

$$P'(t) = \frac{r}{k} P(t)(b - P(t))$$

$$V_{AE,ik} = \beta_1 d h p_{ik}^{\beta_2} H_{ik}^{\beta_3} + \varepsilon_{2,ik}$$



Équations de défilement en forêt naturelle pour les principales essences commerciales du Québec

par Robert Schneider, Mathieu Fortin et Jean-Pierre Saucier

MÉMOIRE DE RECHERCHE FORESTIÈRE N° 167

DIRECTION DE LA RECHERCHE FORESTIÈRE

VERSION CORRIGÉE JANVIER 2014

Équations de défilement en forêt naturelle pour les principales essences commerciales du Québec

par Robert Schneider, M. Sc., *Ph. D.*, Mathieu Fortin, *Ph. D.*
et Jean-Pierre Saucier, ing.f., Dr. Sc.

MÉMOIRE DE RECHERCHE FORESTIÈRE N° 167

DIRECTION DE LA RECHERCHE FORESTIÈRE

Mandat de la DRF

La Direction de la recherche forestière a pour mandat de participer activement à l'orientation de la recherche et à l'amélioration de la pratique forestière au Québec, dans un contexte d'aménagement forestier durable, en réalisant des travaux de recherche scientifique appliquée. Elle développe de nouvelles connaissances, du savoir-faire et du matériel biologique et contribue à leur diffusion ou leur intégration au domaine de la pratique. Elle subventionne aussi des recherches en milieu universitaire, le plus souvent dans des créneaux complémentaires à ses propres travaux.

Les mémoires de recherche forestière de la DRF

Depuis 1970, chacun des Mémoires de recherche forestière de la DRF est révisé par au moins trois pairs indépendants. Cette publication est produite et diffusée à même les budgets de recherche et de développement, comme autant d'étapes essentielles à la réalisation d'un projet ou d'une expérience. Ce document à tirage limité est également disponible dans notre site Internet en format pdf.

Vous pouvez adresser vos demandes à :

Ministère des Ressources naturelles
Direction de la recherche forestière
2700, rue Einstein, Québec (Québec)
Canada, G1P 3W8
Courriel : recherche.forestiere@mrn.gouv.qc.ca
Internet : [www.mrn.gouv.qc.ca/forets/
connaissances/recherche](http://www.mrn.gouv.qc.ca/forets/connaissances/recherche)

© Gouvernement du Québec
On peut citer ce texte en indiquant la référence.

Toutes les publications produites par la Direction de la recherche forestière, du ministère des Ressources naturelles, sont protégées par les dispositions de la Loi sur le droit d'auteur, les lois, les politiques et les règlements du Canada, ainsi que par des accords internationaux. Il est interdit de reproduire, même partiellement, ces publications sans l'obtention préalable d'une permission écrite.

ISSN : 1183-3912
ISBN : 978-2-550-66646-2
ISBN (PDF) : 978-2-550-66647-9
F.D.C. 521
L.C. SD 557

Notes biographiques



Avant d'obtenir son diplôme en aménagement et environnement forestiers en 1999, **Robert Schneider** a étudié en chimie à l'Université McGill, où il a gradué en 1994. Il a poursuivi ses études à la maîtrise (M. Sc. en sciences forestières, 2001) et au doctorat (*Ph.D.* en sciences forestières, 2007) à l'Université Laval.

Il y a approfondi la modélisation de la productivité forestière et la qualité du bois. Il a ensuite entrepris un stage postdoctoral à l'Université du Québec à Montréal en modélisation écophysologique, pendant lequel il a réalisé un mandat en modélisation du défilement des arbres pour la Direction de la recherche forestière. Depuis 2010, il est professeur en aménagement et sylviculture à l'Université du Québec à Rimouski. Son programme de recherche se concentre sur la quantification de l'interaction entre l'environnement (climat, sol), la compétition inter- et intra-spécifique et la qualité du bois.



Mathieu Fortin est diplômé de l'Université Laval en aménagement et environnement forestiers depuis 1998. En 2001, le même établissement lui décerne un diplôme de maîtrise ès sciences forestières et, en 2006, il obtient le grade de *Philosophiæ Doctor*. Ses travaux de maîtrise et de doctorat ont surtout porté sur la

modélisation de la croissance forestière ainsi que sur la sylviculture des peuplements mixtes de sapin baumier et d'épinette rouge. Entre 2005 et 2010, il est à l'emploi de la Direction de la recherche forestière à titre de chercheur scientifique. De concert avec Steve Bédard et François Guillemette, il collabore à des travaux qui traitent de la dynamique des peuplements de feuillus après coupe partielle. Entre 2010 et 2012, il occupe un poste d'ingénieur de recherche à l'Institut National de Recherche Agronomique (INRA) de France et travaille principalement sur l'évaluation du bilan carbone des peuplements en fonction de leur sylviculture. Depuis mars 2012, il est enseignant-chercheur à l'Institut AgroParisTech/ENGREF, campus de Nancy, France. Ses projets de recherche portent notamment sur la modélisation de la croissance forestière et sur l'évaluation des incertitudes liées aux prévisions. Mathieu Fortin est membre du Laboratoire d'Étude des Ressources Forêt-Bois (LERFoB), une unité mixte de recherche qui regroupe des chercheurs de l'INRA et de l'AgroParisTech.

Notes biographiques (suite)



Jean-Pierre Saucier, ingénieur forestier, détient un baccalauréat (1984) et une maîtrise en aménagement forestier et sylviculture de l'Université Laval (1992), ainsi qu'un doctorat en sciences forestières de l'École Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts de Nancy, France (1997). À l'emploi du ministère des Ressources naturelles du Québec depuis 1985, il occupe depuis septembre 2008 le poste de Chef du Service de la sylviculture et du rendement des forêts à la Direction de la recherche forestière. Il coordonne le travail des chercheurs dans les domaines de la sylviculture des forêts naturelles et des plantations, du travail forestier et de la modélisation de la croissance forestière. Son expérience de travail couvre les domaines de la classification écologique du territoire, de l'écologie forestière appliquée à la sylviculture et de la modélisation de la croissance et du rendement des forêts.

Remerciements

Les auteurs remercient la Direction de la recherche forestière du ministère des Ressources naturelles pour son soutien financier dans le cadre du projet 112310107, de même que la Direction des inventaires forestiers pour les données. Le support de M. Vincent Laflèche a été bien apprécié, ainsi que celui de Mme Denise Tousignant pour la révision du

texte, de Mmes Sylvie Bourassa, Brigitte Boudreault et Maripierre Jalbert pour la mise en page, et de M. Jean Noël pour la préparation de la carte. Un merci spécial aux lecteurs arbitres et à l'éditrice associée, Mme Josianne DeBlois : leurs commentaires constructifs ont grandement permis d'améliorer le contenu de ce mémoire.

Résumé

Des équations de défilement ont été étalonnées pour les 9 espèces suivantes en employant les données de 13 602 arbres : le bouleau à papier (*Betula papyrifera* Marsh.), l'épinette blanche (*Picea glauca* [Moench] Voss), l'épinette rouge (*Picea rubens* Sarg.), l'épinette noire (*Picea mariana* [Mill.] B.S.P.), le peuplier à grandes dents (*Populus grandidentata* Michx), le peuplier faux-tremble (*Populus tremuloides* Michx), le sapin baumier (*Abies balsamea* [L.] Mill.), le thuya occidental (*Thuja occidentalis* L.) et le pin blanc (*Pinus strobus* L.). Les équations sont basées sur le modèle proposé par SHARMA et ODERWALD (2001) et adapté par SHARMA et ZHANG (2004), dans lequel la forme de l'exposant a été spécifiée selon trois niveaux d'informations : variables à l'échelle du peuplement uniquement (drainage, végétation potentielle, sous-domaine bioclimatique, densité, surface terrière, altitude), variables à l'échelle de l'arbre uniquement (diamètre à hauteur de poitrine, hauteur totale, position dans la tige), et la combi-

naison des variables à l'échelle du peuplement et à l'échelle de l'arbre. Une fonction de variance est aussi proposée pour tenir compte de l'hétéroscédasticité. La variance d'une prédiction augmente avec la taille de l'arbre. Elle varie aussi en fonction de la position dans la tige, avec des valeurs minimales à l'extrémité ainsi qu'à une hauteur de 1,3 m. Le modèle utilisant l'ensemble des variables (arbre et peuplement) obtient les meilleures statistiques d'ajustement chez toutes les espèces à l'exception du pin blanc, pour lequel trop peu d'observations étaient disponibles pour permettre l'étalonnage. Une interprétation reliant les coefficients de défilement aux variables écologiques (drainage, végétation potentielle, sous-domaine bioclimatique) est aussi proposée. Ces nouvelles équations de défilement seront utiles pour le calcul et l'optimisation des produits du bois que l'on peut tirer d'une tige en fonction de la région et de la station d'où elle provient.

Mots clés : Défilement des tiges, coefficient de forme, qualité des tiges.

Abstract

Taper equations were fitted using data from 13 602 stems of the 9 following species: paper birch (Betula papyrifera Marsh.), white spruce (Picea glauca [Moench] Voss), red spruce (Picea rubens Sarg.), black spruce (Picea mariana [Mill.] B.S.P.), large-toothed aspen (Populus grandidentata Michx), trembling aspen (Populus tremuloides Michx), balsam fir (Abies balsamea [L.] Mill.), eastern white cedar (Thuja occidentalis L.) and white pine (Pinus strobus L.). The equations are based on the model proposed by SHARMA et ODERWALD (2001) and adapted by SHARMA et ZHANG (2004), in which the exponent may contain 3 levels of information: stand-level variables only (drainage, potential vegetation, bioclimatic subdomain, density, basal area, altitude), tree-level variables only (diameter at breast height, total height, position along the stem), and the combination of both

stand- and tree-level variables. A variance function is also proposed to account for heteroscedasticity. The variance of a prediction increases with tree size, as well as a function of the location along the stem, with minimum values at the taper end and at a height of 1,3 m. The best fit statistics were found in the model that includes both stand- and tree-level variables, for all species except white pine, for which too few observations were available to allow a proper fit. The authors also propose an interpretation of the relationship between the taper coefficients and ecological variables (drainage, potential vegetation and bioclimatic subdomain). These new taper equations can be useful to calculate and optimize the timber assortment in a particular stem, according to its region and station of origin.

Keywords: Stem taper, shape coefficient, stem quality.

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	viii
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xiii
Liste des annexes	xv
Introduction	1
Chapitre premier – Matériel et méthodes	3
1.1 Données	3
1.2 Modèle de défilement.....	4
1.3 Effets fixes	7
1.4 Fonction de variance et structure de corrélation	8
1.5 Ajustement des modèles.....	8
1.6 Prédiction du diamètre	9
Chapitre deux – Résultats	11
Chapitre trois – Discussion	21
Conclusion	25
Références	27
Annexes	29

Liste des tableaux

Tableau 1. Sommaire des données d'analyses de tiges ayant servi à l'ajustement des modèles de défilement	5
Tableau 2. Nombre d'arbres par espèce en fonction du sous-domaine bioclimatique, de la classe de drainage et la végétation potentielle.....	6
Tableau 3. Valeurs du critère d'information d'Akaike (AIC) par essence pour les différents modèles (R^2 entre parenthèses)	12
Tableau 4. Biais moyen du modèle-arbre par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).....	13
Tableau 5. Biais moyen du modèle-placette par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).....	13
Tableau 6. Biais moyen du modèle complet par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).....	14
Tableau 7. Biais moyens et relatifs des modèles complets calculés à partir des tiges intermédiaires et opprimées de sapin baumier et d'épinette noire n'ayant pas servi à l'étalonnage du modèle	19

Liste des figures

Figure 1.	Carte du Québec méridional montrant la répartition des quelque 1 300 placettes employées pour l'étalonnage et la validation des équations de défilement	3
Figure 2.	Résidus normalisés en fonction des valeurs prédites pour le modèle complet (variables à l'échelle de l'arbre et du peuplement), pour toutes les espèces sauf le pin blanc (modèle arbre seulement)	11
Figure 3.	Histogramme des résidus par essence pour le modèle complet (variables à l'échelle de l'arbre et du peuplement), sauf pour le pin blanc (variables à l'échelle de l'arbre seulement)	12
Figure 4.	Défilement (a) et fonction de variance (b) d'un sapin baumier (dhp = 200 mm, hauteur totale = 20 m, densité = 1500 tiges·ha ⁻¹ , surface terrière = 20 m ² ·ha ⁻¹ , altitude = 300 m, végétation potentielle = MS1, sous-domaine bioclimatique = 3est, drainage = 2) pour le modèle-placette, le modèle-arbre et le modèle complet	16
Figure 5.	Exemple de défilement pour le bouleau à papier (dhp = 20 cm, hauteur totale = 20 m) tel que prédit par le modèle complet, pour les sous-domaines bioclimatiques « est » (regroupant les sous-domaines 2est, 3est, 4est, 5est, 6est et aussi le sous-domaine 2ouest), et « ouest » (regroupant les sous-domaines 3ouest, 4ouest, 5ouest et 6ouest).	17
Figure 6.	Exemple de défilement pour l'épinette blanche (dhp = 20 cm, hauteur totale = 20 m, surface terrière = 15 m ² ·ha ⁻¹ , densité = 1500 tiges·ha ⁻¹ , sous-domaine bioclimatique = 2est) tel que prédit par le modèle complet, pour différents types de végétation potentielle	17
Figure 7.	Résidus (valeurs observées – valeurs prédites) du modèle de défilement du sapin baumier calculé à l'aide des tiges intermédiaires et opprimées	18
Figure 8.	Résidus (valeurs observées – valeurs prédites) du modèle de défilement de l'épinette noire calculé à l'aide des tiges intermédiaires et opprimées	19

Liste des annexes

Annexe 1. Signification des codes des sous-domaines bioclimatiques, des classes de drainage et des végétations potentielles.	29
Annexe 2. Approximation de l'espérance mathématique du diamètre par un développement de Taylor du second degré.	30
Annexe 3. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèses) du modèle-placette (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette}$).	32
Annexe 4. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèses) du modèle-arbre (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_{ij}^{arbre} \boldsymbol{\beta}^{arbre} + \mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position}$).	35
Annexe 5. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèse) du modèle complet (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette} + \mathbf{x}_{ij}^{arbre} \boldsymbol{\beta}^{arbre} + \mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position}$).	37

Introduction

La forme des tiges est souvent étudiée à l'aide des modèles de défilement. En général, ce type de modèle prédit le diamètre sous écorce en tout point le long de la tige, à partir de variables explicatives telles que le diamètre à hauteur de poitrine (dhp, c'est-à-dire le diamètre du tronc à une hauteur de 1,3 m) et la hauteur totale de l'arbre. En intégrant les surfaces des sections entre deux points donnés le long de la tige, il est possible d'obtenir une estimation du volume d'un tronçon de l'arbre. Les modèles de défilement permettent donc d'estimer le volume d'un arbre pour n'importe quelle hauteur de souche et n'importe quel diamètre minimal d'utilisation (KOZAK 1988). C'est pour cette raison que ces modèles attirent davantage l'attention des dendrométriciens, comparativement aux traditionnels tarifs de cubage qui ne permettent d'estimer que le volume total ou marchand de la tige.

Plusieurs formes mathématiques ont été proposées dans la littérature : modèles segmentés, à forme variable et à exposant variable (KOZAK 1988, MUHAIRWE 1994, VALENTINE et GREGOIRE 2001, GARBER et MAGUIRE 2003, LEJEUNE *et al.* 2009, SHARMA et PARTON 2009). La comparaison de la performance de ces différentes formes mathématiques a aussi fait l'objet de publications (SHARMA et ZHANG 2004, LI et WEISKITTEL 2010). Parfois, ces modèles incorporent des variables qui influencent le défilement, telles que la densité du peuplement (SHARMA et PARTON 2009) ou des métriques de cime (MUHAIRWE 1994). Toutefois, jusqu'à présent, très peu d'études ont intégré des variables du milieu biophysique dans les modèles de défilement. À notre connaissance, l'étude de HUANG *et al.* (1999) constitue l'un des rares exemples où des variables de ce type ont été prises en compte lors de l'ajustement de modèles de défilement.

LARSON (1963) a élaboré différentes théories pour expliquer le changement de forme chez les arbres, et a émis l'hypothèse que la cime détermine en bonne partie la forme de la tige : un arbre avec une cime plus longue aura un défilement plus important. Les

peuplements plus denses contiendront des arbres avec des cimes plus courtes (HANN et HANUS 2004), et donc, au défilement moins important. Par ailleurs, d'autres facteurs tels que la position sociale, la fertilité et l'âge de l'arbre sont susceptibles d'influencer le défilement (MORRIS et PARKER 1992, MUHAIRWE 1994, SHARMA et PARTON 2009, WEISKITTEL *et al.* 2009). À l'échelle de la placette, des facteurs climatiques comme le vent pourraient également agir sur la croissance en hauteur des arbres et l'indice de fertilité (WATT *et al.* 2010) et par le fait même, sur leur défilement.

Il est difficile de prendre en compte l'ensemble des variables mentionnées dans un seul modèle de défilement en raison de leur nombre, mais aussi de leur échelle de mesure. En effet, certains de ces facteurs, particulièrement ceux qui se rapportent à la placette, peuvent être difficiles à discerner lorsque les observations ne couvrent qu'une partie de territoire, ou lorsque les arbres étudiés sont issus d'un contexte très spécifique du point de vue de l'âge et de la structure de peuplement.

Cette étude bénéficie d'une base de données de grande envergure, dont les observations couvrent l'ensemble de la forêt québécoise. Par son étendue et son nombre d'observations, cette base de données permettrait de mesurer l'effet de certains facteurs mesurés à l'échelle de la placette. Nous proposons donc (i) d'adapter un modèle existant, soit celui de SHARMA et ODERWALD (2001) et SHARMA et ZHANG (2004), (ii) de l'ajuster à neuf des principales essences québécoises et (iii) de tester l'effet de variables explicatives mesurées à l'échelle de l'arbre et de la placette. Pour ce faire, nous utilisons une approche de modélisation non linéaire à effets mixtes. En plus de l'ajout d'effets aléatoires dans le modèle, nous proposons une nouvelle forme de fonction de variance, afin de prendre en compte l'hétérogénéité de la variance tout le long du fût de l'arbre. Finalement, une interprétation novatrice des coefficients des paramètres biophysiques est mise de l'avant.

Chapitre premier

Matériel et méthodes

1.1 Données

Au total, neuf espèces ont été prises en compte dans la modélisation du défilement. Elles comptent parmi les plus importantes de la forêt mélangée et de la forêt résineuse : le bouleau à papier (*Betula papyrifera* Marsh.), l'épinette blanche (*Picea glauca* [Moench] Voss), l'épinette noire (*Picea mariana* [Mill.] B.S.P), l'épinette rouge (*Picea rubens* Sarg.), le peuplier à grandes dents (*Populus grandidentata* Michx), le peuplier faux-tremble (*Populus tremuloides* Michx), le pin blanc (*Pinus strobus* L.), le sapin baumier (*Abies balsamea* [L.] Mill.) et le thuya occidental (*Thuja occidentalis* L.).

Les modèles de défilement présentés dans cette étude ont été ajustés à l'aide des diamètres de tronc pris sur des tiges ayant fait l'objet d'analyses de tiges. Ces données proviennent d'un programme provincial d'acquisition de données de croissance, dont l'objectif initial était d'estimer les indices de qualité

de station (IQS) des essences commerciales des principaux types écologiques. Ces analyses de tiges ont été faites conformément aux normes établies conjointement par la Direction des inventaires forestiers et la Direction de la recherche forestière du ministère des Ressources naturelles et de la Faune du Québec (MRNF 2009). Les paragraphes suivants décrivent les modalités de récolte des données.

Entre 1999 et 2007, le plan d'échantillonnage a couvert la presque totalité des régions écologiques de la forêt commerciale québécoise, du domaine bioclimatique de l'érablière à tilleul à celui de la pessière à mousses (Figure 1). Dans chaque région écologique, les cinq types écologiques occupant les superficies les plus importantes ont d'abord été identifiés. Au moins cinq placettes circulaires de 400 m² ont ensuite été établies sur chacun de ces types écologiques.

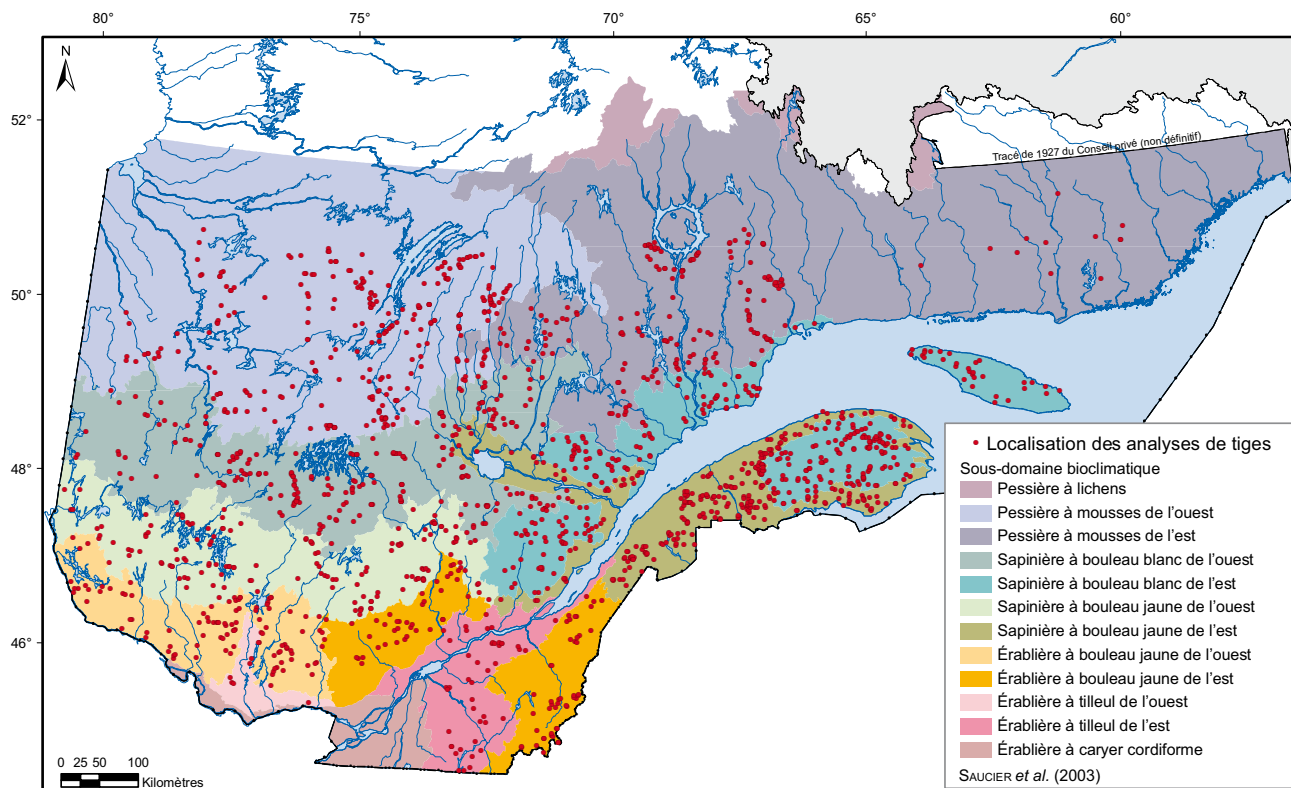


Figure 1. Carte du Québec méridional montrant la répartition des quelque 1300 placettes employées pour l'étalonnage et la validation des équations de défilement.

La composition du couvert arborescent, la hauteur dominante, ainsi que d'autres caractéristiques stationnelles telles que l'exposition, la pente, le dépôt de surface et le type d'humus, ont été évaluées visuellement sur un rayon de 25 m à partir du centre de la placette. À l'intérieur de celle-ci, tous les arbres dont le dhp était plus grand ou égal à 9,1 cm ont été mesurés afin d'évaluer la surface terrière et la densité de tiges marchandes. Un peu plus de 1 300 placettes ont été ainsi établies.

Le choix des arbres-études devant faire l'objet d'analyses de tiges s'est basé sur les critères suivants :

- l'arbre doit appartenir à l'une des espèces dominantes du type écologique;
- l'arbre doit se situer à moins de 25 m du centre de la placette, dans le même type écologique;
- il doit être dominant ou codominant;
- il doit n'avoir qu'une seule tête;
- l'arbre ne doit pas être carié;
- la souche doit être le plus symétrique possible;
- le tronc doit être le plus droit possible.

Parmi les arbres répondant à ces critères, ceux dont le diamètre comptait parmi les plus gros ont été sélectionnés de préférence. En moyenne, de 5 à 10 tiges ont été sélectionnées dans chaque placette, pour un total de 13 602 analyses de tiges.

Afin de s'assurer que l'utilisation des arbres dominants et codominants n'entraînait pas de biais dans l'évaluation du défilement, un échantillon supplémentaire de tiges opprimées et intermédiaires de sapin baumier (116 intermédiaires, 14 opprimées) et d'épinette noire (113 intermédiaires, 17 opprimées) a été récolté spécifiquement pour la présente étude dans 61 placettes déjà échantillonnées pour les tiges dominantes et codominantes (Figure 1). Ces placettes étaient situées dans les régions écologiques Collines des moyennes Appalaches (4f), Collines du Haut-Saint-Maurice (5c) et Coteaux de la rivière Nestaocano (6e).

Lors des analyses de tiges, l'espèce et le dhp ont été d'abord notés. Une fois l'arbre abattu, sa longueur et la longueur de sa cime ont été mesurées. Des rondelles ont ensuite été prélevées à 0,15, 0,60, 1,00, 1,30, 3,00 et 5,00 m, puis à tous les 2,00 m jusqu'à l'apex de l'arbre. Le diamètre de chaque rondelle a été mesuré au ruban diamétrique, et l'épaisseur de l'écorce a été mesurée en quatre points.

Les tableaux 1 et 2 présentent un sommaire des analyses de tiges ayant servi à l'ajustement de ces modèles de défilement.

1.2 Modèle de défilement

Le modèle de défilement proposé dans cette étude repose sur celui mis au point par SHARMA et ODERWALD (2001) et modifié par SHARMA et ZHANG (2004) pour faire varier l'exposant selon la position dans l'arbre (Équation 1).

$$d_{ijk}^2 = (\alpha + b_{i,1} + b_{ij,1}) \times D_{ij}^2 \times \left(\frac{H_{ij} - h_{ijk}}{H_{ij} - 1,3} \right) \times \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right)^{2 - (\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} + b_{i,2} + b_{ij,2})} + \varepsilon_{ijk} \quad [1]$$

pour $i = 1, 2, \dots, q$; $j = 1, 2, \dots, n_i$ et $k = 1, 2, \dots, o_{ij}$

où

d_{ijk}^2 est le diamètre sous écorce mis au carré (mm²), à une hauteur h_{ijk} (m), pour la section k de l'arbre j de la placette i ,

α est un paramètre inconnu destiné à prendre en compte l'épaisseur de l'écorce,

$b_{i,1}$ et $b_{i,2}$ sont des effets aléatoires de placette, où

$$\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, b_{i,2})^T \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{G}_{placette}),$$

$$\mathbf{G}_{placette} = \begin{bmatrix} \sigma_{plac,1}^2 & \rho_{plac} \sigma_{plac,1} \sigma_{plac,2} \\ \rho_{plac} \sigma_{plac,1} \sigma_{plac,2} & \sigma_{plac,2}^2 \end{bmatrix},$$

D_{ij} est le diamètre à hauteur de poitrine (mm),

H_{ij} est la hauteur totale de l'arbre (m);

\mathbf{x}_{ijk} est un vecteur de variables indépendantes,

$\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur de paramètres inconnus,

$b_{ij,1}$ et $b_{ij,2}$ sont des effets aléatoires d'arbre, où

$$\mathbf{b}_{ij} = (b_{ij,1}, b_{ij,2})^T \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{G}_{arbre}),$$

$$\mathbf{G}_{arbre} = \begin{bmatrix} \sigma_{arbre,1}^2 & \rho_{arbre} \sigma_{arbre,1} \sigma_{arbre,2} \\ \rho_{arbre} \sigma_{arbre,1} \sigma_{arbre,2} & \sigma_{arbre,2}^2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

ε_{ijk} correspond à l'erreur résiduelle.

Tableau 1. Sommaire des données d'analyses de tiges ayant servi à l'ajustement des modèles de défilement.

Espèce	Nombre de tiges		dhp (mm)		Hauteur (m)		Densité (ti·ha ⁻¹)		Surface terrière (m ² ·ha ⁻¹)		Altitude	
	moyenne	min-max	moyenne	min-max	moyenne	min-max	moyenne	min-max	moyenne	min-max	moyenne	min-max
Bouleau à papier	197,1	101-391	17,4	10,7-24,9	1 267	450-2 525	30,2	17,0-60,5	373	83-730		
Épinettes												
blanche	278,4	95-568	18,2	5,4-32,4	1 152	75-3 700	31,1	4,5-56,6	428	80-1 046		
noire	193,3	20-1 114	15,6	7,2-28,1	1 543	25-3 325	28,1	0,8-54,6	420	11-1 020		
rouge	254,7	167-384	17,9	14,3-23,3	1 318	725-2 550	35,6	21,4-46,3	400	105-580		
Peupliers												
à grandes dents	315,7	207-480	25,4	19,2-35,0	881	425-1 350	35,3	18,1-60,5	276	95-531		
faux-tremble	280,5	103-552	21,6	11,0-30,1	1 102	175-2 450	34,6	14,1-60,0	336	44-943		
Pin blanc	402,4	221-601	25,6	15,8-32,3	728	400-1 250	34,5	17,5-50,5	246	159-289		
Sapin baumier	220,6	91-434	16,5	4,7-26,6	1 319	75-3 700	32,8	4,6-112,3	421	11-1 046		
Thuya	259,5	116-501	13,8	8,5-21,8	1 362	550-2 925	52,4	29,1-112,3	275	82-460		

Tableau 2. Nombre d'arbres par espèce en fonction du sous-domaine bioclimatique, de la classe de drainage et la végétation potentielle.

	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux- tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
Sous-domaine ¹								
2est	10	14		10	19	5	105	
2ouest		8			36	15	1	
3est	52	180	1	60	14	104	260	
3ouest	63	163		2	82	66	237	49
4est	146	164	76	15	4	140	365	90
4ouest	87	178	227		10	50	299	25
5est	76	373	438			87	847	36
5ouest	168	167	651	2		234	321	
6est	1	30	442				336	
6ouest	54	47	968			98	214	
Drainage								
1		5	13				30	17
2	46	206	652	5	26	41	451	28
3	611	995	1 365	44	139	684	1 967	84
4		118	477	40		74	537	44
5			146					6
6			150					21
Végétation potentielle								
FE2	10				63	11		
FE3					27	52		
ME1			100			71		
MJ1	77	148			61	56	191	
MJ2	65	278	11	2	10	91	349	
MS1	131	199	1	7		100	235	
MS2	239	595	60			294	854	
MS4		26					26	
MS6	20	15	5		4	43	14	
RC3								27
RE1			58					
RE2			1 192				18	
RE3			296					
RP1							25	
RS1		13					175	173
RS2	115	50	1080			81	1 023	
RS5				80			75	

¹ La signification des codes des sous-domaines bioclimatiques, des classes de drainage et des végétations potentielles est présentée à l'annexe 1.

Nous posons l'hypothèse que les erreurs résiduelles d'un même arbre sont corrélées. Le vecteur des erreurs résiduelles intra-arbre suivrait donc une loi normale multivariée, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = (\varepsilon_{ij1}, \varepsilon_{ij2}, \dots, \varepsilon_{ij\sigma_{ij}})^T \sim N_{\sigma_{ij}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_{ij}^{1/2} \boldsymbol{\Lambda}_{ij} \boldsymbol{\Psi}_{ij}^{1/2})$$

où

$\boldsymbol{\Psi}_{ij}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les variances intra-arbre, et

$\boldsymbol{\Lambda}_{ij}$ est une matrice de corrélation.

La première de ces deux matrices peut être définie à l'aide d'une fonction de variance et la seconde à l'aide d'une structure de corrélation, de façon à assouplir les postulats d'indépendance des termes d'erreur et d'homogénéité des variances (PINHEIRO et BATES 2000). Pour certaines espèces, la covariance entre les effets aléatoires d'un même niveau a été considérée nulle (c'est-à-dire $\rho_{plac} = 0$ et $\rho_{arbre} = 0$), et une structure diagonale positive (*positive-definite matrix*) a été employée après qu'elle ait été évaluée avec le modèle complet. Le modèle a été ajusté pour chaque espèce individuellement. Finalement, l'étalement a été effectué sous la condition $h_{ijk} < H_{ij}$, car par définition, le modèle prédit une valeur de 0 lorsque $h_{ijk} = H_{ij}$.

1.3 Effets fixes

Les effets fixes du modèle, soit le produit des vecteurs \mathbf{x}_{ijk} et $\boldsymbol{\beta}$, peuvent être décomposés en une somme de produits vectoriels (Équation 2) :

$$\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position} + \mathbf{x}_{ij}^{arbre} \boldsymbol{\beta}^{arbre} + \mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette} \quad [2]$$

où les variables se distinguent entre elles en fonction de l'échelle à laquelle elles s'expriment, soit la position au sein de l'arbre, l'arbre lui-même ou la placette. La hauteur de la section (h_{ijk}), la hauteur relative dans l'arbre ($s_{ijk} = h_{ijk}/H_{ij}$) et la hauteur relative à partir de la hauteur de poitrine [$t_{ijk} = (H_{ij} - h_{ijk})/(H_{ij} - 1,3)$] sont des exemples de variables de position. Parmi les variables propres à l'arbre, on reconnaît le dhp (D_{ij}) et la hauteur de l'arbre (H_{ij}). Quant à l'échelle de la placette, il peut s'agir de la surface terrière ($m^2 \cdot ha^{-1}$, ST_i), de la densité de tiges (tiges $\cdot ha^{-1}$, N_i), de l'altitude (m, a_i), de la végétation potentielle (p_i), du drainage (w_i) et du sous-domaine bioclimatique (sdb_i).

La végétation potentielle (Annexe 1) est une variable catégorique qui représente l'association végétale à un stade avancé de la succession forestière (SAUCIER *et al.* 1998). On présume que des placettes de même végétation potentielle ont une dynamique forestière semblable. Au total, il existe 32 végétations potentielles différentes sur l'ensemble de la forêt commerciale québécoise, certaines plus abondantes que d'autres. La base de données de cette étude comprend 17 végétations potentielles, qui sont évidemment les plus fréquentes dans les zones de la forêt mélangée et de la forêt résineuse. La végétation potentielle d'une placette se détermine à l'aide de la composition du couvert forestier, de la présence de groupes de plantes indicatrices et des caractéristiques de la station.

Le drainage est également une variable catégorique qui comprend sept classes, de 0 (excessif, milieu xérique) à 6 (très mauvais, milieu hydrique) (Annexe 1). Cette variable est évaluée visuellement en fonction de la présence d'eau sur le site, de la nature et la texture du dépôt de surface, de la position topographique et de la présence de mouchettes dans le sol.

Finalement, les sous-domaines bioclimatiques (Annexe 1) représentent des entités territoriales très vastes caractérisées par un climat relativement homogène, en ce qui concerne la température et les précipitations annuelles moyennes (SAUCIER *et al.* 2009).

Au total, trois modèles ont donc été ajustés :

- I. un **modèle-arbre** (Équations 3 et 4), qui ne comprenait que des variables d'arbre et de position, et dont le vecteur de position pouvait prendre plusieurs formes en fonction de l'espèce :

$$\mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position} = \beta_1 t_{ijk} + \beta_2 \ln(t_{ijk}) + \beta_3 e^{s_{ijk}} + \beta_4 t_{ijk} s_{ijk} \quad [3a]$$

$$\mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position} = \beta_5 s_{ijk} + \beta_6 \ln(s_{ijk}) \quad [3b]$$

$$\mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position} = -e^{-\beta_7 s_{ijk}^{\beta_8}} \quad [3c]$$

$$\mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position} = s_{ijk}^{\beta_9} (1 - s_{ijk})^{\beta_{10}} \quad [3d]$$

et où le vecteur arbre est :

$$\mathbf{x}_{ij}^{arbre} \boldsymbol{\beta}^{arbre} = \beta_{11} D_{ij} + \beta_{12} H_{ij} \quad [4]$$

La meilleure forme fonctionnelle de la position (choix entre les équations 3a à 3d) a été sélectionnée à l'aide du critère d'information bayésien (BIC) et du critère d'information d'Akaike (AIC), qui reposent tous deux sur la vraisemblance du modèle, à laquelle s'ajoute une pénalité qui est fonction du nombre de paramètres dans le modèle, et qui impose une certaine parcimonie; le modèle avec le rapport AIC/BIC le plus faible a été retenu.

- II. un **modèle-placette** (Équation 5), qui ne comprenait que des variables mesurées à l'échelle de la placette, c'est-à-dire :

$$\mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette} = \beta_{13} ST_i + \beta_{14} N_i + \beta_{15} a_i + \beta_{16, p_i} + \beta_{17, w_i} + \beta_{18, sdb_i} \quad [5]$$

où

β_{16, p_i} est le paramètre pour la végétation potentielle p_i ,

β_{17, w_i} le paramètre pour le drainage w_i , et

β_{18, sdb_i} le paramètre pour le sous-domaine bioclimatique sdb_i .

- III. un **modèle complet** qui combinait les variables des deux approches précédentes.

1.4 Fonction de variance et structure de corrélation

Les corrélations intra-arbre (c'est-à-dire les éléments de Λ_{ij}) ont été modélisées à l'aide d'une structure autorégressive continue de premier ordre (PINHEIRO et BATES 2000) :

$$\text{Corr}(\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk'}) = \rho_{res}^{|h_{ijk} - h_{ijk'}|} \quad \forall k, k' \quad [6]$$

où

ρ_{res} est le paramètre de corrélation.

La forme de la fonction de variance (c'est-à-dire les éléments de la matrice diagonale Ψ_{ij}) est plus complexe en raison du patron de l'hétérogénéité de la variance tout le long de la tige. En fait, de par la forme du modèle (voir Eq. 1), l'erreur est à son minimum à la hauteur de poitrine ainsi qu'à l'apex de l'arbre. Afin de bien capturer cette variance, une fonction de puissance a été employée (p. 212 de PINHEIRO et BATES [2000]) :

$$\text{Var}(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2 \cdot \left(\delta_1 + |l_{ijk}| \cdot |x_{D,ijk}| \cdot \left(1 - |x_{D,ijk}|\right)^3 \right)^{\delta_2} \quad [7]$$

où

σ^2 est la variance résiduelle,

δ_1 et δ_2 sont les paramètres de la fonction de variance,

l_{ijk} est la distance du haut de l'arbre (c'est-à-dire $H_{ij} - h_{ijk}$), et

$x_{D,ijk}$ est la distance relative de la hauteur de la section par rapport à la hauteur totale, en utilisant la hauteur de poitrine comme référence, définie comme $x_{D,ijk} = (h_{ijk} - 1,3) / (H_{ij} - 1,3)$.

Lorsque la section se situe au-dessous de 1,3 m, les valeurs absolues sont nécessaires afin que les variances prédites soient positives.

1.5 Ajustement des modèles

Les variables catégoriques de végétation potentielle, de drainage et de sous-domaine bioclimatique comptaient un grand nombre de niveaux. Afin d'obtenir des modèles plus parcimonieux, nous avons regroupé les niveaux pour lesquels l'effet sur le défilement était similaire, selon la méthodologie suivante :

Dans un premier temps, les modèles ont été ajustés avec tous les niveaux. La différence entre les niveaux d'une même variable catégorique a été vérifiée à l'aide de contrastes linéaires (comparaisons par groupes de deux). Les niveaux ont alors été regroupés selon les résultats des contrastes ($\alpha = 0,05$).

Une fois les regroupements effectués, les variables ont été sélectionnées selon la méthode proposée pour les modèles linéaires avec effets aléatoires (LITTELL *et al.* 1996). Le modèle a été ajusté avec toutes les variables (catégoriques regroupées et continues), et la moins significative a été éliminée du modèle ($\alpha = 0,05$). Ce processus a été répété jusqu'à ce que l'ensemble des variables soient significatives, et ce, individuellement pour chaque essence. Les regroupements de variables catégoriques sont donc différents d'une espèce à l'autre.

Les postulats des régressions ont été vérifiés à l'aide de résidus normalisés conditionnels aux effets aléatoires. En somme, après l'ajustement d'un modèle, les effets aléatoires ont été estimés. Les résidus conditionnels aux estimations de ces

effets aléatoires ont ensuite été calculés. À partir de la matrice de variance-covariance des termes d'erreurs intra-arbre, on a obtenu le triangle inférieur (\hat{C}_{ij}) de la décomposition Cholesky, de telle sorte que $\hat{C}_{ij}\hat{C}_{ij}^T = \hat{\Psi}_{ij}^{1/2}\hat{\Lambda}_{ij}\hat{\Psi}_{ij}^{1/2}$. Les résidus normalisés de l'arbre j dans la placette i ($r_{norm,ij}$) ont été calculés de la façon suivante (PINHEIRO et BATES 2000, p. 239) :

$$r_{norm,ij} = \hat{C}_{ij}^{-1} r_{ij}$$

où r_{ij} est le vecteur des résidus conditionnels aux effets aléatoires. Si l'hétérogénéité de la variance était bien prise en compte par la fonction de variance, les résidus normalisés devaient suivre une distribution normale et avoir des variances homogènes.

La performance des trois modèles (modèle-placette, modèle-arbre et modèle complet) a été évaluée à l'aide de l'AIC. Pour le même ensemble de variables réponses, le modèle privilégié était celui ayant la valeur d'AIC la plus basse. Les régressions ont toutes été effectuées à l'aide du module *nlme* du progiciel R (PINHEIRO *et al.* 2010).

Lorsque les covariables du modèle sont susceptibles d'être fortement corrélées entre elles comme c'est le cas dans la présente étude, un modèle statistique peut souffrir de problèmes de multicollinéarité, qui se traduit essentiellement par des biais dans les inférences statistiques. BONATE (1999) propose plusieurs indices qui permettent de diagnostiquer ce problème dans un contexte de modèles non linéaires mixtes. L'un d'eux est l'indice de conditionnement (*condition index*) qui se base sur la décomposition en éléments propres de la matrice de corrélation des estimations des paramètres du modèle. Si \mathbf{H} est cette matrice de corrélation, la décomposition en éléments propres donne $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega}\mathbf{Q}^{-1}$, où \mathbf{Q} est la matrice

contenant les vecteurs propres et $\mathbf{\Omega}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres. L'indice de conditionnement est la racine carrée du rapport entre la valeur propre maximale et la valeur propre minimale, c'est-à-dire $\sqrt{\Omega_{\max}/\Omega_{\min}}$. Plus l'indice est élevé, plus le problème de multicollinéarité est important. Il n'existe pas de seuil objectif au-delà duquel on s'entend pour dire que le problème est grave. BELSLEY *et al.* (2004, p. 112) suggèrent un seuil de 30. Ces indices de conditionnement ont été calculés pour chacun des modèles.

Des estimations du biais (en mm²), défini comme la moyenne des différences entre les valeurs observées et prédites ($d_{ijk}^2 - \hat{d}_{ijk}^2$), ont été calculées en fonction de la taille de l'arbre et la position dans l'arbre. Des biais relatifs (biais / \bar{d}^2) ont aussi été employés pour comparer les modèles. Finalement, une valeur de pseudo-R² a été calculée selon la méthode suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i \sum_j \sum_k (d_{ijk}^2 - \hat{d}_{ijk}^2)^2}{\sum_i \sum_j \sum_k (d_{ijk}^2 - \bar{d}^2)^2} \quad [8]$$

1.6 Prédiction du diamètre

L'équation de défilement prédit le diamètre au carré (Eq. 1). Certains utilisateurs voudront toutefois employer les équations de défilement pour prédire le diamètre à un point donné. Il faut donc transformer la valeur prédite en utilisant la racine carrée. Afin d'éliminer le biais de cette transformation, on peut utiliser un développement de Taylor du second degré. Cette approximation est présentée à l'Annexe 2.

Chapitre deux

Résultats

L'examen des résidus normalisés issus des régressions ne montre aucune divergence par rapport aux postulats d'homogénéité de la variance et de normalité (Figures 2 et 3). Pour les essences feuillues (bouleau à papier, peupliers à grandes dents et faux-tremble), les résidus montrent une légère tendance, qui a été jugée non significative après un examen approfondi. Les estimations des paramètres sont toutes significativement différentes de 0 ($p < 0,05$), et cette différence est hautement significative ($p < 0,0001$) dans la majorité des cas. La valeur des estimations ainsi que leur erreur-type sont présentées dans les annexes 3 à 5.

Pour toutes les essences, à l'exception du pin blanc pour lequel il n'y avait pas assez de données pour inclure l'ensemble des niveaux, les modèles complets sont ceux avec les valeurs d'AIC les plus basses (Tableau 3). Les modèles-arbres arrivent en deuxième. En dernier lieu, les modèles-placettes ont le moins bon ajustement par rapport aux observations. Bien que meilleur, l'ajustement des modèles complets n'est que légèrement supérieur à celui des modèles-arbres. La même tendance est observable pour les valeurs de R^2 et les biais de chaque modèle (Tableaux 4 à 6).

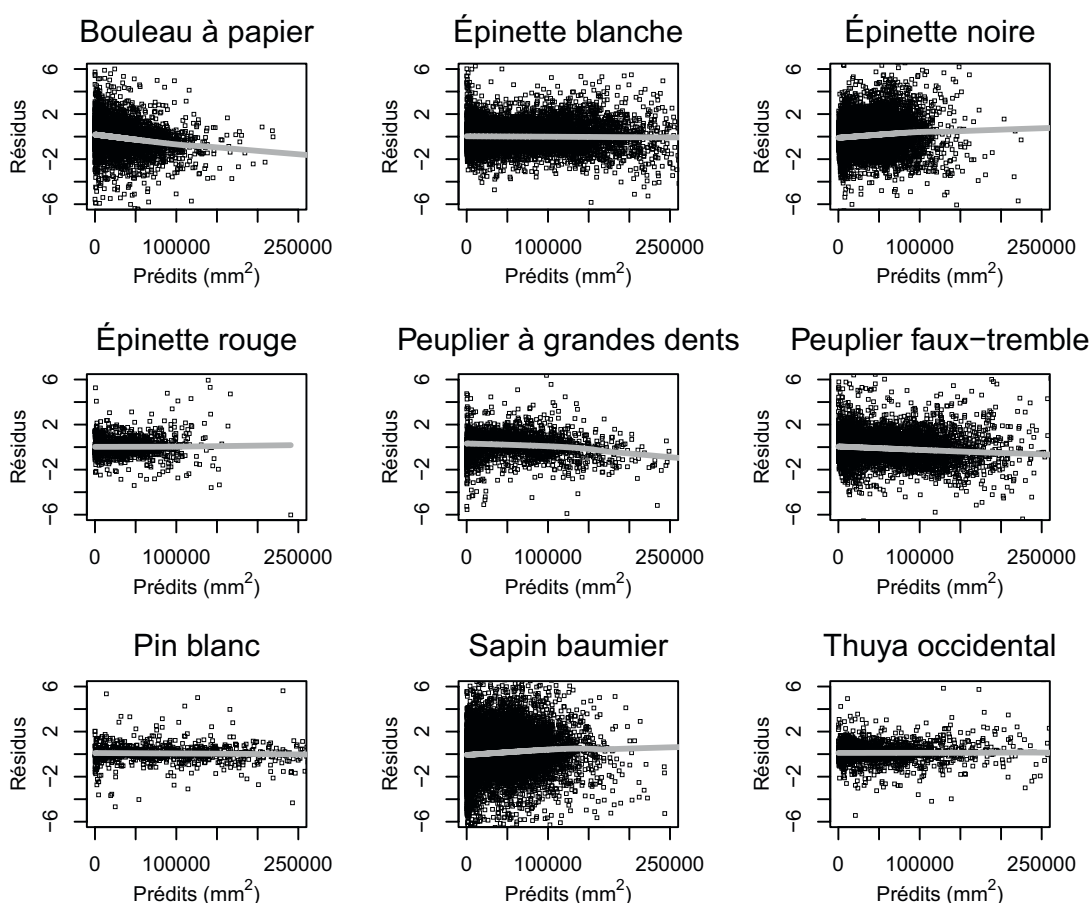


Figure 2. Résidus normalisés en fonction des valeurs prédites pour le modèle complet (variables à l'échelle de l'arbre et du peuplement), pour toutes les espèces sauf le pin blanc (modèle arbre seulement). La ligne grise a été calculée à l'aide d'une régression de lissage.

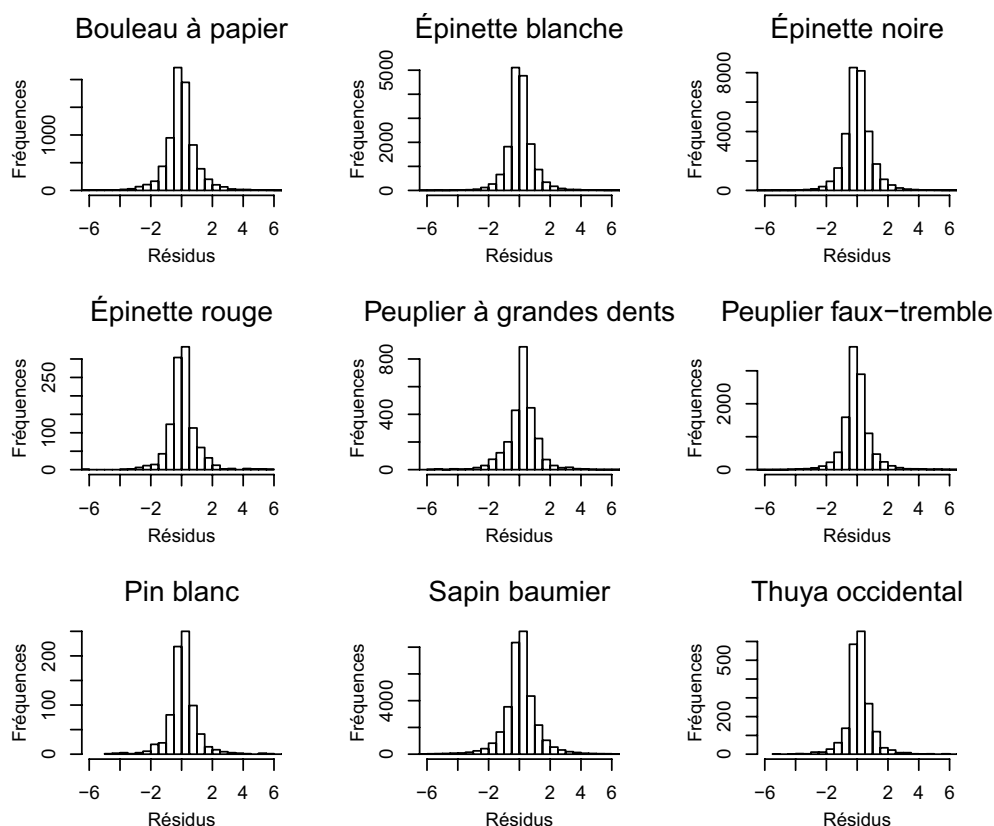


Figure 3. Histogramme des résidus par essence pour le modèle complet (variables à l'échelle de l'arbre et du peuplement), sauf pour le pin blanc (variables à l'échelle de l'arbre seulement).

Tableau 3. Valeurs du critère d'information d'Akaike (AIC) par essence pour les différents modèles (R^2 entre parenthèses). La valeur la plus basse apparaît en gras.

Espèce	Modèle		
	Arbre	Placette	Complet
Bouleau à papier	139 538,7 (0,965)	144 414,0 (0,942)	139 000,7 (0,965)
Épinette blanche	325 034,5 (0,957)	337 000,2 (0,945)	324 995,2 (0,958)
Épinette noire	549 618,1 (0,974)	554 587,6 (0,964)	549 513,2 (0,976)
Épinette rouge	20 281,6 (0,969)	20 909,5 (0,931)	20 275,4 (0,972)
Peuplier à grandes dents	51 212,1 (0,938)	52 343,9 (0,934)	51 192,8 (0,937)
Peuplier faux-tremble	222 383,1 (0,963)	228 561,1 (0,912)	222 312,8 (0,968)
Pin blanc ¹	16 278,2 (0,979)		
Sapin baumier	627 987,7 (0,968)	636 782,2 (0,954)	620 929,8 (0,966)
Thuya occidental	38 535,6 (0,974)	38 970,6 (0,970)	38 533,4 (0,974)

¹ Pour le pin blanc, seuls les résultats du modèle arbre sont présentés, car il n'y avait pas assez d'observations pour calibrer les deux autres modèles.

Tableau 4. Biais moyen du modèle-arbre par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).

Classe de hauteur relative	Biais moyen (mm ²)									
	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Pin blanc	Sapin baumier	Thuya occidental	
0,0 – 0,1	-411 (-0,01)	26 (0,00)	522 (0,01)	71 (0,00)	-1 922 (-0,02)	-2 262 (-0,03)	1 337 (0,01)	767 (0,01)	727 (0,01)	
0,1 – 0,2	739 (0,02)	3 810 (0,05)	-279 (-0,01)	1 122 (0,02)	10 590 (0,13)	4 434 (0,06)	9 566 (0,08)	-985 (-0,02)	1 186 (0,02)	
0,2 – 0,3	-261 (-0,01)	3 372 (0,05)	178 (0,01)	1 330 (0,03)	14 575 (0,20)	1 739 (0,03)	8 095 (0,06)	-334 (-0,01)	526 (0,01)	
0,3 – 0,4	-868 (-0,04)	1 717 (0,03)	852 (0,04)	136 (0,00)	15 508 (0,25)	181 (0,00)	5 709 (0,05)	743 (0,02)	1 911 (0,05)	
0,4 – 0,5	-364 (-0,02)	1 021 (0,02)	1 057 (0,05)	22 (0,00)	13 555 (0,26)	-111 (-0,00)	397 (0,00)	1 582 (0,06)	1 679 (0,05)	
0,5 – 0,6	354 (0,02)	724 (0,02)	969 (0,07)	-40 (-0,00)	11 814 (0,28)	1 112 (0,03)	111 (0,00)	1 519 (0,08)	1 736 (0,07)	
0,6 – 0,7	501 (0,05)	1 015 (0,05)	544 (0,05)	493 (0,03)	7 108 (0,25)	2 089 (0,08)	-1 022 (-0,02)	840 (0,07)	1 434 (0,09)	
0,7 – 0,8	404 (0,08)	787 (0,06)	41 (0,01)	385 (0,04)	2 920 (0,20)	1 124 (0,08)	2 024 (0,07)	14 (0,00)	655 (0,08)	
0,8 – 0,9	97 (0,06)	484 (0,09)	-404 (-0,14)	122 (0,03)	1 013 (0,23)	199 (0,04)	886 (0,08)	-325 (-0,10)	216 (0,07)	
0,9 – 1,0	18 (0,10)	28 (0,03)	-371 (-0,58)	38 (0,05)	168 (0,30)	54 (0,09)	-20 (-0,02)	-338 (-0,51)	-4 (-0,01)	

Tableau 5. Biais moyen du modèle-placette par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).

Classe de hauteur relative	Biais moyen (mm ²)									
	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental		
0,0 – 0,1	-1 545 (-0,03)	563 (0,01)	-677 (-0,02)	-1 105 (-0,01)	-2 376 (-0,02)	-3 821 (-0,04)	-1 674 (-0,03)	-262 (-0,00)		
0,1 – 0,2	4 249 (0,13)	7 215 (0,10)	2 888 (0,09)	7 133 (0,14)	11 133 (0,13)	11 542 (0,16)	4 833 (0,11)	2 110 (0,04)		
0,2 – 0,3	5 979 (0,20)	11 389 (0,18)	3 932 (0,14)	11 919 (0,25)	14 809 (0,21)	15 247 (0,25)	6 456 (0,18)	3 996 (0,09)		
0,3 – 0,4	5 985 (0,24)	11 396 (0,21)	4 251 (0,18)	12 459 (0,29)	16 039 (0,25)	16 641 (0,31)	6 235 (0,20)	5921 (0,15)		
0,4 – 0,5	5 458 (0,27)	9 472 (0,22)	3 328 (0,17)	11 211 (0,32)	13 800 (0,27)	15 137 (0,34)	4 843 (0,19)	4 446 (0,14)		
0,5 – 0,6	3 758 (0,24)	5 876 (0,18)	2 084 (0,14)	8 083 (0,30)	11 825 (0,28)	12 172 (0,34)	2 548 (0,14)	2 547 (0,11)		
0,6 – 0,7	1 158 (0,12)	2 103 (0,10)	678 (0,07)	4 829 (0,26)	5 698 (0,20)	7 452 (0,30)	266 (0,02)	193 (0,01)		
0,7 – 0,8	-981 (-0,20)	-1 334 (-0,11)	-395 (-0,06)	1 137 (0,11)	-1 521 (-0,10)	1 353 (0,10)	-1 373 (-0,20)	-2 202 (-0,26)		
0,8 – 0,9	-1 902 (-1,20)	-2 752 (-0,53)	-986 (-0,34)	-1 103 (-0,26)	-5 025 (-1,13)	-2 467 (-0,53)	-1 693 (-0,55)	-2 786 (-0,88)		
0,9 – 1,0	-1 009 (-5,34)	-1 792 (-1,97)	-665 (-1,04)	-940 (-1,23)	-2 663 (-4,70)	-1 858 (-3,03)	-963 (-1,46)	-1 542 (-3,15)		

Tableau 6. Biais moyen du modèle complet par essence et classe de hauteur relative (les valeurs entre parenthèses sont les biais relatifs).

Classe de hauteur relative	Biais (mm ²)									
	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental		
0,0 – 0,1	-1 093 (-0,02)	135 (0,00)	523 (0,01)	288 (0,00)	-2 129 (-0,02)	-1 511 (-0,02)	513 (0,01)	677 (0,01)		
0,1 – 0,2	651 (0,02)	3 592 (0,05)	-273 (-0,01)	997 (0,02)	10 847 (0,13)	3 640 (0,05)	755 (0,02)	1 181 (0,02)		
0,2 – 0,3	-538 (-0,02)	3 093 (0,05)	187 (0,01)	1 179 (0,02)	14 407 (0,20)	618 (0,01)	2 021 (0,06)	542 (0,01)		
0,3 – 0,4	-1 155 (-0,05)	1 445 (0,03)	841 (0,04)	-117 (-0,00)	15 637 (0,25)	-955 (-0,02)	3 109 (0,10)	1 886 (0,05)		
0,4 – 0,5	-475 (-0,02)	853 (0,02)	1 060 (0,05)	-166 (-0,00)	13 508 (0,26)	-1 264 (-0,02)	3 643 (0,15)	1 651 (0,05)		
0,5 – 0,6	505 (0,03)	646 (0,02)	967 (0,07)	-225 (-0,01)	11 922 (0,28)	96 (0,00)	3 067 (0,17)	1 720 (0,07)		
0,6 – 0,7	800 (0,08)	946 (0,04)	542 (0,05)	406 (0,02)	7 117 (0,25)	1 350 (0,05)	1 887 (0,16)	1 444 (0,09)		
0,7 – 0,8	652 (0,13)	733 (0,06)	39 (0,01)	348 (0,03)	2 918 (0,20)	740 (0,06)	636 (0,09)	653 (0,08)		
0,8 – 0,9	198 (0,13)	461 (0,09)	-403 (-0,14)	91 (0,02)	1 007 (0,23)	41 (0,01)	-24 (-0,01)	221 (0,07)		
0,9 – 1,0	28 (0,15)	24 (0,03)	-371 (-0,58)	36 (0,05)	166 (0,29)	35 (0,06)	-253 (-0,38)	-5 (-0,01)		

Tous les modèles reposant sur la forme fonctionnelle de l'équation 3a ont montré des indices de conditionnement supérieurs à 100, tandis que les autres avaient des valeurs inférieures à 15. Des modèles réduits sans variables corrélées (c'est-à-dire ceux qui éliminaient t_{ijk} ou S_{ijk}) n'avaient plus de multicollinéarité. Toutefois, ces modèles réduits avaient tous des AIC et BIC supérieurs à ceux de la forme de l'équation 3a. De plus, de fortes tendances dans les résidus étaient présentes pour tous les modèles réduits et n'étaient pas présentes pour la forme de l'équation 3a. Cette dernière forme a donc été retenue.

La figure 4a présente un exemple de prédiction de défilement pour les différents modèles du sapin baumier. La forme des courbes diffère selon le modèle. Le modèle-placette a la forme d'un néloïde à la base; par la suite, il suit presque la droite d'un tronc de cône, pour se terminer par un paraboloïde au sommet. Le modèle-arbre et le modèle complet se ressemblent plus. À leur base, ils épousent une forme de néloïde plus prononcée que celle du modèle-placette, puis la forme d'un paraboloïde à partir de 1,3 m de hauteur. Ces différences se reflètent aussi dans les résidus, où des tendances importantes sont observées pour les modèles-placettes (non présentés), en raison de leur difficulté à bien épouser l'évasement de la base de l'arbre et la courbure du sommet. Ces tendances s'atténuent lorsque l'exposant contient des variables d'arbre et de position dans la tige.

La forme de la fonction de variance arrive à prédire une erreur réduite à l'apex de l'arbre, ainsi qu'à la hauteur de poitrine (1,3 m, Figure 4b). Il y a très peu de différences entre les différents modèles d'une même espèce, de par le fait que la forme de la fonction de variance est relativement inflexible, une fois la variation le long de l'arbre prise en compte.

Les modèles complets sont retenus pour illustrer l'effet des différentes variables à l'échelle du peuplement sur le défilement, étant donné qu'ils ont les meilleures statistiques d'ajustement. Les paramètres de variables catégoriques peuvent s'interpréter de la façon suivante : une valeur plus élevée démontre une tendance vers la forme conique, alors qu'une valeur plus faible indique une tendance vers la forme cylindrique. Une valeur plus élevée pour l'un de ces paramètres indique donc un défilement plus fort.

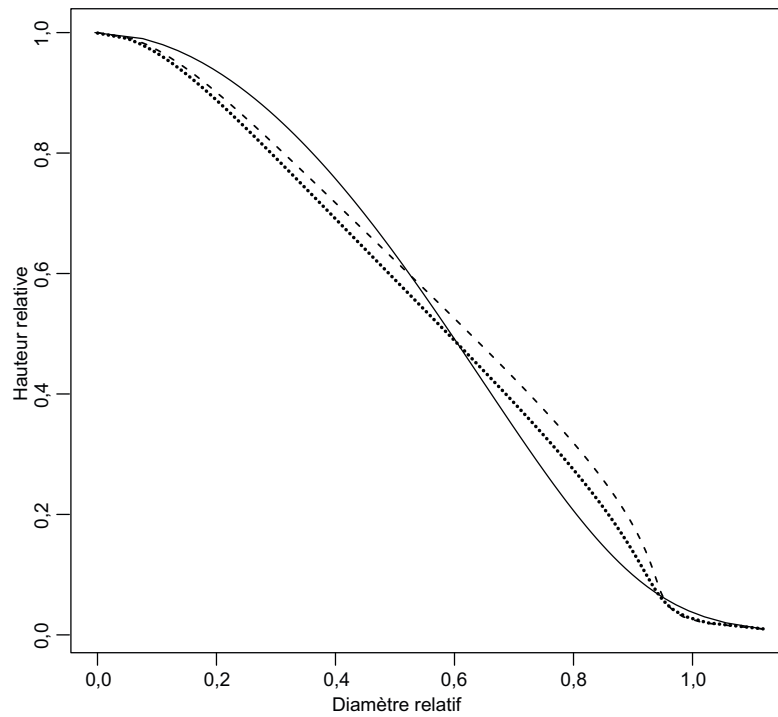
En ce qui concerne l'effet des différentes variables à l'échelle de la placette, aucune tendance claire n'a pu être observée entre les espèces. Par contre,

le modèle complet révèle certaines tendances (Annexe 5). Par exemple, les bouleaux à papier ($\hat{\beta}_{18,\bullet\text{ouest}} = -0,0430$, $\hat{\beta}_{18,\bullet\text{est}} = 0$) (Figure 5), les épinettes blanches ($\hat{\beta}_{18,\bullet\text{ouest}} = -0,0138$, $\hat{\beta}_{18,\bullet\text{est}} = 0$) et les peupliers faux-tremble ($\hat{\beta}_{18,\bullet\text{ouest}} = 0$, $\hat{\beta}_{18,4\text{est}} = 0,0444$, $\hat{\beta}_{18,5\text{est}} = 0,0444$) des sous-domaines bioclimatiques de l'Est ont un défilement plus fort que ceux de l'Ouest. Pour les thuyas occidentaux, le défilement est le plus important dans la région 4ouest ($\hat{\beta}_{18,4\text{ouest}} = 0,0481$), puis dans les sous-domaines de l'Est ($\hat{\beta}_{18,4\text{est}} = 0,0372$ et $\hat{\beta}_{18,5\text{est}} = 0,0372$) et le sous-domaine 3ouest ($\hat{\beta}_{18,3\text{ouest}} = 0$). On observe un défilement plus faible dans les sous-domaines bioclimatiques de l'Est que dans ceux de l'Ouest pour l'épinette noire ($\hat{\beta}_{18,\bullet\text{ouest}} = 0,0151$, $\hat{\beta}_{18,\bullet\text{est}} = 0$). Les tendances sont moins claires pour le sapin baumier, car son défilement est généralement plus faible dans les sous-domaines de l'Est ($\hat{\beta}_{18,3\text{est}} = -0,0237$ par rapport à $\hat{\beta}_{18,3\text{ouest}} = 0$, $\hat{\beta}_{18,6\text{est}} = -0,0237$, par rapport à $\hat{\beta}_{18,6\text{ouest}} = 0$), mais aussi dans le domaine bioclimatique de la sapinière à bouleau blanc de l'ouest ($\hat{\beta}_{18,5\text{ouest}} = -0,0443$, par rapport à $\hat{\beta}_{18,5\text{est}} = -0,0237$).

De la même façon, il n'est pas possible de tirer les conclusions générales sur la différence entre le défilement des différents types écologiques (Annexe 5). En fait, pour le défilement d'une même espèce, la plus grande différence entre les végétations potentielles est observée chez l'épinette blanche, où un défilement plus fort est observé en sapinière montagnarde ($\hat{\beta}_{16,\text{MS4}} = 0,1271$, Figure 6). Suivent ensuite le peuplier faux-tremble sur les sites des végétations potentielles de la sapinière à érable rouge ($\hat{\beta}_{16,\text{MS6}} = 0,0524$) et de la sapinière à épinette noire ($\hat{\beta}_{16,\text{RS2}} = 0,0524$), et enfin, l'épinette noire sur les sites de la végétation potentielle de la pessière noire à lichens ($\hat{\beta}_{16,\text{RE1}} = 0,0490$). À l'inverse, le sapin baumier a un défilement moins important ($\hat{\beta}_{16} = -0,0423$) sur les sites des végétations potentielles à dominance résineuse (RE2, RP1, RS1, RS2, RS5).

Le drainage influence le défilement uniquement pour le sapin baumier et l'épinette noire, dans les sites de classes de drainage mésique à hydrique (Classes 3 à 5, Annexe 5). De plus, le drainage influence plus fortement le sapin baumier ($\hat{\beta}_{17,3} = 0,0232$ et $\hat{\beta}_{17,4} = 0,0232$) comparativement à l'épinette noire ($\hat{\beta}_{17,4} = 0,0121$ et $\hat{\beta}_{17,5} = 0,0121$).

a) Défilement



b) Fonction de variance

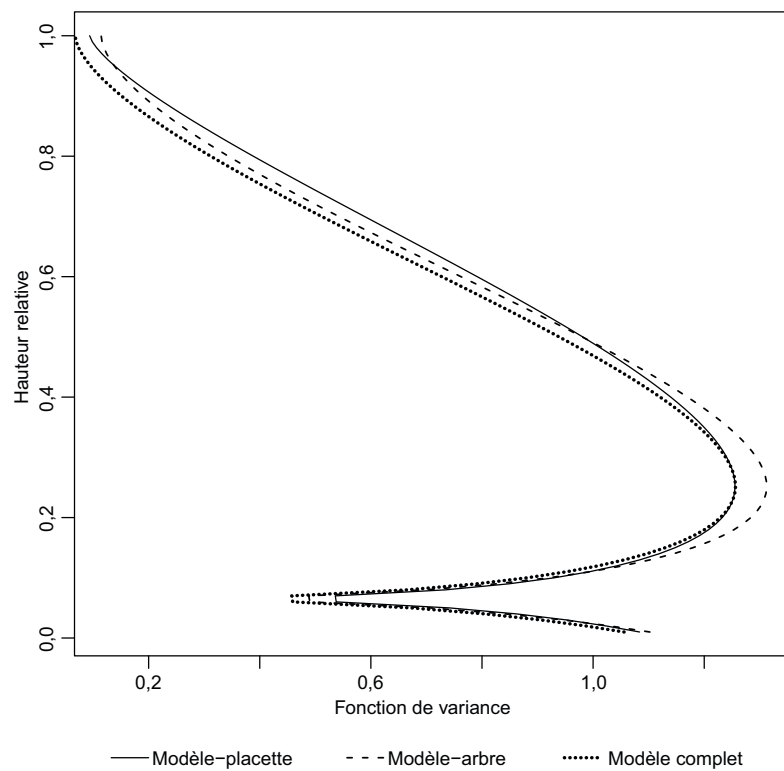


Figure 4. Défilement (a) et fonction de variance (b) d'un sapin baumier (dhp = 200 mm, hauteur totale = 20 m, densité = 1500 tiges·ha⁻¹, surface terrière = 20 m²·ha⁻¹, altitude = 300 m, végétation potentielle = MS1, sous-domaine bioclimatique = 3est, drainage = 2) pour le modèle-placette, le modèle-arbre et le modèle complet.

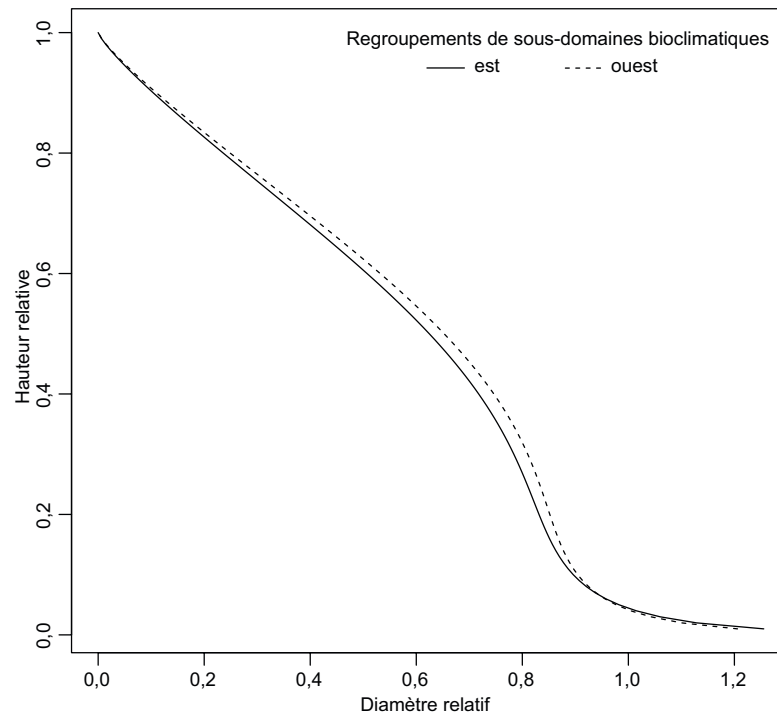


Figure 5. Exemple de défilement pour le bouleau à papier ($d_{hp} = 20$ cm, hauteur totale = 20 m) tel que prédit par le modèle complet, pour les sous-domaines bioclimatiques « est » (regroupant les sous-domaines 2est, 3est, 4est, 5est, 6est et aussi le sous-domaine 2ouest), et « ouest » (regroupant les sous-domaines 3ouest, 4ouest, 5ouest et 6ouest).

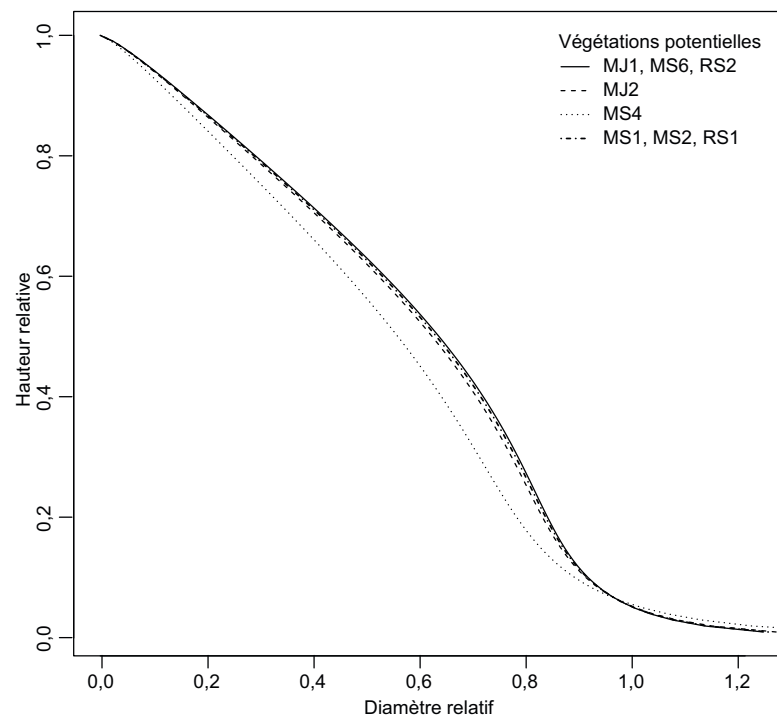


Figure 6. Exemple de défilement pour l'épinette blanche ($d_{hp} = 20$ cm, hauteur totale = 20 m, surface terrière = $15 \text{ m}^2 \cdot \text{ha}^{-1}$, densité = $1500 \text{ tiges} \cdot \text{ha}^{-1}$, sous-domaine bioclimatique = 2est) tel que prédit par le modèle complet, pour différents types de végétation potentielle.

Le défilement du sapin baumier est inversement proportionnel à l'altitude ($\hat{\beta}_{15} = -4.36e-5$, Annexe 5). Celui de l'épinette rouge et celui de l'épinette blanche sont inversement proportionnels à la surface terrière ($\hat{\beta}_{13} = -0,0041$ et $-0,0009$, respectivement). Pour le peuplier à grandes dents, le défilement est proportionnel à la surface terrière ($\hat{\beta}_{13} = 0,0020$). Le défilement de l'épinette blanche est proportionnel à la densité du peuplement ($\hat{\beta}_{14} = 2,70e-5$), alors que celui de l'épinette noire est inversement proportionnel à la densité ($\hat{\beta}_{14} = -7,70e-6$).

Finalement, le modèle complet de défilement pour le sapin baumier et l'épinette noire a été validé à l'aide de l'échantillonnage des tiges opprimées et intermédiaires. Aucune tendance n'a été observée dans les résidus en fonction de la hauteur dans l'arbre (Figures 7 et 8), ni dans les biais en fonction de la hauteur (Tableau 7).

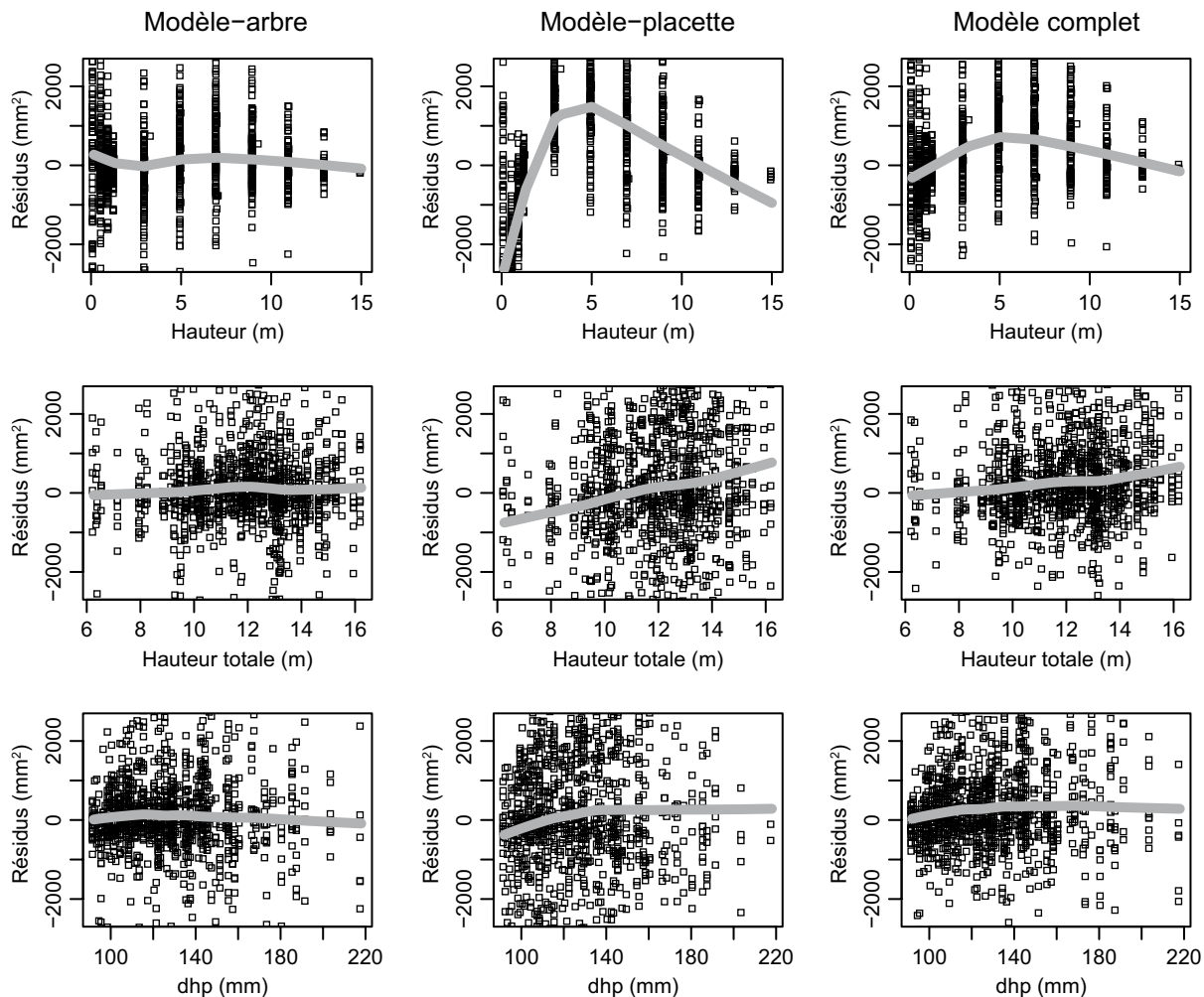


Figure 7. Résidus (valeurs observées – valeurs prédites) du modèle de défilement du sapin baumier calculé à l'aide des tiges intermédiaires et opprimées. La ligne grise a été calculée à l'aide d'une régression de lissage.

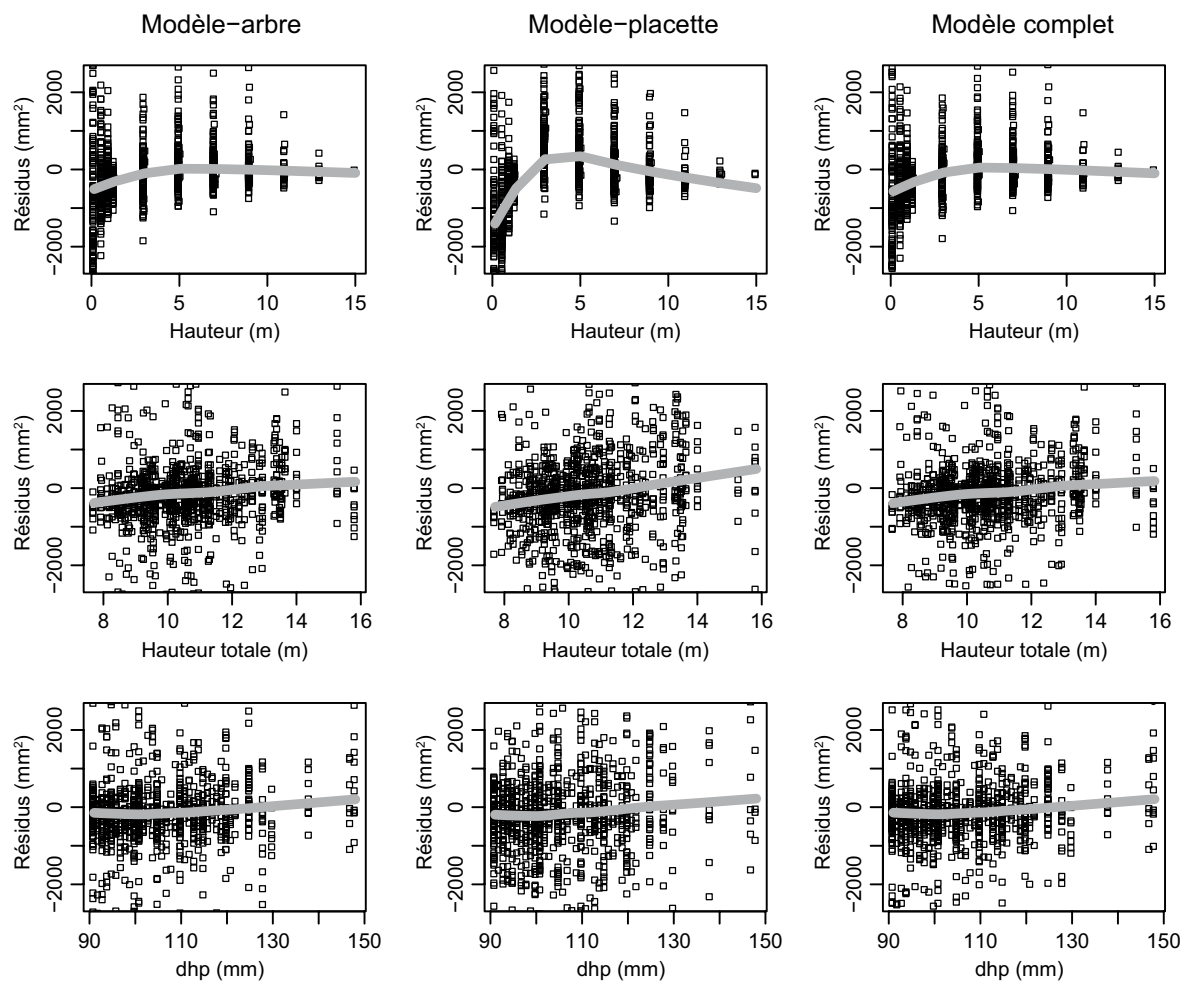


Figure 8. Résidus (valeurs observées – valeurs prédites) du modèle de défilement de l'épinette noire calculé à l'aide des tiges intermédiaires et opprimées. La ligne grise a été calculée à l'aide d'une régression de lissage.

Tableau 7. Biais moyens et relatifs des modèles complets calculés à partir des tiges intermédiaires et opprimées de sapin baumier et d'épinette noire n'ayant pas servi à l'étalonnage du modèle.

	Sapin baumier		Épinette noire	
	Biais absolu (mm ²)	Biais relatif	Biais absolu (mm ²)	Biais relatif
Hauteur relative dans l'arbre				
< 0,33 %	421	0,02	-339	-0,03
0,33 – 0,66 %	1 162	0,14	266	0,05
> 0,66 %	281	0,14	8	0,01
Classe de hauteur totale				
< 10 m	225	0,03	-215	-0,03
10 – 14 m	470	0,04	-95	-0,01
> 14 m	1 186	0,08	-186	-0,02
Classe de dhp				
< 140 mm	358	0,04	-141	-0,02
140 – 180 mm	1 045	0,06	-380	-0,03
> 180 mm	572	0,02		

Chapitre trois

Discussion

Dans cette étude, nous avons ajusté trois types de modèles de défilement pour neuf espèces qui comptent parmi les plus importantes de la forêt commerciale québécoise. Nous avons adapté le modèle de SHARMA et ODERWALD (2001), modifié ensuite par SHARMA et ZHANG (2004), afin d'inclure des variables qui traduisent l'effet de la position dans l'arbre, de l'arbre proprement dit et de la placette. Par ailleurs, l'ajout d'une fonction de variance qui varie le long de la tige et celui d'une structure de corrélation ont permis de tenir compte d'éventuelles violations aux postulats d'indépendance des termes d'erreur et d'homogénéité des variances.

Le choix du modèle de SHARMA et ODERWALD (2001) a été basé sur sa performance pour les essences boréales (SHARMA et ZHANG 2004) et la possibilité de l'adapter aux données. La différence entre ces deux modèles de défilement réside dans la forme de l'exposant : le modèle paru en 2001 ne varie pas en fonction de la position dans la tige, alors que celui paru en 2004 peut être catégorisé comme un modèle à exposant variable (KOZAK 1988).

LI et WEISKITTEL (2010) ont comparé plusieurs modèles de défilement. Selon leurs résultats, le modèle de SHARMA et ZHANG (2004) n'était pas parmi les meilleurs (il se classait entre le 6^e et 9^e rang sur 12 modèles, selon les essences). Par contre, LI et WEISKITTEL (2010) n'ont pas tenté de changer les modèles. La version originale de SHARMA et ZHANG (2004) comportait beaucoup moins de variables indépendantes que les modèles présentés ici. Comme le démontrent nos résultats, le modèle de SHARMA et ZHANG (2004) peut être modifié, et l'ajout de variables indépendantes permet d'obtenir un ajustement acceptable.

En fait, le modèle-placette peut être considéré, en quelque sorte, comme une extension de l'équation proposée par SHARMA et ODERWALD (2001) dans laquelle l'exposant ne varie pas avec la position dans la tige, alors que le modèle-arbre et le modèle complet sont des adaptations du modèle de SHARMA et ZHANG (2004). Il en ressort que l'ajout d'un exposant variant avec la position dans la tige améliore nettement le modèle pour toutes les essences (en d'autres mots, les modèles-arbres et les modèles

complets sont meilleurs que les modèles-placettes). En fait, les variables de placette n'améliorent que faiblement l'ajustement du modèle (KOZAK 2004), bien que cette amélioration soit significative. Quant à eux, les modèles avec uniquement des variables à l'échelle du peuplement ne sont pas assez souples pour bien épouser à la fois les données à la base de l'arbre (0 à 0,2 de hauteur relative) et celles au haut de l'arbre (0,9-1,0 de hauteur relative).

Une autre raison motivant le choix du modèle de SHARMA et ODERWALD (2001) réside dans l'intérêt de prédire le volume des tiges. En fait, ce calcul repose sur la surface des sections, soit le carré du diamètre, plutôt que sur le diamètre proprement dit. L'avantage de prédire directement le carré du diamètre évite d'avoir à recourir à des corrections de biais. En effet, si le modèle prédisait un diamètre, l'élévation de cette prédiction au carré constituerait une quantité biaisée de l'espérance du carré du diamètre. Ce problème de transformation de variable aléatoire est largement souligné dans GREGOIRE *et al.* (2008). Sur ce point, le modèle de SHARMA et ODERWALD (2001) possède un avantage théorique sur tout autre modèle qui prédirait seulement le diamètre. Le gain réel de prédire le carré du diamètre demeure toutefois à quantifier. Quoi qu'il en soit, il est important d'appliquer la correction de la transformation racine carrée présentée à l'Annexe 2 si la variable d'intérêt est le diamètre et non le carré du diamètre.

Une différence majeure de la présente étude avec les autres est la modélisation de l'hétéroscédasticité. Plusieurs auteurs ont pris en compte le changement de variance le long de la tige (LI et WEISKITTEL 2010, VALENTINE et GREGOIRE 2001, TRINCADO et BURKHART 2006), avec des approches qui considèrent que la variance augmente avec la distance de la flèche terminale de l'arbre. Par contre, la plupart des modèles forcent le diamètre prédit à être proche du diamètre à hauteur de poitrine, par l'entremise d'un paramètre d'épaisseur d'écorce. Il est donc évident que la variance sera faible non seulement à l'extrémité, mais aussi à 1,3 m. La fonction proposée arrive à minimiser la variance au haut de l'arbre et à 1,3 m, tout en variant avec la taille, ce qui est une nette amélioration aux fonctions de variance présentées antérieurement.

Certaines formulations du vecteur de position (Équations 3a et 3b) peuvent mener à un problème de multicollinéarité (KOZAK 1997). Le principal effet de la multicollinéarité est de rendre l'estimation des paramètres très sensible aux données, c'est-à-dire qu'un léger changement des données servant à l'étalonnage induit d'importants changements aux estimations des paramètres et à leur erreur-type. La prédiction des modèles de défilement ayant une forte multicollinéarité est toutefois peu biaisée (KOZAK 1997). En fait, lorsque le modèle est appliqué à des données ayant une même structure de colinéarité, et que les données ont des plages similaires (c'est-à-dire qu'il n'y a aucune extrapolation), peu de différences devraient être observées entre un modèle avec ou sans colinéarité (QUINN et KEOUGH 2002). KOZAK (1997) émet l'hypothèse que le changement de l'estimation d'un paramètre dans un modèle montrant de la colinéarité est contrebalancé par un changement d'un autre paramètre, menant à une valeur prédite similaire. Pour ces raisons, l'interprétation de l'estimation des paramètres du vecteur de position n'est pas entreprise ici; même si la forme de l'équation 3a montre une forte colinéarité, la forme est conservée.

LARSON (1963) a présenté plusieurs explications pour décrire la forme des arbres, qui sont d'ailleurs toujours d'actualité. Son premier constat a été que la cime joue un rôle important dans la forme de la tige : les arbres avec une cime plus longue auront un défilement plus important. D'autres facteurs tels que la qualité du site, la position sociale et l'âge des arbres influencent aussi la forme du tronc. L'effet de ces facteurs a été amplement étudié à l'aide de modèles de défilement pour plusieurs espèces (MORRIS et PARKER 1992, MUHAIRWE 1994, SHARMA et PARTON 2009, WEISKITTEL *et al.* 2009).

Par contre, très peu d'études ont tenté de relier les variables permanentes de site à la forme des arbres. La classification écologique du Québec est un système hiérarchique qui débute par la catégorisation des peuplements avec les grandes zones de végétation, et qui descend jusqu'à l'attribution d'un type écologique (SAUCIER *et al.* 1998, GRONDIN *et al.* 2003, SAUCIER *et al.* 2009). Des liens entre cette classification et la productivité ont déjà été rapportés (SAUCIER *et al.* 2006, FORTIN et LANGEVIN 2010). De plus, la relation entre le diamètre à hauteur de poitrine et la hauteur de l'arbre semble être influencée par des subdivisions écologiques (FORTIN *et al.* 2009). Par contre, cette dernière étude n'a pas été en mesure d'identifier une réponse par espèce associée aux subdivisions écologiques.

D'un point de vue physiologique, les changements de forme des arbres d'une même espèce sont dûs à une différenciation de la croissance radiale du tronc par rapport à l'accroissement en hauteur. En d'autres mots, les différentes formes résultent de changements dans l'allocation de la croissance. Il est généralement admis que les arbres attribuent d'abord leurs ressources au feuillage et à la cime, ensuite aux racines, aux réserves et en dernier lieu, à la croissance radiale (WARING et PITMAN 1985). La validation du modèle complet de défilement pour le sapin baumier et l'épinette noire à l'aide de tiges opprimées et intermédiaires a démontré que la position sociale de la tige ne modifiait pas la forme de la tige, ce qui confirme ainsi la validité de l'échantillon utilisé dans la présente étude.

Aucune tendance générale n'est observée quant au comportement du défilement des espèces étudiées en fonction des différentes végétations potentielles. Chez le sapin baumier, on observe une augmentation du défilement des stations moins riches, les végétations potentielles résineuses (RP1, RS1, RS2, RS5, RE2), vers les sites plus riches, les végétations potentielles mélangées à bouleau jaune (MJ1, MJ2). Cependant, aucune distinction n'a pu être établie entre les différentes végétations potentielles mélangées plus boréales (MS1, MS2, MS4, MS6) qui montrent un défilement intermédiaire. Pour le peuplier faux-tremble cependant, le gradient est dans le sens inverse. Son défilement augmente des stations plus riches, les végétations potentielles des érablières (FE1 et FE2) et de la pessière noire à peuplier faux-tremble (ME1), vers les stations moins riches, comme celles de la sapinière à érable rouge et de la sapinière à épinette noire (MS6 et RS2).

Il n'y a pas de gradients si clairs pour l'épinette blanche et l'épinette noire. Cependant, deux conditions se distinguent nettement. Sur des sites d'altitude plus élevée (MS4 : sapinière montagnarde), l'épinette blanche a un défilement plus important que sur les autres types de végétations potentielles. Cela corrobore les observations selon lesquelles la hauteur de ces arbres plafonne sur les sites de la sapinière montagnarde à une hauteur moindre que sur les autres sites de la sapinière, moins exposés au vent et au climat moins rigoureux. De même, le défilement de l'épinette noire est plus fort dans les pessières à épinette noire à lichens (RE1), où l'épinette noire croît généralement dans des peuplements plus ouverts que dans les sapinières à épinette noire (RS2) et que dans les autres végétations potentielles où les épinettes noires ont été échantillonnées. Par contraste, la forme du sapin baumier ne change

pas selon les végétations potentielles résineuses. Il semblerait donc que les épinettes peuvent changer l'allocation de leurs ressources en fonction de l'environnement physique, tandis que le sapin baumier y est moins sensible. Par contre, cette hypothèse ne s'applique qu'aux arbres ayant un diamètre à hauteur de poitrine supérieur à 9,1 cm, et appartenant aux statuts sociaux dominant et codominant.

Considérant les différences marquées entre la forme des épinettes noires et des épinettes blanches des domaines bioclimatiques de l'Est et de l'Ouest, de même que l'absence de tendance claire pour le sapin baumier, il semble que les épinettes de grande taille ont plus de facilité à changer l'allocation de leurs ressources que le sapin baumier. Le bouleau à papier montre aussi une différence de forme similaire à celle de l'épinette blanche : son défilement est plus faible dans les sous-domaines bioclimatiques de l'Ouest que de l'Est. Rappelons que les précipitations sont généralement plus abondantes et mieux réparties au cours de la saison de croissance dans les domaines bioclimatiques de l'Est que de l'Ouest. Les stratégies d'allocation des ressources varient donc avec le climat et diffèrent entre les espèces.

Par ailleurs, l'effet du drainage sur la forme diffère entre le sapin baumier et l'épinette noire. Dans le cas de l'épinette noire, le défilement est plus important sur des sites à régime hydrique subhydrique à hydrique (classe de drainage 4, 5 et 6). Le sapin baumier, quant à lui, a un défilement plus important sur les sites à régime hydrique mésique à subhydrique (classes de drainage 2, 3 et 4). Il est d'ailleurs bien connu que le sapin préfère les sites plus secs que l'épinette noire (BURNS et HONKALA 1990).

Selon LARSON (1963), des arbres sur des sites plus riches auront un défilement plus important. La présente étude confirme cette observation pour le sapin baumier, mais l'infirme dans le cas du bouleau à papier. On observe cependant que lorsque le défilement est plus fort, les arbres sont alors plus trapus, comme dans certains milieux aux conditions extrêmes. C'est le cas des milieux montagnards (MS4) où la croissance de l'épinette blanche est sans doute influencée par des facteurs environnementaux extrêmes. Il en est de même pour l'épinette noire dans les sites plus pauvres et dans les peuplements plus ouverts de la végétation potentielle de la pessière à lichens (RE1). Cela met en lumière

qu'il faut probablement prendre en considération les autres facteurs de compétition (densité du peuplement, historique des traitements sylvicoles). Les coefficients de forme liés aux attributs physiques pourraient alors être employés simultanément avec l'indice de qualité de station, pour que l'adéquation des arbres aux sites maximise le volume des tiges pour un diamètre donné.

D'après cette interprétation des paramètres, le fait que le sapin baumier a un défilement plus important sur les sites de classes de drainage 3 et 4 indiquerait qu'il est mieux adapté à croître sur ceux-ci. De même, il serait mieux adapté aux sites avec une végétation potentielle mélangée (MJ1, MJ2, MS1, MS2, MS4, MS6) qu'à ceux avec une végétation potentielle résineuse (RE2, RP1, RS1, RS2, RS5).

Cette approche a l'avantage de pouvoir s'appliquer à des peuplements à structure irrégulière ou inéquienne, contrairement à l'indice de qualité de station qui ne peut servir que pour les peuplements à structure régulière ou équienne. Cependant, des études plus poussées à l'aide d'analyses de tige seraient nécessaires pour mieux comprendre les patrons d'allocation des arbres et l'influence des variables de site et d'arbre, de même que pour valider l'hypothèse selon laquelle le défilement peut servir d'indice pour classifier la productivité d'une essence sur un site donné. En fait, les modèles de défilement permettent d'obtenir une image statique de la forme des arbres, mais ne renseignent pas sur la répartition de la croissance le long du tronc.

Finalement, les équations de défilement peuvent servir au calcul du volume d'une tige, que ce soit le volume total, le volume jusqu'à un diamètre minimum d'utilisation (comme le volume marchand) ou le volume entre deux points arbitraires le long de la tige (p. ex. le volume d'une bille). Ces démarches outrepassent les limites de ce mémoire, mais peuvent être consultées dans FORTIN *et al.* (sous presse). Notons cependant que les équations de défilement permettent, par débitage virtuel des tiges au moyen d'équations mathématiques (ou d'un logiciel adapté), de déterminer ou encore d'optimiser le panier de produits du bois d'une tige. Cela permet de comparer la valeur, sur le plan économique, de tiges de défilements différents. Ainsi, ces équations de défilement sont d'un grand intérêt pour la mise en marché des bois et pour l'industrie de la transformation du bois.

Conclusion

Cette étude a bénéficié d'une base de données de grande envergure constituée d'analyses de tiges effectuées sur l'ensemble de la forêt publique québécoise. Cette base de données nous a permis d'ajuster des modèles de défilement pour neuf espèces d'arbres parmi les plus importantes au Québec, d'un point de vue biologique et commercial. Par ailleurs, la diversité des conditions écologiques dans lesquelles ces données ont été récoltées a permis de tester plusieurs variables écologiques dans les modèles.

Même s'il en ressort que le drainage, le type écologique et le sous-domaine bioclimatique n'ont qu'un effet marginal sur le défilement des tiges, cet effet est néanmoins significatif. Il n'existe pas de patron général quant à l'effet de ces variables. Par exemple, certaines espèces ont des défilements plus

forts dans l'ouest du Québec, alors que d'autres suivent une tendance inverse. En fait, la réponse aux variables écologiques est spécifique aux espèces et dépend probablement de leur autécologie. Plus de travaux, en particulier ceux avec des données d'analyses de tiges, seraient requis pour valider l'utilisation du défilement comme un outil pour définir la productivité des stations.

Les équations qui sont présentées dans ce mémoire ouvrent la porte à des analyses du panier de produits du bois d'une tige, et de leur valeur économique, qui tiennent compte des particularités régionales et des stations. C'est un pas de plus vers un modèle expert plus complet pour guider les décisions sylvicoles et les stratégies d'aménagement.

Références

- BELSLEY, D.A., E. KUH et R.E. WELSCH, 2004. *Regression diagnostics. Identifying influential data and sources of collinearity*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc. Hoboken, New Jersey. 292 p.
- BONATE, P.L., 1999. *The effect of collinearity on parameter estimates in nonlinear mixed effect models*. Pharm. Res. 16(5) : 709-717.
- BURNS, R.L. et B.H. HONKALA, 1990. *Sylvics of North America : 1. Conifers; 2. Hardwoods*. U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Washington, DC, U.S.A. Agriculture Handbook 654. [www.na.fs.fed.us/spfo/pubs/silvics_manual/table_of_contents.htm].
- FORTIN, M. et L. LANGEVIN, 2010. *ARTÉMIS-2009 : un modèle de croissance basé sur une approche par tiges individuelles pour les forêts du Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles et de la Faune, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 156. 48 p. [www.mrn.gouv.qc.ca/publications/forets/connaissances/recherche/Fortin-Mathieu/Memoire156.pdf].
- FORTIN, M., S. BERNIER, J.-P. SAUCIER et F. LABBÉ, 2009. *Une relation hauteur-diamètre tenant compte de l'influence de la station et du climat pour 20 espèces commerciales du Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles et de la Faune, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 153. 22 p. [www.mrn.gouv.qc.ca/publications/forets/connaissances/recherche/Fortin-Mathieu/Memoire153.pdf].
- FORTIN, M., R. SCHNEIDER et J.-P. SAUCIER, sous presse. *Volume and error variance predictions from an integrated stem taper models*. For. Sci. Disponible en ligne à [www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/pre-prints/forsci11146].
- GARBER, S.M. et D.A. MAGUIRE, 2003. *Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures*. For. Ecol. Manage. 179(1-3) (3 juillet) : 507-522.
- GREGOIRE, T.G., Q.F. LIN, J. BOUDREAU et R. NELSON, 2008. *Regression estimation following the square-root transformation of the response*. For. Sci. 54(6) : 597-606.
- GRONDIN, P., J.-P. SAUCIER, J. BLOUIN, J. GOSSELIN et A. ROBITAILLE, 2003. *Information écologique et planification forestière au Québec, Canada*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles, de la Faune et des Parcs, Direction de la recherche forestière. Note de recherche forestière n° 118. 10 p. [www.mrn.gouv.qc.ca/publications/forets/connaissances/recherche/Note118.pdf].
- HANN, D.W. et M.L. HANUS, 2004. *Evaluation of non-spatial approaches and equation forms used to predict tree crown recession*. Can. J. For. Res. 34 : 1993-2003.
- HUANG, S., S. TITUS, D. PRICE et D. MORGAN, 1999. *Validation of ecoregion-based taper equations for white spruce in Alberta*. For. Chron. 75 : 281-292.
- KOZAK, A., 1988. *A variable-exponent taper equation*. Can. J. For. Res. 18(11) : 1363-1368.
- KOZAK, A., 1997. *Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions*. Can. J. For. Res. 27(5) : 619-629.
- KOZAK, A., 2004. *My last words on taper equations*. For. Chron. 80(4) : 507-515.
- LARSON, P.R., 1963. *Stem form development of forest trees*. For. Sci. 9 (Supplement 5) : a0001-42.
- LEJEUNE, G., C.-H. UNG, M. FORTIN, X. JING GUO, M.-C. LAMBERT et J.-C. RUEL, 2009. *A simple stem taper model with mixed effects for boreal black spruce*. Eur. J. For. Res. 128(5) : 505-513.
- LI, R. et A.R. WEISKITTEL, 2010. *Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian Region*. Ann. For. Sci. 67(3) : 302. [doi: 10.1051/forest/2009109].
- LITTELL, R.C., G.A. MILLIKEN, W.W. STROUP et R.D. WOLFINGER, 1996. *SAS system for mixed models*. SAS Institute Inc., Cary, NC, U.S.A. 633 p.
- MINISTÈRE DES RESSOURCES NATURELLES ET DE LA FAUNE (MRNF), 2009. *Normes d'inventaire forestier. Analyse des tiges. Sélection, récolte et mesure en laboratoire*. Édition 2009. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles et de la Faune, Forêt Québec, Direction des inventaires forestiers. 143 p.

- MORRIS, D.M. et W.H. PARKER, 1992. *Variable-quality form in mature jack pine stands: quantification and relationship with environmental factors*. Can. J. For. Res. 22(3) : 279–289.
- MUHAIRWE, C.K., 1994. *Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine*. Can. J. For. Res. 24(9) : 1904–1913.
- PINHEIRO, J.C. et D.M. BATES, 2000. *Mixed-effects models in S and S-Plus*. Springer Verlag, New York, NY, U.S.A. 530 p.
- PINHEIRO, J., D. BATES, S. DEBROY, D. SARKAR et R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010. *nlme: Linear and nonlinear mixed effects models*. R package version 3.1-97. [cran.r-project.org/web/packages/nlme/index.html].
- QUINN, G.P. et M.J. KEOUGH, 2002. *Experimental design and data analysis for biologists*. Cambridge University Press, Cambridge University Press, Royaume-Uni. 537 p.
- SAUCIER, J.-P., J.-F. BERGERON, P. GRONDIN et A. ROBITAILLE, 1998. *Les régions écologiques du Québec méridional (3^e version) : un des éléments du système hiérarchique de classification écologique du territoire mis au point par le ministère des Ressources naturelles du Québec*. Supplément de l'Aubelle, février-mars 1998. 12 p.
- SAUCIER, J.-P., P. GRONDIN, A. ROBITAILLE et J.-F. BERGERON, 2003. *Zones de végétation et domaines bioclimatiques du Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles, de la Faune et des Parcs, Direction des inventaires forestiers. Code de diffusion : 2003-3043. 2 p. [www.mrn.gouv.qc.ca/publications/forets/connaissances/zone-vegetation-2003.pdf].
- SAUCIER, J.-P., C. GAGNÉ et S. BERNIER, 2006. *Comparing site index by site types along an ecological gradient in southern Québec using stem analysis*. Colloque Eastern CANUSA : *Les sciences forestières au-delà des frontières*, 19-20 octobre 2006, Manuel de conférence, seconde édition, Québec (Québec). p. 136-143. [www.mrn.gouv.qc.ca/ecanusa/documents/manuel-conference.pdf].
- SAUCIER, J.-P., P. GRONDIN, A. ROBITAILLE, J. GOSSELIN, C. MORNEAU, P.J.H. RICHARD, J. BRISSON, L. SIROIS, A. LEDUC, H. MORIN, E. THIFFAULT, S. GAUTHIER, C. LAVOIE et S. PAYETTE, 2009. *Écologie forestière*. Dans : ORDRE DES INGÉNIEURS FORESTIERS DU QUÉBEC (éd.), *Manuel de foresterie*, 2^e édition, Éditions MultiMondes, Québec, Qc, Canada. p. 165-316.
- SHARMA, M. et R.G. ODERWALD, 2001. *Dimensionally compatible volume and taper equations*. Can. J. For. Res. 31(5) : 797–803.
- SHARMA, M. et J. PARTON, 2009. *Modeling stand density effects on taper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis*. For. Sci. 55(3) : 268–282.
- SHARMA, M. et S.Y. ZHANG, 2004. *Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern Canada*. For. Ecol. Manage. 198(1-3) : 39-53.
- TRINCADO, G. et H.E. BURKHART, 2006. *A generalized approach for modeling and localizing stem profile curves*. For. Sci. 52(6) : 670–682.
- VALENTINE, H.T. et T.G. GREGOIRE., 2001. *A switching model of bole taper*. Can. J. For. Res. 31(8) : 1400–1409.
- WARING, R.H. et G.B. PITMAN, 1985. *Modifying lodgepole pine stands to change susceptibility to mountain pine beetle attack*. Ecology 66(3) : 889-897.
- WATT, M.S., D.J. PALMER, M.O. KIMBERLEY, B.K. HÖCK, T.W. PAYN et D.J. LOWE, 2010. *Development of models to predict Pinus radiata productivity throughout New Zealand*. Can. J. For. Res. 40 : 488-499.
- WEISKITTEL, A.R., L.S. KENEFIC, R.S. SEYMOUR et L.M. PHILLIPS, 2009. *Long-term effects of pre-commercial thinning on the stem dimensions, form and branch characteristics of red spruce and balsam fir crop trees in Maine, USA*. Silva Fennica 43(3) : 397–409.

Annexes

Annexe 1. Signification des codes des sous-domaines bioclimatiques, des classes de drainage et des végétations potentielles.

Codes utilisés	Description
Sous-domaine bioclimatique	
2est	Érablière à tilleul de l'est
2ouest	Érablière à tilleul de l'ouest
3est	Érablière à bouleau jaune de l'est
3ouest	Érablière à bouleau jaune de l'ouest
4est	Sapinière à bouleau jaune de l'est
4ouest	Sapinière à bouleau jaune de l'ouest
5est	Sapinière à bouleau blanc de l'est
5ouest	Sapinière à bouleau blanc de l'ouest
6est	Pessière à mousses de l'est
6ouest	Pessière à mousses de l'ouest
Classe de drainage	
0	Excessif
1	Rapide
2	Bon
3	Modéré
4	Imparfait
5	Mauvais
6	Très mauvais
Végétation potentielle	
FE2	Érablière à tilleul
FE3	Érablière à bouleau jaune
ME1	Pessière noire à peuplier faux-tremble
MJ1	Bétulaie jaune à sapin et érable à sucre
MJ2	Bétulaie jaune à sapin
MS1	Sapinière à bouleau jaune
MS2	Sapinière à bouleau blanc
MS4	Sapinière à bouleau blanc montagnarde
MS6	Sapinière à érable rouge
RC3	Cédrière tourbeuse à sapins
RE1	Pessière noire à lichens
RE2	Pessière noire à mousses ou à éricacées
RE3	Pessière noire à sphaignes
RP1	Pinède blanche ou pinède rouge
RS1	Sapinière à thuya
RS2	Sapinière à épinette noire
RS5	Sapinière à épinette rouge

Annexe 2. Approximation de l'espérance mathématique du diamètre par un développement de Taylor du second degré.

Définissons \mathbf{u}_{ijk} comme un vecteur qui contient tous les termes d'erreur du modèle, c'est-à-dire $\mathbf{u}_{ijk} = (\mathbf{b}_i^T, \mathbf{b}_{ij}^T, \varepsilon_{ijk})^T$. Si l'on réduit le modèle de défilement à une fonction de ce vecteur, le diamètre correspond à la racine carrée de cette fonction, soit $d_{ijk} = \sqrt{f(\mathbf{u}_{ijk})}$. Un développement de Taylor du second degré de cette fonction au point $\mathbf{u}_{ijk} = \mathbf{0}$ donne

$$d_{ijk} \approx \sqrt{f(\mathbf{0})} + \frac{1}{2\sqrt{f(\mathbf{0})}} \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}^T} \mathbf{u}_{ijk} - \frac{1}{8(f(\mathbf{0}))^{3/2}} \mathbf{u}_{ijk}^T \left(\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}} \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}^T} - 2f(\mathbf{0}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk} \partial \mathbf{u}_{ijk}^T} \right) \mathbf{u}_{ijk} \quad [\text{A1}]$$

L'espérance mathématique de l'approximation [A1] s'exprime ainsi :

$$E[d_{ijk}] \approx \sqrt{f(\mathbf{0})} - \frac{1}{8(f(\mathbf{0}))^{3/2}} \mathbf{1}^T \left(\left(\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}} \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}^T} - 2f(\mathbf{0}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk} \partial \mathbf{u}_{ijk}^T} \right) \bullet \text{Var}(\mathbf{u}_{ijk}) \right) \mathbf{1} \quad [\text{A2}]$$

où \bullet est le produit d'Hadamard de deux matrices et $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne contenant le nombre approprié d'éléments 1. Compte tenu du postulat d'indépendance entre les différents niveaux hiérarchiques des effets aléatoires et l'erreur résiduelle, la matrice de variance-covariance de \mathbf{u}_{ijk} est une matrice diagonale par blocs, soit

$$\text{Var}(\mathbf{u}_{ijk}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{placette}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{arbre}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{Var}(\varepsilon_{ijk}) \end{bmatrix} \quad [\text{A3}]$$

En pratique, $f(\mathbf{0})$ est la prédiction obtenue en fixant tous les effets aléatoires et l'erreur résiduelle à leur espérance mathématique, soit 0. Les dérivées premières et secondes se calculent alors comme suit :

$$\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1}} = \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,1}} = D_{ij}^2 \cdot \left(\frac{H_{ij} - h_{ijk}}{H_{ij} - 1,3} \right) \cdot \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right)^{2 - \mathbf{x}_{ijk}\beta} = \frac{f(\mathbf{0})}{\alpha} \quad [\text{A4a}]$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,2}} = \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,2}} = -\alpha D_{ij}^2 \cdot \left(\frac{H_{ij} - h_{ijk}}{H_{ij} - 1,3} \right) \cdot \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right)^{2 - (\mathbf{x}_{ijk}\beta)} \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) = -f(\mathbf{0}) \cdot \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \quad [\text{A4b}]$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \varepsilon_{ijk}} = 1 \quad [\text{A4c}]$$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1} \partial b_{i,1}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,1} \partial b_{ij,1}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1} \partial b_{ij,1}} = 0 \quad [\text{A4d}]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1} \partial b_{i,2}} &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,1} \partial b_{ij,2}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1} \partial b_{ij,2}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,1} \partial b_{i,2}} \\ &= -D_{ij}^2 \cdot \left(\frac{H_{ij} - h_{ijk}}{H_{ij} - 1,3} \right) \cdot \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right)^{2 - (\mathbf{x}_{ijk}\beta)} \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) = -\frac{f(\mathbf{0})}{\alpha} \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \end{aligned} \quad [\text{A4e}]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,2} \partial b_{i,2}} &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,2} \partial b_{ij,2}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,2} \partial b_{ij,2}} \\ &= \alpha D_{ij}^2 \cdot \left(\frac{H_{ij} - h_{ijk}}{H_{ij} - 1,3} \right) \cdot \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right)^{2-(x_{ijk}\beta)} \left(\ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \right)^2 = f(\mathbf{0}) \cdot \left(\ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad [A4f]$$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,1} \partial \varepsilon_{ijk}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{i,2} \partial \varepsilon_{ijk}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,1} \partial \varepsilon_{ijk}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial b_{ij,2} \partial \varepsilon_{ijk}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial \varepsilon_{ijk} \partial \varepsilon_{ijk}} = 0 \quad [A4g]$$

L'approximation de l'espérance du diamètre en [A2] s'obtient donc en remplaçant les termes $\partial f(\mathbf{0})/\partial \mathbf{u}_{ijk}$ et $\partial^2 f(\mathbf{0})/\partial \mathbf{u}_{ijk} \partial \mathbf{u}_{ijk}^T$ par

$$\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk}} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{0})/\alpha \\ -f(\mathbf{0}) \cdot \ln(h_{ijk}/1,3) \\ f(\mathbf{0})/\alpha \\ -f(\mathbf{0}) \cdot \ln(h_{ijk}/1,3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad [A5a]$$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{u}_{ijk} \partial \mathbf{u}_{ijk}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ijk} & \mathbf{A}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{ijk} & \mathbf{A}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad [A5b]$$

où

$$\mathbf{A}_{ijk} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f(\mathbf{0})}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \\ -\frac{f(\mathbf{0})}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) & f(\mathbf{0}) \cdot \left(\ln \left(\frac{h_{ijk}}{1,3} \right) \right)^2 \end{bmatrix} \quad [A6]$$

Des simulations Monte Carlo ont permis de démontrer que l'erreur associée à cette approximation de l'espérance mathématique est inférieure à 0,05 mm.

Annexe 3. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèses) du modèle-placette (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette}$).

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
Total	7 647	16 382	30 260	1 068	2 607	11 291	33 713	1 965
Placette	134	315	563	18	38	258	651	42
Arbre	657	1 324	2 803	89	165	799	2 985	200
AIC	144 414,0	337 000,2	554 587,6	20 909,5	52 343,9	228 561,1	636 782,2	38 970,6
BIC	144 504,3	337 092,7	554 695,7	20 954,3	52 408,4	228 671,1	636 967,5	39 032,0
log vrai-semblance	-72 194,0	-168 488,1	-277 280,8	-10 445,7	-26 160,9	-114 265,6	-318 369,1	-19 474,3
Pente $\hat{\alpha}$	0,8965 (0,0012)	0,9269 (0,0009)	0,9082 (0,0005)	0,9163 (0,0016)	0,8638 (0,0023)	0,8845 (0,0012)	0,9030 (0,0007)	0,9023 (0,0024)
Ordonnée à l'origine $\hat{\beta}_0$	2,2492 (0,0082)	2,2144 (0,0025)	2,1829 (0,0049)	2,3178 (0,0350)	2,0602 (0,0206)	2,1573 (0,0191)	2,2282 (0,0102)	2,2467 (0,0136)
Variables de peuplement continues $\hat{\beta}_{13} (ST_1)$					0,0020 (0,0005)	0,0019 (0,0005)	0,0005 (0,0002)	
$\hat{\beta}_{14} (N_1)$			-7,40E-06 (2,41E-06)	-5,67E-05 (2,43E-05)		-4,93E-05 (1,18E-05)	-1,13E-05 (4,88E-06)	
$\hat{\beta}_{15} (a_1)$							-5,10E-05 (1,24E-05)	
$\hat{\beta}_{16,FE2}$						0	0	
$\hat{\beta}_{16,FE3}$						0	0	
$\hat{\beta}_{16,ME1}$			0			0	0	
$\hat{\beta}_{16,MJ1}$						0,0306 (0,0120)	0	
$\hat{\beta}_{16,MJ2}$						0,0306 (0,0120)	0	
$\hat{\beta}_{16,MS1}$				-7,1098 (0,0420)		0,0306 (0,0120)	-0,0379 (0,0073)	
$\hat{\beta}_{16,MS2}$						0,0306 (0,0120)	-0,0379 (0,0073)	

Annexe 3. (Suite)

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
$\hat{\beta}_{16,MS4}$							-0,0379 (0,0073)	
$\hat{\beta}_{16,MS6}$			0			0,0545 (0,0159)	-0,0379 (0,0073)	
$\hat{\beta}_{16,RE1}$			0,0535 (0,0101)					
$\hat{\beta}_{16,RE2}$			0				-0,0565 (0,0070)	
$\hat{\beta}_{16,RE3}$			0					
$\hat{\beta}_{16,RPI}$							-0,0565 (0,0070)	
$\hat{\beta}_{16,RS1}$							-0,0565 (0,0070)	
$\hat{\beta}_{16,RS2}$			0,0152 (0,0029)			0,0545 (0,0159)	-0,0565 (0,0070)	
$\hat{\beta}_{16,RS5}$				0			-0,0565 (0,0070)	
<hr/>								
$\hat{\beta}_{17,1}$							0	
$\hat{\beta}_{17,2}$							0	
$\hat{\beta}_{17,3}$							0,0263 (0,0056)	
$\hat{\beta}_{17,4}$							0,0263 (0,0056)	
<hr/>								
$\hat{\beta}_{18,2,est}$	0				0	0	0	
$\hat{\beta}_{18,2,ouest}$					0	0	0	
$\hat{\beta}_{18,3,est}$	0		0		0	0	-0,0223 (0,0083)	

Annexe 3. (Suite et fin)

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
$\hat{\beta}_{18,3\text{ouest}}$	-0,0273 (0,0108)				0,0354 (0,0102)	0	0	0
$\hat{\beta}_{18,4\text{est}}$	0		0		0	0,0314 (0,0087)	0,0293 (0,0063)	0,0347 (0,0160)
$\hat{\beta}_{18,4\text{ouest}}$	-0,0273 (0,0108)		0,0175 (0,0030)		0,0354 (0,0102)	0	0	0
$\hat{\beta}_{18,5\text{est}}$	0		0		0,0314 (0,0087)	0	0	0,0551 (0,0231)
$\hat{\beta}_{18,5\text{ouest}}$	-0,0273 (0,0108)		0,0175 (0,0030)		0		-0,0192 (0,0070)	
$\hat{\beta}_{18,6\text{est}}$	0		0				-0,0149 (0,0071)	
$\hat{\beta}_{18,6\text{ouest}}$	-0,0273 (0,0108)		0,0175 (0,0030)		0	0	0	
$\hat{\sigma}$	6 709	10 368	4 216	10 370	13 829	14 409	6 759	9 669
$\hat{\delta}_1$	0,0021	0,2262	0,1493		0,0000	0,0105	0,0944	0,0006
$\hat{\delta}_2$	0,2280	0,8983	0,3683	0,2311	0,2124	0,2489	0,3512	0,2001
Fonction de corrélation	$\hat{\rho}_{res}$	0,8016	0,7475	0,8425	0,9050	0,8680	0,8178	0,7478
	$\hat{\sigma}_{plac,1}$	0,0114	0,0109			0,0144	0,0162	0,0130
	$\hat{\sigma}_{plac,2}$	0,0478	0,0248			0,0416	0,0381	
	$\hat{\rho}_{plac}$	-0,2330	0,0210				0,0830	
Effets aléatoires	$\hat{\sigma}_{arbre,1}$	0,0144	0,0060	0,0217	0,0294	0,0217	0,0154	0,0168
	$\hat{\sigma}_{arbre,2}$	0,0772	0,0597	0,0602	0,0586	0,0632	0,0585	0,0862
	$\hat{\rho}_{arbre}$	-0,0140	0,4690	-0,0580	0,0950		-0,0050	

Annexe 4. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèses) du modèle-arbre (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_{ij}^{arbre}\boldsymbol{\beta}^{arbre} + \mathbf{x}_{ijk}^{position}\boldsymbol{\beta}^{position}$).

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Pin blanc	Sapin baumier	Thuya occidental
Total	7 647	16 382	30 360	1 068	2 607	11 291	787	33 713	1 965
Placette	134	315	563	18	38	258	10	651	42
Arbre	657	1 324	2 803	89	165	799	50	2 985	200
AIC	139 538,7	325 034,5	549 618,1	20 281,6	51 212,1	222 383,1	16 278,2	627 987,7	38 535,6
BIC	139 656,8	325 165,5	549 726,3	20 356,3	51 276,6	222 493,0	16 348,2	628 122,5	38 625,0
log vrai-semblance	-69 752,4	-162 500,3	-274 796,1	-10 125,8	-25 595,0	-111 176,5	-8 124,1	-313 977,8	-19 251,8
Pente	$\hat{\alpha}$	0,8961 (0,0012)	0,9206 (0,0007)	0,9120 (0,0005)	0,9173 (0,0021)	0,8635 (0,0023)	0,8905 (0,0035)	0,9013 (0,0007)	0,9024 (0,0024)
Ordonnée à l'origine	$\hat{\beta}_0$	9,1389 (0,7286)	4,5306 (0,2550)	1,9038 (0,0069)	9,4967 (1,2717)	3,1476 (0,0056)	1,6817 (0,0416)	1,6687 (0,0087)	5,1306 (0,5617)
	$\hat{\beta}_1$	-3,6074 (0,3902)	-1,3308 (0,1431)	-4,0790 (0,7288)	-3,8327 (0,2714)	0,8844 (0,0013)	0,5029 (0,0395)		-1,5183 (0,3137)
	$\hat{\beta}_2$	-0,5462 (0,0329)	-0,1907 (0,0091)	-0,2964 (0,0287)	-0,5478 (0,0187)				-0,3237 (0,0563)
	$\hat{\beta}_3$	-2,6875 (0,2743)	-0,8878 (0,0958)	-2,8435 (0,3267)	-2,9524 (0,1860)				-1,1486 (0,2237)
	$\hat{\beta}_4$	-2,7167 (0,1661)	-1,5385 (0,0645)	-2,8394 (0,3267)	-2,6034 (0,1164)				-1,3291 (0,1531)
Variables de position	$\hat{\beta}_5$		0,4719 (0,0042)					0,7208 (0,0043)	
	$\hat{\beta}_6$		-0,0696 (0,0006)					-0,1007 (0,0006)	
	$\hat{\beta}_7$				2,7948 (0,2317)				
	$\hat{\beta}_8$				10,6487 (0,3955)				
	$\hat{\beta}_9$						4,1597 (0,3354)		
	$\hat{\beta}_{10}$						-0,0703 (0,0155)		

Annexe 4. (Suite et fin)

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Pin blanc	Sapin baumier	Thuya occidental
Variables de l'arbre									
$\hat{\beta}_{11}$		0,0001 (0,00004)	0,0006 (0,00003)					0,0006 (0,00003)	
$\hat{\beta}_{12}$	-0,0160 (0,0024)		-0,0105 (0,0005)					-0,0059 (0,0006)	
Fonction de variance									
$\hat{\sigma}$	4012	9064	2605	6095	12866	7564	16358	4104	7325
$\hat{\delta}_1$	0,0059	0,0120	0,2532		0,0085	0,0149	0,0000	0,1145	0,0005
$\hat{\delta}_2$	0,3470	0,3827	0,4717	0,3375	0,4330	0,3536	0,3198	0,4234	0,2674
Fonction de corrélation									
$\hat{\rho}_{res}$	0,0313	0,0000	0,0154	0,0033	0,8790	0,0355	0,7854	0,0306	0,0307
Effets aléatoires									
$\hat{\sigma}_{plac,1}$	0,0114	0,0098		0,0069		0,0143	0,0063	0,0163	0,0129
$\hat{\sigma}_{plac,2}$	0,0394	0,0340		0,0302		0,0509	0,0129	0,0296	0,0267
$\hat{\rho}_{plac}$	-0,1530	-0,3350		0,4160		0,2670	0,9670	0,2160	-0,0170
$\hat{\sigma}_{arbre,1}$	0,0145	0,0136	0,0168	0,0126	0,0291	0,0215	0,0203	0,0125	0,0166
$\hat{\sigma}_{arbre,2}$	0,0544	0,0643	0,0478	0,0394	0,0650	0,0315	0,0449	0,0418	0,0651
$\hat{\rho}_{arbre}$	-0,0500	-0,1220	0,159	0,0670	0,0390		-0,3690	0,0020	-0,0700

Annexe 5. Valeurs des différents coefficients (erreurs-types entre parenthèse) du modèle complet (c'est-à-dire $\mathbf{x}_{ijk}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}_i^{placette} \boldsymbol{\beta}^{placette} + \mathbf{x}_{ij}^{arbre} \boldsymbol{\beta}^{arbre} + \mathbf{x}_{ijk}^{position} \boldsymbol{\beta}^{position}$).

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
Total	7 647	16 382	30 360	1 068	2 607	11 291	33 713	1 965
Nombre d'observations								
Placette	134	315	563	18	38	258	651	42
Arbre	657	1 324	2 803	89	165	799	2 985	200
Statistiques d'ajustement								
AIC	139 001	324 995	549 513	20 275	51 193	222 313	620 930	38 533
BIC	139 126	325 172	549 663	20 360	51 281	222 452	621 107	38 634
log vrai-semblance	-69 482	-162 475	-274 739	-10 121	-25 581	-111 137	-310 444	-19 249
Pente $\hat{\alpha}$	0,8964 (0,0012)	0,9206 (0,0007)	0,9120 (0,0005)	0,9172 (0,0022)	0,8635 (0,0023)	0,8840 (0,0013)	0,9003 (0,0007)	0,9024 (0,0024)
Ordonnée à l'origine $\hat{\beta}_0$	11,5812 (0,9743)	5,1488 (0,2795)	1,9095 (0,0085)	9,7057 (1,19371)	3,0404 (0,0224)	9,1010 (0,4583)	1,7606 (0,0142)	4,8122 (0,5527)
$\hat{\beta}_1$	-4,9836 (0,5217)	-1,6957 (0,1567)		-4,1138 (0,6826)		-3,7683 (0,2627)		-1,3588 (0,3080)
$\hat{\beta}_2$	-0,5295 (0,0343)	-0,1992 (0,0093)		-0,2969 (0,0285)		-0,5457 (0,0185)		-0,3190 (0,0562)
$\hat{\beta}_3$	-3,5170 (0,3620)	-1,1317 (0,1049)		-2,8663 (0,4549)		-2,9089 (0,1801)		-1,0372 (0,2197)
$\hat{\beta}_4$	-3,4929 (0,2225)	-1,6962 (0,0703)		-2,8551 (0,3068)		-2,5753 (0,1128)		-1,2625 (0,1511)
Variables de position			0,4719 (0,0042)				0,6623 (0,0051)	
			-0,0696 (0,0006)				-0,0819 (0,0006)	
					2,7833 (0,2301)			
					10,6341 (0,3947)			

Annexe 5. (suite)

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
Variables de l'arbre								
$\hat{\beta}_{11}$		1,50e-4 (4,07e-5)	5,85e-4 (3,77e-5)				3,10e-4 (4,11e-5)	
$\hat{\beta}_{12}$	-0,0207 (0,0033)		-0,0112 (0,0006)					
Variables de peuplement continues								
$\hat{\beta}_{13} (ST_1)$	-0,0009 (0,0004)			-0,0041 (0,0011)	0,0020 (0,0005)			
$\hat{\beta}_{14} (N_1)$		2,70e-5 (7,86e-6)	-7,70e-6 (2,71e-6)					
$\hat{\beta}_{15} (a_i)$							-4,36e-5 (1,36e-5)	
Végétation potentielle								
$\hat{\beta}_{16,FE2}$						0		
$\hat{\beta}_{16,FE3}$						0		
$\hat{\beta}_{16,ME1}$			0			0		
$\hat{\beta}_{16,MJ1}$	0					0,0196 (0,0097)	0	
$\hat{\beta}_{16,MJ2}$	0,0201 (0,0088)		0	0		0,0196 (0,0097)	0	
$\hat{\beta}_{16,MS1}$	0,0163 (0,0077)		0	-0,0594 (0,023661)		0,0196 (0,0097)	-0,0200 (0,0066)	
$\hat{\beta}_{16,MS2}$	0,0163 (0,0077)		0			0,0196 (0,0097)	-0,0200 (0,0066)	
$\hat{\beta}_{16,MS4}$	0,1271 (0,0229)						-0,0200 (0,0066)	
$\hat{\beta}_{16,MS6}$	0		0			0,0524 (0,0122)	-0,0200 (0,0066)	
$\hat{\beta}_{16,RE1}$			0,0490 (0,0092)					
$\hat{\beta}_{16,RE2}$			0					-0,0423 (0,0067)
$\hat{\beta}_{16,RE3}$			0					

Annexe 5. (suite)

	Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
Végétation potentielle (suite)	$\hat{\beta}_{16,RP1}$							-0,0423 (0,0067)	
	$\hat{\beta}_{16,RS1}$		0,0163 (0,0077)					-0,0423 (0,0067)	
	$\hat{\beta}_{16,RS2}$		0	0,0076 (0,0024)			0,0524 (0,0122)	-0,0423 (0,0067)	
	$\hat{\beta}_{16,RS5}$				0			-0,0423 (0,0067)	
Drainage	$\hat{\beta}_{17,1}$			0				0	
	$\hat{\beta}_{17,2}$			0				0	
	$\hat{\beta}_{17,3}$			0				0,0232 (0,0061)	
	$\hat{\beta}_{17,4}$			0,0121 (0,0025)				0,0232 (0,0061)	
	$\hat{\beta}_{17,5}$			0,0121 (0,0025)					
	$\hat{\beta}_{17,6}$								
Sous-domaine bioclimatique	$\hat{\beta}_{18,2\text{est}}$	0	0			0,0322 (0,0158)	0	0	
	$\hat{\beta}_{18,2\text{ouest}}$		-0,0138 (0,0061)			0	0	0	
	$\hat{\beta}_{18,3\text{est}}$	0	0	0		0,0322 (0,0158)	0	-0,0237 (0,0051)	
	$\hat{\beta}_{18,3\text{ouest}}$	-0,0430 (0,0104)	-0,0138 (0,0061)			0,0514 (0,0134)	0	0	0
	$\hat{\beta}_{18,4\text{est}}$	0	0	0		0,0322 (0,0158)	0,0444 (0,0067)	0	0,0372 (0,0155)
	$\hat{\beta}_{18,4\text{ouest}}$	-0,0430 (0,0104)	-0,0138 (0,0061)	0,0151 (0,0026)		0,0658 (0,0242)	0	0	0,0481 (0,0222)
$\hat{\beta}_{18,5\text{est}}$	0	0	0			0,0444 (0,0067)	-0,0237 (0,0051)	0,0372 (0,0155)	

Annexe 5. (suite et fin)

Essence	Bouleau à papier	Épinette blanche	Épinette noire	Épinette rouge	Peuplier à grandes dents	Peuplier faux-tremble	Sapin baumier	Thuya occidental
$\hat{\beta}_{18,5\text{ouest}}$	-0,0430 (0,0104)	-0,0138 (0,0061)	0,0151 (0,0026)			0	-0,0443 (0,0077)	
$\hat{\beta}_{18,6\text{est}}$	0	0	0				-0,0237 (0,0051)	
$\hat{\beta}_{18,6\text{ouest}}$	-0,0430 (0,0104)	-0,0138 (0,0061)	0,0151 (0,0026)			0	0	
$\hat{\sigma}$	4 937	9 061	2 603	6 090	12 851	7 567	5 563	7 326
$\hat{\delta}_1$	0,0091	0,0122	0,2539		0,0085	0,0149	0,0682	0,0005
$\hat{\delta}_2$	0,4083	0,3837	0,4728	0,3371	0,4331	0,3537	0,4052	0,2672
$\hat{\rho}_{\text{res}}$	0,6589	7,74e-25	0,0157	0,0033	0,8786	0,0352	0,8072	0,0289
$\hat{\sigma}_{\text{plac},1}$	0,0114	0,0098		0,0069		0,0142	0,0162	0,0129
$\hat{\sigma}_{\text{plac},2}$	0,0451	0,0301		0,0159		0,0392	0,0429	0,0198
$\hat{\rho}_{\text{plac}}$	-0,2720	-0,2160		0,0920		-0,0310	-0,0370	0,0470
$\hat{\sigma}_{\text{arbre},1}$	0,0146	0,0136	0,0169	0,0126	0,0291	0,0215	0,0158	0,0166
$\hat{\sigma}_{\text{arbre},2}$	0,0730	0,0646	0,0467	0,0394	0,0588	0,0318	0,0655	0,0646
$\hat{\rho}_{\text{arbre}}$	-0,0380	-0,1340	0,1840	0,0660	0,0860	-0,0610	-0,0270	-0,0650



Les projets de modélisation de la croissance et du rendement des forêts menés par la Direction de la recherche forestière sont essentiels à un aménagement efficace des ressources forestières du Québec. Les prévisions de la croissance issues de ces modèles peuvent être complétées par de l'information sur la qualité des tiges afin de mieux supporter la prise de décision par les sylviculteurs et les aménagistes. La connaissance du défilement des tiges est déterminante dans l'évaluation de la qualité des tiges et des produits que l'on peut en tirer. Les équations de défilement présentées dans ce mémoire, les premières à être modulées spatialement et en fonction des stations, ont été développées à cette fin pour les forêts du Québec.

**Ressources
naturelles**

Québec 