs :

$$(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)(1-x^8+x^{16}) \dots \text{est } 2^{2^n}$$

lorsque x est l'une des racines imaginaires de l'unité.

145. Multiplier géométriquement : $(2+i)(1+2i)$.

146. Si les nombres p et p' sont réels on demande de déterminer des nombres réels q et q' tels que :

$$x^2 + 2(p+ip')x + q + q'i = 0.$$

ait deux racines égales.

147. Si a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels quelle est la condition nécessaire pour que l'équation :

$$(a+ai')x^2 + (b+bi')x + c + ci' = 0.$$

ait une racine réelle ? Pour que les deux racines soient réelles.

148. Les racines de l'équation : $x^3 - px^2 + qx - r$ sont a, b et c . On demande la valeur de : $(b+c)(c+a)(a+b)$.

149. On demande quelle est la largeur d'une rue sachant que deux échelles l'une de 30 pi et l'autre de 40pi appuyées en sens inverses sur les maisons les pieds, étant de 18 l'autre côté de la rue se rencontrent à 10 pieds au-dessus de la chaussée.

150. La distance de deux roues est : $OO' = 30$ pieds. Le rayon de la roue principale est : $OA = 5$ pieds. On demande le rayon de la petite roue sachant que la longueur totale de la courroie est de 90 pieds.

151. Trouver un nombre x tel que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Ce problème est curieux car il fut proposé à Léonard de Pise en 1225. au cours d'un défi mathématique.

152. Résoudre le système :

$$\begin{aligned} x^x + y &= y^4 \\ y^x + y &= x \end{aligned}$$

153. Un vase hémisphérique est à moitié rempli d'eau. On place en équilibre sur le fond du vase un cylindre de deux pouces de diamètre. On demande la hauteur de ce cylindre sachant que le niveau de l'eau est alors dans le même plan que la base supérieure du cylindre. Le rayon de la sphère est de six pouces.

154. Quelles sont les quatre racines de l'équation :

$$3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0.$$

155. L'une des racines de l'équation : $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ est i quelles sont les trois autres.

156. Soit l'équation : $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$; montrer que la somme des 4èmes puissances de ses racines est 10.

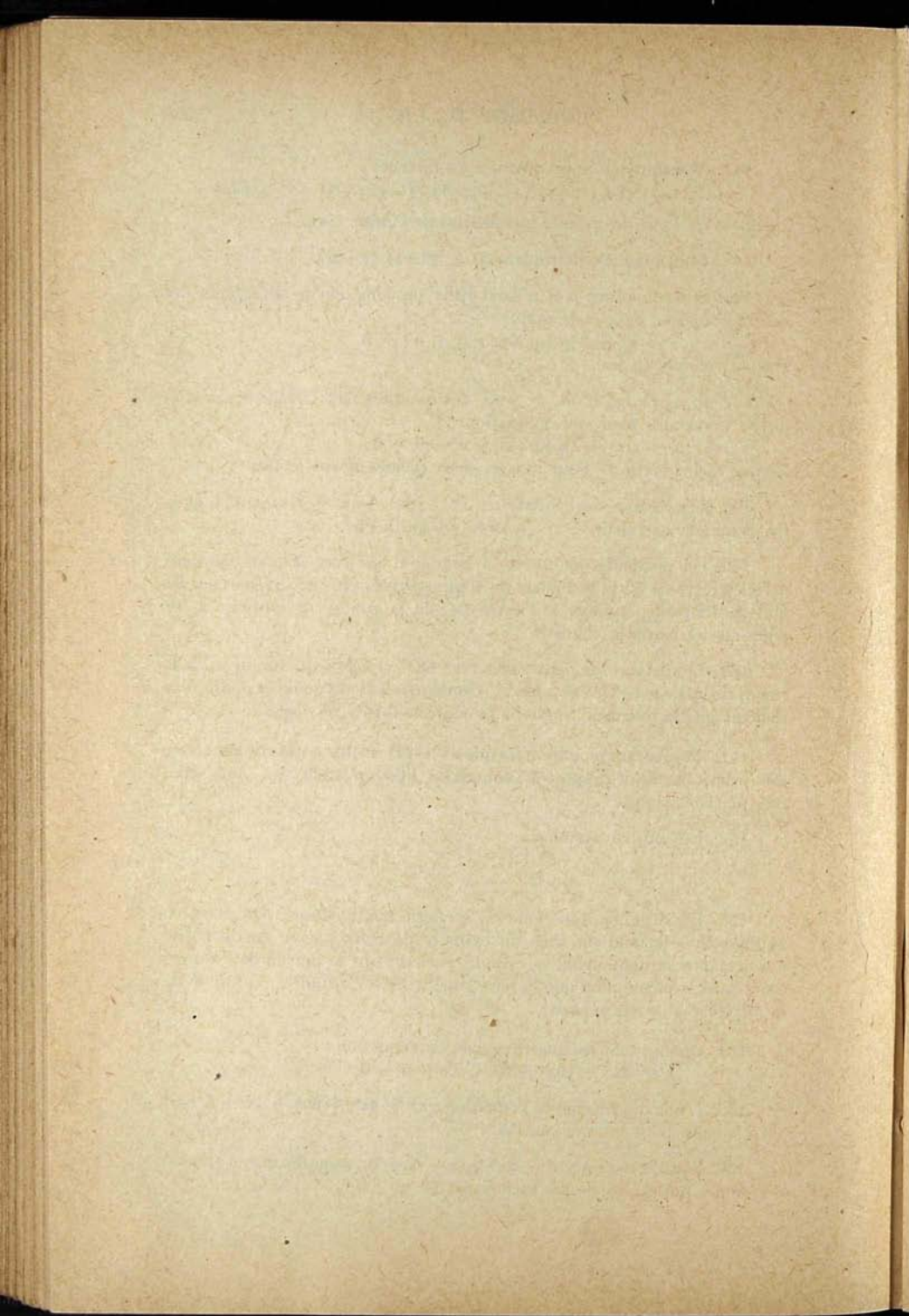


TABLE ALPHABÉTIQUE

Les numéros sont ceux des paragraphes.

Analyse indéterminée.....	109-122	Déterminants algébriques	218
deux équations à trois in-		Différentiel (calcul)	305-344
connues	118	Différentielle	314
du second degré	119-122	Divisibilité par $(x-a)$	23-36
Analyse combinatoire.....	1221-50	Droite (construction)	66
diophantine	109	équation	227
Approximations (méthodes) ..	346-348	E: série e	251-259
en « spirale »	348-350	e, nombre	255
Arrangements	123, 125-128	Duhamel et Raabe, règle de ..	184.5
avec répétitions	146-148		
Asymptotes	333	Équations à deux inconnues ..	225
Binôme (équation)	302	homogènes	223-225
Binôme de Newton	157-171	incompatibles	221
calcul des racines	170	résolues par déterminants ..	220
		troisième degré	222, 351-371
		quatrième degré	371
Calcul graphique	67	numériques	344-351
des intégrales	387-389	Solution trigonométrique	370
système du premier degré ..	68-69	Espérance mathématique	153
équations du second degré ..	70-72	Exponentielle fonction	229-238
inégalités à deux inconnues,	97-97'		
Cardan	360	Factorielle, sa valeur approchée	130
Cauchy (règle de)	183	Fonction (notion)	305
Cauchy biographie	185	circulaires	336-342
Coefficients indéterminés ..	11-12	continues	235-306
Combinaisons	123, 131-141	discontinues	308
avec répétitions	148-150	de fonctions	319
Concavité d'une courbe	330	implicites	342
Courbes: construction,	63-74	indéterminées	51-63
332-335-343		Formes indéterminées	50-63
équation par déterminants ..	228	géométrique des imagin.	280-297
expérimentale	335	Fractions rationnelles	15-21
D'Alembert (règle de)	180		
Dérivée (notion)	309, 311, 313	Harmonique (série)	191
propriétés	336		
seconde	329	Imaginaires	261-305
Dés, (problème des)	155-157	nombres	281
Descartes (Équation 4e degré)		Indéterminés (problèmes) ..	109-122
371-373		Induction mathématique	21-22
Déterminants	195-229	Inégalités	74-90
note sur	195	Infini (notion)	44
		Infiniment grand	43

Infiniment petit	42	Pente	312
Inflexion (point d')	331	Permutations	123, 128-131
Intégral, calcul	373-389	circulaires	141-144
Intégrale définie	379-382	avec répétitions	144-146
Intégration	382-387	Point décimal	130
Jeu équitable	153	Polynômes entiers etc	1-10
Limite : somme, produit, quotient	41-50	Polynôme, puissance d'un	171
Logarithmes	239-261	Primitive (fonction)	374
népériens	438, 248-251	Probabilités, calcul	150-157
népériens et log. vulgaire	249	Racines cubiques de l'unité, 278-355 incommensurables	345
calcul des log. vulgaires	260	Radians	59
calcul des log. vulgaires	260	Récurrence, loi de	21, 159
série	260	Règles de d'Alembert, de Cauchy	180, 183
Maximum	327	Seconde (arc d'une)	432
Minimum	328	Séries	171-195
Minute (arc d'une)	432	Stirling (formule)	130
Moivre (formule de)	297-305	Systèmes de logarithmes	242-244
Newton, binôme de	157-171	TABLE ALPHABÉTIQUE	340
série de	194	Tartaglia	363
formule de	347	Viète	347
Nomdre de d'Alembert, be Cauchy	185		

RÈGLE À CALCUL - RÉPONSES

§(398) 342	2. 1813	3. 425	4. 814	5. 980
6. 858	7. 2025	8. 891	9. 315	10. 104.03
11. 1.275	12. 93.73	13. 792	14. 442	15. 1088
16. 2.337	17. 3.815	18. 52.43	19. 89.04	20. 2.193

§(399) 1. 2961	2. 1665	3. 4408	4. 1008	5. 2242
6. 3864	7. 1632	8. 1914	9. 594	10. 598
11. 1666	12. 1551	13. 306	14. 2418	15. 493
16. 3634	17. 2508	18. 522	19. 3572	20. 756
21. 2812	22. 2849	23. 1395	24. 3696	25. 5472

16—1

(400)	98140	5702	342.9	77256	83.97	4677	199600
	32710	1901	114.3	25752	27.99	1559	66560
	16770	974	58.6	13200	14.34	799.1	34100
	13720	797.5	47.96	10805	11.74	654.2	27930
2.	885.1	3.	2.784	4.	.0772		

16—2

(401)	2.361	4.422	.9383	.4581	2.652		
	1.634	3.061	.6494	.3171	1.885		
	1.123	2.104	.4464	.2180	1.262		
	5.203	9.747	2.068	1.0095	5.844		
2.	1.232	3.	2.37	4.	2.662×10555	5.	.0001145

§(404)	1. 31.13	2. 31.26	3. 0.0007015	4. 597.24	5. 35 950
--------	----------	----------	--------------	-----------	-----------

§(405)	1. 2.04	2. 18.83	3. 2.43	4. 0.745	5. 1.318
	6. 1.123	7. 0.0943	8. 0.378	9. 0.471	10. 1.326
	11. 0.396	12. 0.0396			

§(407)	1. 168	2. 17748	3. 85.73	4. 16.8	5. 55 440
	6. 103.35	7. 219	8. 180.32	9. 54.49	10. 127.9

16—3

(409)	1. .01678	2. 445 800	3. 4.602	4. 12.35
	5. .02614	6. .05	7. .02143	8. 3
	9. 4.5	10. 4	11. 7	12. .5
	13. 2	14. 2	15. 3	

16—4

(412)	1. 73.6	2. 12.3	3. 25.4	4. 232.2	5. 2.344
	6. 61	7. 1496	8. 678	9. 165.5	10. 103.
	11. 186500	12. .405, 2.708, 5.01, 7.32			

16—5

(414)	1.	4.123	2.	13.04	3.	52.2	4.	16.52	5.	28.1
	6.	93.75	7.	25.18	8.	251.8	9.	796.2	10.	.00754
	11.	.02382	12.	.0753		.029	14.	.092		

16—6

(415)	1)	1833	1269	834	1029	477
		692.2	479.2	315	388.4	180.1
		309.3	214.1	140.7	173.6	80.5
		717	496.4	326.3	402.4	186.6
(415)	2)	16.2	.748	162.4	2.369	.188
		15.88	.733	159	2.32	.1841
		5.02	.2316	50.3	7.335	.0582
§(415)	3.	.002857	4.	.465	5.	.0206
	7.	14.85	8.	1.333	9.	.0833
					10.	13.11

16—7

(416)	1.	5.47	2.	547	3.	53	4.	1.189
	5.	38.9	6.	.0000137	7.	.00624	8.	000 000 224
	9.	.581	10.	.389	11.	.00000479	12.	000 000 032

16—8

(419)	1.	6.89	2.	14.85	3.	31.96	4.	1.196
	5.	2.576	6.	5.55	7.	3.07	8.	7.32
	9.	7.76	10.	132.6	11.	4.53	12.	175.1
	13.	4913	14.	5832	15.	10648	16.	13824
	17.	778.7	18.	658.5	19.	2.78;	72.7	

16—9

(420)	1.	1.60	2.	21.7	3.	103.6	4.	564
	5.	.930	6.	.01332	7.	.000 007 3		
	8.	.000 000 0772						

16—10

(422)	48.6	137.4	36.2	141.1
	32.35	91.6	24.15	94.1
	28.3	80.36	21.15	82.6

16—11

(424)	1.	1680	2.	25
	3.	22.9	52.55	34.05
	4.	53.84	120	91.6
	5.	33.8	60	123.4
			33	65
			3.78	304.2
			150.4	3.398
			215.4	.000105
			962	.224

16 — 12

(425)	1. 2.5302	2. 1.5302	3. (-2) .4377	4. .2526
	5. (-3) .2526	6. 3.2526	7. .002751	8. 2.687
	9. 4.4	10. .15820	11. 2322	12. .373
		13. 333	14. .00379	

16 — 13

(427)	1. .5	2. .669	3. .799	4. .966
	5. .985	6. .996	7. .174	8. .0872
	9. .0262	10. .0131	11. .0113	

16 — 14

(428)	1. Mêmes réponses que dans 427.
-------	---------------------------------

16 — 15

(429)	1. 34'	2. 1°9'	3. 4°18'	4. 5°34'
	5. 6°43'	6. 15°58'	7. 42°41'	8. 64°10'
	9. 89°26'	10. 88°51'	11. 85°42'	12. 84°26'
	13. 83°17'	14. 74°2'	15. 47°19'	16. 25°50'

16 — 16

(430)	1. 10.39	2. 250	3. 575	4. 45.96
	5. 2363	6. 664	7. 469	8. 47.324

16 — 17

(432)	1. .0084	2. .000 136	3. .0086	4. .0116
		5. .0029	6. .000 0581	

19 — 18

(433)	1. .268	2. .700	3. 1.072	4. 1.192	5. .839
	6. .466	7. .213	8. .1405	9. .0437	10. .0588
	11. .072	12. .0087	13. .0055		

16 — 19

(434)	1. 5°43'	2. 11°19'	3. 16°42'	4. 28°49'
	5. 33°2'	6. 35°45'	7. 46°24'	8. 48°59'
	9. 64°45'	10. 76°52'	11. 87°43'	12. 88°52'
	13. 1°9'	14. 41''	15. 11'' 5	

16 — 20

(435)	1. 262	2. 9.56	3. .00227	4. 4.185	5. 14.85
	6. 352	7. 131	8. 2.97	9. 28.4	10. 93.23
	11. .505	12. .2185	13. .0583	14. 5	15. 51.15
	16. 19.6	17. .3225	18. 19.05		

(435)	1.	67°22'	2.	112°37'
	3.	38°53',	126°52',	14°15'
	4.	16°26',	30°24',	133°10'

16 — 21

(439)	1.	3.912	2.	.993	3.	.017	4.	5.298	5.	.039
	6.	.204	7.	0.392	8.	0.0531	9.	0.061		

16 — 22

(442)	1.	2.701	2.	3.055	3.	3.437	4.	3.386
	5.	1.398	6.	1.948	7.	5.943	8.	13.660
	9.	13.764	10.	2.267	11.	815	12.	20.400
	13.	195	14.	30.4	15.	7900	16.	40 800
	17.	516 000	18.	81 900				

16 — 23

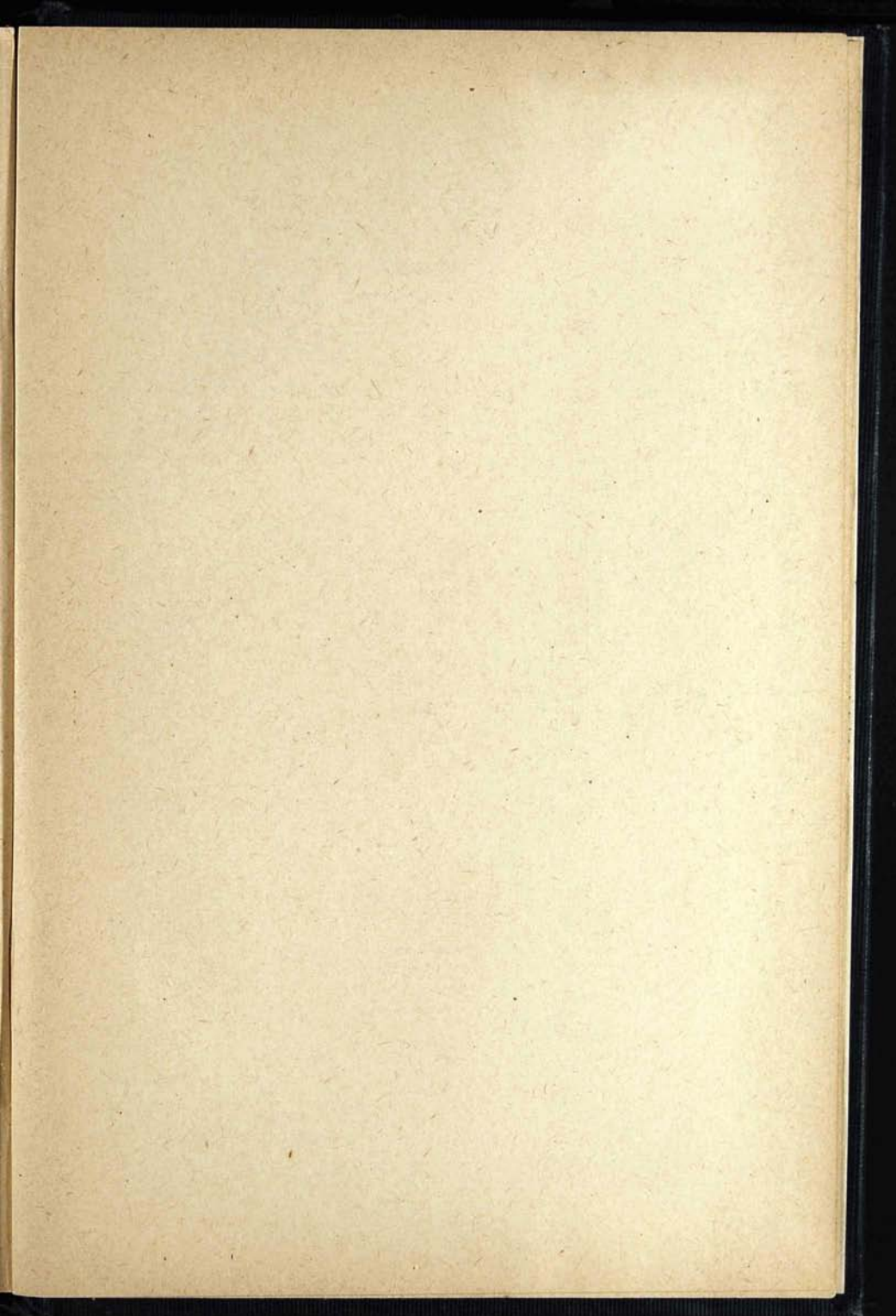
(443)	1.	1.763	2.	1.33	3.	1.0834	4.	1.1402
	5.	1.169	6.	1.0474	7.	1.0469	8.	1.02785
	9.	1.0257	10.	1.02275	11.	1.99	12.	1.231
			13.	0.056	14.	211		

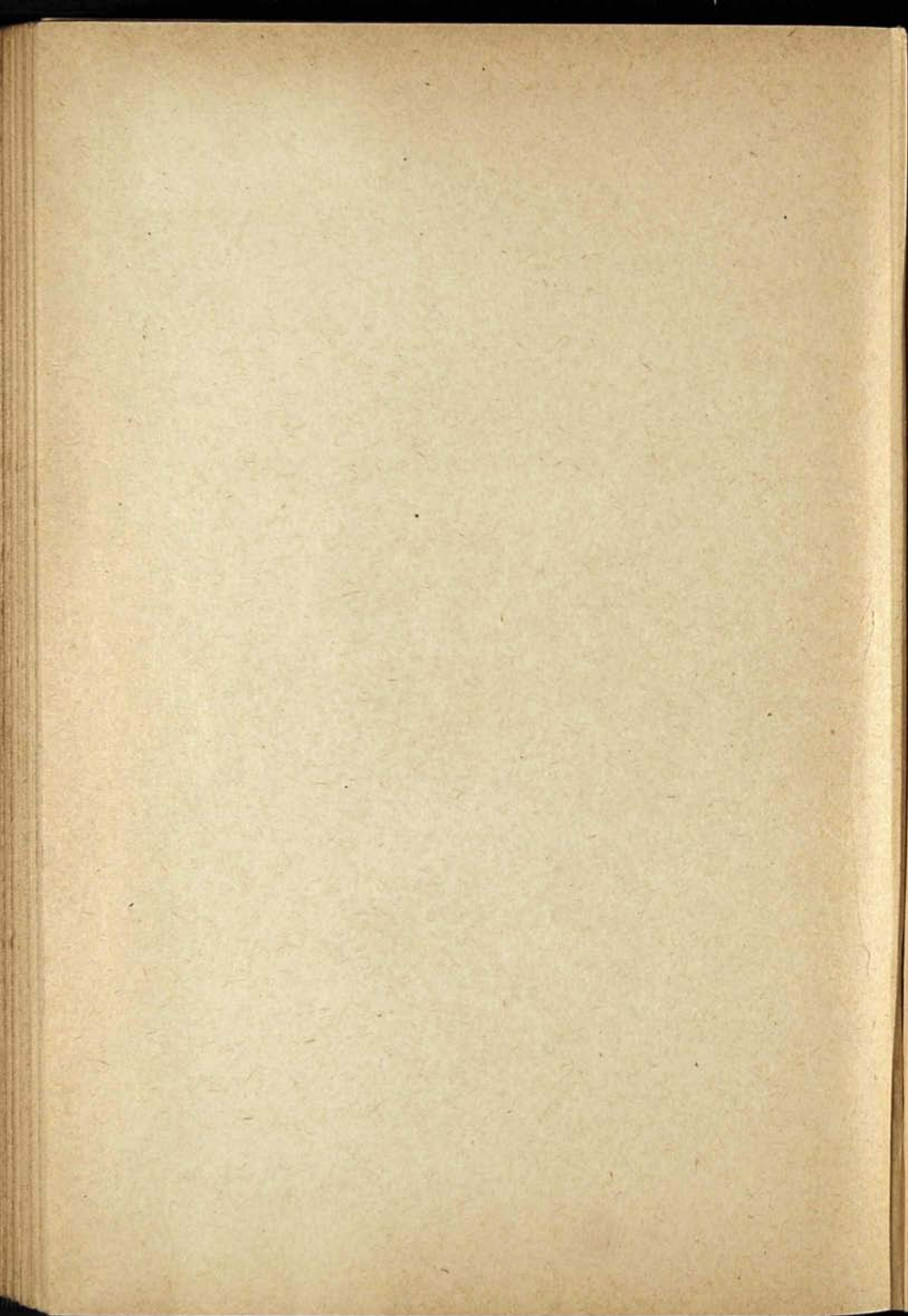
16 — 24

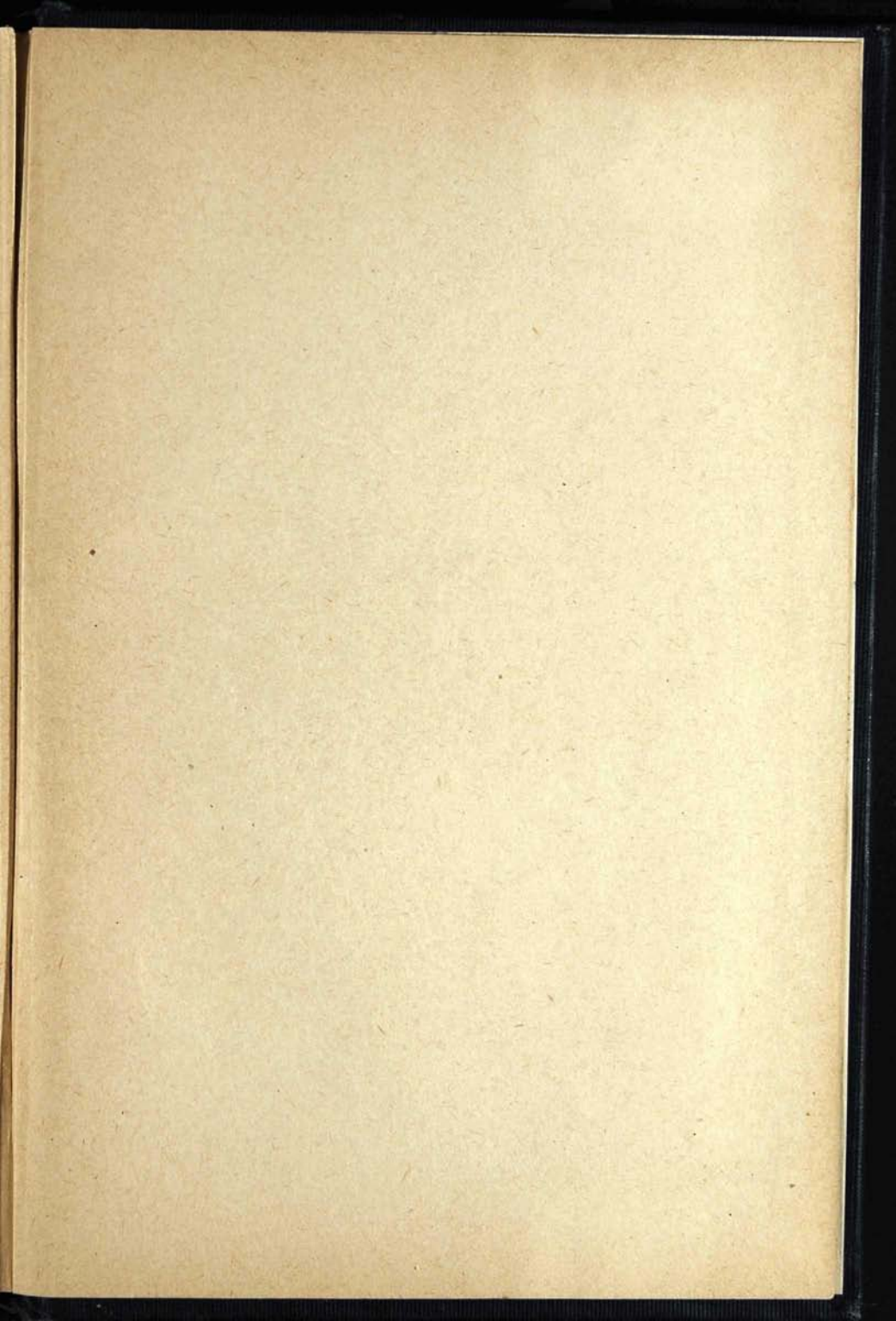
(445)	1.	1.32, -5.32	2.	3.4	3.	2, 7
	4.	5, 150	5.	-15, -50	6.	60, 5
			8.	20, 80		

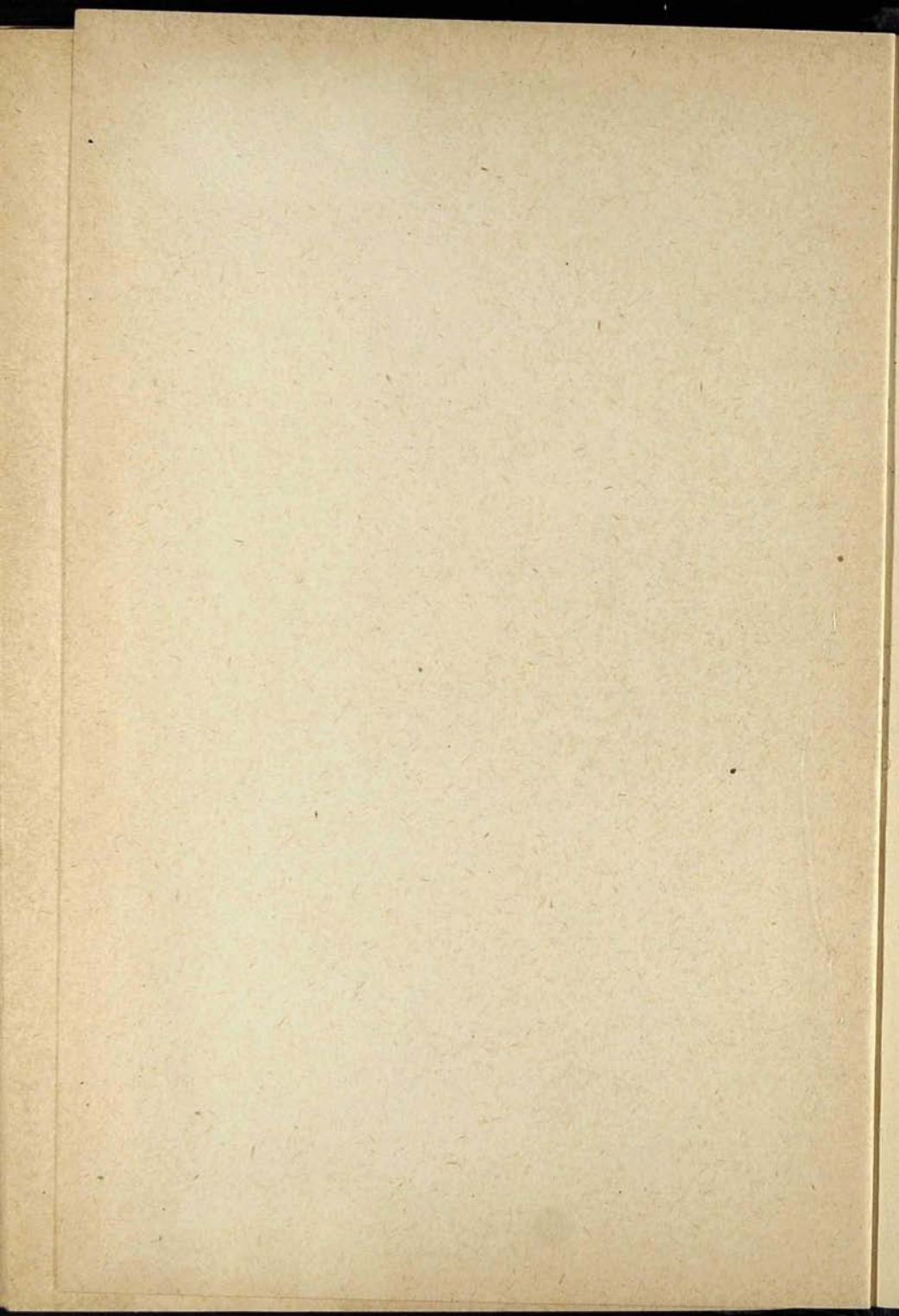
16 — 25

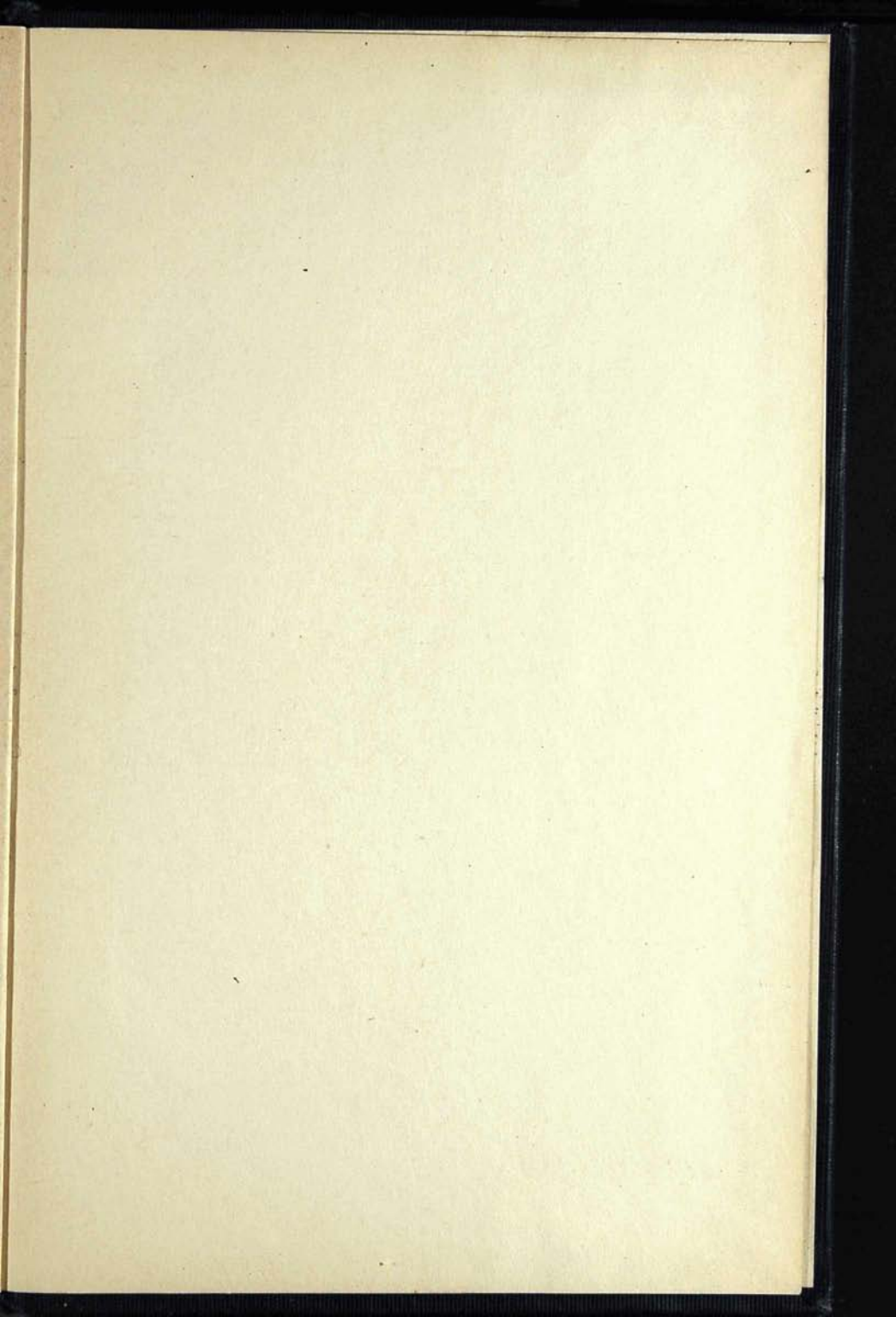
(446)	1.	6	2.	7	3.	2.094	4.	5.408	5.	-1.279
			6.	-1.891	7.	-0.282	8.	2.49		











$$\frac{3^n - 3}{2}$$

si n = nombre de pesées, on a le nombre de poids que l'on peut différencier en n pesées.

510,

BNQ



C 000 349 133