Inédits

DE L'INUTILITÉ DES QUOTIENTS DE LOCALISATION POUR ESTIMER LES EXPORTATIONS D'UNE RÉGION

André LEMELIN

DÉCEMBRE 2007

INRS
Urbanisation, Culture et Société

Inédits / *Working paper,* n° 2007-7

De l'inutilité des quotients de localisation pour estimer les exportations d'une région

André LEMELIN

Institut national de la recherche scientifique
Urbanisation, Culture et Société

Décembre 2007

André Lemelin
andre.lemelin@ucs.inrs.ca

Inédits, collection dirigée par Mario Polèse
mario.polese@ucs.inrs.ca
Institut national de la recherche scientifique
Urbanisation, Culture et Société
385, rue Sherbrooke Est
Montréal (Québec) H2X 1E3

Téléphone :   (514) 499-4000
Télécopieur : (514) 499-4065

www.ucs.inrs.ca

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ/ABSTRACT

L’estimation des exportations régionales au moyen du quotient de localisation est utilisée dans la construction de modèles intersectoriels. Nous testons cette méthode à l’aide d’un modèle intersectoriel qui présente les conditions les plus favorables possible : un modèle à deux secteurs et deux régions où sont respectées *a priori* trois des quatre conditions nécessaires à la validité de la méthode. La condition selon laquelle l'absorption (utilisation locale) du produit dans chaque région est proportionnelle à sa taille n’est pas imposée *a priori*. Nos résultats montrent que cette condition exige (1) que les structures d’intrants de tous les produits soient identiques et (2) que les flux d’échanges soient équilibrés (valeur des exportations de chaque région = valeur de ses importations).

Mots-clés : échanges interindustriels, quotients de localisation, modèles régionaux

■■■

The estimation of regional exports using the location quotient is applied in building input-output models. We test that method with an input-output model offering the most favourable possible circumstances: a two-sector, two-region model, where three of the four conditions necessary for the validity of the method hold a priori. The condition that absorption (local use) of a product in each region be proportional to its size is not imposed a priori. Our results show that that condition requires (1) that the input structures of all products be identical, and (2) that trade be balanced (the value of each region’s exports = the value of its imports).

Keywords : input-output, location quotients, regional models

INTRODUCTION

Les quotients de localisation, aussi appelés *indices de concentration relative*, sont des mesures de l'importance relative de l'emploi d'une branche d'activité dans une ville ou une région[1]. On utilise aussi les quotients de localisation dans le cadre de la théorie de la base économique, pour estimer l'emploi « exportateur » ou, dans la construction de modèles intersectoriels (*input-output*) régionaux, pour estimer les exportations régionales. Vu la rareté de données sur les échanges interrégionaux, cette possibilité est attrayante.

Mais il est bien établi[2] que l'estimation de l'emploi exportateur au moyen des quotients de localisation repose sur des hypothèses extrêmement restrictives, qu'on énonce généralement sous la forme suivante :

H1. La productivité du travail est égale entre villes ou régions.

H2. L'absorption (utilisation locale) du produit par emploi dans l'économie locale est égale entre villes ou régions.

H3. Il n'y a pas d'importations ou d'exportations nettes de l'ensemble du pays.

H4. La demande locale s'approvisionne en priorité auprès des producteurs locaux; cela implique qu'il n'y a pas de flux croisés entre villes ou régions (*cross-hauling*).

Dans cet article, nous construisons un exemple numérique de modèle intersectoriel à deux secteurs et deux régions où sont respectées les hypothèses H1, H3 et H4. Dans les deux régions, les techniques de production et les schèmes de consommation sont supposés identiques. L'analyse de ce modèle montre que le respect de la condition H2 est virtuellement impossible.

Le reste de l'article est organisé comme suit. La section 1 rappelle la méthode d'estimation des exportations au moyen du quotient de localisation et expose le rôle de chacune des quatre hypothèses énoncées précédemment. La section 2 développe un modèle intersectoriel birégional pour examiner l'utilité de la méthode du quotient de localisation. Le modèle intersectoriel est développé en plusieurs étapes. Dans la première partie de la section 2, on présente successivement le modèle classique ouvert, le modèle classique fermé et le modèle monorégional partiellement ouvert. Dans la seconde partie, on développe le modèle birégional et on propose une méthode de

1 Ils appartiennent à la famille de ce que Jayet (1993, p. 18) appelle les « indicateurs de spécificité ».
2 Voir, entre autres, Isserman (1980), Norcliffe (1983), Harris et Liu (1998) et Riddington et al. (2006).

solution constructive pour explorer numériquement les propriétés du modèle. On peut alors comparer les résultats obtenus par la méthode du quotient de localisation avec les « vraies » exportations régionales et identifier les causes structurelles de la faillite de la méthode du quotient de localisation. La dernière section de l’article résume les conclusions.

1. ESTIMATION DES EXPORTATIONS AU MOYEN DU QUOTIENT DE LOCALISATION

Lorsque l'on utilise le quotient de localisation pour estimer les exportations d'une branche de production, on attribue aux exportations une fraction de la production qui est égale à la fraction de la valeur du quotient de localisation qui excède la valeur repère 1. Ce calcul est le plus souvent formulé en termes de l'emploi : EXP_{ij}, l'emploi « exportateur » de la branche j, qui appartient à la base économique de la région i, est estimé au moyen de la formule

$$EXP_{ij} = \begin{cases} x_{ij}\dfrac{(QL_{ij}-1)}{QL_{ij}}, \text{si } QL_{ij} > 1 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \qquad [01]$$

où x_{ij} est l'emploi de la branche j dans la région i. La fraction de x_{ij} qui appartient à l'emploi exportateur est supposé égal à la fraction du quotient de localisation QL_{ij} qui excède 1. Quand $QL_{ij} < 1$, on considère qu'il n'y a pas d'exportations de l'activité j à partir de la région i et, en conséquence, l'emploi exportateur est nul.

Pour comprendre plus facilement la signification de ce calcul, on substitue QL_{ij} et on simplifie, de façon à obtenir

$$EXP_{ij} = x_{ij} - \left({x_{i\bullet}}/{x_{\bullet\bullet}} \right) x_{\bullet j} \text{ , si } x_{ij} > \left({x_{i\bullet}}/{x_{\bullet\bullet}} \right) x_{\bullet j} \qquad [02]$$

où

x_{ij}	nombre d'emplois de la branche j dans la zone i
$x_{\bullet j} = \sum_i x_{ij}$	nombre total d'emplois de la branche j
$x_{i\bullet} = \sum_j x_{ij}$	nombre total d'emplois dans la zone i
$x_{\bullet\bullet} = \sum_i \sum_j x_{ij}$	nombre total d'emplois de toutes branches dans toutes zones

On voit alors que l'emploi exportateur est la différence entre la valeur observée x_{ij} et la valeur hypothétique que prendrait le chiffre de l'emploi si la région i produisait seulement « sa part » de j (auquel cas le quotient de localisation QL_{ij} serait égal à 1).

Pour voir comment interviennent les quatre hypothèses énoncées précédemment, récrivons la formule sous la forme suivante :

$$EXP_{ij} = \left[\left(x_{ij} / x_{\bullet j} \right) - \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right)\right] x_{\bullet j} \text{, si } \left(x_{ij} / x_{\bullet j} \right) > \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right) \qquad [03]$$

La **première hypothèse** concerne le rapport $x_{ij} / x_{\bullet j}$; ce rapport est la part de la région *i* dans l'*emploi* de l'activité *j*; la première hypothèse permet de considérer ce rapport comme une approximation de la part de la région dans la *production* du bien *j*.

La **seconde hypothèse** concerne le rapport $x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet}$; ce rapport est la part de la région *i* dans l'*emploi total;* la seconde hypothèse permet de considérer ce rapport comme une approximation de la part de la région dans l'*utilisation totale* (absorption) du bien *i*.

Les deux autres hypothèses permettent d'interpréter la différence comme la part de l'emploi national de la branche *j* qui appartient à la base économique de la région *i*. Ainsi, la **troisième hypothèse** dit que les importations et exportations internationales sont nulles : il s'ensuit que l'identité

Production + *Importations des autres régions* + *Importations internationales*	=	*Absorption* + *Exportations aux autres régions* + *Exportations internationales*

devient

Production + *Importations des autres régions*	=	*Absorption* + *Exportations aux autres régions*

c'est-à-dire

Production – Absorption	=	*Exportations nettes aux autres régions*

lorsque l'excédent de la production sur l'absorption est positif.

La **quatrième hypothèse** enfin dit que, s'il y a des exportations vers les autres régions, il n'y a pas d'importations en provenance d'autres régions, et vice-versa. Par conséquent, quand les exportations nettes sont positives, elles sont égales aux exportations brutes.

2. UN MODÈLE INTERSECTORIEL COMME OUTIL DIAGNOSTIQUE

Puisque la méthode d'estimation des exportations régionales au moyen du quotient de localisation est largement utilisée dans la construction de modèles intersectoriels, il est particulièrement indiqué d'examiner la performance de cette méthode à la lumière d'une économie fictive qui se conforme parfaitement au modèle intersectoriel et qui, par surcroît, présente les conditions les plus favorables possible. Concrètement, dans le modèle que nous allons construire, les conditions H1, H3 et H4 de la validité de la méthode du quotient de localisation seront respectées. L'examen du modèle montrera qu'il est quasi impossible que la condition H2 soit réalisée et que, dans ces conditions, l'application de la méthode du quotient de localisation conduit à des résultats aberrants.

2.1 Modèle monorégional

Dans ce qui suit, toutes les variables sont en valeur, et non en volume. Ainsi, les coefficients techniques du modèle intersectoriel sont interprétés « à la Matuszewski » comme des rapports de flux en valeur.

2.1.1 LE MODÈLE INTERSECTORIEL CLASSIQUE D'UNE ÉCONOMIE OUVERTE

Considérons le modèle intersectoriel classique (carré) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y} \qquad [04]$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \qquad [05]$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur de la production totale de biens et services, $\mathbf{A}$ est la matrice des coefficients techniques et $\mathbf{Y}$ est le vecteur de la demande finale de biens et services, exogène. On peut résoudre le modèle par inversion matricielle :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} \qquad [06]$$

ou de manière itérative :

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{AY} + \mathbf{A}^2\mathbf{Y} + \mathbf{A}^3\mathbf{Y} + \cdots = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}^t\right)\mathbf{Y} \qquad [07]$$

Partant de la définition de la valeur ajoutée comme différence entre la valeur de la production et la valeur des intrants intermédiaires, on définit les coefficients de valeur ajoutée comme

$$\mathbf{v}' = \mathbf{\iota}'(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad [08]$$

où $\mathbf{\imath'}$ est le vecteur sommation :

$$\mathbf{\imath'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad [09]$$

La valeur ajoutée totale est donnée par

$$y = \mathbf{v'X} \qquad [10]$$

Dans ce modèle, le respect de l'identité de la comptabilité économique est garanti. En effet, si on fait la somme des lignes de l'équation matricielle [05]

$$\mathbf{\imath'}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{\imath'Y} \qquad [11]$$

on a, étant donné [08],

$$\mathbf{v'X} = \mathbf{\imath'Y} \qquad [12]$$

c'est-à-dire, étant donné [10],

$$y = \mathbf{\imath'Y} \qquad [13]$$

La somme des valeurs ajoutées est égale à la somme des dépenses finales.

2.1.2 Modèle d'économie fermée

Le modèle classique donne à penser que, sans demande finale autonome (exogène), l'économie est au point mort :

Si $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$[3], alors $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [14]

Pas nécessairement. Ce serait d'ailleurs troublant s'il devait nécessairement en être ainsi, puisque, dans les faits, il existe au moins une économie fermée qui fonctionne : c'est l'économie planétaire, qu'aucune demande exogène ne vient amorcer.

Pour $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, le système d'équations [04] devient

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad [15]$$

Techniquement, il existe une solution non nulle à [15] si 1 est une valeur caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$, auquel cas l'inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ n'existe pas ($\mathbf{I{-}A}$ est singulière). Cette condition peut sembler restrictive, mais les modèles fermés sont moins exotiques qu'il

[3] Le zéro en caractère gras représente un vecteur dont tous les éléments sont nuls.

ne pourrait sembler à première vue. Leur formulation est plus concrète sous la forme suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y} \qquad [04]$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}\,y \qquad [16]$$

$$y = \mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [10]$$

où **f** est le vecteur de la structure de la demande finale :

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{Y}}{\boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{Y}}{y} \qquad [17]$$

Avec la définition [17], ce modèle est strictement équivalent à celui qui est constitué des équations [04] et [10]. Les équations [16] et [10] impliquent le respect de l'identité de la comptabilité économique. En effet, étant donné

$$\boldsymbol{\imath}'\mathbf{f} = 1 \qquad [18]$$

on a

$$\boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y} = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{f}\,y = y = \mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [19]$$

La valeur de la demande finale est égale à la somme des valeurs ajoutées.

Le modèle constitué des équations [04], [16] et [10] peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) & -\mathbf{f} \\ -\mathbf{v}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad [20]$$

où l'on a éliminé **Y** en substituant [16] dans [04]. Posons

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{f} \\ \mathbf{v}' & 0 \end{bmatrix} \qquad [21]$$

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} \qquad [22]$$

Et l'équation [20] devient semblable à [15], dans laquelle on aura substitué **A*** à **A** et **X*** à **X**.

2.1.3 Modèle partiellement fermé (ouvert, mais fermé sur les dépenses des ménages)

Modèle

On peut définir un modèle partiellement fermé, qui est en quelque sorte un compromis entre [04] et [20], en posant que la demande finale est constituée de deux composantes, une demande exogène (autonome) $\mathbf{F}_x$ et une demande endogène (induite) $\mathbf{f}^* \alpha y$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}^* \alpha y + \mathbf{F}_x \qquad [23]$$

où l'astérisque indique que **f*** n'est pas défini par [17], mais plutôt par

$$\mathbf{f}^* = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{F}_x)}{\mathbf{\iota}'(\mathbf{Y} - \mathbf{F}_x)} \qquad [24]$$

Nous verrons ci-après que le coefficient α dans [23] est défini par l'identité de la comptabilité économique. On peut interpréter la demande endogène comme la demande finale intérieure et la demande exogène comme les exportations.

S'agissant par ailleurs d'un modèle ouvert, il est logique d'admettre l'existence d'importations. L'équation [04] doit alors être remplacée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y} - \mathbf{M} \qquad [25]$$

où **M** désigne le vecteur des importations.

L'équation [25] équivaut à

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \mathbf{M} \qquad [26]$$

On fait la somme des lignes de l'équation matricielle [26] et on trouve

$$\mathbf{\iota}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{\iota}'\mathbf{Y} - \mathbf{\iota}'\mathbf{M} \qquad [27]$$

c'est-à-dire, étant donné [08] et [10],

$$\mathbf{v}'\mathbf{X} = y = \mathbf{\iota}'\mathbf{Y} - \mathbf{\iota}'\mathbf{M} \qquad [28]$$

C'est l'identité de la comptabilité économique. Pour voir ce qu'implique le respect de cette identité, on substitue [23] et on trouve

$$y = \mathbf{\iota}'\mathbf{f}^* \alpha y + \mathbf{\iota}'\mathbf{F}_x - \mathbf{\iota}'\mathbf{M} \qquad [29]$$

c'est-à-dire, étant donné $\mathbf{\imath'f}^* = 1$,

$$y = \alpha y + \mathbf{\imath'F}_x - \mathbf{\imath'M} \tag{30}$$

ce qui implique

$$\alpha = \frac{y - \mathbf{\imath'}(\mathbf{F}_x - \mathbf{M})}{y} = 1 - \frac{\mathbf{\imath'}(\mathbf{F}_x - \mathbf{M})}{y} \tag{31}$$

Le paramètre α est égal à 1, moins la proportion du revenu y que représente l'excédent de la valeur de la demande exogène sur la valeur des importations[4]. Il est à noter que, si la valeur des importations est supérieure à celle de la demande exogène, le paramètre calibré α est supérieur à 1.

Pour compléter le modèle, supposons que les importations de chaque bien soient proportionnelles à la demande endogène, intermédiaire et finale :

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \alpha y\right) \tag{32}$$

où $\hat{\mathbf{m}}$ est la matrice diagonale des coefficients d'importation.

Le modèle constitué des équations [25], [23], [32] et [10] peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{f}^* \alpha \\ \hdashline -\hat{\mathbf{m}}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{m}}\mathbf{f}^* \alpha \\ \hdashline -\mathbf{v'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{M} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{F}_x \tag{33}$$

On peut simplifier l'écriture du système d'équations [33] en éliminant les variables **Y** et **M**. Substituons [23] et [32] dans [25] et développons :

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \alpha y + \mathbf{F}_x - \hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \alpha y\right) \tag{34}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{AX} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^* \alpha y + \mathbf{F}_x \tag{35}$$

Le modèle constitué des équations [35] et [10] peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\left[\begin{array}{c:c} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^* \alpha \\ \hdashline -\mathbf{v'} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0'} \end{bmatrix} \mathbf{F}_x \tag{36}$$

4 Si la demande exogène est entièrement constituée d'exportations, cet excédent est le solde du compte courant.

Respect de l'identité de la comptabilité économique

Une fois calibré le paramètre α, toute solution $\mathbf{X}$ et y du système [36] pour un $\mathbf{F}_x$ quelconque respecte l'identité de la comptabilité économique

$$y = \mathbf{v'X} = \mathbf{\imath'Y} - \mathbf{\imath'M} \qquad [28]$$

En effet, la somme des lignes de l'équation matricielle [36] est donnée par

$$\mathbf{\imath'}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} - \mathbf{v'X} - \mathbf{\imath'}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^* \ \alpha y + y = \mathbf{\imath'F}_x \qquad [37]$$

$$[\mathbf{\imath'} - \mathbf{\imath'A} + \mathbf{m'A} - \mathbf{v'}]\mathbf{X} - (\mathbf{\imath'} - \mathbf{m'})\mathbf{f}^* \alpha y + y = \mathbf{\imath'F}_x \qquad [37]$$

Étant donné [08], $\mathbf{\imath'} - \mathbf{\imath'A} = \mathbf{v'}$ et on peut récrire [37]

$$\mathbf{m'AX} - (\mathbf{\imath'} - \mathbf{m'})\mathbf{f}^* \alpha y + y = \mathbf{\imath'F}_x \qquad [38]$$

Puis, étant donné $\mathbf{\imath'f}^* = 1$,

$$\mathbf{m'AX} - \alpha y + \mathbf{m'f}^* \alpha y + y = \mathbf{\imath'F}_x \qquad [39]$$

$$y = \mathbf{\imath'F}_x + \alpha y - \mathbf{m'AX} - \mathbf{m'f}^* \alpha y \qquad [40]$$

où, étant donné [23],

$$\mathbf{\imath'Y} = \mathbf{\imath'f}^* \ \alpha y + \mathbf{\imath'F}_x = \alpha y + \mathbf{\imath'F}_x \qquad [41]$$

et où, étant donné [32],

$$\mathbf{\imath'M} = \mathbf{\imath'}\hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \ \alpha y\right) = \mathbf{m'AX} + \mathbf{m'f}^* \alpha y \qquad [42]$$

On peut donc reformuler [40] comme

$$y = \mathbf{v'X} = \mathbf{\imath'Y} - \mathbf{\imath'M} \qquad [28]$$

qui est l'identité de la comptabilité économique

Existence d'une solution du modèle

L'équation [35] équivaut à

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^* \ \alpha y + \mathbf{F}_x \qquad [43]$$

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^* \ \alpha \mathbf{v'X} + \mathbf{F}_x \qquad [44]$$

$$\left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'}\right]\mathbf{X} = \mathbf{F}_{x} \qquad [45]$$

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'}\right]^{-1} \mathbf{F}_{x} \qquad [46]$$

On sait que cette inverse existe, pourvu que la somme de chaque colonne de la matrice

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'}$$

soit non négative et inférieure à 1. Examinons donc

$$\mathbf{\imath'}\left[(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'}\right] = \mathbf{\imath'}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + \mathbf{\imath'}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'} \qquad [47]$$

Les éléments de la matrice diagonale $(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})$ étant compris entre zéro et 1, le vecteur ligne du membre droit de [47] est compris entre zéro et $\mathbf{\imath'}\,\mathbf{A} + \alpha\mathbf{v'}$. Or, étant donné [08], on a

$$\mathbf{\imath'}\,\mathbf{A} + \alpha\mathbf{v'} = \mathbf{\imath'} - \mathbf{v'} + \alpha\mathbf{v'} = \mathbf{\imath'} - (1 - \alpha)\mathbf{v'} \qquad [48]$$

Il est clair que tous les éléments du membre droit de [48] sont inférieurs à 1. Les conditions d'existence de l'inverse $\left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\ \alpha\mathbf{v'}\right]^{-1}$ sont donc respectées et le système d'équations [36] a une solution non nulle pour toute valeur positive de $\mathbf{F}_{x}$.

2.2 Modèle birégional

On considère maintenant deux économies régionales qui, ensemble, constituent un système fermé : les importations d'une région sont les exportations de l'autre et vice-versa. Les deux régions partagent la même technologie (coefficients techniques **A** et **v**) et les mêmes structures de consommation **f***. Elles ne diffèrent que par la structure de leurs importations $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$. Supposons en outre que les structures d'importation excluent les flux croisés :

$$\hat{\mathbf{m}}_1\,\hat{\mathbf{m}}_2 = \hat{\mathbf{0}} \qquad [49]$$

On a donc

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1)\mathbf{A}\right] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1)\mathbf{f}^{*}\alpha_1 \\ \hline -\mathbf{v'} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0'} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x1} \qquad [50]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2)\mathbf{A}\right] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2)\mathbf{f}^{*}\alpha_2 \\ \hline -\mathbf{v'} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0'} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x2} \qquad [51]$$

avec

$$\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{M}_2 = \hat{\mathbf{m}}_2\left(\mathbf{AX}_2 + \mathbf{f}^*\ \alpha_2 y_2\right) = \hat{\mathbf{m}}_2\left(\mathbf{A} + \mathbf{f}^*\ \alpha_2\mathbf{v}'\right)\mathbf{X}_2 \qquad [52]$$

$$\mathbf{F}_{x2} = \mathbf{M}_1 = \hat{\mathbf{m}}_1\left(\mathbf{AX}_1 + \mathbf{f}^*\ \alpha_1 y_1\right) = \hat{\mathbf{m}}_1\left(\mathbf{A} + \mathbf{f}^*\ \alpha_1\mathbf{v}'\right)\mathbf{X}_1 \qquad [53]$$

On peut représenter ce système sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1\right)\mathbf{A}\right] & -\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1\right)\mathbf{f}^*\alpha_1 & -\hat{\mathbf{m}}_2\mathbf{A} & -\hat{\mathbf{m}}_2\mathbf{f}^*\alpha_2 \\ \hdashline -\mathbf{v}' & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline -\hat{\mathbf{m}}_1\mathbf{A} & -\hat{\mathbf{m}}_1\mathbf{f}^*\alpha_1 & \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2\right)\mathbf{A}\right] & -\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2\right)\mathbf{f}^*\alpha_2 \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{v}' & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ y_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [54]$$

Nous allons maintenant montrer que ce modèle birégional est cohérent avec un modèle national fermé dont les variables sont les sommes des variables correspondantes des régions.

Pour chaque région *i*, on substitue [23] dans [26]

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i y_i + \mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i \qquad [55]$$

On fait la somme sur les régions

$$\sum_i \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}_i = \sum_i \mathbf{f}^*\alpha_i y_i + \sum_i \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right) \qquad [56]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\sum_i \mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\sum_i \alpha_i y_i + \sum_i \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right) \qquad [57]$$

où le second terme du membre de droite est forcément nul dans une économie fermée. De plus, on peut récrire [30] sous la forme

$$\left(1 - \alpha_i\right)y_i = \mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M}_i \qquad [58]$$

On fait ensuite la somme de [58] sur les régions et on trouve

$$\sum_i \left(1 - \alpha_i\right)y_i = \sum_i \left(\mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M}_i\right) \qquad [59]$$

où le membre de droite est nul dans une économie fermée, ce qui implique

$$\sum_i \alpha_i y_i = \sum_i y_i = y \qquad [60]$$

où y est la somme des valeurs ajoutées régionales. On substitue [60] dans l'équation [57] et on arrive à

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{f}^{*}y \qquad [61]$$

où

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2 \qquad [62]$$

est le vecteur de la production nationale par industrie. Étant donné

$$y=\mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [10]$$

on peut récrire [61] comme

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{f}^{*}\mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [63]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{f}^{*}\mathbf{v}')\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad [64]$$

Le modèle constitué des équations [10] et [64] est de forme identique au modèle fermé [20] :

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) & -\mathbf{f}\\ -\mathbf{v}' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ y\end{bmatrix}=\mathbf{0} \qquad [20]$$

Le modèle birégional représenté par le système d'équations [54] respecte donc trois des quatre conditions nécessaires à la validité de la méthode d'estimation des exportations au moyen des quotients de localisation. La productivité est la même dans les deux régions, puisque les coefficients techniques $\mathbf{A}$ et $\mathbf{v}$ sont les mêmes. Étant donné [49], il n'y a pas de flux croisés. Enfin, la somme des deux régions constitue une économie fermée, comme le montre l'équation [64].

2.2.1 APPROCHE CONSTRUCTIVE

La solution analytique du système [54] ne se prête cependant guère aux interprétations faciles. C'est pourquoi nous allons plutôt adopter une approche constructive. Plus exactement, nous allons montrer que, étant donné une matrice de coefficients techniques $\mathbf{A}$ et une structure de consommation $\mathbf{f}^*$ quelconques, une structure d'échanges $\mathbf{g}$ arbitraire, des revenus régionaux quelconques y_1 et y_2 et des valeurs α_1 et α_2 qui sont arbitraires sous réserve de la condition [75] énoncée plus loin, on peut construire et résoudre numériquement un système birégional. En générant plusieurs modèles de ce type, nous pourrons ensuite examiner les résultats obtenus dans différents cas de figure par la méthode d'estimation des exportations régionales au moyen du quotient de localisation.

On divise [55] par le revenu :

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* \ \alpha_i + (\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)\frac{1}{y_i} \qquad [65]$$

À partir de ce point, il y a deux développements possibles, selon que le solde $\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)$ est nul ou non. Dans le premier cas, les échanges interrégionaux sont équilibrés : le solde du compte courant (valeur des exportations, moins valeur des importations) de chaque région vis-à-vis l'autre est nul. Commençons par le cas le plus courant, quand les échanges ne sont pas équilibrés.

a) Cas d'un solde non nul (positif ou négatif)

On développe [65] :

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* \ \alpha_i + (\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)\frac{1}{y_i}\frac{\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)}{\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)} \qquad [66]$$

c'est-à-dire, étant donné [31],

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* \ \alpha_i + \frac{(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)}{\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)}(1-\alpha_i) \qquad [67]$$

On définit

$$\mathbf{g}_i = \frac{(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)}{\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)} \qquad [68]$$

et l'équation [67] devient

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* \ \alpha_i + \mathbf{g}_i(1-\alpha_i) \qquad [69]$$

En vertu des équations [52] et [53] (économie fermée à deux régions), on a $\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{M}_2$ et, réciproquement, $\mathbf{F}_{x2} = \mathbf{M}_1$. Il en découle

$$\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1 = -(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2) \qquad [70]$$

et

$$\mathbf{g}_1 = \frac{(\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1)}{\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1)} = \frac{-(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2)}{-\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2)} = \mathbf{g}_2 \qquad [71]$$

ainsi que, étant donné la condition [31] de respect de l'identité de la comptabilité économique,

$$(1 - \alpha_1) y_1 = \mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1) = -\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2) = -(1 - \alpha_2) y_2 \qquad [72]$$

Posons

$$y_i = \beta_i y, \text{ avec } \sum_i \beta_i = 1 \qquad [73]$$

Dans ces conditions, [72] devient

$$(1 - \alpha_1)\beta_1 = -(1 - \alpha_2)\beta_2 \qquad [74]$$

$$\alpha_2 = \frac{(\beta_1 + \beta_2) - \alpha_1 \beta_1}{\beta_2} = \frac{1 - \alpha_1 \beta_1}{\beta_2} \qquad [75]$$

b) Cas d'un solde nul

Si le solde $\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i)$ de l'une des deux régions est nul, alors celui de l'autre doit l'être aussi. La division de [65] par $\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i) = 0$ est alors impossible. On sait par ailleurs en vertu de [31] que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. L'équation [65] devient

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \frac{1}{y_i} \mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* + (\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i) \frac{1}{y_i} \qquad [76]$$

Définissons

$$\mathbf{g}_i^* = \frac{\mathbf{F}_{xi}}{\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi}} - \frac{\mathbf{M}_i}{\mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i} \qquad [77]$$

où $\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i) = 0$ implique $\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi} = \mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i$

Définissons aussi

$$\gamma_i = \frac{\mathbf{\imath' F}_{xi}}{y_i} = \frac{\mathbf{\imath' M}_i}{y_i} \qquad [78]$$

On peut alors récrire [76] comme

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* + \mathbf{g}_i^*\gamma_i \qquad [79]$$

En vertu des équations [52] et [53] (économie fermée à deux régions), on a $\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{M}_2$ et, réciproquement, $\mathbf{F}_{x2} = \mathbf{M}_1$. Étant donné $\mathbf{\imath' F}_{xi} = \mathbf{\imath' M}_i$, il en découle

$$\mathbf{\imath' F}_{x1} = \mathbf{\imath' M}_2 = \mathbf{\imath' F}_{x2} = \mathbf{\imath' M}_1 \qquad [80]$$

ainsi que

$$\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1 = -(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2) \qquad [70]$$

On a donc

$$\mathbf{g}_1^* = \frac{\mathbf{F}_{x1}}{\mathbf{\imath' F}_{x1}} - \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{\imath' M}_1} = -\left(\frac{\mathbf{F}_{x2}}{\mathbf{\imath' F}_{x2}} - \frac{\mathbf{M}_2}{\mathbf{\imath' M}_2}\right) = -\mathbf{g}_2^* \qquad [81]$$

Enfin, étant donné [80] et la définition [78], on a

$$\gamma_1 y_1 = \gamma_2 y_2 \qquad [82]$$

Étant donné [73], [82]devient

$$\gamma_1 \beta_1 = \gamma_2 \beta_2 \qquad [83]$$

Procédure de construction d'un exemple

Données de départ

- matrice de coefficients techniques **A** quelconque
- vecteur des coefficients de valeur ajoutée **v** défini à partir de **A** par [08]
- structure de consommation **f*** quelconque
- structure d'échanges **g** ou **g*** arbitraire

- revenu total y et distribution régionale [β_1, β_2] quelconques
- valeurs α_1 et α_2 qui respectent [75] ou γ_1 et γ_2 qui respectent [83] et l'hypothèse de demandes totales (intermédiaires + finales) non négatives (qu'on vérifie *a posteriori*) :

$$\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \alpha_i + \mathbf{g}(1 - \alpha_i) \geq \mathbf{0} \qquad [84]$$

ou, si les échanges sont équilibrés,

$$\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* + \mathbf{g}^* \gamma_i \geq \mathbf{0} \qquad [85]$$

Solution du modèle et calcul des autres paramètres

Les valeurs numériques sont calculées en résolvant [69] :

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{f}^* \alpha_i + \mathbf{g}(1 - \alpha_i)\right]\beta_i y \qquad [86]$$

ou, si les échanges sont équilibrés,

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{f}^* + \mathbf{g}^* \gamma_i\right)\beta_i y \qquad [87]$$

Le vecteur des exportations nettes de chaque région est donné par

$$\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i = \mathbf{g}(1 - \alpha_i)y_i \qquad [88]$$

ou, si les échanges sont équilibrés,

$$\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i = \mathbf{g}^* \gamma_i y_i \qquad [89]$$

Étant donné l'hypothèse d'absence de flux croisés [49], les importations $\mathbf{M}_i$ et les exportations $\mathbf{F}_{xi}$ de chaque région sont constituées respectivement des éléments négatifs et positifs de [88].

Enfin, on calcule *a posteriori* les coefficients d'importation grâce à

$$\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{d}}^{-1}\mathbf{M}, \text{ où } \hat{\mathbf{d}} \text{ est la matrice diagonale formée à partir de } \mathbf{d} = \mathbf{AX}_i + \mathbf{f}^* \alpha_i y_i \qquad [74]$$

2.2.2 EXEMPLES NUMÉRIQUES

Les exemples numériques présentés ci-après ont été construits au moyen du fichier Excel *inedit2007_07E.xls*; on peut accéder à ce fichier à travers l'hyperlien http://www.ucs.inrs.ca/default.asp?p=pl, en cliquant sur :

André Lemelin (2007-08)

Guide d'utilisation. Fichier Excel qui accompagne le document : André Lemelin (2007-07).

Premier exemple

Données de départ (paramètres du modèle)

A	
0.40	0.25
0.40	0.45
v'	
0.20	0.30
f*	**g** ou **g***
0.60	-0.10
0.40	1.10
1.00	1.00

	Région1	***Région2***	***Pays***
β	0.60	0.40	1.00
y	1.20	0.80	2.00
α	0.70	1.45	
γ	Sans objet	Sans objet	

Résultats

Région1	***Région2***	***Pays***
Production **X**		
1.915	1.824	3.739
2.723	1.450	4.174
Valeur ajoutée par branche et totale		
0.383	0.365	0.748
0.817	0.435	1.252
1.200	0.800	2.000
Demande finale endogène $\mathbf{f}^*\alpha_i y_i$		
0.504	0.696	1.200
0.336	0.464	0.800
0.840	1.160	2.000

Région1	***Région2***
Quotients de localisation*	
0.853	1.220
1.088	0.869
Exportations $\mathbf{F}_x$	
0.000	0.036
0.396	0.000
0.396	0.036
Importations **M**	
0.036	0.000
0.000	0.396
0.036	0.396

* Les quotients de localisation sont calculés à partir de la valeur ajoutée

Comparaison des résultats obtenus par la méthode du quotient de localisation avec les valeurs calculées du modèle

Estimation QL		Calcul modèle	
Région1	*Région2*	*Région1*	*Région2*
VA directement associée aux exportations			
0.000	0.066	0.000	0.007
0.066	0.000	0.119	0.000
0.066	0.066	0.119	0.007
Production exportée			
0.000	0.329	0.000	0.036
0.219	0.000	0.396	0.000

Commentaire :

Dans ce premier exemple, les échanges interrégionaux ne sont pas équilibrés : la valeur du bien 2 exporté par la région 1 est supérieure à la valeur du bien 1 qu'elle importe, de sorte que le solde de ses échanges avec la région 2 est positif.

Le quotient de localisation utilisé est calculé à partir de la valeur ajoutée par industrie des régions. On a appliqué la méthode du QL à l'estimation (i) de la valeur ajoutée directement associée aux exportations et (ii) de la valeur de la production exportée. Dans le premier cas, la méthode du QL produit nécessairement un résultat symétrique, alors que les résultats du modèle indiquent que la valeur ajoutée associée aux exportations de la région 1 est de loin supérieure à celle de la région 2. La méthode du QL échoue tout aussi lamentablement en ce qui concerne la valeur de la production exportée.

Deuxième exemple

Données de départ (paramètres du modèle)

A	
0.25	0.25
0.45	0.45
v'	
0.30	0.30
f*	**g** ou **g***
0.60	-0.10
0.40	1.10
1.00	1.00

	Région1	*Région2*	*Pays*
β	0.60	0.40	1.00
y	1.20	0.80	2.00
α	0.70	1.45	
γ	Sans objet	Sans objet	

Résultats

Région1	*Région2*	*Pays*	*Région1*	*Région2*
Production **X**			Quotients de localisation*	
1.468	1.399	2.867	0.853	1.220
2.532	1.268	3.800	1.111	0.834
Valeur ajoutée par branche et totale			Exportations $\mathbf{F}_x$	
0.440	0.420	0.860	0.000	0.036
0.760	0.380	1.140	0.396	0.000
1.200	0.800	2.000	0.396	0.036
Demande finale endogène $\mathbf{f}^*\alpha_i y_i$			Importations **M**	
0.504	0.696	1.200	0.036	0.000
0.336	0.464	0.800	0.000	0.396
0.840	1.160	2.000	0.036	0.396

* Les quotients de localisation sont calculés à partir de la valeur ajoutée

Comparaison des résultats obtenus par la méthode du quotient de localisation avec les valeurs calculées du modèle

Estimation QL		Calcul modèle	
Région1	*Région2*	*Région1*	*Région2*
VA directement associée aux exportations			
0.000	0.076	0.000	0.011
0.076	0.000	0.119	0.000
0.076	0.076	0.119	0.011
Production exportée			
0.000	0.252	0.000	0.036
0.252	0.000	0.396	0.000

Commentaire :

Dans ce deuxième exemple, la structure et la valeur totale des échanges entre les régions sont les mêmes que dans le premier. Cependant, les coefficients techniques des deux produits sont identiques. Les résultats obtenus par la méthode du QL sont à peine moins éloignés des valeurs du modèle.

Troisième exemple

Données de départ (paramètres du modèle)

A	
0.40	0.25
0.40	0.45
v'	
0.20	0.30
f*	**g** ou **g***
0.60	-0.10
0.40	0.10
1.00	0.00

	Région1	*Région2*	*Pays*
β	0.60	0.40	1.00
y	1.20	0.80	2.00
α	Sans objet	Sans objet	
γ	1.8	-2.7	

Résultats

Région1	*Région2*	*Pays*
Production **X**		
1.962	1.777	3.739
2.692	1.482	4.174
Valeur ajoutée par branche et totale		
0.392	0.355	0.748
0.808	0.445	1.252
1.200	0.800	2.000
Demande finale endogène $\mathbf{f}^*\alpha_i y_i$		
0.720	0.480	1.200
0.480	0.320	0.800
1.200	0.800	2.000

Région1	*Région2*
Quotients de localisation*	
0.874	1.188
1.075	0.888
Exportations $\mathbf{F}_x$	
0.000	0.216
0.216	0.000
0.216	0.216
Importations **M**	
0.216	0.000
0.000	0.216
0.216	0.216

* Les quotients de localisation sont calculés à partir de la valeur ajoutée

Comparaison des résultats obtenus par la méthode du quotient de localisation avec les valeurs calculées du modèle

Estimation QL		Calcul modèle	
Région1	*Région2*	*Région1*	*Région2*
VA directement associée aux exportations			
0.000	0.056	0.000	0.043
0.056	0.000	0.065	0.000
0.056	0.056	0.065	0.043
Production exportée			
0.000	0.282	0.000	0.216
0.188	0.000	0.216	0.000

Commentaire :

Dans ce troisième exemple, les coefficients techniques des deux produits sont différents, comme dans le premier exemple, mais les échanges entre les régions sont équilibrés; la valeur totale des échanges est cependant la même que précédemment[5]. Les résultats obtenus par la méthode du QL sont moins éloignés des valeurs du modèle, mais les erreurs sont de 13 % pour la région 1 et de 30 % pour la région 2.

Quatrième exemple

Données de départ (paramètres du modèle)

A	
0.25	0.25
0.45	0.45
v'	
0.30	0.30
f*	**g** ou **g***
0.60	-0.10
0.40	0.10
1.00	0.00

	Région1	***Région2***	***Pays***
β	0.60	0.40	1.00
y	1.20	0.80	2.00
α	Sans objet	Sans objet	
γ	1.8	-2.7	

Résultats

Région1	***Région2***	***Pays***
Production **X**		
1.504	1.363	2.867
2.496	1.304	3.800
Valeur ajoutée par branche et totale		
0.451	0.409	0.860
0.749	0.391	1.140
1.200	0.800	2.000
Demande finale endogène $\mathbf{f}^* \alpha_i y_i$		
0.720	0.480	1.200
0.480	0.320	0.800
1.200	0.800	2.000

Région1	***Région2***
Quotients de localisation*	
0.874	1.188
1.095	0.858
Exportations $\mathbf{F}_x$	
0.000	0.216
0.216	0.000
0.216	0.216
Importations **M**	
0.216	0.000
0.000	0.216
0.216	0.216

* Les quotients de localisation sont calculés à partir de la valeur ajoutée

Comparaison des résultats obtenus par la méthode du quotient de localisation avec les valeurs calculées du modèle

Estimation QL		**Calcul modèle**	
Région1	***Région2***	***Région1***	***Région2***
VA directement associée aux exportations			
0.000	0.065	0.000	0.065
0.065	0.000	0.065	0.000
0.065	0.065	0.065	0.065
Production exportée			
0.000	0.216	0.000	0.216
0.216	0.000	0.216	0.000

5 Dans le premier exemple, 0,396+0,036=0,432; dans le second, 0,216+0,216=0,432.

Commentaire :

Dans cet exemple, les échanges entre les régions sont équilibrés. De plus, les coefficients techniques des deux produits sont identiques. Et cette fois, la méthode du QL donne les bons résultats.

3. CONCLUSIONS

Nous avons construit une famille d'exemples numériques où sont respectées *a priori* trois des quatre conditions nécessaires pour que l'estimation des exportations régionales par la méthode du quotient de localisation soit valide. L'analyse de ces exemples fait ressortir que la condition manquante

H2. L'absorption (utilisation locale) du produit par emploi dans l'économie locale est égale entre villes ou régions.

ne peut être respectée que sous deux conditions :

- les structures d'intrants de tous les produits doivent être identiques;
- les flux d'échanges doivent être équilibrés, c'est-à-dire que la valeur des exportations de chaque région doit être égale à la valeur de ses importations.

De ces deux restrictions, c'est la seconde qui, *a priori*, semble la plus critique, en ce sens que, pour une même valeur globale des échanges, les erreurs résultant de l'application de la méthode du quotient de localisation sont plus grandes si cette seule condition est violée que si cette condition est respectée alors que l'autre est violée.

A posteriori, ces conclusions paraissent banalement évidentes. Si les structures d'intrants sont différentes, la demande intermédiaire engendrée par la production d'exportations ne peut pas être la même dans les régions qui exportent des produits différents (ce qui est nécessairement le cas en l'absence de flux croisés). Si les échanges ne sont pas équilibrés, la production d'exportations n'est pas égale entre les régions et, par conséquent, la demande intermédiaire qu'elle engendre ne l'est pas non plus. Dans les deux cas, la demande totale (intermédiaire et finale) de chaque produit ne peut pas être proportionnelle à la taille des régions, sauf par hasard.

RÉFÉRENCES

Brand, Steven (1997) « On the appropriate use of location quotients in generating regional input-output tables: A comment ». *Regional Studies* 31, no. 8: 791-94.

Brand, Steven (1998) « Supply chains, material linkage and regional development: a comment ». *Urban Studies* 35, no. 4: 769-73.

Flegg, A. T., et C. D. Webber (1997) « On the appropriate use of location quotients in generating regional input-output tables: reply ». *Regional Studies* 31, no. 8: 795-805.

Flegg, A. T., et C. D. Webber (2000) « Regional size, regional specialization and the FLQ formula ». *Regional Studies* 34, no. 6: 563-69.

Flegg, A. T., C. D. Webber, et M. V. Elliott (1995) « On the appropriate use of location quotients in generating regional input-output tables ». *Regional Studies* 29, no. 6: 547-61.

Harris, Richard I. D., et Aying Liu (1998) « Input-output modelling of the urban and regional economy: the importance of external trade ». *Regional Studies* 32, no. 9: 851-62.

Isserman, Andrew M (1980) « Estimating export activity in a regional economy: A theoretical and empirical analysis of alternative methods ». *International Regional Science Review* 5, no. 2: 155-84.

Jayet, Hubert (1993) *Analyse spatiale quantitative, une introduction*. Paris: Economica.

Leigh, Roger (1970) « The use of location quotients in urban economic base studies ». *Land Economics* 46, no. 2: 202-5.

McCann, Philip, et John H. Ll. Dewhurst (1998) « Regional size, industrial location and input-output expenditure coefficients ». *Regional Studies* 32, no. 5: 435-44.

Norcliffe, G. B (1983) « Using location quotients to estimate the economic base and trade flows ». *Regional Studies* 17, no. 3: 161-68.

Riddington, Geoff, Hervey Gibson, et John Anderson (2006) « Comparison of gravity model, survey and location quotient-based local area tables and multipliers ». *Regional Studies* 40, no. 9: 1069-81.

Twomey, J (1996) « Supply chains, material linkage and regional development ». *Urban Studies* 33, no. 6: 937-54.

Twomey, J., et J. M. Tomkins (1996) « Supply potential in the regions of Great Britain ». *Regional Studies* 30, no. 8: 783-90.

Twomey, J., et Judith M. Tomkins (1998) « Supply chains, material linkage and regional development: a reply ». *Urban Studies* 35, no. 4: 775-78.

ANNEXE 1. LISTE DES ÉQUATIONS

$$EXP_{ij} = \begin{cases} x_{ij}\dfrac{(QL_{ij}-1)}{QL_{ij}}, \text{si } QL_{ij} > 1 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \qquad [01]$$

$$EXP_{ij} = x_{ij} - \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right) x_{\bullet j}, \text{ si } x_{ij} > \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right) x_{\bullet j} \qquad [02]$$

$$EXP_{ij} = \left[\left(x_{ij} / x_{\bullet j} \right) - \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right) \right] x_{\bullet j}, \text{ si } \left(x_{ij} / x_{\bullet j} \right) > \left(x_{i\bullet} / x_{\bullet\bullet} \right) \qquad [03]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y} \qquad [04]$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \qquad [05]$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} \qquad [06]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{AY} + \mathbf{A}^2\mathbf{Y} + \mathbf{A}^3\mathbf{Y} + \cdots = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}^t \right) \mathbf{Y} \qquad [07]$$

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\imath}'(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad [08]$$

$$\boldsymbol{\imath}' = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \qquad [09]$$

$$y = \mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [10]$$

$$\boldsymbol{\imath}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y} \qquad [11]$$

$$\mathbf{v}'\mathbf{X} = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y} \qquad [12]$$

$$y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y} \qquad [13]$$

Si $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [14]

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad [15]$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}\, y \qquad [16]$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{Y}}{\boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{Y}}{y} \qquad [17]$$

$$\mathbf{\imath}'\mathbf{f} = 1 \qquad [18]$$

$$\mathbf{\imath}'\mathbf{Y} = \mathbf{\imath}'\mathbf{f}\; y = y = \mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [19]$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{A}) & -\mathbf{f} \\ -\mathbf{v}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad [20]$$

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{f} \\ \mathbf{v}' & 0 \end{bmatrix} \qquad [21]$$

$$\mathbf{X}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} \qquad [22]$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}^{*}\alpha y + \mathbf{F}_{x} \qquad [23]$$

$$\mathbf{f}^{*} = \frac{(\mathbf{Y}-\mathbf{F}_{x})}{\mathbf{\imath}'(\mathbf{Y}-\mathbf{F}_{x})} \qquad [24]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Y} - \mathbf{M} \qquad [25]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \mathbf{M} \qquad [26]$$

$$\mathbf{\imath}'(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{\imath}'\mathbf{Y} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M} \qquad [27]$$

$$\mathbf{v}'\mathbf{X} = y = \mathbf{\imath}'\mathbf{Y} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M} \qquad [28]$$

$$y = \mathbf{\imath}'\mathbf{f}^{*}\,\alpha y + \mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{x} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M} \qquad [29]$$

$$y = \alpha y + \mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{x} - \mathbf{\imath}'\mathbf{M} \qquad [30]$$

$$\alpha = \frac{y - \mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{x}-\mathbf{M})}{y} = 1 - \frac{\mathbf{\imath}'(\mathbf{F}_{x}-\mathbf{M})}{y} \qquad [31]$$

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^{*}\,\alpha y\right) \qquad [32]$$

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} (\mathbf{I}-\mathbf{A}) & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{f}^{*}\alpha \\ \hdashline -\hat{\mathbf{m}}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{m}}\mathbf{f}^{*}\alpha \\ \hdashline -\mathbf{v}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{M} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x} \qquad [33]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{f}^{*}\,\alpha y + \mathbf{F}_{x} - \hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^{*}\,\alpha y\right) \qquad [34]$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{AX} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha y + \mathbf{F}_{x} \tag{35}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\alpha \\ \hdashline -\mathbf{v}' & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0}' \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\imath}'[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} - \mathbf{v}'\mathbf{X} - \boldsymbol{\imath}'(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha y + y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} \tag{37}$$

$$[\boldsymbol{\imath}' - \boldsymbol{\imath}'\mathbf{A} + \mathbf{m}'\mathbf{A} - \mathbf{v}']\mathbf{X} - (\boldsymbol{\imath}' - \mathbf{m}')\mathbf{f}^{*}\alpha y + y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} \tag{37}$$

$$\mathbf{m}'\mathbf{AX} - (\boldsymbol{\imath}' - \mathbf{m}')\mathbf{f}^{*}\alpha y + y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} \tag{38}$$

$$\mathbf{m}'\mathbf{AX} - \alpha y + \mathbf{m}'\mathbf{f}^{*}\alpha y + y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} \tag{39}$$

$$y = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} + \alpha y - \mathbf{m}'\mathbf{AX} - \mathbf{m}'\mathbf{f}^{*}\alpha y \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\imath}'\mathbf{Y} = \boldsymbol{\imath}'\mathbf{f}^{*}\,\alpha y + \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} = \alpha y + \boldsymbol{\imath}'\mathbf{F}_{x} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\imath}'\mathbf{M} = \boldsymbol{\imath}'\hat{\mathbf{m}}\left(\mathbf{AX} + \mathbf{f}^{*}\,\alpha y\right) = \mathbf{m}'\mathbf{AX} + \mathbf{m}'\mathbf{f}^{*}\alpha y \tag{42}$$

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha y + \mathbf{F}_{x} \tag{43}$$

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A}]\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}'\mathbf{X} + \mathbf{F}_{x} \tag{44}$$

$$\left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}'\right]\mathbf{X} = \mathbf{F}_{x} \tag{45}$$

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}'\right]^{-1}\mathbf{F}_{x} \tag{46}$$

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}'$$

$$\boldsymbol{\imath}'\left[(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}'\right] = \boldsymbol{\imath}'(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{A} + \boldsymbol{\imath}'(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}})\mathbf{f}^{*}\,\alpha\mathbf{v}' \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\imath}'\mathbf{A} + \alpha\mathbf{v}' = \boldsymbol{\imath}' - \mathbf{v}' + \alpha\mathbf{v}' = \boldsymbol{\imath}' - (1 - \alpha)\mathbf{v}' \tag{48}$$

$$\hat{\mathbf{m}}_{1}\hat{\mathbf{m}}_{2} = \hat{\mathbf{0}} \tag{49}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_{1})\mathbf{A}] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_{1})\mathbf{f}^{*}\alpha_{1} \\ \hdashline -\mathbf{v}' & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1} \\ y_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0}' \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x1} \tag{50}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_{2})\mathbf{A}] & -(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_{2})\mathbf{f}^{*}\alpha_{2} \\ \hdashline -\mathbf{v}' & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2} \\ y_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0}' \end{bmatrix} \mathbf{F}_{x2} \tag{51}$$

$$\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{M}_2 = \hat{\mathbf{m}}_2\left(\mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \mathbf{f}^*\ \alpha_2 y_2\right) = \hat{\mathbf{m}}_2\left(\mathbf{A} + \mathbf{f}^*\ \alpha_2 \mathbf{v}'\right)\mathbf{X}_2 \qquad [52]$$

$$\mathbf{F}_{x2} = \mathbf{M}_1 = \hat{\mathbf{m}}_1\left(\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{f}^*\ \alpha_1 y_1\right) = \hat{\mathbf{m}}_1\left(\mathbf{A} + \mathbf{f}^*\ \alpha_1 \mathbf{v}'\right)\mathbf{X}_1 \qquad [53]$$

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1\right)\mathbf{A}\right] & -\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_1\right)\mathbf{f}^*\alpha_1 & -\hat{\mathbf{m}}_2\mathbf{A} & -\hat{\mathbf{m}}_2\mathbf{f}^*\alpha_2 \\ \hdashline -\mathbf{v}' & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline -\hat{\mathbf{m}}_1\mathbf{A} & -\hat{\mathbf{m}}_1\mathbf{f}^*\alpha_1 & \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2\right)\mathbf{A}\right] & -\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{m}}_2\right)\mathbf{f}^*\alpha_2 \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{v}' & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ y_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [54]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i y_i + \mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i \qquad [55]$$

$$\sum_i \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}_i = \sum_i \mathbf{f}^*\alpha_i y_i + \sum_i \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right) \qquad [56]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\sum_i \mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\sum_i \alpha_i y_i + \sum_i \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right) \qquad [57]$$

$$\left(1 - \alpha_i\right)y_i = \mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i \qquad [58]$$

$$\sum_i \left(1 - \alpha_i\right)y_i = \sum_i \left(\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i\right) \qquad [59]$$

$$\sum_i \alpha_i y_i = \sum_i y_i = y \qquad [60]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X} = \mathbf{f}^* y \qquad [61]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \qquad [62]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X} = \mathbf{f}^*\mathbf{v}'\mathbf{X} \qquad [63]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{f}^*\mathbf{v}'\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad [64]$$

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) & -\mathbf{f} \\ -\mathbf{v}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad [20]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i + \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right)\frac{1}{y_i} \qquad [65]$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i + \left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right)\frac{1}{y_i}\frac{\mathbf{\iota}'\left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right)}{\mathbf{\iota}'\left(\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i\right)} \qquad [66]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i + \frac{(\mathbf{F}_{xi}-\mathbf{M}_i)}{\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{xi}-\mathbf{M}_i)}(1-\alpha_i) \qquad [67]$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{(\mathbf{F}_{xi}-\mathbf{M}_i)}{\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{xi}-\mathbf{M}_i)} \qquad [68]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^*\ \alpha_i + \mathbf{g}_i(1-\alpha_i) \qquad [69]$$

$$\mathbf{F}_{x1}-\mathbf{M}_1 = -(\mathbf{F}_{x2}-\mathbf{M}_2) \qquad [70]$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{(\mathbf{F}_{x1}-\mathbf{M}_1)}{\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x1}-\mathbf{M}_1)} = \frac{-(\mathbf{F}_{x2}-\mathbf{M}_2)}{-\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x2}-\mathbf{M}_2)} = \mathbf{g}_2 \qquad [71]$$

$$(1-\alpha_1)y_1 = \mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x1}-\mathbf{M}_1) = -\mathbf{\iota}'(\mathbf{F}_{x2}-\mathbf{M}_2) = -(1-\alpha_2)y_2 \qquad [72]$$

$y_i = \beta_i y$, avec $\sum_i \beta_i = 1$ [73]

$$(1-\alpha_1)\beta_1 = -(1-\alpha_2)\beta_2 \qquad [74]$$

$$\alpha_2 = \frac{(\beta_1+\beta_2)-\alpha_1\beta_1}{\beta_2} = \frac{1-\alpha_1\beta_1}{\beta_2} \qquad [75]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* + (\mathbf{F}_{xi}-\mathbf{M}_i)\frac{1}{y_i} \qquad [76]$$

$$\mathbf{g}_i^* = \frac{\mathbf{F}_{xi}}{\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi}} - \frac{\mathbf{M}_i}{\mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i} \qquad [77]$$

$$\gamma_i = \frac{\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{xi}}{y_i} = \frac{\mathbf{\iota}'\mathbf{M}_i}{y_i} \qquad [78]$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{1}{y_i}\mathbf{X}_i = \mathbf{f}^* + \mathbf{g}_i^*\gamma_i \qquad [79]$$

$$\mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{\iota}'\mathbf{M}_2 = \mathbf{\iota}'\mathbf{F}_{x2} = \mathbf{\iota}'\mathbf{M}_1 \qquad [80]$$

$$\mathbf{F}_{x1} - \mathbf{M}_1 = -(\mathbf{F}_{x2} - \mathbf{M}_2) \qquad [70]$$

$$\mathbf{g}_1^* = \frac{\mathbf{F}_{x1}}{\mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{x1}} - \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{\imath}'\mathbf{M}_1} = -\left(\frac{\mathbf{F}_{x2}}{\mathbf{\imath}'\mathbf{F}_{x2}} - \frac{\mathbf{M}_2}{\mathbf{\imath}'\mathbf{M}_2}\right) = -\mathbf{g}_2^* \qquad [81]$$

$$\gamma_1 y_1 = \gamma_2 y_2 \qquad [82]$$

$$\gamma_1 \beta_1 = \gamma_2 \beta_2 \qquad [83]$$

$$\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* \alpha_i + \mathbf{g}(1 - \alpha_i) \geq \mathbf{0} \qquad [84]$$

$$\mathbf{AX} + \mathbf{f}^* + \mathbf{g}^* \gamma_i \geq \mathbf{0} \qquad [85]$$

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{f}^* \alpha_i + \mathbf{g}(1 - \alpha_i)\right]\beta_i y \qquad [86]$$

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{f}^* + \mathbf{g}^* \gamma_i\right)\beta_i y \qquad [87]$$

$$\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i = \mathbf{g}(1 - \alpha_i) y_i \qquad [88]$$

$$\mathbf{F}_{xi} - \mathbf{M}_i = \mathbf{g}^* \gamma_i y_i \qquad [89]$$