MARS.22 | vol.07 no02

Polydontiste

6 questions à Iosif Polterovich

Le SAMARI
un remède à nos questionnements

Modèles en vrac

ÉQUIPE

RÉDACTEUR EN CHEF
SIMON LUANGXAY

GRAPHISME
PIERRE-ALEXANDRE MAILHOT
LEON CARLOS NAVARRO CAMPILLO

CHRONIQUES
EVENSON AUGUSTE
ANNE CLÉROUX
JONATHAN GODIN
BÉATRICE HAJJAR
JULIEN HÉBERT-DOUTRELOUX
ÉLOI MARTIN
BLANCHE MONGEON
MATHIEU PINEAULT
SILVIA BAHAMONDEZ

CORRECTION
GABRIELLE RAINVILLE

REMERCIEMENTS
IOSIF POLTEROVICH (6 QUESTIONS)

CONTACT

COURRIEL
LAXIOMATIQUE@GMAIL.COM

SITE WEB
LAXIOMATIQUE.COM

FACEBOOK
FACEBOOK.COM/LAXIOMATIQUE

GRAPHISTES INTÉRESSÉ.E.S
LEON.CARLOS.NAVARRO.CAMPILLO@
UMONTREAL.CA

SOMMAIRE

CETTE ÉDITION EST RÉALISÉE GRÂCE À L'APPUI FINANCIER REÇU DE

LA FÉDÉRATION DES ASSOCIATIONS ÉTUDIANTES DU CAMPUS DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FAÉCUM

| LE MOT DE LA RÉDACTION

UNE LIBERTÉ À NE PAS PRENDRE À LA LÉGÈRE

J'espère que tu te portes bien et que tu prends le temps de décompresser un peu pendant la semaine de lecture! Le printemps arrive bientôt, mais il est encore temps d'en profiter un peu de l'hiver. Peut-être une journée de patin et de ski ou en profiter pour aller au cinéma et au karaoké? Après tout, il pourrait y avoir des allègements des mesures sanitaires bientôt. Toutefois, ne nous reposons pas sur nos lauriers, la santé passe avant tout!

SIMON LUANGXAY,
RÉDACTEUR EN CHEF

| AEMSUM

BIENVENUE À L'AEMSUM: PROGRAMME D'ACTIVITÉS EN MARS

L'assemblée générale de la session d'hiver de l'AEMSUM a eu lieu le mercredi 26 janvier 2022. Celle-ci a été présidée par Laurent Alsène-Racicot et avait entre autres pour but d'élire six étudiants à différents postes vacants. C'est ainsi que le conseil exécutif a accueilli trois nouvelles recrues pour les postes de coordonnateurs à la vie étudiante: Marianne Pelletier, Louis Philippe Ignatieff et moi-même. Xavier Pelletier a aussi changé de fonction en prenant le rôle de coordonnateur à la vie étudiante socioculturelle.

Bonne nouvelle ! Le retour des cours en présentiel signifie aussi le retour des activités en personne. En effet, plusieurs événements seront annoncés en mars: une journée à la cabane à sucre et une soirée quiz. On vous attend en grand nombre!

Nous vous invitons aussi à suivre la page Facebook et Instagram de l'AEMSUM pour rester à l'affut quant aux activités organisées durant la session. Vous pouvez aussi nous contacter pour toute autre information.

Bonne session !

MATHILDE DICAIRE-CARTIER,
COORDONNATRICE À LA VIE ÉTUDIANTE

| CLUBMATH

FÉVRIER AU CLUBMATH

Les vacances du Clubmath ont officiellement pris fin en février et nous sommes fin prêts et prêtes pour une autre belle session remplie de conférences toutes plus intéressantes les unes que les autres. Notez que les conférences hebdomadaires ont toujours lieu les mercredis de 12h30 à 13h30, mais qu'elles se déroulent désormais au 1177 André-Aisenstadt.

Le 2 février, Guillaume Lajoie, professeur adjoint au DMS de l'Université de Montréal et membre académique principal de Mila, a ouvert le bal de la session H22 avec une conférence intitulée «L'algèbre linéaire au cœur de l'intelligence: apprentissage dans les réseaux neuronaux biologiques et artificiels». Il a expliqué la possibilité de développer des théories et des outils mathématiques pour comprendre le cerveau, ainsi que comment le tout peut être appliqué à l'intelligence artificielle. En passant par la technique de descente du gradient et la décomposition de Schur, il nous a expliqué plusieurs notions d'algèbre linéaire et d'apprentissage profond.

Le 9 février, Alexandre Girouard, diplômé de l'Université de Montréal et désormais professeur titulaire à l'Université Laval, nous a rendu visite avec sa conférence «Sur une sphère de grande dimension, tout le monde vit proche de l'équateur». Au fil de sa présentation, il nous a convaincu d'un résultat étonnant: le volume de la boule de rayon unitaire en dimension n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Autre fait surprenant, il y a une concentration du volume de la sphère unitaire près de son équateur.

Finalement, le 16 février, Jean-Philippe Chassé, doctorant·e au DMS, a conclu le mois en nous présentant une conférence intitulée «Dans les petites sphères, les meilleurs plongements». Au cours de sa présentation, iel nous a présenté des problèmes de plongements symplectiques qui préservent le volume. Iel nous a introduit les ellipsoïdes, une généralisation de l'ellipse bien connue, ainsi que le groupe symplectique Symp(n) et ses propriétés.

Comme à l'habitude, les conférences du Clubmath sont toutes disponibles sur notre chaîne Youtube. De plus, à chaque semaine, vous trouverez à la bibliothèque de mathématiques et d'informatique une sélection de livres préparée spécialement pour le Clubmath qui porte sur la conférence de la semaine courante. Sur ce, le Clubmath prend congé pour quelques semaines afin de laisser à toutes et tous la chance de préparer adéquatement sa mi-session, et ce, sans avoir à manquer une conférence! On se revoit donc le 16 mars à 12h30 au 1177 pavillon André-Aisenstadt.

dms.umontreal.ca/~clubmath/

www.facebook.com/clubmath.dms/

www.youtube.com/channel/UCpv-KeFLlZiMTqqx0ErcFMw

BLANCHE MONGEON, AU NOM DU COMITÉ ORGANISATEUR DU CLUBMATH

LE SAMARI

UN REMÈDE À NOS QUESTIONNEMENTS

Si vous étudiez au baccalauréat en maths orientation maths pures, stats ou bien sciences maths et que vous cherchez quoi faire pour la fin de cette semaine de relâche, j'ai l'évènement fait pour vous: le SAMARI. Celui-ci joue le rôle de journée carrière pour les gens de notre programme.

Nous nous sommes tous et toutes au moins demandé une fois «quelles carrières puis-je poursuivre avec un baccalauréat en maths?» durant notre parcours. Heureusement, le *Symposium Annuel en Mathématiques* *pour un Avenir en Recherche et en Industrie* (ou plus simplement SAMARI) est là pour répondre à ce genre de questions existentielles. Vous aurez l'occasion d'entendre parler des gens qui sont passés par là eux aussi il n'y a pas trop longtemps. Ils viendront entre autres nous faire part de leur expérience et comment ils ont trouvé leur voie.

QU'EST CE QUE LE SAMARI PLUS PRÉCISÉMENT?

Cet évènement **en ligne** se déroulant **les 3 et 4 mars** vous permettra de voir plusieurs présentations sur divers sujets qui vous intéresseront assurément.

La journée du **jeudi** se concentrera principalement sur l'aspect **académique** des possibilités de carrières. En matinée, vous aurez la chance d'assister à de courts exposés sur les différents domaines que l'on peut étudier aux cycles supérieurs en mathématiques tels que la géométrie, la théorie spectrale, la théorie des nombres, la biomathématique, la statistique et la science des données. Des présentations informatives sur comment passer aux cycles supérieurs et comment effectuer des études à l'international seront aussi données. Enfin, vous pourrez avoir un aperçu des emplois en enseignement collégial et universitaire en mathématiques.

Le lendemain, **vendredi 4 mars**, sera entièrement dédié aux carrières en **industrie** qui nous viennent moins souvent en tête lorsqu'on pense à nos perspectives d'avenir. Des employés de **compagnies** comme Giro, Stradigi AI et SynergX ayant fait des études en maths nous présenteront leur emploi et leur parcours. Nous aurons aussi la visite de gens dans le milieu financier et celui de la vulgarisation scientifique.

En plus de toutes ces présentations fascinantes, un **concours d'affiches** (avec prix!) et une **séance de réseautage** où vous pourrez parler aux conférenciers seront au menu respectivement le jeudi et vendredi en fin d'après-midis.

COMMENT Y PARTICIPER?

Même si le SAMARI commence dans à peine trois jours (au moment de la publication de ce journal), il est encore temps de vous inscrire **gratuitement!** Pour le faire, vous n'avez qu'à remplir le formulaire suivant :

https://forms.gle/nStPttTfK3rjpbws5

Si, en plus, vous voulez être au courant de tous les détails importants comme l'horaire exact du symposium, suivez notre page Facebook pour ne rien manquer:

https://www.facebook.com/symposiumSAMARI

Enfin, que vous soyez à la première année de vos études ou déjà en direction de nouveaux horizons, il n'est jamais trop tard pour en apprendre plus sur la vie après le bac. Le SAMARI est en quelques sortes **un remède à tous nos questionnements** qui reviennent un peu trop souvent concernant notre futur.

MATHIEU PINEAULT,
COORGANISATEUR DU SAMARI

MODÈLES EN VRAC

«Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles.»

- George Box

Cette célèbre citation du statisticien George Box affirme que même si les modèles ne sont qu'une approximation de la réalité, ils peuvent nous aider à comprendre celle-ci. Cet article a pour but de vous faire découvrir deux modèles étonnants permettant de mieux comprendre des phénomènes complexes.

MUSIQUE CONTAGIEUSE

Dans leur article *Modelling song popularity as a contagious process*, des chercheurs de l'université McMaster se sont intéressés à la façon dont une chanson gagne en popularité. Ils ont établi qu'un modèle épidémiologique décrit bien la manière dont les chansons se propagent dans la population. Le modèle considéré est le modèle SIR, où on divise la population en trois catégories: ceux qui sont susceptibles d'attraper la maladie (S), ceux qui en sont infectés (I) et ceux qui sont rétablis (R). De leur côté, ils s'intéressent aux téléchargements d'une chanson et à ceux qui sont susceptibles de la télécharger (S), ceux qui l'ont téléchargée et qui l'écoutent (I) et ceux qui l'ont téléchargée mais ne l'écoutent plus (R).

Pour les 950 chansons dans leur échantillon, ils ont estimé les taux de passage entre les trois états. Ils ont conclu que la propagation de 87% des chansons étudiées était bien décrite par le modèle SIR. Il est certain qu'il faudra davantage d'études sur le sujet pour mieux comprendre ce phénomène, mais il est évident que ces résultats peuvent être très utiles pour l'industrie de la musique.

FOULE LIQUIDE

Savoir modéliser les foules est très important dans plusieurs situations : cela permet de prévoir adéquatement l'emplacement des sorties d'urgence dans une salle ou quelles mesures mettre en place pour que l'évacuation se déroule bien. Le modèle proposé ici s'applique aux foules qui se dirigent globalement dans la même direction, dans le cas d'une évacuation d'urgence, par exemple.

Un des modèles utilisés pour décrire une foule représente celle-ci comme une goutte. La goutte tend à minimiser son altitude, donc à trouver le point le plus bas dans son entourage. En d'autres mots, celle-ci se dirige vers l'endroit où le gradient est le plus élevé. L'altitude de la goutte est une fonction de plusieurs facteurs qui dépendent de la situation qu'on modélise. Dans le cas de l'évacuation, on voudrait minimiser, entre autres, la somme des distances de chaque personne à la sortie. On pourrait alors constater quelles dispositions permettent à la goutte de descendre la pente le plus vite possible et donc à la foule d'être évacuée.

Alors comme dit au début de l'article, les deux modèles présentés sont faux, mais peuvent s'avérer utiles!

BÉATRICE HAJJAR, ÉTUDIANTE AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

| QUOI DE NEUF DANS L'UNIVERS MATHÉMATIQUE?

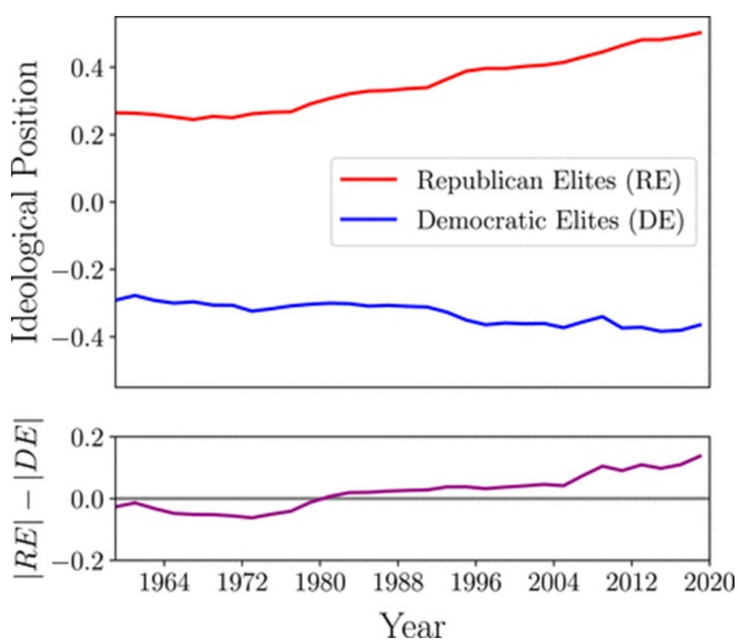
MODÉLISATION DES TENDANCES POLITIQUES: UTOPIE OU RÉALITÉ?

Un des principaux dangers à la démocratie est la polarisation. Ceci est habituellement perçu comme un phénomène qualitatif et difficile à appréhender, à cause de la grande quantité de facteurs qui génèrent les opinions politiques de chaque citoyen.

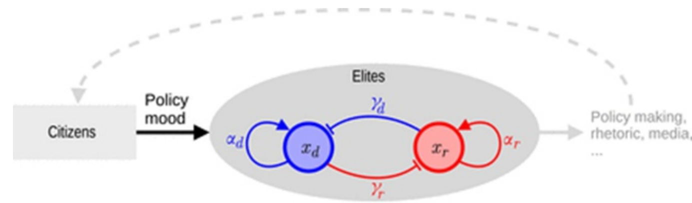
Cependant, et si on pouvait la prévoir et par le fait même la prévenir? C'est le défi que se sont donné des chercheurs de l'université américaine du Michigan dans un article intitulé: *The nonlinear feedback dynamics of asymmetric political polarization*, paru dans la revue Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, le 14 décembre 2021.

Les chercheuses et chercheurs Naomi Ehrich Leonard, Keena Lipsitz, Anastasia Bizyaeva, Alessio Franci et Yphtach Lelkes proviennent des deux domaines de recherche auxquels cet article s'applique: les sciences sociales et la politique ainsi que les mathématiques et l'ingénierie. Leur objectif était de modéliser exactement l'évolution de l'extrémisme en politique, en s'intéressant aux facteurs qui ont la plus grande importance mathématique dans son évolution. Il est aussi intéressant de penser aux facteurs qui peuvent rendre l'évolution des systèmes politiques chaotique, c'est-à-dire impossible à prévoir.

L'article divise les acteurs du jeu politique en deux catégories: l'élite, qui est constituée des dirigeants, par exemple du Sénat et du Congrès (l'étude est centrée sur les États-Unis) et l'opinion publique. Ces deux voix sont en dialogue constant et s'influencent l'une l'autre. Un autre thème central de l'étude est l'asymétrie de l'évolution de la polarisation pour l'extrême droite politique et l'extrême gauche politique, qui peut au départ sembler difficile à expliquer, mais qui est en fait une situation rencontrée dans plusieurs systèmes mathématiques qui évoluent dans le temps. Certaines conditions initiales des systèmes, autant purement mathématiques que biologiques, ou ici, politiques, ont une plus grande influence que les autres.



Il est cité, par exemple, que les idéaux conservateurs étaient plus ambitieux que ceux libéraux dans les années 1930, ce qui a entraîné un clivage qui se poursuit encore aujourd'hui. Ceci constitue une «condition initiale» générée par l'«élite», c'est-à-dire ici les têtes pensantes et la couche supérieure économique de la population.



L'article explore, en plus de ces deux grands axes, un phénomène appelé le «*self-reinforcement*»: un va-et-vient entre l'opinion publique, qui tangue légèrement entre la gauche et la droite, et les élites, pour qui ce tangage permet de renforcer leurs idéaux premiers, les rendant plus polarisés. Ce sont ensuite des idées plus extrêmes qui sont offertes comme options à la population, ce qui recommence le cycle. Il est abordé que contrairement à l'idée répandue selon laquelle la polarisation serait le résultat des pensées individuelles des masses qui se radicalisent, les élites auraient en fait un assez grand rôle dans cette évolution, même si elle demeure co-dépendante.

Enfin, il est à noter que même si ce modèle est basé sur la politique américaine, il demeure applicable dans une certaine mesure à beaucoup d'autres systèmes politiques qui sont mis en danger par la polarisation, cette dernière n'étant pas un phénomène propre aux États-Unis. Il est intéressant de voir que les mathématiques offrent une approche quantitative aux sciences sociales qui relèvent habituellement du qualitatif et on espère que ceci pourra aider à améliorer la situation de pays où la démocratie se retrouve en danger.

https://www.pnas.org/content/118/50/e2102149118

ANNE CLÉROUX, ÉTUDIANTE AU BACCALAURÉAT
EN MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

6 QUESTIONS À IOSIF POLTEROVICH

Comment s'est déroulé votre parcours académique?

Depuis mon adolescence, ma vie a toujours été centrée autour des mathématiques. J'ai grandi à Moscou où j'ai fréquenté une école secondaire spécialisée en mathématiques, plus précisément la fameuse école numéro 57. En Russie, les écoles n'ont pas de noms: elles sont plutôt désignées par des numéros. D'ailleurs, un fait intéressant sur l'école secondaire 57 est que plusieurs mathématiciens bien connus ont étudié dans cette école, y compris mon collègue Dmitry Jakobson de l'Université McGill. Par la suite, j'ai fait mes études de premier et de deuxième cycle à l'Université d'État de Moscou qui est la plus grande université en Russie et qui est également très connue pour son département de mathématiques. Au doctorat, j'ai étudié à l'Institut Weizmann en Israël. Après avoir terminé mes études, j'ai fait des stages postdoctoraux au Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley en Californie, au Max-Planck Institut à Bonn en Allemagne et à Montréal. Puis, depuis 2002 (ça fait exactement 20 ans déjà) je suis professeur à l'UdeM.

Pourquoi avez-vous choisi d'étudier et de travailler dans le domaine des mathématiques?

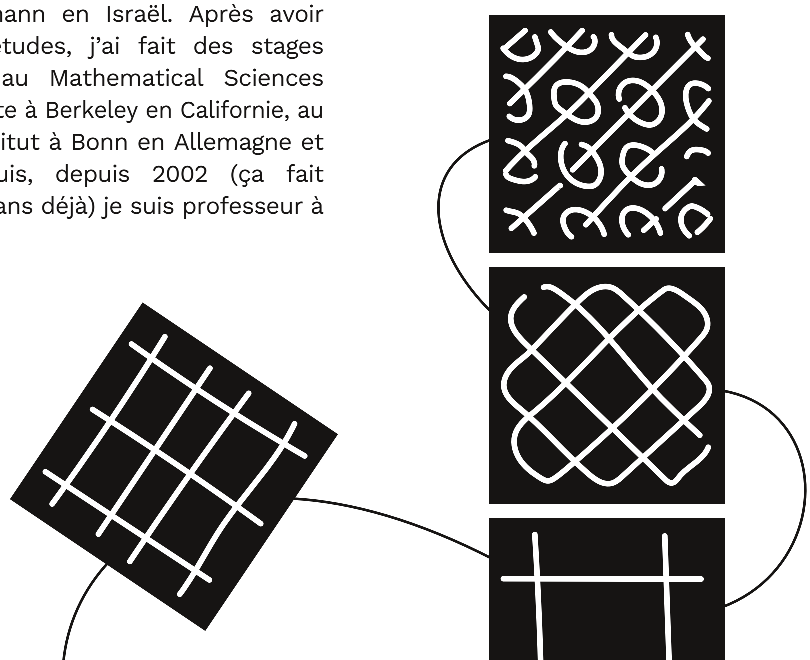
D'abord, je viens d'une famille de scientifiques. Mathématicien de formation, mon père est un chercheur de grande renommée en sciences économiques. Quant à ma mère, elle est professeure en génie et en mathématiques appliquées, elle adore son travail et est admirée par ses étudiants (elle enseigne toujours!). Puis, mon frère ainé est professeur de mathématiques et une sommité mondiale en topologie symplectique. Alors, j'ai été entouré par des scientifiques et enseignants pendant toute ma vie. Un autre facteur qui a influencé mon choix de carrière était le fait que j'ai grandi en Russie dans les années 80, donc c'était encore l'Union soviétique (URSS) à l'époque. Hormis la musique et les arts, le sport (surtout le hockey!) et les mathématiques, il n'y avait pas beaucoup de domaines dans lesquels la Russie excellait au niveau mondial. Comme je n'avais pas de talents particuliers pour les arts et le sport, le choix évident restait alors d'essayer de percer dans les maths.

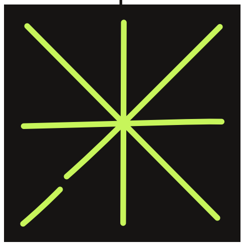
Plus sérieusement, la réalité de cette époque faisait en sorte qu'il n'y avait également pas beaucoup de possibilités pour un jeune citoyen russe contrairement à maintenant: les entrepreneurs n'existaient pas (c'était un pays communiste, donc c'était interdit!), les sciences humaines étaient très politisées et contaminées par la propagande, et les sciences expérimentales, à part des sujets reliés avec des projets militaires, manquaient souvent d'équipements modernes. Ainsi, les mathématiques et la physique théorique étaient les choix naturels pour une personne intéressée par les sciences.

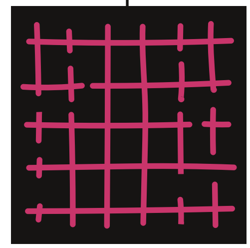
En plus d'un système d'écoles spécialisées (comme celui dans lequel j'ai étudié), les mathématiques et la physique étaient enseignées par des professeurs renommés et des experts. Par exemple, un de mes professeurs principaux à l'école est présentement directeur de recherche au Centre national de la recherche scientifique (CNRS) en France. De ce fait, j'étais vraiment chanceux d'étudier dans une telle école. Puis, c'était sans compter le fait que les élèves étaient extrêmement doués, ce qui rendait l'expérience d'apprentissage très stimulante et la vie sociale très intéressante. Grâce à cela, je me suis fait plusieurs amis pour toute la vie. En outre, il faut se rappeler que je vivais dans une société totalitaire, donc les écoles mathématiques représentaient une oasis de liberté et de pensée indépendante. L'environnement à mon école secondaire m'a définitivement aidé à transformer ma perception des mathématiques d'un passe-temps à une passion.

Sur quel(s) projet(s), travaillez-vous actuellement?

Mon sujet de recherche est la géométrie spectrale. C'est un domaine à l'interface de la théorie des équations aux dérivées partielles et de la géométrie différentielle, qui fait plusieurs liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines, comme la physique mathématique ou la mécanique de fluides. En fait, les questions en géométrie spectrale sont souvent







motivées par des phénomènes physiques, comme la propagation des ondes ou de la chaleur, ou des effets quantiques.

Un sujet sur lequel j'ai beaucoup travaillé pendant les dix dernières années est la géométrie spectrale du problème de Steklov. C'est un problème aux valeurs propres qui apparait dans plusieurs applications, par exemple dans un modèle mathématique des oscillations des fluides qui s'appelle le problème de ballottement. Ce problème est aussi relié à l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann qui joue un rôle central dans les problèmes inverses et qui possède des applications en prospection géophysique et en imagerie médicale. Entre autres, j'ai beaucoup travaillé sur ces questions avec mon ancien étudiant, Alexandre Girouard, qui est présentement professeur titulaire à l'Université de Laval et directeur adjoint du CRM.

Cela étant dit, un autre sujet qui m'intéresse beaucoup est l'inégalité isopérimétrique pour les valeurs propres. Voici une question typique: «Parmi tous les tambours de même aire donnée, lequel produit le ton fondamental le plus grave?» Dans les années 1870, Lord Rayleigh a conjecturé dans son livre éminent «*La théorie de son*» que la réponse est un tambour rond. Il a fallu à peu près 50 ans pour trouver la preuve de ce résultat qui est maintenant connue comme l'inégalité de Rayleigh-Faber-Krahn. Or, il existe encore plusieurs questions liées à ce problème, qui sont toujours ouvertes, avec des connexions étonnantes à d'autres sujets. Par exemple, dans le contexte de la géométrie riemannienne, une question analogue à celle posée ci-dessus est étroitement reliée à la théorie des surfaces minimales, un concept qui peut être visualisé dans la vie courante par les bulles de savon.

Comment pensez-vous que vos travaux de recherche impacteront la pratique ou d'autres domaines reliés à ce sujet?

Comme je l'ai déjà dit, il y a plusieurs liens entre la géométrie spectrale et d'autres domaines mathématiques, et il existe des interactions enrichissantes dans toutes les directions. Les connexions entre la géométrie spectrale et la théorie des surfaces minimales que je viens de mentionner en est un excellent exemple. Bien que ma recherche soit vraiment théorique, je suis toujours intéressé par des applications potentielles. Une de mes collaborations récentes a été avec des experts en sciences informatiques du MIT et de Technion. Ces derniers étaient intéressés par des applications de la géométrie spectrale, et surtout du problème de Steklov, à l'analyse des formes et au traitement d'images. On a écrit un article ensemble sur ce sujet.

Vous aviez une chaire de recherche dans votre domaine d'étude. Pouvez-vous nous en parler ?

En effet, j'ai détenu la chaire de recherche du Canada (CRC) en géométrie et théorie spectrale entre 2009 et 2019. C'est une chaire que j'ai renouvelée en 2014, mais qui est renouvelable une seule fois. En général, on peut penser à une chaire de recherche comme à une grande subvention qui donne à un(e) professeur(e) les ressources financières et logistiques (comme du temps dégagé pour la recherche) pour développer son groupe de recherche - en particulier, cela aide à embaucher des étudiants et des chercheurs postdoctoraux, développer des collaborations, organiser des ateliers, etc. C'était un vrai privilège de pouvoir bénéficier de la CRC pendant une période importante de ma carrière.

À part des chaires provenant des organismes subventionnaires gouvernementales (comme la CRC), il existe aussi des chaires et des bourses de fondations philanthropiques privées. En particulier, mes deux collègues étoiles au DMS, Dimitris Koukoulopoulos en théorie des nombres et Egor Shelukhin en géométrie et topologie, bénéficient présentement de tels programmes de la Fondation Courtois.

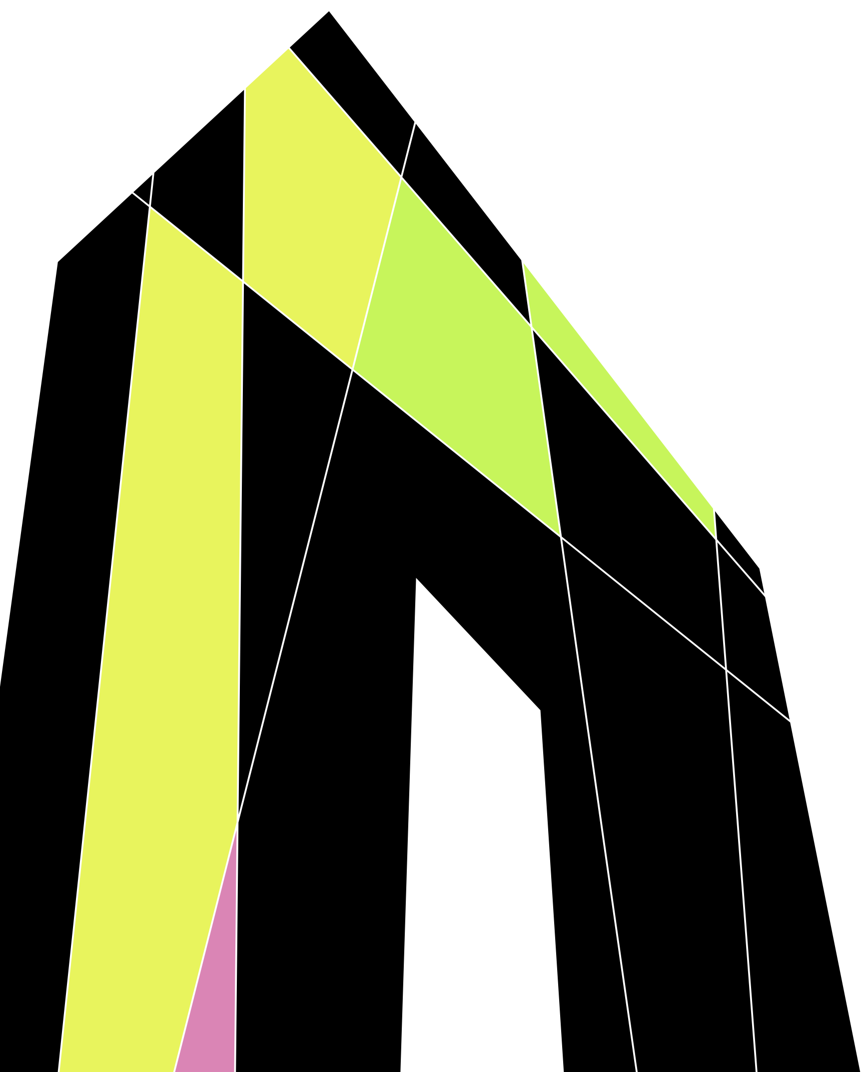
Vous êtes l'auteur d'un livre russe illustré pour les enfants avec des problèmes mathématiques à l'intérieur. Pourriez-vous nous parler davantage de ce livre (comme le but derrière sa composition, ce dont il recèle et l'importance d'enseigner les maths aux enfants)?

C'est impressionnant que vous ayez trouvé ce livre sur ma page web! En fait, il n'a pas été publié et je l'ai principalement écrit pour mes enfants et pour les enfants de mes amis. L'histoire derrière sa création est la suivante : pendant plusieurs années, j'ai raconté des histoires à mes fils avant de les mettre au lit – comme mon père a fait avec moi à l'époque – c'est donc une autre tradition familiale. À chaque fois, les histoires étaient différentes, mais les personnages étaient les mêmes – les protagonistes sont deux petits frères chevreaux. Le livre contient une petite sélection de ces histoires illustrées. Comme mes enfants ont aimé ces histoires, j'ai utilisé les mêmes personnages dans d'autres contextes, en particulier, pour enseigner les maths. De cette façon, nos leçons ont été transformées en une activité amusante.

En fait, en Russie, il y a une grande tradition d'enseigner les mathématiques sous la forme de jeux ou d'autres activités récréatives. Un des cas classiques du genre littéraire ludo-éducatif est l'œuvre de Yakov Perelman: certains de ces livres ont même été traduits en français, comme «Oh, les maths!» À mon avis, il est extrêmement important de développer le goût des mathématiques (et de la science en général) aux enfants dès leur plus jeune âge, et de leur montrer que les mathématiques ne sont pas seulement des manipulations ennuyeuses de nombres ou de formules (comme on a parfois l'impression à l'école primaire), mais plutôt une activité qui est à la fois stimulante et agréable.

Par exemple, une des notions mathématiques difficiles pour les enfants (et pas juste pour les enfants!) est le concept d'une fraction et les opérations avec celle-ci. Un grand mathématicien du XXe siècle, Israel Gelfand, a dit que les gens pensent souvent qu'ils ne comprennent pas les mathématiques, mais tout dépend de comment on les explique. Dans un problème du livre (qui est inspiré par une anecdote de Gelfand), un chevreau demande à son frère ce qu'il préfère: «Préférerais-tu un carré de chocolat entier, ou bien d'abord un demi, après un tiers et après un quart?» D'une façon abstraite, cette question peut être compliquée, mais dans une telle formulation - surtout accompagnée par une expérience – la solution sera claire et sucrée!

SIMON LUANGXAY, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN ACTUARIAT



POLYDONTISTE

Commençons simplement: un polynôme est une expression de la forme $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Ce genre d'expression est facile à intégrer et à dériver. En plus, les polynômes ayant un nombre fini de termes ont un nombre de racines inférieur ou égal à leur degré, c'est-à-dire la plus haute puissance que x peut avoir. Il est possible de considérer les polynômes comme des combinaisons linéaires d'éléments d'une base infinie un peu comme on peut représenter n'importe quel vecteur d'un espace euclidien par une combinaison linéaire d'éléments d'une base. En particulier, on dit de la base qu'elle engendre l'espace. C'est bien de pouvoir engendrer l'espace des polynômes, mais comment nous prendrions-nous pour engendrer l'espace des fonctions? Par exemple, si on considère la fonction $f(x)=\cos x$, comment pourrait-on la penser en termes de combinaison linéaire d'éléments d'une certaine base? En somme, comment exprimer $f(x)$ par $\sum_{i\leq 0} a_i e_i$ où e_i est un élément d'une base? Cette idée n'est pas aussi farfelue qu'on pourrait croire, il suffit de se rappeler des séries de Taylor. Par exemple, la fameuse identité:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

En fin de compte, cette identité n'est qu'une combinaison linéaire d'éléments de la base infinie $V=\{x^i\}_{i \in N}$ (c'est une base canonique). Toujours dans la même analogie avec l'algèbre, il est possible d'avoir une base qui ne soit pas canonique pour engendrer l'espace. Corsons les choses en considérant un problème aux valeurs propres, c'est-à-dire un problème de la forme ***Av=λv***. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres forment aussi une base, si la matrice est diagonalisable. Penchons-nous sur le problème de Sturm-Liouville. Pour faire simple, en algèbre linéaire, on retrouve des problèmes aux valeurs propres de la forme ***Av=λv*** tandis qu'avec le problème de Sturm-Liouville, ils sont de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = \lambda w(x)y$$

C'est donc une équation différentielle linéaire d'ordre deux. Tout est bien linéaire (l'opérateur différentiel est linéaire), donc l'analogie avec l'algèbre linéaire se maintient. Introduisons un problème de Sturm-Liouville particulier menant aux polynômes de Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) = \lambda y$$

Après de très nombreuses étapes, on détermine la forme des valeurs propres: ***λ=-l(l+1)*** avec ***l∈Z*** ∪ ***{0}***. De cela découlent les fonctions propres que sont les polynômes de Legendre:

$$\begin{aligned} P_l &= \sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]} \frac{(-1)^i(2l-1)!x^{l-2i}}{2^i(l-i)!i!(l-2i)!} \\ &= \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \end{aligned}$$

Pour continuer, on aura besoin d'un produit scalaire avec lequel il est possible de montrer le caractère orthogonal de la famille de polynômes (si ce n'était pas le cas, on aurait pu utiliser un analogue du procédé de Gram-Schmidt pour obtenir l'orthogonalité):

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Pour exprimer une fonction quelconque comme une combinaison linéaire des polynômes de Legendre, il nous faut déterminer les coefficients multipliant les éléments de la base. Sans trop de détails, la formule suivante permet de les déterminer:

$$\frac{(f,P_l)}{(P_l,P_l)}$$

Bref, maintenant que tous les ingrédients sont réunis, essayons d'approximer la fonction par parties

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

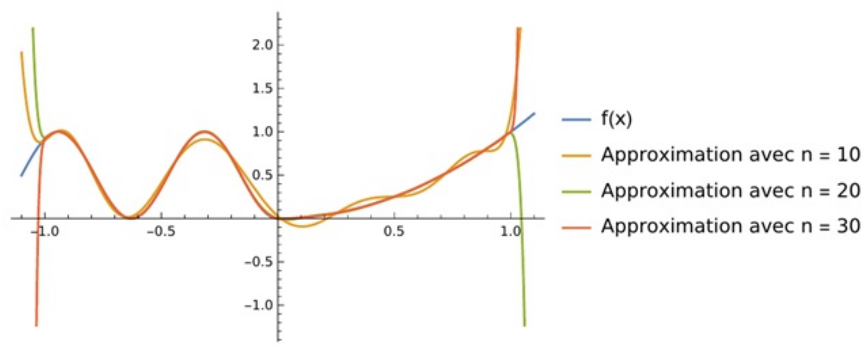


Figure 1: Approximation de f par une série de Legendre partielle

On peut clairement constater qu'en dehors de l'intervalle ***(-1,1)***, les approximations divergent. De plus, puisque ***f*** n'est pas doublement différentiable, la série de Legendre risque de diverger.

Beaucoup de détails ont été passés et il est fort probable que les démarches paraissent absurdes, voire douteuses, mais elles ne le sont pas. Le sujet de cet article est traité en profondeur dans le cours d'Analyse appliquée (MAT2466).

JULIEN HÉBERT-DOUTRELOUX, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

| À VOS RISQUES!

La DeFi

UNE RÉVOLUTION FINANCIÈRE?

Pour faire un petit récapitulatif du dernier article, nous nous sommes aventurés dans le monde dystopique du Web 3.0. Le bitcoin n'est pas qu'une bulle spéculative où des jeunes investissent leur argent à l'aveugle en espérant de faire des millions, ce serait très imprudent. Évidemment, jouer au trader n'est pas sans risque. Bien que certaines personnes riches et célèbres continuent d'afficher leur scepticisme vis-à-vis du bitcoin – on peut notamment penser à Warren Buffet qui considère cette cryptomonnaie comme une «illusion qui attire les charlatans» ou à son associé, Charlie Munger, qui ne cache pas son mépris pour les cryptomonnaies en les considérant comme une sorte de «maladies vénériennes» – cette cryptomonnaie est à la base d'une révolution technologique grâce à la chaîne de blocs (Blockchain). Le livre blanc, écrit par Satoshi Nakamoto, personnalité anonyme dont j'en décris brièvement dans le dernier article *Web 3.0*, explique le fonctionnement de la première chaîne de blocs. Cela étant dit, la DeFi (Decentralized Finance) ou finance décentralisée est une forme de finance basée sur la blockchain – en particulier la blockchain Ethereum – qui ne nécessite pas l'intervention d'une banque centrale ou d'une agence gouvernementale pour approuver les transactions financières.

Or, le mythe derrière la création de la première blockchain est en partie décrit comme une réplique face à l'attitude des «méchantes banques» envers les épargnants. En effet, suite à la crise financière de 2008, beaucoup de personnes sont encore surendettées aux États-Unis et plusieurs répercussions économiques de cet événement ont eu lieu. De nos jours, il est toujours nécessaire d'avoir un tiers de confiance lorsque nous réalisons une transaction financière avec une banque, une compagnie d'assurance ou l'État. L'objectif de la finance décentralisée est de permettre à tous la transmission de valeur et la création d'une finance sans intermédiaire. Ce concept utilise les cryptomonnaies et les contrats intelligents pour fournir différents services financiers traditionnels de manière décentralisée. Par exemple, dans le cas des prêts, les utilisateurs peuvent prêter leurs cryptomonnaies et ainsi gagner des intérêts. Quant aux contrats intelligents, ceux-ci permettent des fonctionnalités telles que la confiscation automatique de la garantie en cas de défaillance de l'emprunteur. Quoiqu'il existe de nombreux systèmes de prêts différents, ce service reste très risqué à ce jour. De plus, il peut y avoir un problème au niveau des contrats intelligents: quelqu'un peut vider le contrat de prêt ou d'emprunt et on peut se retrouver à perdre son argent, d'où l'utilité d'un autre service financier, l'assurance décentralisée. Il existe différents types d'assurance décentralisée liés à la cryptosphère comme des couvertures en cas de failles dans les contrats intelligents ou de défaillances techniques sur le dépôt d'argent dans les plateformes d'échange de cryptomonnaies comme Binance. Évidemment, les risques sont multiples et les réclamations d'assurance sont enregistrées et appliquées par des contrats intelligents. Toutefois, des *stablecoins* sont utilisés pour gérer le risque de volatilité lié aux cryptomonnaies. Les utilisations les plus populaires de la finance décentralisée comprennent l'envoi d'argent à l'international, la spéculation et le commerce de tokens tels que les actions, les fonds et les jetons non fongibles (NFTs). Comme tous les nouveaux réseaux blockchain, la finance décentralisée est très risquée, d'autant plus qu'elle utilise une technologie qui vise à perturber une institution établie telle qu'une banque centralisée. La fraude et la criminalité ne cessent de croitre dans ce nouveau domaine et cela représente un problème important. Si le Bitcoin est la révolution monétaire et le web3 la révolution d'internet, la DeFi semble être la révolution financière. Ici, le terme «révolutionnaire» ne veut pas nécessairement dire quelque chose de positif. Croire que la DeFi est un moyen de s'affranchir des banques dans une ambiance anarchiste 3.0 serait assez naïf.

Croire que la DeFi est un moyen de s'affranchir des banques dans une ambiance anarchiste 3.0 serait assez naïf.

Blockchain, NFTs, Web3, DeFi et Metaverse sont tous considérés comme des buzzwords et les gens les emploient souvent en mélangeant beaucoup de concepts. Ce sont des technologies relativement récentes, il y a encore une grande incertitude sur les standards et une grande confusion dans l'esprit des utilisateurs. Bref, faites attention lorsque vous verrez ces mots à l'avenir! Ce ne sont pas des formules magiques qui vont résoudre tous les problèmes de la Terre. Bien au contraire, ils font ressembler ce monde à un épisode de Black Mirror.

EVENSON AUGUSTE, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN ACTUARIAT

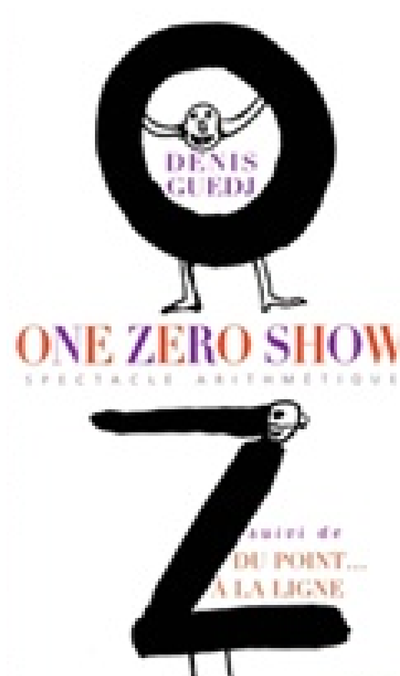
| QUOI LIRE?

LES MATHÉMATIQUES AU THÉÂTRE

Après avoir passé près d'un mois à rester à la maison et à ne pas pouvoir distraire notre esprit, je dois admettre que je suis bien heureuse que les théâtres et les cinémas rouvrent enfin. Cependant, en cette mi-session, il est assez difficile de trouver le temps de caser un passe-temps entre ces heures d'étude. Ma solution: s'évader dans un monde mathématique un peu plus dramatique. Voici deux courtes pièces de théâtre rythmées et enrichissantes qui vous plongeront dans le monde un peu plus «humain» des mathématiques.

LE *ONE ZÉRO SHOW*

Je vous propose de changer du classique *Roméo et Juliette*, et de s'évader dans une pièce de théâtre qui met les mathématiques au premier plan. Dans *One zéro show*, écrit par le mathématicien Denis Guedj, on plonge dans l'univers des nombres naturels positifs et des opérations élémentaires. L'histoire commence avec un petit mathématicien qui se questionne sur le commencement des nombres. Où commencent-ils? Qui fut le premier? Où commence le monde des mathématiques? Puis, un peu à l'image de Genèse, le jour se lève et apparait 1. 1 qui est le premier à avoir vu le jour, le premier nombre à exister, devient vite imbu de lui-même et narcissiste. Il est seul et possède tout l'univers. Mais comment apparaissent les autres nombres si 1 est seul? Ils proviennent tous de 1. Lui, qui en s'additionnant à lui-même, peut créer tous les nombres jusqu'à l'infini. Ici apparait notre antagoniste, le 0, l'incognito. Et alors que le 1 se pavane devant le zéro et prône sur l'addition, le 0 propose une nouvelle opération, la multiplication. Juste comme ça, le 1 n'est plus et le 0 est tout. Or, toute opération sur le 0 nous donnera toujours 0. Le peuple des nombres mécontents demande donc justice. «Y a-t-il un moyen de faire revivre le 1?», me demandez-vous. Pour en savoir plus, il faudra lire la pièce. Rares sont les ouvrages qui offrent aux mathématiques l'occasion de s'exprimer. Dans cette pièce, Guedj permet aux n\in\mathbb{N}_{\geq0} de se créer une identité. À l'image de nos interactions quotidiennes, ceux-ci font face à de la tyrannie, de la déception et de l'allégresse.



DU POINT À LA LIGNE

Cependant, le plaisir ne s'arrête pas là! De bonne foi, le professeur prolonge le plaisir en nous offrant *Du point à la ligne,* une seconde pièce qui porte sur les plans et l'espace. Nous rencontrons notre protagoniste, M, un point. Solitude et réflexions sont ses compagnons dans cet espace vide composé d'un seul élément. Comment avoir de la compagnie? Stoïque et statique, le point veut créer et se déplacer. La solitude ne l'intéresse plus. Que nais un autre point, c'est tout ce qu'il désire! Alors, il se concentre, se condense, se multiplie et s'exécute. Or, M ne peut rien faire apparaître. Contrairement au 1, se décupler ne fonctionne pas ici. Le point possède une position dans l'espace; c'est ce qui le caractérise. Ses coordonnées ne peuvent être dupliquées, mais elles peuvent être modifiées. Un déplacement vers la droite et nous voici avec M'. Or, un nouveau personnage fait son apparition : la droite. Courbée, droite, continue ou non, elle fait son entrée dans cet espace. Ainsi, commence une guerre de cohabitation entre la droite et le point. Guerre de territoire et d'honneur s'en suivent. Ne vous découragez pas! L'histoire du plan I se termine pour laisser celle du plan II commencer. Nous observons ici le langoureux *flirt* de C et D, des droites. Alors que tout les pousse à se repousser, celles-ci ne peuvent s'empêcher de s'aimer. Bien que leur destinée n'est pas de se rencontrer, nous avons tout de même droit à une histoire d'amour à la *Roméo et Juliette* avec une fin moins tragique. Ainsi, l'union de ces deux objets donne naissance à quelque chose de magique, d'unique et de statique. Quoi donc? La pièce vous le dira par elle-même.

J'espère que ces deux pièces auront pu faire renaitre votre flamme pour les mathématiques et vous distraire en ces temps stressants. Non seulement les histoires de Guedj sortent de l'ordinaire, mais elles permettent aussi de connecter deux mondes complètement opposés à première vue. Nous avons souvent tendance à voir les mathématiques comme un monde froid où nous pouvons jouer avec les nombres à notre guise en les multipliant, divisant, additionnant, etc. Tout est si cartésien que l'on oublie parfois que les mathématiques peuvent aussi nous émouvoir par leur beauté, leur agilité et leur complexité. Penser à un monde où nous pouvons humaniser ces nombres et leur créer une identité permet donc de retrouver toute cette beauté qui parfois se perd sous de longues pages de calculs.

SILVIA BRAVO BAHAMONDEZ, ÉTUDIANTE AU BACCALAURÉAT EN ACTUARIAT

COURBE QUI REMPLIT LE PLAN

On considère le carré ***[0,1]x[0,1]***. Peut-on trouver une courbe si longue qu'elle remplit ce carré? Si la réponse est oui, alors cette courbe aura une aire positive!

La façon dont l'on construit certains fractales peuvent nous donner une indication sur la façon de construire une telle courbe. D'abord, on divise notre carré en quatre carrés égaux et on y inscrit la courbe C_0, comme sur la figure 1. L'idée est de produire une courbe de plus en plus longue en y appliquant une série d'applications linéaires affines. La théorie sur les fractales (plus précisément les systèmes de fonctions itérées) nous affirme alors qu'à la limite, la courbe couvrira le carré, si on choisit les bonnes applications affines.

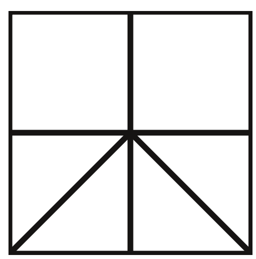


FIGURE 1: COURBE C_0 DANS LE CARRÉ [0,1]x[0,1]

Voici les stars de notre problème:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Images de C_0 par $f_1, \ldots, f_4$

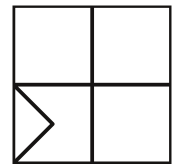


FIGURE 2

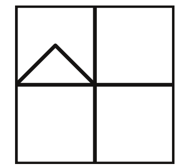


FIGURE 3

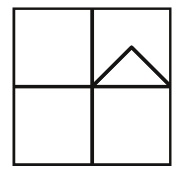


FIGURE 4

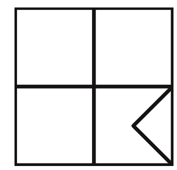


FIGURE 5

Sur les images 2 à 5, on voit l'image de C_0 pour chaque application. On voit même qu'on peut les mettre bout à bout pour obtenir une nouvelle courbe plus longue C_1 . On continue le processus: on pose

$$C_n = f_1(C_{n-1}) \cup f_2(C_{n-1}) \\ \cup f_3(C_{n-1}) \cup f_4(C_{n-1})$$

À chaque étape, on obtient une courbe de plus en plus longue qui remplit le carré de plus en plus. (Voir figure 6.) Sur la figure 7, on voit ce qui se produit si on part avec une courbe C_0 différente.

Pour réellement montrer que l'on a une fonction continue de ***[0,1]*** dans ***[0,1]x[0,1]***, il faut travailler un peu plus cette idée. Les détails se trouvent dans le livre Fractals everywhere de Michael Barnsley. Comme dernière remarque, il est impossible de trouver une fonction bijective et continue entre ***[0,1]*** et ***[0,1]x[0,1]***. Dans notre cas, elle est surjective et continue, mais pas injective.

FIGURE 6

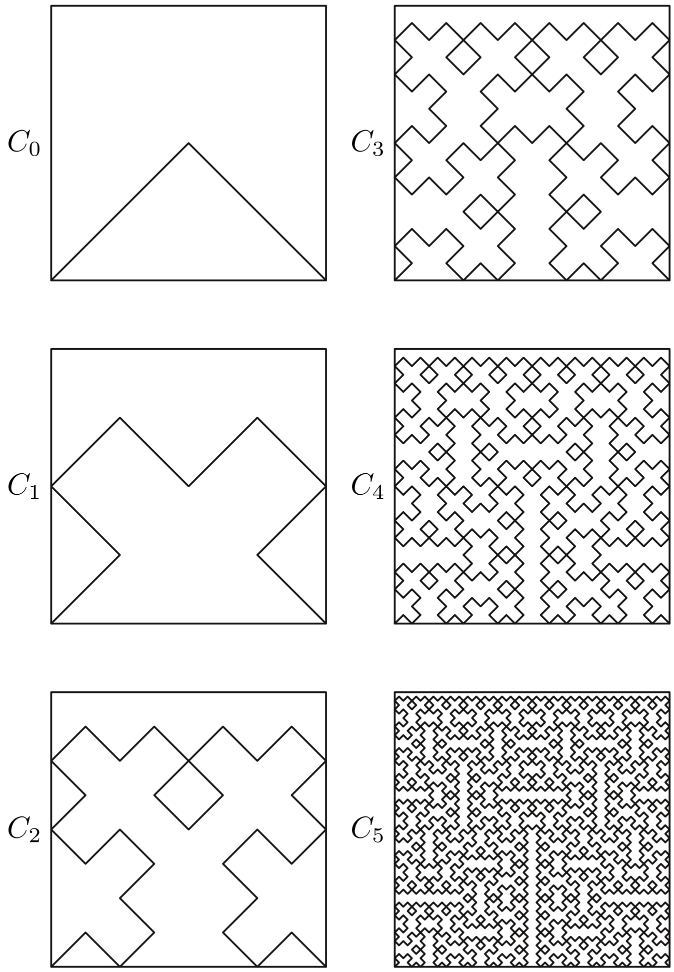
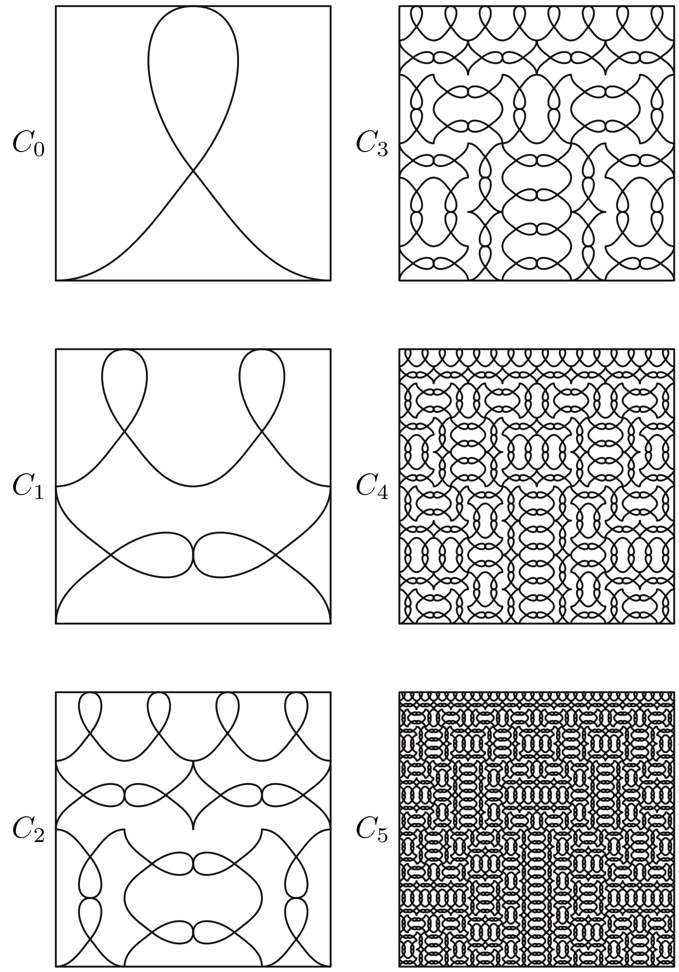


FIGURE 7



JONATHAN GODIN,
CHARGÉ DE COURS

| ÉNIGMES ET JEUX MATHÉMATIQUES

I Trouver un ensemble de quatre fractions tel que le produit de n'importe quelle paire d'éléments distincts est un élément de l'ensemble.

II J'ai dessiné deux points sur un tube de carton (comme ceux que l'on trouve au centre des rouleaux de papier de toilette) et je souhaite tracer une ligne qui relie ces deux poins en utilisant le moins d'encre possible. Comment faire?

SOLUTIONS

I {0, 1 , ½, 2}

II Je découpe le tube dans sa longueur et le déroule jusqu'à ce qu'il soit complètement plat. Muni d'une règle, je peux alors tracer une ligne droite entre les deux points.

ÉLOI MARTIN, ÉTUDIANT AU BACCALAURÉAT EN MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Panel de DISCUSSION

8 MARS 2022 - 18 H
Pavillon Jean-Brillant de l'UdeM

Dans le cadre de la Journée internationale des droits des femmes

Enjeux et défis actuels au féminin

FAÉCUM

FAECUM.QC.CA