

ETS-RT - 2016-001

**ÉTUDE DU TERME
GRAVITATIONNEL DANS LE
MODÈLE D'ÉTAT D'UN BRAS
ROBOTIQUE**

CHARLES FALLAHA, MAAROUF SAAD

**ÉTUDE DU TERME GRAVITATIONNEL DANS LE MODÈLE
D'ÉTAT D'UN BRAS ROBOTIQUE**

RAPPORT TECHNIQUE DE L'ÉTS

CHARLES FALLAHA
MAAROUF SAAD

Génie électrique

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MONTRÉAL, 2 MARS 2016

ETS-RT - 2016-001

**ÉTUDE DU TERME GRAVITATIONNEL DANS LE MODÈLE
D'ÉTAT D'UN BRAS ROBOTIQUE**

CHARLES FALLAHA

MAAROUF SAAD

Génie électrique

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

La version électronique de ce rapport technique est disponible sur le site Web de l'École de technologie supérieure (<http://www.etsmtl.ca>).

Pour se procurer une copie papier, s'adresser à :

Service de la bibliothèque
École de technologie supérieure
1100, rue Notre-Dame Ouest
Montréal (Québec)
H3C 1K3

Téléphone : (514) 396-8946
Télécopieur : (514) 396-8633
Courriel : biblio@etsmtl.ca

© École de technologie supérieure 2016

La citation d'extraits ou la reproduction de courtes sections est permise à la condition de mentionner le nom de l'auteur et la source. Toute reproduction de parties quantitativement ou qualitativement importantes requiert l'autorisation du titulaire des droits d'auteur.

ISBN 978-2-921145-84-8

Dépôt légal : Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2016

Dépôt légal : Bibliothèque et Archives Canada, 2016

STUDY OF THE GRAVITATIONAL TERM IN THE STATE SPACE MODEL OF A ROBOT ARM

CHARLES FALLAHA
MAAROUF SAAD

ABSTRACT

This report studies the gravitational term in the state space model of a robot arm. A new property related to the gravity term is introduced. This property allows in a first place to verify the validity of the gravitation model of the robot. It leads as well to a stability condition that yields to the compensation of the gravity term in the torque vector control law, while preserving the asymptotical convergence of the angles towards the 0 point. A 2 DOF robot will be used in a case study to demonstrate this property, along with a control law based on the one proposed by Arimoto and Takegaki, in which the gravity term is compensated. Simulation results will be presented and demonstrate the validity of the approach.

ÉTUDE DU TERME GRAVITATIONNEL DANS LE MODÈLE D'ÉTAT D'UN BRAS ROBOTIQUE

CHARLES FALLAHA
MAAROUF SAAD

RÉSUMÉ

Ce rapport traite sur l'étude du terme gravitationnel dans le modèle d'état général d'un bras robotique. Une nouvelle relation est introduite qui permet de vérifier la validité de la matrice de gravité dans le modèle. Cette relation permet également de former une contrainte qui peut être utilisée afin de compenser le terme de gravité dans la loi de commande, tout en préservant la convergence asymptotique des variables de joints vers 0. Un robot 2 DDL sera utilisé en tant qu'exemple d'application, avec la loi de commande d'Arimoto et Takegaki, dans laquelle le terme gravitationnel sera compensé en respectant contrainte ci-haut mentionnée. Des résultats de simulation seront produits afin de démontrer la convergence asymptotique des variables de joints vers 0.

TABLE DES MATIÈRES

ABSTRACT	IV
RÉSUMÉ	V
TABLE DES MATIÈRES	VI
LISTE DES FIGURES.....	VII
1 INTRODUCTION	8
2 COMPENSATION DU TERME DE GRAVITÉ	10
3 ÉTUDE DE CAS	13
4 CONCLUSION	18
BIBLIOGRAPHIE	19

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Robot 2 DDL non planaire	13
Figure 2 : λ_2 en fonction de θ_1 et θ_2	15
Figure 3 : Résultats de simulation avec compensation du terme de gravité	16
Figure 4 : Comparaison en simulation avec et sans compensation du terme de gravité.....	17

1 INTRODUCTION

Soit le modèle d'état dynamique complet d'un bras robotique suivant (Saad et al., 1994) :

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V_m(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) \quad (1)$$

Où :

τ est le vecteur couples d'entrée

θ est le vecteur des angles des joints du robot

$M(\theta)$ est la matrice d'inertie définie positive

$V_m(\theta, \dot{\theta})$ est la matrice des forces centrifuges et Coriolis

$G(\theta)$ est le vecteur de gravité du robot

Une relation bien connue entre la matrice d'inertie et la matrice des forces centrifuges et Coriolis permet de vérifier la validité du modèle. Cette relation est donnée par Spong et Vidyasagar (1989) :

$$S = \dot{M}(\theta) - 2V_m(\theta, \dot{\theta}) \quad (2)$$

Où S est une matrice antisymétrique.

La relation donnée par (2) est également utilisée pour simplifier la loi de commande du vecteur des couples. Un exemple de l'utilisation de cette relation est dans l'élaboration de la loi de Takegaki et Arimoto (1981) donnée par :

$$\tau = -K_p\theta - K_v\dot{\theta} + G(\theta) \quad (3)$$

Où K_p et K_v sont des matrices définies positives. La loi de commande (3) est l'équivalent d'une action proportionnelle et dérivée, avec une compensation totale du terme de gravité. Afin de prouver la convergence asymptotique des angles des joints vers zéro avec la loi de commande (3), la fonction candidate de Lyapunov suivante est choisie (Takegaki et Arimoto, 1981) :

$$V = \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \theta^T K_p \theta \quad (4)$$

La dérivation temporelle de V donne après simplification (Takegaki et Arimoto, 1981) :

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T S \dot{\theta} - \dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} \quad (5)$$

Or S étant antisymétrique, (5) implique donc que

$$\dot{V} = -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} \leq 0 \quad (6)$$

L'application du lemme de Barbalat dans ce cas permettra de compléter la démonstration de la stabilité globale asymptotique du système.

Dans la partie suivante, il sera démontré qu'il est également possible de compenser le terme de gravité, de sorte à assurer une linéarité complète de la loi de commande en fonction de θ et $\dot{\theta}$. Cette compensation ne peut cependant se faire que s'il existe une contrainte sur K_p qui sera explicitée dans la section suivante.

2 COMPENSATION DU TERME DE GRAVITÉ

Cette partie démontre que le terme de gravité de la loi (3) peut être compensé partiellement moyennant une contrainte appliquée sur K_p . Énonçons d'abord la propriété suivante :

La différence $G(\theta) - G(0)$ peut s'écrire sous la forme :

$$G(\theta) - G(0) = -\Psi_G(\theta) \cdot \theta \quad (7)$$

Où $\Psi_G(\theta)$ est une matrice symétrique donnée par :

$$\Psi_G(\theta) = - \left(\int_0^1 J_G(h \cdot \theta) dh \right) \quad (8)$$

Avec J_G est la matrice jacobienne de $G(\theta)$ définie comme suit:

$$J_G = \left[\frac{\partial G_i}{\partial \theta_j} \right] \quad (9)$$

À noter que puisque $\Psi_G(\theta)$ est symétrique, ceci implique que toutes ses valeurs propres sont réelles.

Soit alors la proposition suivante :

La loi de commande :

$$\tau = -K_p\theta - K_v\dot{\theta} + G(0) \quad (10)$$

assure la convergence asymptotique globale du système, à condition que la contrainte suivante soit vérifiée :

$$\text{Min}_i(\text{Eig}_i K_p) > \text{Max}_i(\text{Eig}_i \Psi_G) \quad (11)$$

Avec $\text{Eig}_i K_p$ et $\text{Eig}_i \Psi_G$ les $i^{\text{èmes}}$ valeurs propres des matrices K_p et Ψ_G respectivement.

À noter que la loi de commande (10) montre que le vecteur couples est maintenant complètement linéaire en fonction des variables θ et $\dot{\theta}$.

Preuve :

La loi de commande donnée par (10) introduite dans (1) donne :

$$M(\theta)\ddot{\theta} = -V_m(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \Psi_G(\theta) \cdot \theta - K_p\theta - K_v\dot{\theta} \quad (12)$$

Considérons d'autre part la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M\dot{\theta} + \frac{1}{2}\theta^T K_p\theta + U - \theta^T G(0) \quad (13)$$

U est l'énergie potentielle du robot. À noter que U est choisie de sorte que $U - \theta^T G(0) > 0$.

En dérivant (13), et en exploitant la relation suivante :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{\theta}^T G(\theta) \quad (14)$$

On obtient :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{M} \dot{\theta} + \dot{\theta}^T M \ddot{\theta} + \dot{\theta}^T K_p \theta - \dot{\theta}^T \Psi_G(\theta) \cdot \theta \quad (15)$$

En remplaçant dans (15) $M \ddot{\theta}$ par son expression donnée par (12) on obtient après simplification :

$$\dot{V} = -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} \leq 0 \quad (16)$$

En utilisant le lemme de Barbalat, on peut affirmer que $\dot{\theta}$ converge asymptotiquement vers 0. En utilisant ceci dans (12), on obtient :

$$(K_p - \Psi_G(\theta)) \cdot \theta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (17)$$

En utilisant également la contrainte donnée par (11), on peut en déduire que $K_p - \Psi_G(\theta)$ est définie positive. (17) implique donc que θ converge asymptotiquement vers 0.

3 ÉTUDE DE CAS

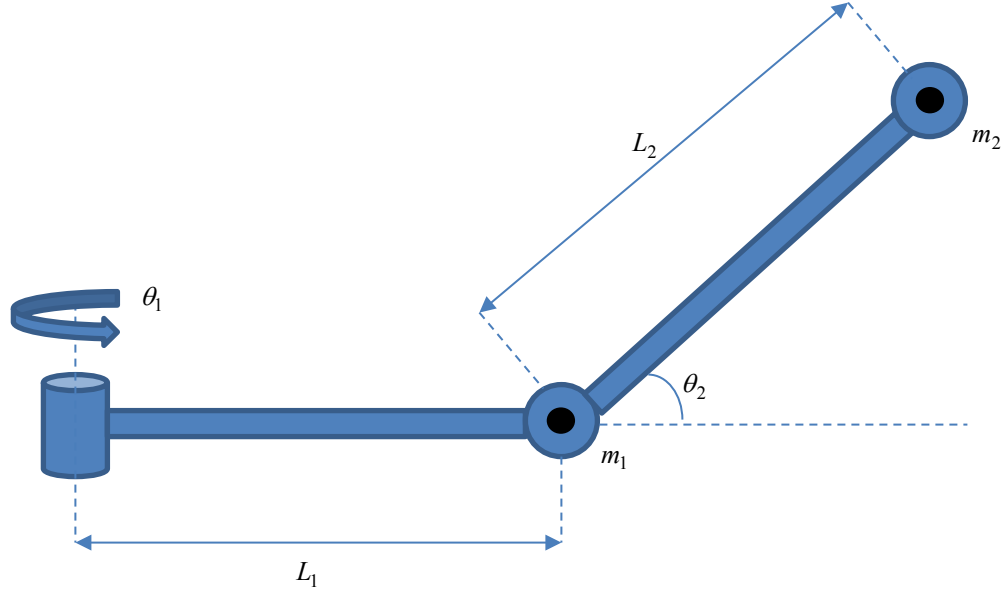


Figure 1 : Robot 2 DDL non planaire

Soit le robot à 2 articulations représenté dans la figure 1 ci-haut (Craig, 2005). Ce robot possède deux mouvements d'articulation suivant 2 axes distincts. Les masses de chacun de ses membres sont considérées ponctuelles et distales, tel que schématisé dans la figure. Les matrices dynamiques du robot sont données par :

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 (L_1 + L_2 c_2)^2 & 0 \\ 0 & m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -2(L_1 + L_2 c_2) m_2 L_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ (L_1 + L_2 c_2) m_2 L_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g L_2 c_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

On suppose que l'espace de travail du robot est donné par :

$$\theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (21)$$

On se propose d'appliquer la loi de commande (10) dans ce qui suit.

En calculant la jacobienne du vecteur de gravité, et en utilisant la relation (8), on aboutit à :

$$\psi_G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g L_2}{\theta_2} (1 - \cos(\theta_2)) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Les valeurs numériques suivantes ont été choisies pour les paramètres dynamiques:

$$m_1 = 0.5 \text{ Kg}; m_2 = 0.5 \text{ Kg}; l_1 = 0.2 \text{ m}; l_2 = 0.2 \text{ m}; g = 9.81 \text{ N/Kg};$$

À partir de (22), les valeurs propres de $\psi_G(\theta)$ peuvent être directement déduites :

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \frac{m_2 g L_2}{\theta_2} (1 - \cos(\theta_2)) \quad (23)$$

La figure suivante donne la variation de λ_2 dans l'espace de travail défini du robot. À noter que λ_2 est uniquement dépendent de θ_2 . À partir de la figure 2, il est à constater que λ_2 est du même signe que θ_2 . Par conséquent, pour une valeur initiale négative de θ_2 entre $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, la convergence asymptotique vers 0 est toujours assurée. Cependant, pour une valeur positive de θ_2 entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la contrainte (11) doit être respectée. Il est également possible de constater qu'en choisissant par exemple les valeurs propres de K_p supérieures à 1, la contrainte (11) est observée dans toute l'enveloppe de travail du robot, ce qui assure par conséquent une convergence asymptotique globale vers le point d'équilibre (0,0).

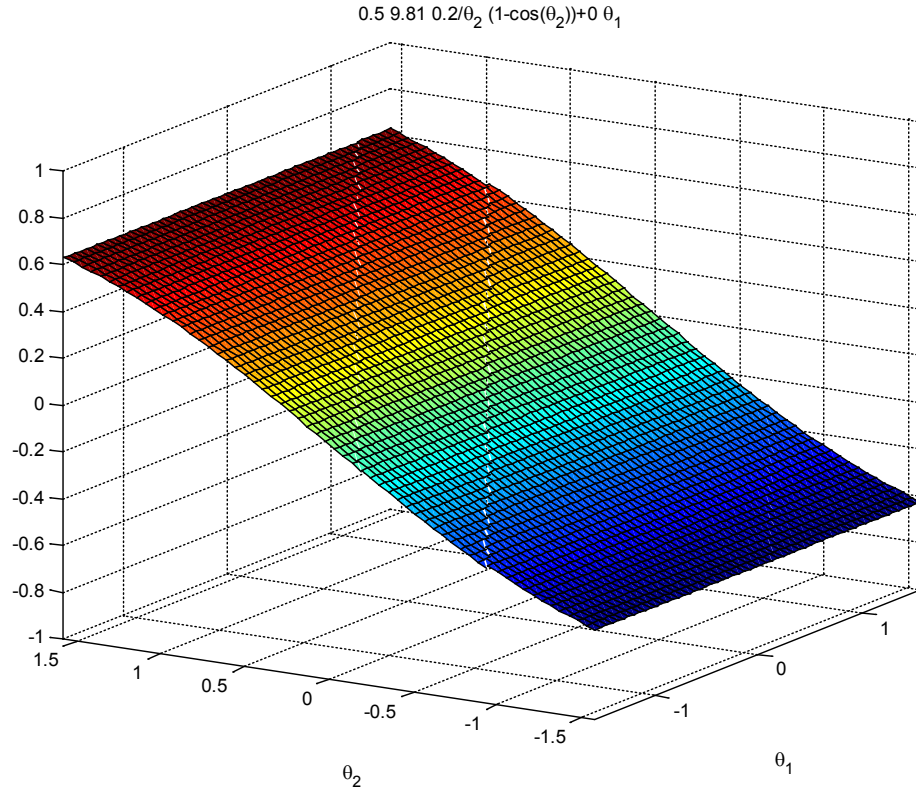
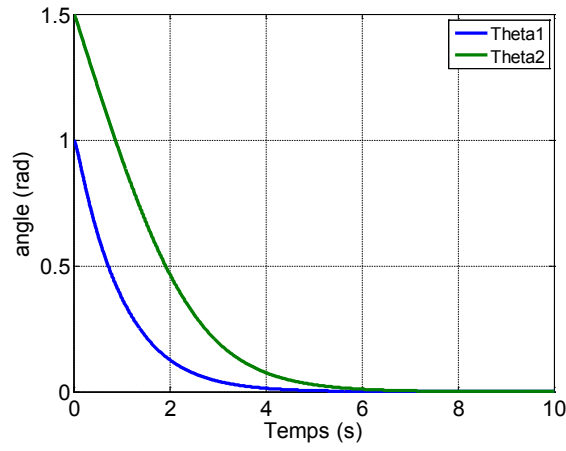
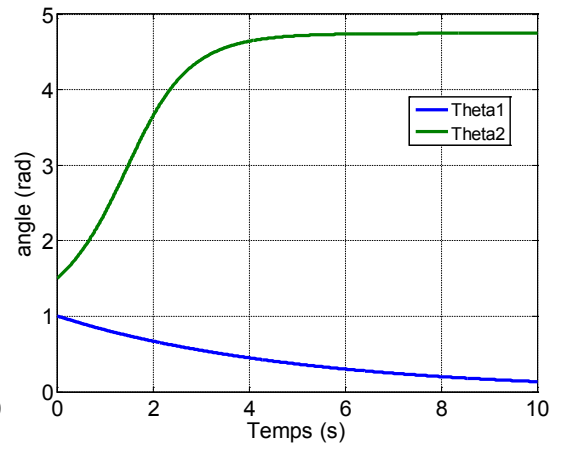


Figure 2 : λ_2 en fonction de θ_1 et θ_2

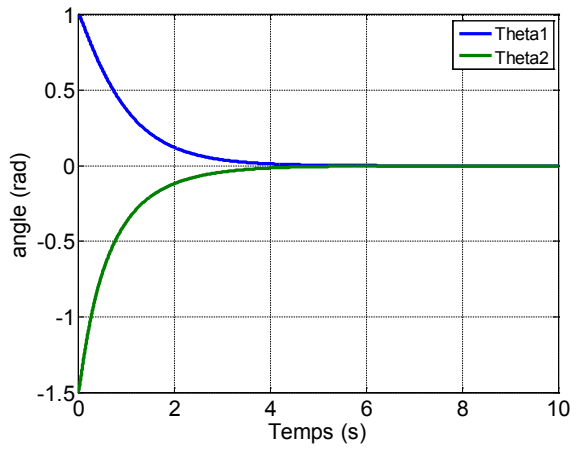
Afin de corroborer ceci, des résultats de simulation sont présentés dans la figure 3 ci-bas, où quatre combinaisons de θ_{20} et K_p ont été choisies. Le seul cas où la convergence n'est pas asymptotique est lorsque la valeur initiale de θ_2 est positive, et les valeurs propres de K_p sont inférieures à 1, tel qu'il a été mentionné précédemment. Ceci démontre donc l'importance de la contrainte (11) à respecter si la convergence asymptotique globale du système est requise. À noter que K_v a été choisie égale à la matrice identité.



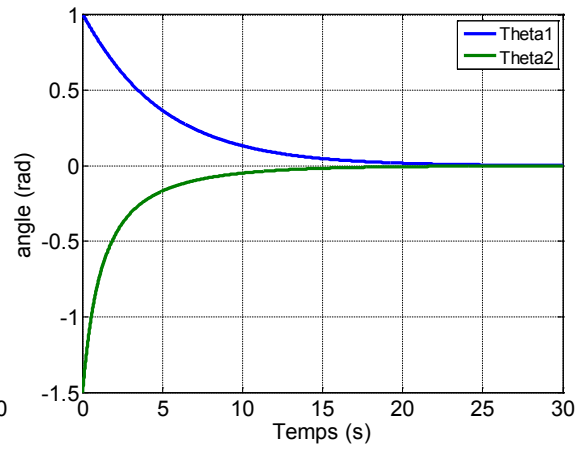
$$\theta_{20} = 1.5; K_p = I_2$$



$$\theta_{20} = 1.5; K_p = 0.2 * I_2$$



$$\theta_{20} = -1.5; K_p = I_2$$



$$\theta_{20} = -1.5; K_p = 0.2 * I_2$$

Figure 3 : Résultats de simulation avec compensation du terme de gravité

La figure 4 ci-bas compare en simulation la loi initiale d'Arimoto et Takegaki (3) avec la loi modifiée (10). K_p et K_v ont tous deux été choisis ici égaux à la matrice identité. Les mêmes paramètres dynamiques du robot que précédemment ont été utilisés. La simulation montre des résultats très similaires pour les couples et angles de l'axe 1, mais une certaine différence pour les couples et angles de l'axe 2. Cette observation est normale puisque le terme de gravité pour ce robot en particulier agit uniquement sur l'axe 2. On note qu'avec la compensation du terme de gravité dans ce cas, la convergence pour l'axe 2 est plus rapide que pour la loi initiale sans compensation du terme gravitationnel.

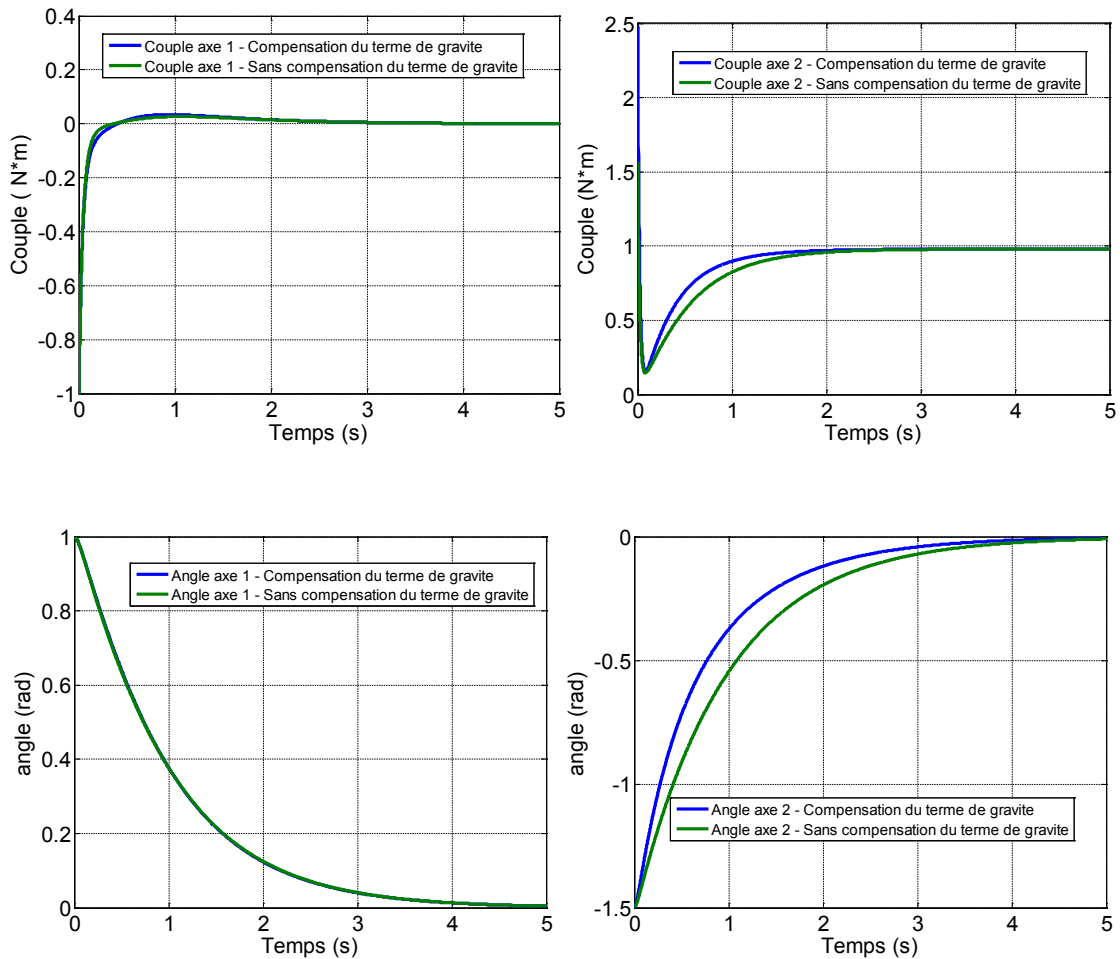


Figure 4 : Comparaison en simulation avec et sans compensation du terme de gravité

4 CONCLUSION

Ce rapport a introduit une relation matricielle vérifiée par le terme de gravité d'un robot manipulateur. Cette relation a permis de compenser le terme de gravité dans la loi de commande initiale présentée par Arimoto et Takegaki. Cette compensation doit cependant se faire moyennant une contrainte que doit vérifier la partie proportionnelle de la commande, afin d'assurer une convergence asymptotique globale du système. Afin de valider l'approche, des résultats de simulation sur un manipulateur 2 DDL non planaire ont été présentés et corroborent le développement présenté dans la première partie du rapport.

BIBLIOGRAPHIE

- Craig, John J. 2005. *Introduction to robotics: mechanics and control*, 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall, 400 p.
- Saad, M., P. Bigras, L. A. Dessaint et K. Al-Haddad. 1994. « Adaptive robot control using neural networks ». *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 41, n° 2, p. 173-181.
- Spong, Mark W., et M. Vidyasagar. 1989. *Robot dynamics and control* (1989). New York: J. Wiley, 336 p.
- Takegaki, Morikazu, et Suguru Arimoto. 1981. « A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators ». *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 103, n° 2, p. 119-125.