

ETS-RT-2009-001

**L'INTÉGRATION DE LA CALCULATRICE
SYMBOLIQUE DANS LA FORMATION
MATHÉMATIQUE EN GÉNIE :**
Approches d'enseignement et effets
sur les pratiques des étudiants

FRANCE CARON
KATHLEEN PINEAU
LAURENCE LACHAPELLE-BÉGIN

**L'INTÉGRATION DE LA CALCULATRICE SYMBOLIQUE DANS
LA FORMATION MATHÉMATIQUE EN GÉNIE**
Approches d'enseignement et effets sur les pratiques des étudiants

RAPPORT TECHNIQUE DE L'ÉTS

FRANCE CARON

Université de Montréal, Département de didactique

KATHLEEN PINEAU

École de technologie supérieure, Service des enseignements généraux

LAURENCE LACHAPELLE-BÉGIN

École de technologie supérieure, Service des enseignements généraux

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MONTRÉAL, 23 MARS 2009

ETS-RT- 2009-001

L'INTÉGRATION DE LA CALCULATRICE SYMBOLIQUE DANS LA FORMATION MATHÉMATIQUE EN GÉNIE

Approches d'enseignement et effets sur les pratiques des étudiants

FRANCE CARON

Département de didactique
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

KATHLEEN PINEAU

Service des enseignements généraux
ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

LAURENCE LACHAPELLE-BÉGIN

Service des enseignements généraux
ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

La version électronique de ce rapport technique est disponible sur le site Web de l'École de technologie supérieure (<http://www.etsmtl.ca>).

Pour se procurer une copie papier, s'adresser à :

Service de la bibliothèque
École de technologie supérieure
1100, rue Notre-Dame Ouest
Montréal (Québec)
H3C 1K3

Téléphone : (514) 396-8946
Télécopieur : (514) 396-8633
Courriel : biblio@etsmtl.ca

© École de technologie supérieure 2009



Cette création est mise à disposition sous un contrat Creative Commons.

ISBN 978-2-921145-71-8

Dépôt légal : Bibliothèque nationale du Québec, 2009

Dépôt légal : Bibliothèque nationale du Canada, 2009

***SYMBOLIC CALCULATORS IN
MATHEMATICS EDUCATION FOR FUTURE ENGINEERS
Teaching Strategies and their Effect on Students' Performance***

FRANCE CARON, KATHLEEN PINEAU AND LAURENCE LACHAPELLE-BÉGIN

ABSTRACT

The TI symbolic calculator is now systematically used as a teaching and learning tool at École de technologie supérieure (ÉTS). It was initially introduced in 1999 and was mandatory solely in the introductory calculus course; it is now used in all mathematics and science courses at the school. After a few years of systematic use of the calculator in mathematics classes, it became relevant to examine the various approaches developed by the teachers, noting their common denominator, probing reasons that would explain the similarities and the differences, and determining their visible effects on students. Our purpose was to find ways of increasing the contribution of the symbolic calculator to students' learning and mathematical practice while minimizing the risks associated with its use.

This report presents the results of a study linking teaching practices in the first year calculus course at ÉTS where the use of the TI symbolic calculator is allowed, with student performance in problem solving. It characterizes the common features and individual variations of CAS-integration by the teachers with reasons that explain their choices. Furthermore, this study highlights other elements of the didactical contract that influence student practices when using the calculator and the arguments they choose when writing solutions. The report concludes with ideas and perspectives for the future.

***L'INTÉGRATION DE LA CALCULATRICE SYMBOLIQUE DANS LA
FORMATION MATHÉMATIQUE EN GÉNIE***

Approches d'enseignement et effets sur les pratiques des étudiants

FRANCE CARON, KATHLEEN PINEAU ET LAURENCE LACHAPELLE-BÉGIN

RÉSUMÉ

L'École de technologie supérieure (ÉTS) a fait figure de pionnier en ayant intégré la calculatrice symbolique TI à ses cours de mathématiques dès l'automne 1999. Au début obligatoire exclusivement dans le premier cours de calcul, son usage s'est répandu à l'ensemble des cours de mathématiques et de science de l'École. Après quelques années d'utilisation systématique d'un tel outil en classe de mathématiques, il devenait pertinent d'examiner les différentes approches d'intégration développées par les enseignants, leur dénominateur commun, les raisons qui expliquent les similitudes et les différences, et leurs effets observables chez les étudiants. Nous voulions ainsi trouver des pistes qui permettraient de maximiser les apports de cet outil à la pratique mathématique des étudiants et d'en minimiser les risques.

Ce rapport présente les résultats d'une étude qui a cherché à mettre en relation les pratiques de quatre enseignants du premier cours de Calcul différentiel et intégral à l'ÉTS avec celles de leurs étudiants dans la résolution de problèmes de mathématiques où le recours à la calculatrice symbolique est autorisé. L'étude a d'abord fait ressortir un dénominateur commun et quelques spécificités dans le choix des tâches soumises par les enseignants, avec les raisons qui expliquent ces choix. En plus du choix des tâches, l'analyse met en évidence d'autres éléments du contrat didactique qui influencent les étudiants dans leur utilisation de l'outil et la rédaction de leurs solutions. Ce rapport conclut avec des pistes à exploiter et des perspectives pour l'avenir.

TABLE DES MATIÈRES

ABSTRACT	III
RÉSUMÉ	IV
TABLE DES MATIÈRES	V
LISTE DES FIGURES.....	VII
1 BASES DE L'ÉTUDE.....	1
1.1 Introduction.....	1
1.2 Apports épistémiques des technologies à l'apprentissage des mathématiques	2
1.3 Compétences et résolution de problèmes en classe de mathématiques	4
1.4 Contexte.....	8
1.5 Intégration de la calculatrice symbolique à l'enseignement des mathématiques	9
1.6 Participants.....	11
1.6.1 Enseignants	11
1.6.2 Étudiants.....	11
1.7 Méthodologie.....	11
2 OBSERVATIONS, VOLET ENSEIGNANT	14
2.1 Vision des enseignants.....	14
2.1.1 Alain.....	14
2.1.2 Bernard.....	15
2.1.3 Charlotte.....	16
2.1.4 Diane	17
2.2 Tâches privilégiées	18
2.3 Barème de correction.....	25

3	OBSERVATIONS, VOLET ÉTUDIANT.....	26
3.1	Compétences démontrées à l'examen.....	26
3.2	Analyse des productions étudiantes à la question 2.....	28
3.2.1	Raisonnement déployé.....	29
3.2.2	Recours à l'outil.....	33
3.2.3	Explicitation de la démarche et langages utilisés dans la rédaction de la solution.....	37
4	SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS.....	41
4.1	Portrait global des compétences démontrées à la question 2 selon l'enseignant.....	41
4.2	Tensions et paradoxes.....	43
5	CONCLUSION ET ÉPILOGUE.....	46
	BIBLIOGRAPHIE.....	49
	ANNEXES.....	51

LISTE DES FIGURES

Figure 1	Pourcentage des tâches faisant appel aux différents niveaux.....	19
Figure 2	Répartition des tâches proposées selon l'utilité de recourir à la calculatrice	20
Figure 3	Extrait d'un mini-test donné par Charlotte.....	21
Figure 4	Problème d'application proposé par Diane dans un devoir	22
Figure 5	Informations techniques dans l'énoncé d'un devoir de Diane	23
Figure 6	Extrait d'un devoir donné par Alain	24
Figure 7	Problème soumis par Bernard dans un devoir.....	24
Figure 8	Étudiants ayant commis des erreurs d'association, en fonction de l'enseignant	26
Figure 9	Étudiants ayant commis des erreurs de compréhension, en fonction de l'enseignant	27
Figure 10	Étudiants ayant commis des erreurs de structuration, en fonction de l'enseignant	27
Figure 11	Énoncé du problème 2 de l'examen final	28
Figure 12	Représentation graphique des fonctions $y = kx^2$ et $y = k \cos x$	29
Figure 13	Tentative de résolution du problème par l'étudiante B-01.....	30
Figure 14	Extrait de la résolution du problème par l'étudiant D-01.....	31
Figure 15	Extrait de la résolution du problème par l'étudiant C-01	31
Figure 16	Résolution du problème par l'étudiant A-01	32
Figure 17	Utilisation par les différents groupes de la calculatrice pour le problème 2 ..	33
Figure 18	Résolution du problème par l'étudiant A-02.....	34
Figure 19	Résolution incomplète du même problème par l'étudiante C-03	36
Figure 20	Résolution d'un autre problème par l'étudiante C-03	36
Figure 21	Résolution du problème par l'étudiant A-03.....	38
Figure 22	Résolution du problème par l'étudiant A-04	39

Figure 23	Tentative de résolution du problème par l'étudiant B-02	39
Figure 24	Résolution du problème par l'étudiante D-02.....	40
Figure 25	Fréquence d'apparition des différents types d'erreurs selon l'enseignant	41

1 BASES DE L'ÉTUDE

1.1 Introduction

L'intégration d'outils technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les facultés de génie repose en partie sur des considérations d'ordre pragmatique, par une prise en compte des compétences que doivent développer les étudiants qui se destinent à une profession où les mathématiques jouent un rôle important, où les problèmes à résoudre sont de plus en plus complexes et où les logiciels de calcul font désormais partie intégrante du paysage de la pratique. Mais, là comme ailleurs, cette intégration ne devient viable dans l'enseignement des mathématiques que si elle intègre aussi des considérations d'ordre épistémique, par une prise en compte des potentialités, limites et risques associés à l'intégration de tels outils dans la compréhension des mathématiques enseignées.

Cette dimension épistémique s'avère cruciale dans les cours de mathématiques dispensés à l'École de technologie supérieure¹. Les programmes de baccalauréat en génie de l'ÉTS ont en effet la caractéristique unique au Québec d'accueillir exclusivement des candidats en provenance des programmes techniques des collèges. Issus d'une vingtaine de programmes différents, les étudiants n'ont ni le profil traditionnel, ni la relative homogénéité des niveaux mathématique et scientifique de ceux qui s'inscrivent dans les autres écoles d'ingénierie. Tout en visant le développement d'une pratique mathématique instrumentée qui permette d'aborder des problèmes plus complexes, l'intégration de tels outils dans les quatre cours de mathématiques communs aux

¹ Avec près de 4000 étudiants inscrits à l'un ou l'autre de ses programmes de formation initiale en génie (baccalauréats), l'ÉTS, située à Montréal, rassemble aujourd'hui plus de 25% de toute la population étudiante de premier cycle en génie au Québec. Sur le plan des effectifs étudiants, elle se classe ainsi au premier rang au Québec parmi les établissements qui offrent cette formation, et au troisième rang au Canada.

différents programmes offerts par l'École se doit d'abord de contribuer à assurer une harmonisation, une consolidation et une extension rapides des connaissances mathématiques des étudiants qui y sont inscrits.

En partant des approches d'enseignement (tâches, consignes, barème) utilisées par différents enseignants d'un même cours de mathématiques intégrant la calculatrice symbolique et faisant appel à un même manuel et à un même examen final, cette étude a d'abord cherché à en dégager le dénominateur commun et les éléments plus spécifiques à l'enseignement de chaque professeur. L'étude a ensuite cherché à en repérer les effets possibles dans les productions des étudiants, afin d'identifier les éléments des pratiques d'enseignement qui favorisent un contrôle chez les étudiants autant des mathématiques en jeu que de la technologie mise à contribution.

1.2 Apports épistémiques des technologies à l'apprentissage des mathématiques

Parmi les apports épistémiques des technologies à l'apprentissage des mathématiques, il y a évidemment la possibilité de conjuguer aisément les représentations numériques, graphiques et symboliques. Cette multiplication des représentations a été rapidement perçue comme une façon de favoriser le travail conceptuel chez l'étudiant (Heid, 1988). Tout en dégageant du temps pour un tel travail conceptuel, notamment par l'exploration et l'expérimentation, la possibilité de déléguer à l'outil certaines opérations de nature plus technique permettrait aussi, à l'élève de « *passer outre des obstacles mathématiques pour continuer à apprendre* » (Artigue, 1997).

Sans nier ces potentialités, il convient de reconnaître d'abord que les représentations des objets mathématiques par les outils technologiques sont soumises à une *transposition informatique* (Balacheff, 1994), conditionnée à la fois par les contraintes matérielles de l'outil et les choix d'implémentation. Cette transposition peut donner lieu à des décalages importants entre les modes de représentation, et ces décalages peuvent s'instaurer en obstacles à la résolution ou à l'apprentissage (Artigue, 1997; Trouche,

2000). Comme l'étudiant est conduit à utiliser des fonctions dont il ne connaît pas nécessairement les modèles mathématiques et mécanismes sous-jacents, il n'est pas toujours en mesure de juger de la validité des résultats produits. Ce phénomène, connu sous le nom de l'effet *boîte noire* (Dreyfus, 1994), est particulièrement frappant avec les logiciels de calcul symbolique (LCS, aussi appelés systèmes de calcul formel ou SCF), qui incluent les calculatrices symboliques, où les connaissances mathématiques nécessaires au contrôle des fonctions disponibles débordent souvent des savoirs typiquement enseignés aux niveaux où ces outils sont introduits (Artigue, 2000).

Par ailleurs, la croyance initiale qui voulait que la technologie favorise un déplacement du travail technique vers le travail conceptuel semblait faire abstraction de la spécificité des nouvelles techniques rendues possibles, favorisées ou imposées par les outils. L'identification par Artigue (1997) des phénomènes de pêche (multiplication d'essais) et de transformation de la tâche (qui court-circuite le savoir visé) dans l'utilisation des logiciels de calcul symbolique a ouvert la voie à une étude plus sérieuse des nouvelles techniques mises à contribution et de leur effet sur l'accès au savoir en jeu (Trouche, 2000; Lagrange, 2000).

Finalement, la prise en charge par l'outil des actions permettant le passage d'une représentation (symbolique, graphique, numérique) à l'autre ne garantit ni la coordination adéquate (au sens de Duval, 1995) des représentations chez l'étudiant, ni un passage à un niveau conceptuel plus élevé (Caron, 2001; Winsløw, 2003). Comme le souligne Winsløw, il y a là le risque de provoquer un effet Jourdain (Brousseau, 1998), i.e. lorsque l'enseignant reprend rapidement à un niveau formel ce que les étudiants ont « fait » et sont censés avoir « vu » quand le caractère opaque des actions exécutées par l'outil et le niveau de compréhension chez les étudiants du discours formel ne leur permettent peut-être pas de saisir ce qui vient de se passer. Les situations d'apprentissage ne doivent donc pas négliger le développement chez les étudiants d'habiletés discursives à l'oral (Winsløw, 2003) et l'émergence d'une pratique de

rédaction de solutions écrites, possiblement adaptée à l'environnement de la calculatrice (Ball, 2003); un tel travail apparaît nécessaire pour coordonner les actions et les observations et favoriser le passage souhaité à un niveau conceptuel plus élevé.

Puisqu'il devient de plus en plus évident que les outils informatiques peuvent changer radicalement les pratiques mathématiques dans les institutions où ils sont introduits, modifiant les niveaux technique et technologique, et à travers eux, l'équilibre entre le travail technique et le travail conceptuel (Artigue, 2000), on commence à admettre qu'il est impossible d'envisager la contribution de l'outil au processus de conceptualisation indépendamment des processus d'instrumentation à travers lequel l'individu s'adapte à l'outil (Trouche, 2000). Pour aborder de front instrumentation et conceptualisation, la notion de compétence apporte un éclairage intéressant.

1.3 Compétences et résolution de problèmes en classe de mathématiques

L'intégration d'outils informatiques en classe de mathématiques s'inscrit naturellement dans une approche par compétences puisque les techniques qui deviennent ainsi disponibles permettent d'ouvrir considérablement l'espace des problèmes résolubles; elles offrent en effet la possibilité d'aborder en classe des problèmes d'un niveau de complexité jusque là inaccessible. Et comme en témoignent les travaux sur l'intégration en classe de ces outils (ex. Lagrange, 2000; Trouche, 2000), l'utilisation contrôlée de ces nouvelles techniques ne peut se faire sans un travail sur les concepts sous-jacents; s'intéresser à la valeur pragmatique des techniques ne va donc pas à l'encontre d'une visée épistémique, bien au contraire.

L'identification des compétences nécessaires à la résolution de problèmes dans un contexte particulier commande de partir des pratiques de référence (Perrenoud, 1998). Cela est d'autant plus vrai pour la formation professionnelle. Dans le cadre de ses recherches en sociologie du travail, De Terssac (1996) a regroupé en trois types les compétences qui différencient les individus et les mettent en concurrence. Cette

typologie se prête bien à une projection dans la pratique mathématique, tout particulièrement en contexte d'application (Caron, 2001) :

- les *compétences d'explicitation* (les « savoir-dire ») pour traduire ce qui est, ce qu'il y a à faire et ce qui a été fait; en mathématiques pures ou appliquées, cela implique la maîtrise de différents langages (verbal, symbolique, numérique et graphique) et du passage de l'un à l'autre.
- les *compétences d'intervention* (les « savoir-intervenir ») pour agir en mettant en situation les connaissances disponibles et en transformant les situations rencontrées en connaissances réutilisables dans d'autres contextes; dans la pratique mathématique, cela correspond principalement à l'utilisation des différentes méthodes permettant de calculer, d'appliquer une transformation sur un objet, de résoudre un système d'équations, d'optimiser une fonction, etc.
- les *compétences d'évaluation* (les « savoir-se-situer ») pour identifier, légitimer et valider tout ce qu'on engage dans l'action; en mathématiques et dans leurs applications, cela inclut la décomposition en sous-problèmes, l'identification des cas possibles, la reconnaissance des champs théoriques appropriés, la navigation dans le réseau des concepts, l'utilisation de propriétés, la validation, la preuve, etc.

Avec la présence d'outils informatiques, il devient possible d'accroître de façon significative les capacités d'intervention en mathématiques, mais cela demande à la fois de développer une nouvelle dimension aux compétences d'explicitation (pour communiquer avec l'outil, interpréter les messages qu'il renvoie et documenter les actions posées dans la résolution d'un problème) et d'étendre la portée des compétences d'évaluation aux actions effectuées par l'instrument et aux résultats qui en découlent.

Des compétences d'évaluation dépend essentiellement le contrôle, véritable enjeu du développement d'une pratique mathématique instrumentée (Trouche, 2000), qui permet d'orienter l'utilisation de l'outil, de porter un regard critique sur ses productions, de les

valider, de voir au-delà et d'ajuster le tir, le cas échéant. Une instrumentation qui évolue vers un contrôle de l'outil dans l'établissement d'un rapport éclairé au savoir et le développement de compétences mobilisables dans la résolution de problèmes de plus en plus complexes commande non seulement de développer à travers les situations d'apprentissage une connaissance des possibilités de l'outil qui permettent d'élargir la classe des problèmes résolubles, mais aussi de confronter l'étudiant aux limites de cet outil (Caron, 2003). Cela demande de l'enseignant un dosage particulièrement délicat dans le choix des tâches proposées.

En accord avec les observations de Winslow (2003), il convient de noter que le développement des compétences d'évaluation ne peut se faire sans un développement concomitant des compétences d'explicitation (Caron, 2001). En fait, la capacité à analyser un problème paraît dépendre fortement des niveaux d'explicitation mis à contribution dans l'apprentissage (Caron, 2001; 2004) :

- *association* : On peut lire, reconnaître, mémoriser et reproduire une expression, une figure, un graphique, une définition ou un énoncé. Une fois que le registre d'explicitation et l'élément qui s'y rapporte sont déterminés, on peut appliquer des méthodes d'intervention sur cet élément (ex. : manipulations algébriques, calcul de dérivée, etc.).
- *compréhension* : La quête du *sens* derrière la forme langagière amène à mettre en relation les différentes représentations d'un concept, à abstraire le concept derrière ces représentations et à en appréhender la portée par la *recherche de liens* avec d'autres concepts, théories ou applications.
- *structuration* : À ce niveau, on cherche à analyser, organiser et éventuellement synthétiser les concepts en fonction de leur généralité et de la nature des relations qui les lient (équivalence, ordre, hiérarchie, causalité, etc.). Le développement à ce niveau est favorisé par une valorisation de la pensée déductive car celle-ci représente

à la fois le mode d'argumentation nécessaire en mathématiques et le moyen de retrouver des propriétés qu'on n'est donc plus tenu de mémoriser.

- *reformulation* : Si l'on cherche à redéfinir selon les nouvelles structures développées les apprentissages connexes et les applications qui suivent, nous dirons qu'il y a passage à ce dernier niveau qui conduit, selon le cas, à un transfert efficace des connaissances ou à un conflit et une révision en conséquence des structures qui semblent poser problème.

Il est important de préciser que les différents niveaux de ce modèle ne doivent pas être vus comme des stades à respecter dans l'apprentissage. Une formation générale en mathématiques devrait viser à tout moment la compréhension et la structuration des concepts chez les étudiants, car le fait d'entretenir pendant une période prolongée un apprentissage par association, où les connaissances qui en résultent sont très morcelées, peut handicaper fortement chez certains étudiants le passage aux niveaux supérieurs (Caron, 2001). Il est certes possible que de façon ponctuelle dans le cadre de cette formation, certains exercices de nature plus technique se limitent à un niveau d'association. De même, dans une étape de résolution, une technique maîtrisée (ex. l'intégration par parties) pourra être mobilisée directement par association sans que le raisonnement qui en justifie la mise en œuvre n'ait à intervenir; mais il demeure souhaitable qu'en tout temps, une telle justification demeure à la portée de celui qui utilise la technique.

L'étude que nous avons entreprise a donc cherché à caractériser, notamment selon les niveaux d'explicitation mis à contribution, différentes approches d'intégration d'un outil de calcul symbolique à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques en génie, et à en repérer les effets sur les compétences mathématiques d'étudiants de première année. Nous voulions ainsi trouver des pistes qui permettent de maximiser les apports de ces outils à la pratique mathématique de ces étudiants et d'en minimiser les risques.

1.4 Contexte

Les caractéristiques uniques de l'École de technologie supérieure (ÉTS) en font un milieu très riche pour la recherche pédagogique en enseignement supérieur.

Établissement autonome au sein du réseau de l'Université du Québec, l'ÉTS offre des programmes d'enseignement orientés vers l'ingénierie d'application et la technologie. Conçus pour répondre aux besoins particuliers de l'industrie, ces programmes de génie sont offerts selon la formule d'enseignement coopératif, s'adressent de façon spécifique aux personnes détenant un diplôme d'études collégiales en techniques physiques ou en informatique et visent tout particulièrement le développement de nouvelles technologies et leur transfert en entreprise.

Pour assurer à cette clientèle étudiante très diversifiée une formation générale de qualité qui puisse répondre aux exigences des différents programmes de premier cycle en génie offerts, l'École a choisi de confier au Service des enseignements généraux (SEG), indépendant des départements de génie, les cours de la formation générale communs à tous les programmes. En particulier, les enseignements fondamentaux (i.e. ceux des deux premières années) en mathématiques, physique et chimie relèvent de ce Service. Les enseignants du SEG ont donc un défi pédagogique particulier à relever. Ils doivent assurer un meilleur arrimage entre le niveau collégial technique et le niveau universitaire en rendant la formation de base des étudiants, notamment en mathématiques et en sciences fondamentales, conforme aux exigences du Bureau canadien d'accréditation des programmes d'ingénierie² (BCAPI). Consciente de l'ampleur du défi, l'École a créé, spécifiquement pour le SEG, une nouvelle catégorie d'enseignants : les chargés d'enseignement, maintenant appelés maîtres d'enseignement. Ces maîtres d'enseignement ont une charge à temps plein entièrement consacrée à l'enseignement

² Maintenant connu sous le nom Bureau canadien d'agrément des programmes de génie (BCAPG).

(incluant le développement, la coordination et la préparation de cours) et l'encadrement (à travers les travaux pratiques et laboratoires). Ils bénéficient du soutien institutionnel dans le développement et la mise en œuvre d'innovations pédagogiques.

1.5 Intégration de la calculatrice symbolique à l'enseignement des mathématiques

L'année 1996 fut marquée par l'arrivée sur le marché du calculateur symbolique de poche de Texas Instruments, dont se dotèrent rapidement certains étudiants. À la même époque, une nouvelle vision de l'enseignement du calcul différentiel et intégral se répandait avec les ouvrages produits par le projet Harvard³. Prenant en compte la présence d'outils technologiques qui automatisaient certains processus, ce consortium cherchait à s'éloigner autant d'un apprentissage centré sur les procédures que d'une rigueur absolue jugée difficilement atteignable dans les premiers cours de calcul, pour travailler davantage le sens des concepts, en mettant en relation les représentations graphiques, numériques, symboliques et verbales et en multipliant les applications. Face à ces nouvelles réalités, les enseignants de mathématiques décidèrent, avec l'aval de la direction de l'ÉTS, qu'à compter de l'automne 1999, la calculatrice symbolique de TI serait obligatoire dans le premier cours de calcul où les enseignants se chargeraient d'y initier les étudiants. Ce choix a résulté de la prise en compte de différents facteurs : hétérogénéité des connaissances mathématiques des étudiants admis, disponibilité de l'outil, reconnaissance de ses potentialités didactiques, principe d'équité envers les étudiants et contribution anticipée au développement de compétences transférables à une pratique du génie. L'intégration systématique de l'outil s'est étendue depuis à tous les cours de sciences dispensés par le SEG (et même à un cours de gestion financière) ainsi qu'à plusieurs cours offerts par les départements.

³ <http://he-cda.wiley.com/WileyCDA/Section/id-100325.html>

Si l'intégration d'un outil technologique dans l'enseignement des mathématiques à l'ÉTS apparaît comme une conséquence naturelle de sa vocation, cette intégration a néanmoins nécessité une appropriation progressive et personnelle de l'outil par les enseignants (Picard et Pineau, 2001; Beaudin et Pineau, 2002). Chacun a ainsi développé une façon de mettre à profit cette technologie dans son enseignement et dans l'apprentissage des étudiants. Différents facteurs ont néanmoins favorisé l'émergence d'un dénominateur commun aux approches individuelles d'enseignement du calcul différentiel et intégral qui se sont développées en intégrant l'outil : l'utilisation d'un même manuel et d'un examen final commun à tous les groupes (une politique antérieure à l'utilisation de la calculatrice symbolique), le maintien d'éléments plus « traditionnels » dans certains segments du cours et des examens, où le recours à la calculatrice est interdit, les partages spontanés entre enseignants de « bons problèmes » et les discussions informelles.

Après quelques années d'utilisation systématique de l'outil dans les cours de calcul différentiel et intégral, il devenait pertinent d'examiner les différentes approches d'intégration, leur dénominateur commun, les raisons qui expliquent les similitudes et les différences, et leurs effets observables chez les étudiants. Par cette mise en commun des résultats obtenus par les expérimentations de chacun, nous espérons pouvoir identifier les stratégies les plus porteuses sur le plan du développement des compétences mathématiques des étudiants.

Dans cette perspective, un projet de recherche de nature exploratoire, subventionné à l'interne par l'ÉTS, a été mis sur pied en 2003 pour caractériser les approches d'intégration de la calculatrice dans le premier cours de calcul différentiel et intégral, comprendre les intentions de l'enseignant qui sont sous-jacentes à certaines des caractéristiques, et en repérer les effets sur les compétences démontrées par les étudiants.

1.6 Participants

1.6.1 Enseignants

Quatre enseignants (deux femmes et deux hommes) ont été sélectionnés pour l'étude; ils constituaient selon la perception de la cochercheure de l'ÉTS un échantillon suffisamment varié et contrasté des approches d'enseignement et d'intégration de la calculatrice dans les cours de calcul différentiel et intégral.

Trois de ces enseignants sont maîtres d'enseignement et le quatrième est chargé de cours. Au début de l'étude, deux enseignants avaient plus de vingt ans d'expérience en enseignement; un troisième enseignait depuis une quinzaine d'années et le quatrième comptait moins de dix ans d'expérience d'enseignement. Deux ont un doctorat et les deux autres détiennent une maîtrise en mathématiques.

1.6.2 Étudiants

Presque tous les étudiants inscrits à la session d'automne 2003 à l'un des cours de *Calcul différentiel et intégral* donnés par ces quatre enseignants se sont eux aussi portés volontaires pour participer. Nous avons donc finalement eu accès aux examens finaux de 212 étudiants qui nous ont permis d'étudier les effets à court terme des approches utilisées ou privilégiées par les quatre enseignants interrogés.

1.7 Méthodologie

Notre étude, de nature exploratoire, visait à clarifier les relations entre les approches d'intégration de la calculatrice dans les cours de calcul différentiel et intégral et les compétences démontrées par les étudiants en situation de résolution de problèmes faisant appel à ce champ des mathématiques. Il convient de préciser que dans le cadre de ce cours, tous les étudiants et tous les enseignants travaillaient alors avec le même outil (la

calculatrice symbolique TI-92 Plus) et le même manuel⁴, produit par le consortium Harvard.

Du côté des enseignants, nous avons d'abord cherché à analyser les tâches soumises typiquement en leur demandant de nous donner accès aux énoncés des problèmes des mini-tests, devoirs et examens, qu'ils permettent ou non l'utilisation de la calculatrice. Puisque la résolution de problèmes constitue le mode privilégié du développement des compétences, nous souhaitions voir dans leur choix de problèmes les compétences les plus sollicitées et le niveau de complexité qui y était associé.

Pour y arriver, nous avons élaboré une grille d'analyse des tâches en fonction des compétences sollicitées. Contrairement à d'autres grilles d'analyse de tâches, comme le Mathematics Task Coding Instrument (MaTCI) (Heid et al., 2002), cette nouvelle grille n'a pas été structurée en fonction d'une séparation initiale entre concepts et processus, mais plutôt en fonction du type de compétence impliqué (De Terssac, 1996; Caron, 2001), qui met à contribution concepts, processus et autres ressources.

Nous avons croisé cette division des compétences avec les niveaux de complexité de la tâche. Ceux-ci ont été définis en élargissant aux trois types de compétences les niveaux que nous avons repérés dans l'explicitation en mathématiques (Caron, 2001 et 2004).

On remarque d'ailleurs sur la grille ainsi développée (Annexe A) que les compétences des niveaux inférieurs sont plus compartimentées que celles des niveaux supérieurs. La grille a été conçue pour refléter, de façon aussi précise que possible, la spécificité de l'activité mathématique instrumentée avec une calculatrice symbolique; un premier codage a ensuite été effectué de façon indépendante par les trois cochercheurs sur des problèmes-tests; la comparaison des résultats a mené à quelques ajustements à la grille et

⁴ Hugues-Hallett, D, Gleason, A.M et al., (1999) Fonctions d'une variable, Montréal : Chenelière/McGraw-Hill.

à une compréhension partagée des compétences invoquées dans la résolution des problèmes.

Des entrevues de deux heures avec chacun des quatre enseignants ont été menées à l'automne 2003. En les interrogeant sur leur conception des mathématiques, sur les objectifs poursuivis avec leur enseignement, sur leur perception des étudiants, et sur leur vision des apports et risques de l'outil technologique dans l'apprentissage des mathématiques chez leurs étudiants, nous cherchions à bien cerner les raisons derrière le mode d'intégration de la calculatrice privilégié par chaque enseignant et à décoder le *contrat didactique* qu'ils mettent explicitement et implicitement en œuvre dans leur enseignement. Ce contrat se manifeste notamment à travers le choix des tâches, des consignes données et du barème utilisé dans la correction.

Nous avons donc complété le profil des enseignants en examinant les consignes données dans les problèmes (exigences, indices, etc.) et en analysant le barème utilisé par chacun lors de la correction de l'examen final afin de mieux évaluer l'importance accordée aux différents aspects de la pratique mathématique et de valider les compétences plus particulièrement visées par chacun.

Du côté des quelque 200 étudiants, nous avons tenté de traduire en compétences les productions observées. Nous avons cherché à repérer des effets à court terme de l'enseignement reçu dans l'analyse des productions des étudiants à l'examen commun du cours, dans la partie où la calculatrice est autorisée. Pour ce faire, nous avons à nouveau mis à contribution la grille d'analyse des tâches en associant les erreurs commises aux compétences qui semblaient avoir fait défaut et ce, à partir de l'explicitation souvent partielle que font les étudiants de leur démarche de résolution. Nous avons ensuite procédé à une analyse didactique plus fine de certaines productions lorsqu'elles paraissaient révéler des phénomènes intéressants.

2 OBSERVATIONS, VOLET ENSEIGNANT

2.1 Vision des enseignants

Chacun des quatre enseignants interrogés a une vision qui lui est propre des mathématiques, de la technologie, des étudiants à qui il enseigne, des objectifs qu'il poursuit avec son enseignement et de l'apport de la calculatrice symbolique dans ce contexte.

2.1.1 Alain

Dans sa formation mathématique, Alain s'est spécialisé en analyse. Il détient aussi un certificat en informatique. Son attrait pour la précision, le raisonnement déductif et l'informatique l'amène à s'intéresser particulièrement au calcul, à l'algorithmique et à l'analyse numérique. Pour aider les étudiants à maîtriser les bases qui semblent leur manquer, il cherche à travailler le sens des concepts enseignés. Sur ce plan, il apprécie grandement les fonctionnalités graphiques de la calculatrice même si selon lui, la compréhension du sens va au-delà de l'interprétation en termes graphiques : « *L'idée de la dérivée, c'est plus vaste que la pente de la tangente. C'est le taux de variation d'une fonction en un point donné.* » Pour éviter que les étudiants se limitent à un recours aux fonctions graphiques de la calculatrice, il exige régulièrement que les solutions soient données en valeur exacte. Les applications lui permettent aussi de mettre en valeur le sens des concepts en montrant aux étudiants comment bien poser un problème parce que « *poser un problème, ce ne sera jamais un ordinateur qui va le faire à leur place* ».

Il voit aussi dans l'outil la possibilité de décharger les étudiants de calculs longs et fastidieux et d'aborder ainsi des problèmes plus complexes qu'il serait peu profitable de tenter de résoudre à la main. Il croit néanmoins qu'utiliser un tel outil dans les cours de mathématiques contribue au risque de développer une dépendance chez certains

étudiants pour qui la calculatrice finit par devenir l'indispensable béquille. Il essaie donc de faire en sorte qu'à la fin du cours, ses étudiants soient suffisamment familiers avec le calcul pour qu'ils soient « *capables d'en faire un minimum à la main* ». Il leur recommande, pour la plupart des problèmes qui n'exigent pas un recours à l'outil, de faire « *comme s'ils n'avaient pas la calculatrice* » ou, à la rigueur, de ne l'utiliser que pour « *s'aider à avancer ou pour vérifier* ». Et il pénalise à la correction les usages qu'il juge « *abusifs* » de la calculatrice, i.e. lorsque l'absence d'étapes intermédiaires témoigne d'une prise en charge par la calculatrice là où l'on attendait un travail de l'étudiant, et que l'étudiant n'est pas en mesure d'expliquer le résultat ainsi produit. Les substitutions trigonométriques utilisées « spontanément » par la calculatrice en sont pour lui un exemple.

2.1.2 Bernard

Bernard voit les mathématiques avant tout comme une méthode de pensée, qui fait appel au raisonnement et à la logique. Il n'y a rien à apprendre par cœur; « *tout peut se retrouver* ». Il aime aussi les liens qui unissent les mathématiques à la physique. Il attribue les lacunes qu'il constate chez les étudiants à une méconnaissance des éléments qui constituent cette pensée mathématique et du langage à travers laquelle elle s'exprime; en particulier, le sens d'une définition ou d'une preuve ne lui semble généralement pas bien saisi de ses étudiants. En revanche, il reconnaît chez eux des connaissances techniques et une capacité à comprendre géométriquement et graphiquement, qu'il est possible de mettre à profit dans l'apprentissage. En plus d'initier ses étudiants au formalisme et à la preuve, il vise à développer chez eux une méthode pour aborder, modéliser et résoudre les problèmes.

C'est à travers son enseignement à l'ÉTS que Bernard a pour la première fois intégré la technologie à sa pratique mathématique. Il partage la vision d'Alain sur les apports de la calculatrice, notamment avec la possibilité d'aborder des problèmes plus complexes, mais il précise qu'il croit cet outil plus pertinent dans d'autres cours de mathématiques

(probabilités et statistique, calcul à plusieurs variables) que dans ce premier cours; la motivation à apprendre les techniques de calcul qui y sont enseignées (incluant les méthodes numériques) lui semble mise à rude épreuve par les capacités de calcul de la calculatrice et celles qu'on peut lui ajouter par des modules téléchargeables. Il lui reproche son côté « *boîte noire* » et regrette que les étudiants ne cherchent à valider ni ce qu'ils soumettent comme entrée (à partir de l'écriture renvoyée par la calculatrice) ni ce qu'ils reçoivent comme résultat. Pour éviter que ses étudiants ne développent une dépendance totale face à la calculatrice, il évite dans ses cours d'y recourir lorsque le problème peut être résolu à la main. C'est pour lui l'occasion de consolider les apprentissages.

2.1.3 Charlotte

Charlotte valorise le caractère absolu des mathématiques, leur pureté, leur langage qui permet d'exprimer les idées essentielles et de révéler ainsi des choses qu'on n'aurait pas soupçonnées a priori. Si elle croit que bien souvent, ses étudiants ne voient les mathématiques que comme une suite de manipulations algébriques, qu'ils ne maîtrisent pas toujours pour autant, elle trouve néanmoins facile de mettre à profit leur grand intérêt pour les applications et leur plaisir à utiliser la technologie pour les motiver aux mathématiques.

Même si au départ elle était réfractaire à l'intégration de la calculatrice symbolique dans le premier cours de calcul, elle est la première aujourd'hui à en reconnaître les apports, au point où elle ne se verrait plus retourner en arrière. Parmi ces apports, elle souligne les possibilités graphiques qui, en permettant d'illustrer les concepts, favorisent un travail sur le sens et fournissent l'occasion de parler des mathématiques, de motiver par une approche intuitive à un travail plus formel. Mentionnons que c'est sous cet angle que les technologies se sont d'abord intégrées à sa pratique mathématique : comme étudiante au doctorat, elle utilisait le logiciel Maple pour émettre des conjectures qu'elle démontrait ensuite avec les techniques mathématiques classiques.

Pour éviter que les étudiants ne se lancent dans une pêche au hasard, elle insiste sur la documentation rigoureuse de la démarche et la justification des affirmations : « *s'ils prennent la peine de s'exprimer clairement, les idées vont se placer plus facilement dans leur tête.* » Elle pénalise donc dans la correction des travaux et examens les affirmations gratuites ou les passages trop rapides dans la démarche de l'étudiant. Et elle tient à une rigueur dans le langage mathématique utilisé dans la rédaction de la solution qui lui est communiquée, où ne doivent pas se mêler les commandes de la calculatrices : « *Je ne suis pas une TI* », rappelle-t-elle à ses étudiants. Les inévitables difficultés techniques auxquelles ceux-ci sont confrontés dans l'utilisation de l'outil (et qui donnent à l'occasion l'impression de voler du temps précieux aux apprentissages mathématiques) lui semblent néanmoins créer dans la classe une ambiance propice aux questions, qui profite ensuite à l'apprentissage des mathématiques.

2.1.4 Diane

Diane se déclare sensible à l'abstraction, la rigueur et la beauté des mathématiques, qu'elle retrouve autant en géométrie qu'en algèbre, et dans l'étude des structures en général. Ayant enseigné auparavant dans des programmes techniques du niveau collégial, elle y a développé un intérêt pour les applications, principalement parce qu'elle y voit autant de manifestations de l'applicabilité des mathématiques à des situations diverses. Les étudiants à qui elle enseigne lui semblent plutôt débrouillards, mais elle note néanmoins leur manque de formation mathématique. Ils ne saisissent pas toujours l'importance de cette formation puisqu'ils ont déjà obtenu, sans avoir eu à utiliser beaucoup de mathématiques avancées, un diplôme dans leur domaine de spécialisation. Diane s'emploie donc à leur montrer le rôle des mathématiques à travers des situations variées, de façon à leur permettre de consolider leurs bases en mathématiques, de développer leur imagination et leur intuition et d'élever les niveaux d'abstraction et de rigueur qu'ils mettent à contribution dans l'analyse d'un problème. Pour favoriser ce dernier aspect, elle complète régulièrement la description des

problèmes du manuel par des consignes supplémentaires afin de préciser ses attentes dans la résolution.

Avant la calculatrice symbolique, elle avait déjà intégré le tableur (Excel) et un autre logiciel de calcul symbolique (Maple) à son enseignement des mathématiques au collégial. Mais l'utilisation systématique de la calculatrice symbolique lui paraît faire obstacle à la consolidation des connaissances mathématiques car ce que les étudiants doivent d'abord apprendre à faire à la main est vite remplacé par l'appel à la fonction correspondante sur l'outil. La motivation à apprendre et la rétention des apprentissages s'en trouvent forcément affectées. En revanche, elle apprécie les capacités graphiques de l'outil et la possibilité, par sa prise en charge du calcul, de cibler des compétences plus complexes (ex. la modélisation) sur des problèmes eux aussi plus complexes, plus réalistes, avec plus d'inconnues ou « *tout n'est pas truqué d'avance pour que les équations soient faciles.* »

2.2 Tâches privilégiées

L'analyse par niveau de compétence des tâches données par les différents enseignants a mis en évidence leur dénominateur commun, aussi visible à travers les questions de la seconde partie de l'examen final (Annexe B), là où le recours à la calculatrice est autorisé.

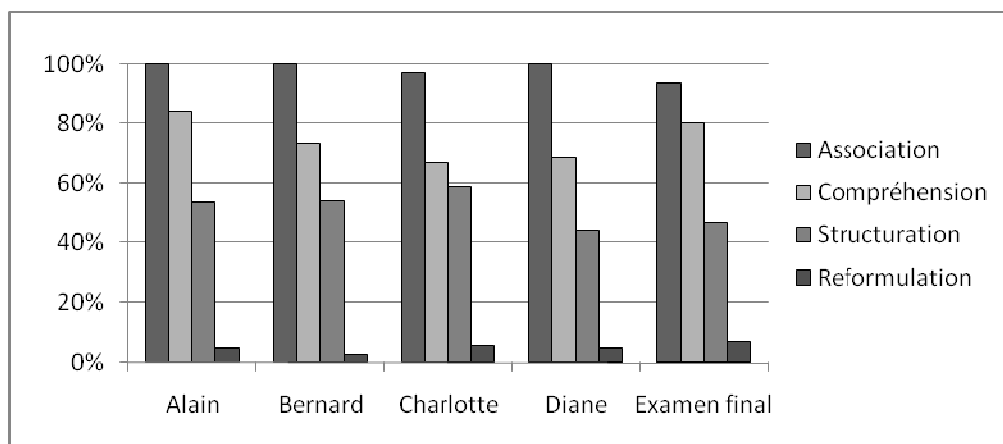


Figure 1 Pourcentage des tâches faisant appel aux différents niveaux

Si presque toutes les tâches soumises par les enseignants demandent une certaine forme d'association (ex. la reconnaissance d'une propriété mathématique évidente ou l'application d'une méthode connue), entre 65% et 85% des tâches demandent au moins un niveau de compréhension (ex. l'identification d'un objet mathématique sous-jacent ou l'interprétation d'un résultat), et environ la moitié des tâches font appel à une forme de raisonnement structuré (ex. la justification d'un résultat ou l'utilisation d'une propriété pour orienter la résolution). La reformulation n'est sollicitée que très rarement, essentiellement dans les problèmes de modélisation et d'optimisation. Il y a sans doute dans ces résultats un effet du manuel commun, très orienté sur la compréhension du sens des concepts, qui a été utilisé dès les débuts de l'intégration de la calculatrice symbolique au premier cours de calcul, et qui influence aussi l'examen commun et donc l'enseignement qui y prépare.

Les différences entre enseignants ne sont pas beaucoup plus marquées quant à la nécessité de recourir à l'outil pour résoudre les tâches soumises.

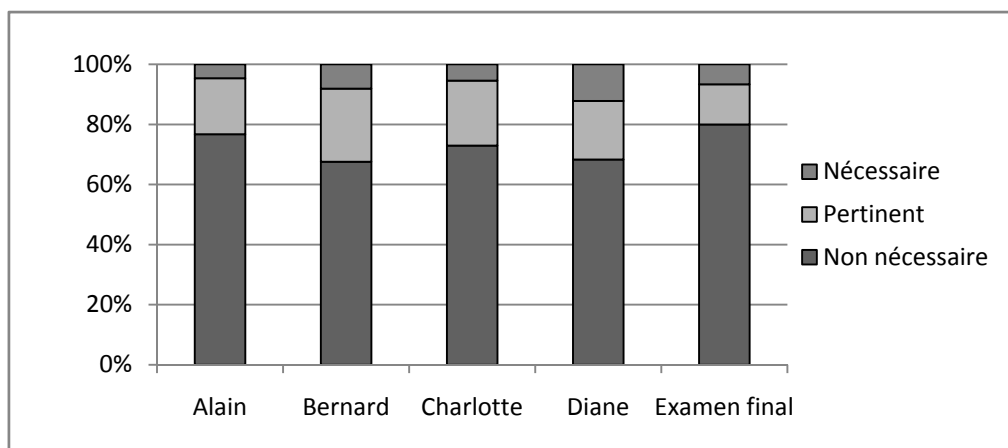


Figure 2 Répartition des tâches proposées selon l'utilité de recourir à la calculatrice

Dans ce premier cours de calcul, les quatre enseignants privilégient la valeur épistémique de l'outil en le mettant surtout à contribution pour illustrer et favoriser la compréhension des concepts plutôt que pour étendre à une classe plus vaste les problèmes qu'il devient possible de résoudre. Ainsi, pour la plupart des problèmes soumis, l'utilisation de la calculatrice n'est pas absolument nécessaire. Les applications, lorsqu'elles sont présentes, servent surtout à donner sens aux concepts enseignés; on n'y retrouve pas souvent la complexité qui caractérise les situations réelles et qui exigerait le recours à l'outil. Par l'intérêt qu'elle a développé pour les applications, Diane laisse un peu plus de place à une telle complexité.

De façon générale, les possibilités de calcul symbolique de la calculatrice sont moins sollicitées dans les tâches proposées par les quatre enseignants que ne le sont ses possibilités graphiques ou numériques. Cela s'explique par le fait que les principales techniques traditionnelles de calcul différentiel et intégral constituent un des enjeux de ce premier cours et sont évaluées dans une première partie de l'examen où la calculatrice est interdite.

Certaines des tâches soumises, surtout par Alain et Charlotte, ne nécessitent aucun calcul et ciblent spécifiquement les compétences d'explicitation par un travail sémantique et le

passage entre différents registres de représentation. L'exercice suivant donné par Charlotte en constitue un exemple :

Soit $h(t)$ une fonction qui décrit l'altitude (la hauteur en mètres) d'un avion en fonction du temps t , en minutes, depuis son décollage.

a) Expliquez clairement ce que l'égalité $h'(28) = -200$ vous apprend.

b) Que signifie $h'(t) = 0$ pour $40 \leq t \leq 50$?

c) Que signifie $h''(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq 3$?

Figure 3 Extrait d'un mini-test donné par Charlotte

Comme les autres enseignants, Charlotte introduit aussi quelques problèmes de modélisation, en optimisation notamment. Pour favoriser un regard stratégique plutôt qu'une centration sur les calculs, elle y encourage une exploration et une résolution avec la calculatrice, et cela même si les calculs peuvent être effectués à la main. Là comme ailleurs, elle précise souvent dans ses consignes le niveau de détail qu'elle souhaite voir apparaître dans la rédaction de la solution : « *indiquez clairement la fonction à optimiser et son domaine* », « *justifiez* », etc.

Diane dit chercher particulièrement à travailler le volet modélisation dans son enseignement. Si les problèmes qu'elle soumet à cette fin sont souvent déjà partiellement modélisés, on sent tout de même une pertinence pratique à leur résolution.

On cherche à calibrer un bâton vertical déposé au fond d'un réservoir de façon à savoir quand le réservoir est rempli au quart, à la demie ou aux trois quarts.

Le réservoir est obtenu par la rotation autour de l'axe des y de la courbe

$$y = 10 - \sqrt{100 - x^2}$$

où $-10 \leq x \leq 10$. Le bâton correspond au segment de l'axe des y où $0 \leq y \leq 10$.

Ici, x et y sont mesurés en centimètres. Déterminez à quelle hauteur on doit inscrire les marques de calibration sur le bâton.

Expliquez bien chaque étape du raisonnement, posez clairement vos intégrales. Tracez une figure illustrant le réservoir et le bâton calibré (à la main ou avec un logiciel). Arrondissez à la quatrième décimale.

Figure 4 Problème d'application proposé par Diane dans un devoir

Elle veille aussi à éveiller le sens critique des étudiants à l'endroit des modèles présentés en faisant ressortir à l'occasion dans l'énoncé du problème les limites des simplifications à partir desquelles ils ont été construits.

De façon cohérente avec la démarche de modélisation, elle encourage ses étudiants à se faire une représentation graphique des problèmes qu'ils modélisent et à valider la solution obtenue par des techniques d'encadrement (à l'aide du graphique notamment) ou par une simple appréciation de l'ordre de grandeur. Ces recommandations prennent quelquefois la forme d'exigences de rédaction (« *je veux voir...* ») pour les problèmes qu'elle soumet. Mais en général, elle préfère ne pas leur imposer une façon de faire : « *D'habitude, je suis assez ouverte pour dire : tous les chemins, s'ils sont bien expliqués, vont conduire à la solution et à des points.* » Cela lui demande à l'occasion de faire le deuil de la rigueur mathématique qu'elle valorise pourtant pour accepter une approche plus heuristique (ex. basée sur une table de valeurs), favorisée par l'accès à l'outil.

L'énoncé des devoirs est aussi pour elle l'occasion de chercher à développer les compétences d'intervention et d'explicitation des étudiants avec les différents logiciels.

Elle les amène ainsi à passer de la calculatrice TI à Maple, et met alors en évidence les spécificités langagières et fonctionnelles de chacun.

Remarque. La TI ne trace pas de graphe d'équation implicite. Mais si vous arrivez à isoler y , le problème sera réglé. Cependant, Maple trace facilement ce type de graphe. Essayez les commandes suivantes :

```
> with (plots);  
> implicitplot ({x^2+(y-7)^2=4, y=x^2}, x=-10..10, y=-10..10, numpoints=9000, scaling=constrained);
```

La dernière option assure que le cercle ne sera pas déformé en ellipse et numpoints=9000 précise le nombre de points tracés et accroît ainsi la qualité du graphique.

Figure 5 Informations techniques dans l'énoncé d'un devoir de Diane

Alain avoue avoir été influencé par le manuel dans le choix de certains problèmes qu'il propose aujourd'hui, autant dans les devoirs que dans les examens. Il rejoint ainsi Charlotte dans son adhésion aux principes du Projet Harvard, notamment le travail sur les différentes représentations : *« À partir d'un graphique, faire le graphique de la dérivée; ou l'inverse, à partir du graphique de la dérivée, reconstruire la fonction... Ça c'est le genre de problèmes que je ne donnais pas du tout il y a même dix ans. Avant, quand j'arrivais dans les dérivées, c'étaient plus les techniques de dérivation. Maintenant, il y a des problèmes de compréhension générale du concept. »* Ce type de problème lui semble essentiel pour éviter que l'étudiant en vienne à croire que tout peut désormais se faire à la calculatrice.

Alain regrette par ailleurs que le manuel soit muet sur certaines procédures (ex. les techniques d'intégration par fractions partielles ou par substitutions trigonométriques) qu'il continue néanmoins d'enseigner et de donner en devoir *« pour qu'au moins ils sachent que les nombreuses formules des tables, c'est pas des choses qui nous tombent du ciel ou qu'on a trouvées par essais et erreurs. »*.

Selon lui, les « beaux problèmes » qui mettent en valeur la calculatrice sont les problèmes appliqués qu'on ne peut résoudre de façon analytique et pour lesquels un

recours contrôlé aux méthodes numériques s'avère nécessaire, pour un calcul d'intersection de courbe ou de longueur d'arc par exemple. Son intérêt pour la précision et l'analyse numérique l'amène d'ailleurs à rédiger des problèmes où l'utilisation de la calculatrice permet de comparer la performance de différentes méthodes numériques :

a) Montrez analytiquement que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$

b) Complétez le tableau suivant (en gardant 6 décimales)

	n = 10	n = 20
GAUCHE (n)		
DROITE (n)		
MI (n)		
TRAP (n)		
SIMPSON (n)		

c) Déterminez le nombre de subdivisions nécessaires pour obtenir une précision de 8 décimales (i.e. Erreur $\leq 5 \times 10^{-9}$) avec la méthode du trapèze.

d) Déterminez le nombre de subdivisions nécessaires pour obtenir une précision de 8 décimales (i.e. Erreur $\leq 5 \times 10^{-9}$) avec la méthode de Simpson.

[Aide: pour les deux dernières sous-questions, servez-vous de la feuille distribuée en classe et n'évaluez pas les sommes]

Figure 6 Extrait d'un devoir donné par Alain

De son côté, Bernard utilise aussi dans ses tâches les capacités graphiques et numériques. Mais, dans sa volonté d'initier ses étudiants au formalisme et à la preuve, on retrouve aussi dans le choix de tâches qu'il propose, des problèmes plus classiques qui font appel à la généralité des concepts et dont la résolution ne bénéficie pas vraiment d'un recours à l'outil :

Montrez en utilisant la dérivation implicite que la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon passant par ce point.

Figure 7 Problème soumis par Bernard dans un devoir

Au-delà des caractéristiques communes dans les modes privilégiés d'intégration de la calculatrice symbolique, des différences dans le choix des tâches montrent bien

l'influence des conceptions de l'enseignant à l'endroit des mathématiques, de leur enseignement et de la technologie. En cela, ces résultats font écho à l'étude de Kendal, Stacey et Pierce (2002) sur la perspective de l'enseignant dans l'intégration des logiciels de calcul symbolique. Des différences se notent aussi dans les modalités d'évaluation.

2.3 Barème de correction

L'établissement du barème est l'occasion pour l'enseignant d'attribuer un statut officiel aux éléments qu'il souhaite développer dans les apprentissages de ses étudiants et voir apparaître au moment de l'examen. Dans le cadre de l'examen final, Diane et Charlotte ont accordé un poids beaucoup plus grand dans la note aux sous-questions qui relevaient d'une complexité plus grande; Alain et Bernard ont aussi appliqué une telle distinction mais de façon moins prononcée.

Charlotte et Diane se sont aussi distinguées par le niveau de détail de leur barème, en ayant explicité autant les erreurs anticipées et la contribution négative de leur apparition, que les éléments attendus et leur contribution positive. De son côté, Bernard semble privilégier une approche soustractive dans l'évaluation : s'il a précisé certaines erreurs et la pénalité qu'il leur associait, il n'a pas été aussi explicite avec les éléments de la résolution qu'il souhaitait voir apparaître. Alain applique une approche essentiellement additive, mais moins détaillée que celle de Diane et Charlotte.

3 OBSERVATIONS, VOLET ÉTUDIANT

3.1 Compétences démontrées à l'examen

Pour les cinq questions de la partie II de l'examen (Annexe B), là où la calculatrice est autorisée, les figures suivantes donnent la fréquence des différents types d'erreur chez les étudiants, en fonction de leur enseignant et de la question posée. Précisons d'abord qu'un même étudiant peut commettre plus d'une erreur dans la résolution – c'est généralement le cas. D'autre part, comme certaines de ces erreurs ont trait à la rigueur d'explicitation et ne mettent pas nécessairement en péril la résolution du problème, elles ne sont pas toutes pénalisées à la correction.

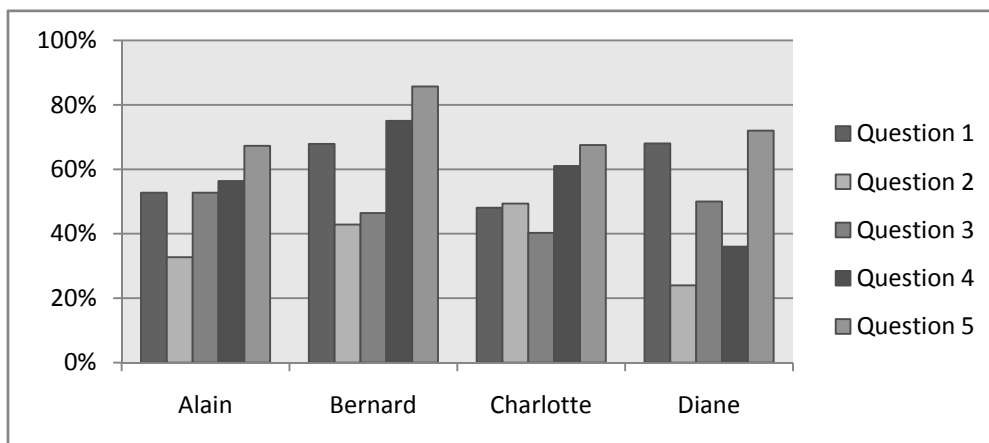


Figure 8 Étudiants ayant commis des erreurs d'association, en fonction de l'enseignant

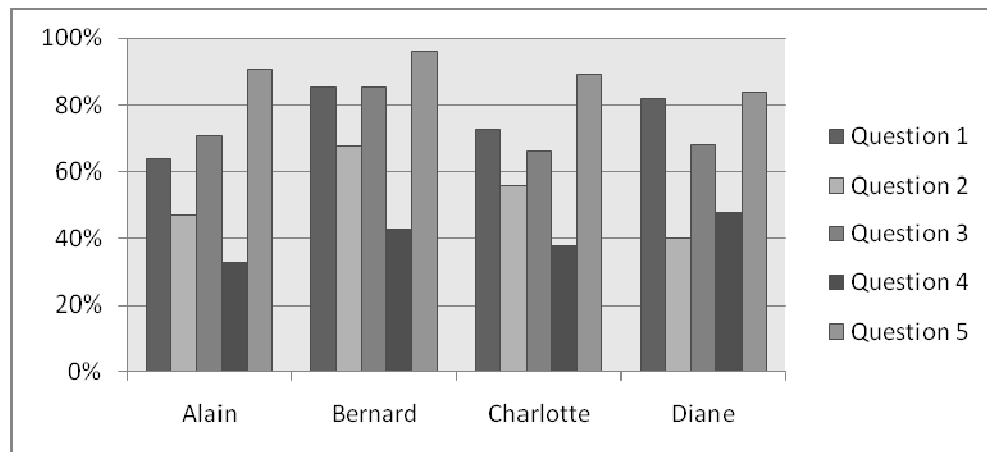


Figure 9 Étudiants ayant commis des erreurs de compréhension, en fonction de l'enseignant

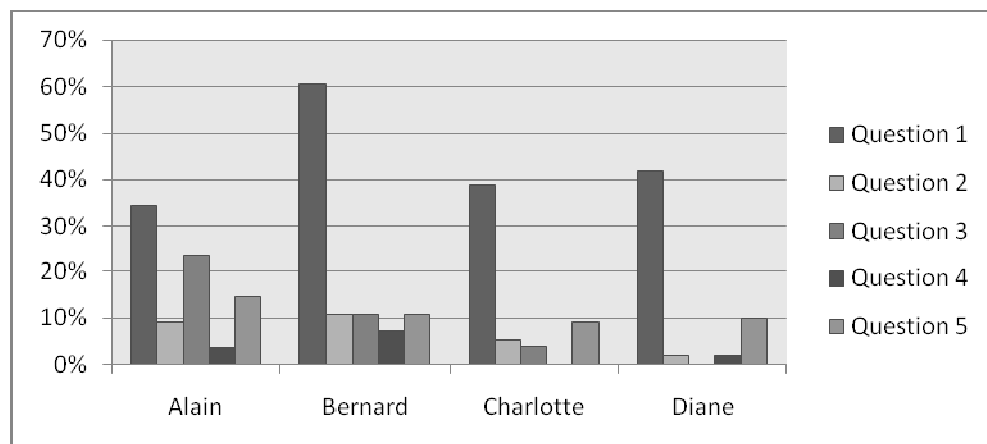


Figure 10 Étudiants ayant commis des erreurs de structuration, en fonction de l'enseignant

De façon générale, ces résultats ne suggèrent pas de différences statistiquement significatives entre les étudiants des différents enseignants. Notons tout de même que la question 1, qui demande un travail d'interprétation graphique, plus typique des tâches soumises par Alain et Charlotte, semble avoir avantage les étudiants de ces deux enseignants et désavantagé ceux de Bernard.

À la question 5, la modélisation par une série a représenté une grande difficulté pour l'ensemble des étudiants, indépendamment de l'enseignant. On note peu de validation dans les productions, en dépit du fait que le contexte s'y prêtait facilement : les étudiants

ayant obtenu comme somme des aires des figures retirées une valeur supérieure à l'aire de la figure de départ n'ont pas remis en question la validité d'un tel résultat.

La validation par une borne supérieure était pourtant particulièrement visible dans les productions des étudiants de Diane pour la question 3; 70% d'entre eux ont en effet cherché à comparer le volume du solide de révolution à celui du cylindre le contenant. Diane avait d'ailleurs mentionné en entrevue qu'elle insiste auprès de ses étudiants pour qu'un calcul de volume soit comparé « *au moins avec la boîte qui contient le solide.* » Cette discipline qu'elle considère propice au développement d'une certaine rigueur dans l'application ne semble pas faire l'objet d'un transfert spontané chez ses étudiants pour d'autres types de problèmes; si quelques-uns l'ont appliquée à la question 4 pour le calcul d'aire, on n'en a pas vu de traces dans les autres questions.

3.2 Analyse des productions étudiantes à la question 2

Les réponses à la question 2 de l'examen se sont révélées particulièrement intéressantes à analyser car il s'agissait du seul problème où le recours à la calculatrice était absolument nécessaire.

2. (10 pts) Trouvez la valeur positive k telle que l'aire de la région comprise entre le graphe $y = k \cos(x)$ et celui de $y = kx^2$ est 2. *Indiquez clairement l'intégrale définie utilisée.*

Figure 11 Énoncé du problème 2 de l'examen final

L'examen des productions étudiantes permettait donc d'observer d'une part le contrôle exercé par les étudiants dans l'utilisation de l'outil et d'autre part leur compréhension des attentes pour la rédaction de la solution. Cette compréhension pouvait ensuite être confrontée aux attentes effectives de leur enseignant à travers la correction effectuée.

3.2.1 Raisonnement déployé

La résolution du problème demandait d'abord de trouver numériquement les abscisses des points d'intersection des deux courbes, i.e. les racines x_1 et x_2 de l'équation $k \cos x - kx^2 = 0$, en tirant parti de leur invariance par rapport à k (pour $k \neq 0$), et de trouver ensuite k tel que $\int_{x_1}^{x_2} (k \cos x - kx^2) dx = 2$.

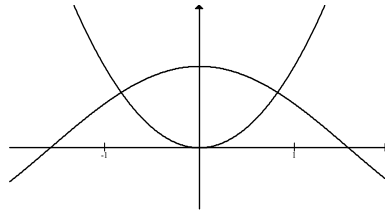


Figure 12 Représentation graphique des fonctions $y = kx^2$ et $y = k \cos x$

Les deux tiers des étudiants ont tracé sur un graphique l'allure générale des deux fonctions, mais le graphique ne respecte pas toujours leurs racines évidentes (0 pour la fonction $y = kx^2$; $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour la fonction $y = k \cos x$). L'échec à résoudre le problème est venu souvent soit d'une incapacité à déterminer les bornes, soit de leur détermination a priori sans chercher à calculer l'abscisse des points où les courbes se croisaient. Moins de 10% des étudiants de Diane et Alain ont posé un tel choix arbitraire de bornes, mais ce pourcentage grimpe respectivement à 17% et 25% chez les étudiants de Charlotte et Bernard. Il n'est pas pour autant lié à l'absence de graphique puisque seulement 30% des étudiants qui attribuent une valeur arbitraire aux bornes n'avaient pas tracé de graphique. Des étudiants de Charlotte ont ainsi choisi de fixer les bornes à -1 et 1, ou de 0 à $\pi/4$ ou encore de $-\sqrt{k}$ à \sqrt{k} , alors que plusieurs étudiants de Bernard les ont fixées à 0 et 1.

Tel qu'anticipé, le traitement du paramètre k a causé des difficultés à plusieurs étudiants. C'est le cas notamment d'une des étudiantes de Bernard qui ne savait comment s'en

défaire. Elle a bien tenté de créer à la main des tableaux de valeurs (x, y) pour les deux fonctions mais semblait dépourvue devant des valeurs de y continuaient à dépendre linéairement de k et pour lesquelles elle a tenté une représentation graphique. L'idée de fixer momentanément k pour se faire une représentation initiale de la situation n'a pas émergé comme stratégie utilisable.

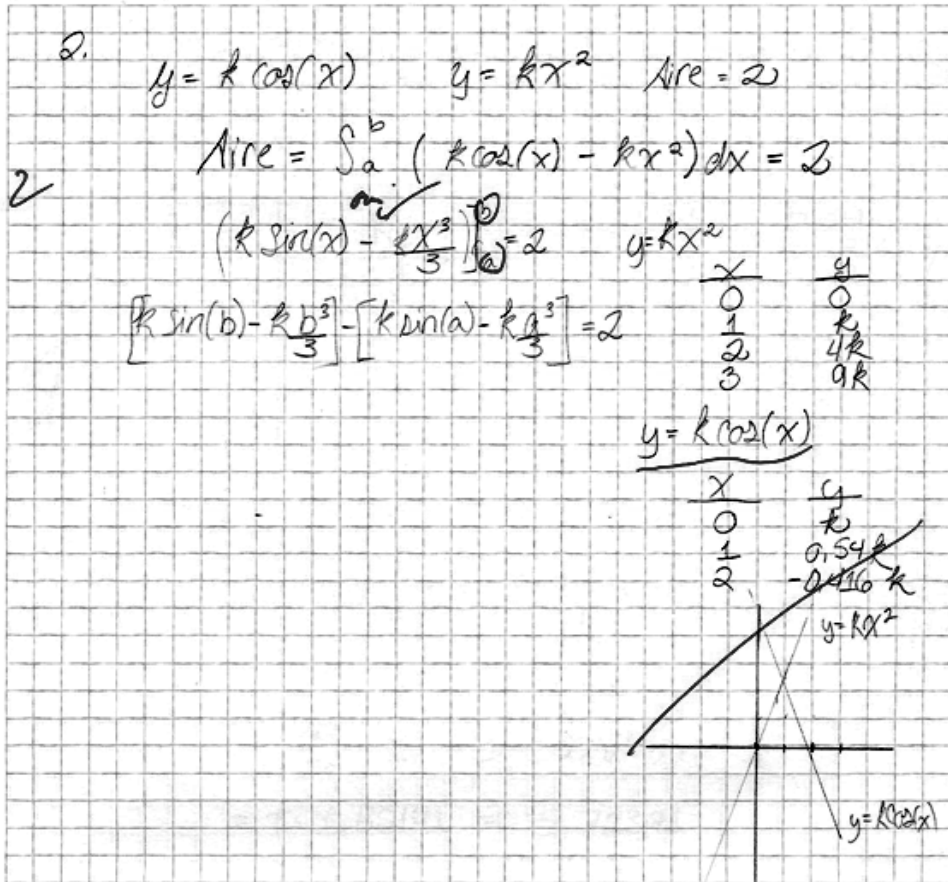


Figure 13 Tentative de résolution du problème par l'étudiante B-01

Seulement 12% des étudiants ont utilisé explicitement l'argument algébrique pour $k \neq 0, kx^2 = k \cos x \Leftrightarrow x^2 = \cos x$ pour éliminer le paramètre k dans la recherche des bornes; ce pourcentage est un peu plus élevé dans les groupes de Charlotte (18%) et de Bernard (14%) et n'est que de 6% et 8% dans les groupes d'Alain et de Diane. Certains

étudiants ont mis à profit les possibilités de la calculatrice pour explorer le problème. Une telle exploration n'est rapportée que rarement : typiquement, un étudiant par groupe la documente clairement. Un exemple avec un étudiant de Diane en est donné à la Figure 14.

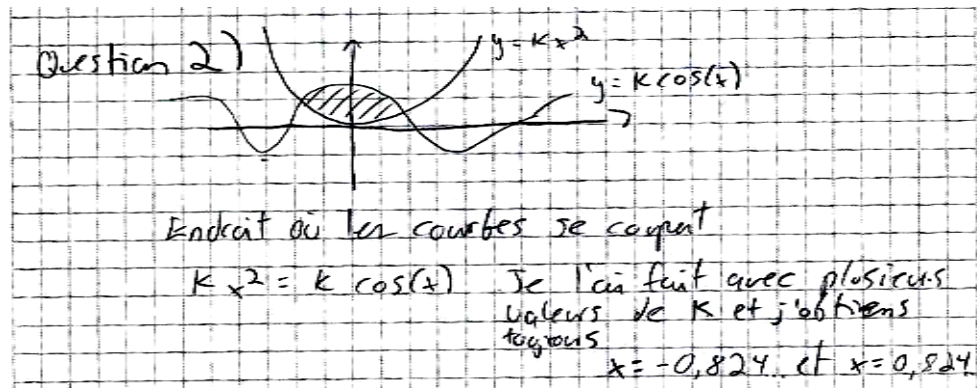


Figure 14 Extrait de la résolution du problème par l'étudiant D-01

Un étudiant de Charlotte (Figure 15) a tenté d'isoler la variable x , en témoignant d'une confusion entre inverse multiplicatif et fonction réciproque (possiblement alimentée par l'ambiguïté du symbole « $^{-1}$ » sur la calculatrice) :

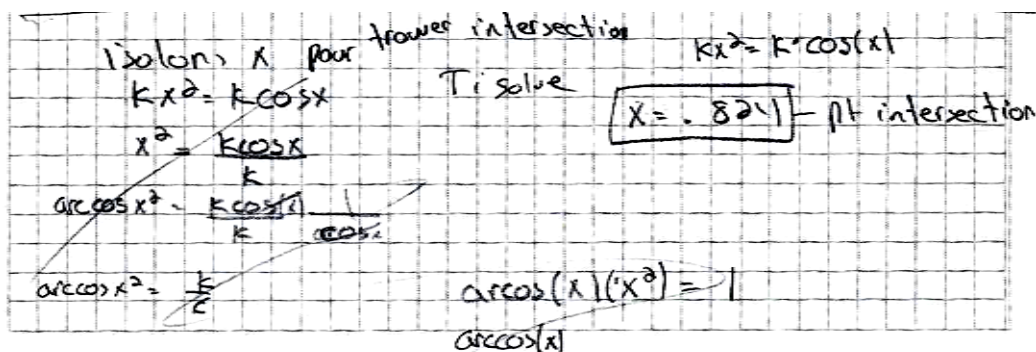


Figure 15 Extrait de la résolution du problème par l'étudiant C-01

Se ravisant ensuite, il a finalement décidé de recourir à la fonction SOLVE sur l'équation de départ $k \cos x - kx^2 = 0$ et n'a retenu qu'une seule des deux racines ainsi produites (avec peut-être l'idée de recourir à un argument de symétrie). On a ici une illustration

éloquent d'un contournement par le recours à l'outil d'obstacles non surmontés dans les apprentissages algébriques élémentaires et l'on est en droit de douter alors de la capacité de l'étudiant à exercer un contrôle sur les résultats obtenus. L'hésitation à se défaire du paramètre k nous paraît révéler une conscience chez l'étudiant de sa difficulté à reconnaître ce qu'il est en droit de simplifier dans une expression rationnelle.

Six étudiants (3%) ont défini un système d'équations à résoudre; trois d'entre eux viennent d'un même groupe d'Alain. D'autres étudiants (8%) ont résolu de façon séquentielle l'équation des bornes (pour la variable x) et celle de l'aire (pour le paramètre k), en laissant, consciemment ou non, à la charge de la calculatrice de gérer le paramètre k dans la première équation. À nouveau, la moitié de ces étudiants avaient Alain pour enseignant. Un de ceux-là a résolu le problème sans aucune manipulation algébrique, en formulant deux appels puissants à la fonction « SOLVE » qui intégraient le paramètre k .

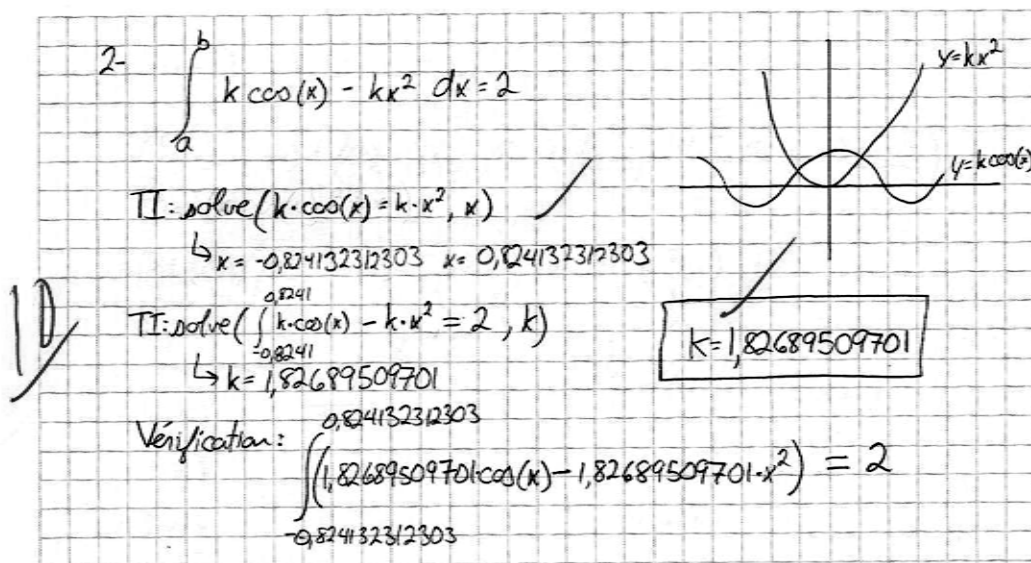


Figure 16 Résolution du problème par l'étudiant A-01

Si un tel traitement témoigne de compétences supérieures d'intervention et d'explicitation avec l'outil, on aurait pu souhaiter que l'étudiant cherche aussi à justifier

l'absence du paramètre k dans la solution à la première équation. Mais il s'est quand même distingué à sa façon sur le plan des compétences d'évaluation, en ayant été un des trois seuls étudiants à témoigner de la vérification de la solution obtenue; cela s'est fait par un nouvel appel à la calculatrice pour lui faire produire, pour le k trouvé, la valeur de l'intégrale de la différence des deux fonctions entre les bornes calculées. Notons aussi le nombre impressionnant de décimales préservées, reflet de l'attachement connu d'Alain pour la précision numérique.

3.2.2 Recours à l'outil

En principe, la seconde partie de l'examen donne aux étudiants le droit d'utiliser leur calculatrice sans restrictions. Dans les faits, plusieurs étudiants semblent s'imposer des limites dans le choix des tâches pour lesquelles ils exercent un tel droit. Puisque l'apprentissage des techniques d'intégration constitue l'un des enjeux du cours, cette alternance des moments où la calculatrice est autorisée et ceux où elle est proscrite crée un certain flou autour du contrat didactique. Par exemple, pour la question 2, s'il était nécessaire d'utiliser la calculatrice pour faire calculer numériquement les bornes, il était aussi possible de l'utiliser pour calculer l'intégrale (ou les intégrales) utilisée(s). Le graphique suivant montre l'utilisation qui en a été faite par les étudiants des différents enseignants.

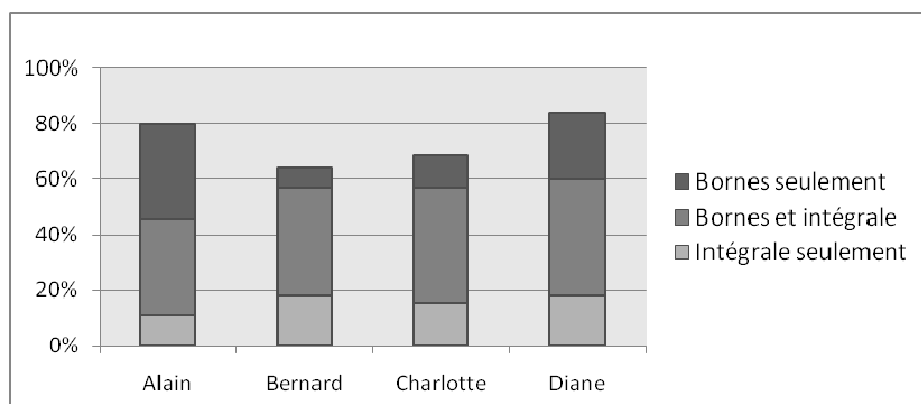


Figure 17 Utilisation par les différents groupes de la calculatrice pour le problème 2

Moins de la moitié des étudiants d'Alain ont fait calculer l'intégrale par la calculatrice, alors que près de 60% des étudiants des autres enseignants se sont prévalu d'une telle possibilité. Il paraît plausible d'attribuer cette différence aux mises en garde d'Alain à l'égard des usages abusifs de la calculatrice. L'interprétation qui en est faite amène plus du tiers des étudiants d'Alain à utiliser la calculatrice pour le calcul des bornes mais à ne pas y toucher pour intégrer les fonctions simples dont ils disposent, comme s'ils cherchaient à témoigner de leur capacité à juger de la nécessité d'utiliser l'outil. La vigilance à n'utiliser l'outil que lorsque cela est absolument nécessaire paraît cependant moins forte lorsqu'on sort du calcul différentiel et intégral; en effet, après avoir témoigné de leur habileté à intégrer «à la main», certains des étudiants d'Alain n'hésitent pas à recourir à la fonction « SOLVE » pour résoudre l'équation du premier degré à laquelle ces manipulations les ont conduits.

The image shows handwritten mathematical work on grid paper. At the top left, the equation to be solved is boxed: $\int_0^{0,824} k \cdot \cos(x) - \int_0^{0,824} k \cdot x^2 = 2$. To the right, the student evaluates the integrals: $\int_0^{0,824} k \cdot \cos(x) = k \int_0^{0,824} \cos(x) = k \cdot \sin(x) \Big|_0^{0,824} = k \sin(0,824) - k \cdot 0 = k \sin(0,824)$. Below this, the student writes "solve avec ti" and shows the result $k = 3,65379$ with a circled arrow pointing to the boxed equation. A note says "La valeur positive de k sera de 3,65379". To the right, the student evaluates the second integral: $\int_0^{0,824} k \cdot x^2 = k \int_0^{0,824} x^2 = k \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,824} = k \cdot \frac{(0,824)^3}{3} - k \cdot 0 = k \cdot \frac{(0,824)^3}{3}$. Finally, the student sets up the equation $k \sin(0,824) - k \cdot \frac{(0,824)^3}{3} = 2$.

Figure 18 Résolution du problème par l'étudiant A-02

Ce recours explicite au solveur de la calculatrice pour résoudre une équation du premier degré s'observe chez 15% des étudiants d'Alain et Diane, mais le pourcentage chute à 1% et 0% respectivement chez les étudiants de Charlotte et Bernard. Les étudiants de Bernard procèdent plus souvent à une résolution manuelle (25% au lieu des 15% observables pour les autres enseignants), tandis que ceux de Charlotte optent plutôt pour

une résolution directe par la calculatrice de l'équation contenant l'intégrale (34% contre environ 20% chez les autres enseignants).

Comme autre effet de contrat chez les étudiants d'Alain, qui dit privilégier les solutions exprimées en valeur exacte, notons l'interrogation de l'un d'entre eux « *pas de valeur exacte ?* » devant les solutions retournées par la TI pour les équations $\cos x - x^2 = 0$ et $2 \cos x - 2x^2 = 0$. Un tel étonnement montre aussi que si l'on semble savoir quand utiliser la calculatrice, on ne sait pas toujours pourquoi. Avec un outil qui décide de lui-même (dans le mode automatique recommandé par les enseignants) de la méthode de résolution en réponse à une même commande, la nécessité de recourir à des méthodes numériques et la nature du résultat produit peuvent ne pas ressortir clairement, et ce, même si certaines méthodes numériques (méthode de Newton, méthodes des trapèzes, de Simpson, etc.) étaient alors au programme du cours.

Un taux particulièrement élevé de non recours à l'outil a été observé dans l'un des trois groupes de Charlotte. Dans ce groupe, près du tiers des étudiants ont bien expliqué la stratégie visée en posant correctement les équations mais n'ont pas complété leurs calculs. Ce qui semblait témoigner de lacunes sur le plan de l'*intervention* (ex. un manque d'habitude à utiliser la fonction SOLVE, a priori peu probable puisqu'il s'agit d'une des fonctions les plus utilisées par les étudiants) pourrait bien en fait reposer sur des difficultés d'*explicitation* dans le langage propre à l'outil. Une illustration claire en est venue récemment, dans la copie d'une nouvelle étudiante de Charlotte qui eut à résoudre le même problème à l'examen final de l'été 2006 et qui s'arrêta elle aussi avant de l'avoir complété :

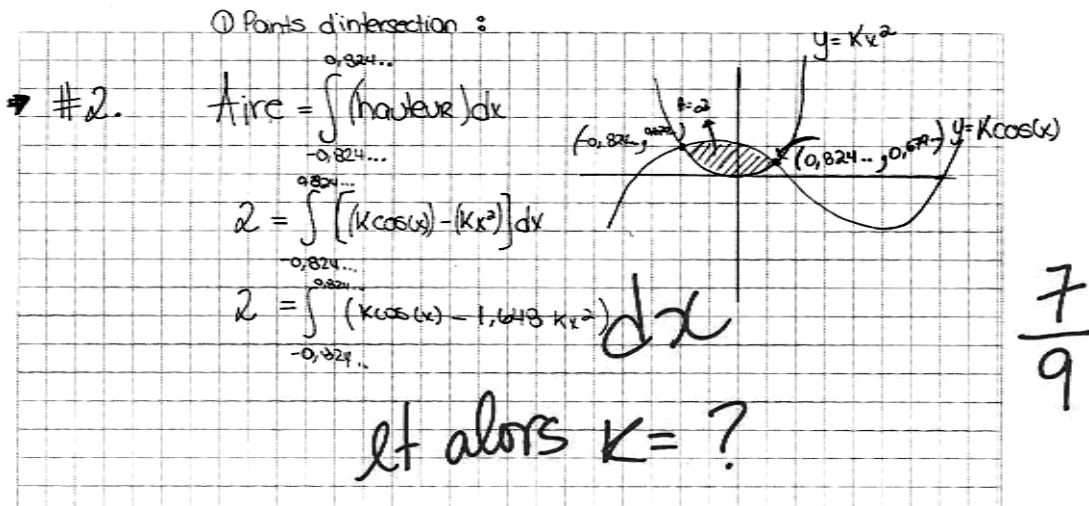


Figure 19 Résolution incomplète du même problème par l'étudiante C-03

Un peu plus loin dans sa copie, pour un autre problème où elle devait calculer l'aire d'une région délimitée par les courbes d'équations $y = x^4 - 1$ et $y = x \sin x^2$, on note une difficulté à traiter l'expression $x \sin x^2$, autant pour en faire faire un graphique par la calculatrice (l'étudiante se rabat alors sur une représentation graphique de $y = \sin x^2$) que pour l'utiliser dans le calcul de l'intégrale :

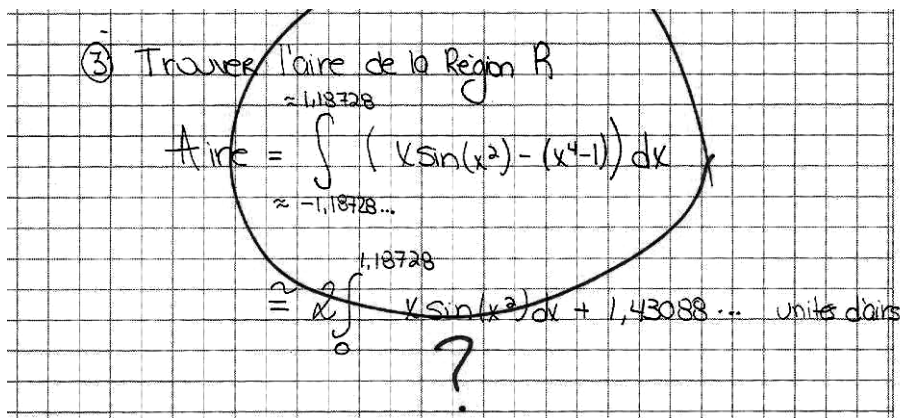


Figure 20 Résolution d'un autre problème par l'étudiante C-03

La retranscription qu'elle donne de la réponse produite par la calculatrice permet d'inférer qu'elle a omis le signe de la multiplication entre x et $\sin x^2$, conduisant la calculatrice symbolique à interpréter « xsin » comme une fonction non définie et non intégrable par conséquent. Un tel grain de sable est appelé à survenir dans l'engrenage s'il n'y a pas de mise en garde explicite de l'enseignant; cette exigence d'écriture du signe de multiplication avec la calculatrice symbolique constitue en effet une rupture par rapport aux implicites acceptés par la simple calculatrice graphique avec laquelle un nombre croissant d'étudiants sont d'abord initiés avant leur arrivée à l'ÉTS. Contrairement à ce qui se passe avec la calculatrice graphique, l'utilisation de la touche « sin » sur la calculatrice symbolique ne garantit pas un appel à la fonction sinus mais constitue plutôt un moyen accéléré d'entrer la suite de caractères « s », « i » et « n », lesquels seront interprétés à la toute fin par l'outil en fonction de ce qui les entoure dans l'expression qui lui est soumise. Il aura suffi que les étudiants d'un des groupes de Charlotte n'aient pas été explicitement confrontés à ce phénomène pour expliquer à la fois le nombre plus élevé de résolutions incomplètes, l'absence de graphiques et la détermination a priori de bornes inadéquates. Cet épisode montre bien à quel point les compétences d'intervention dépendent des compétences d'explicitation développées avec l'outil. Une connaissance chez l'enseignant des outils que ses étudiants ont pu utiliser auparavant favoriserait une mise en évidence dans l'enseignement des spécificités langagières du nouvel outil introduit. Lorsque cela est envisageable, un exposé des raisons derrière ces spécificités pourrait permettre de mieux les intégrer.

3.2.3 Explicitation de la démarche et langages utilisés dans la rédaction de la solution

Si Alain est très vigilant à l'endroit des usages abusifs de la calculatrice, il est beaucoup moins exigeant dans la forme à donner à la rédaction de la solution. L'exemple suivant où l'étudiant a obtenu tous ses points l'illustre clairement :

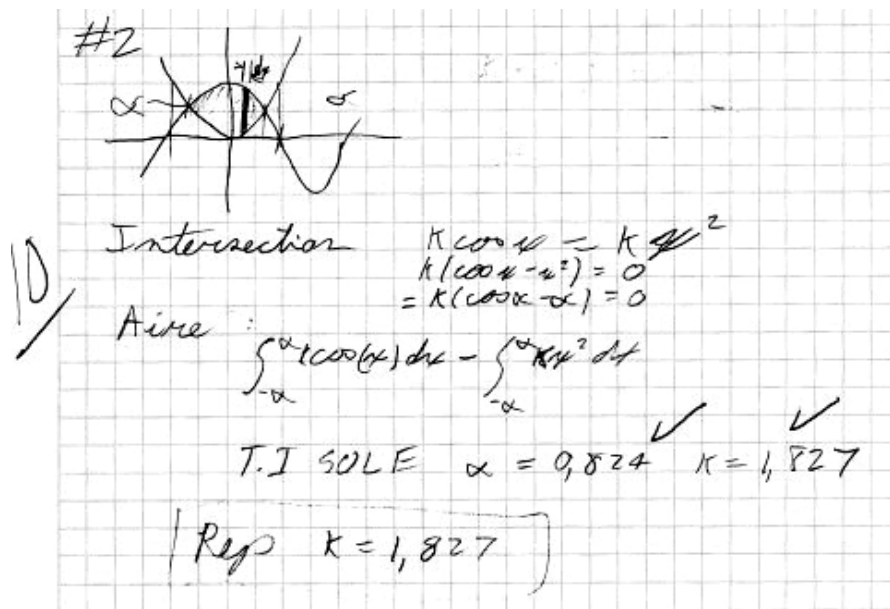


Figure 21 Résolution du problème par l'étudiant A-03

Notons d'abord qu'on n'y trouve pas de façon explicite l'équation associée à l'aire (on ne l'a pas posée égale à 2). Remarquons ensuite un recours partiel au langage de la calculatrice (particulièrement répandu chez les étudiants d'Alain) pour témoigner d'un appel au solveur, que ne vient préciser aucune équation ou variable. On ne peut savoir si l'étudiant a résolu séquentiellement les deux équations ou a plutôt choisi de résoudre simultanément un système d'équations par rapport aux deux variables k et α , car on ne le voit pas éliminer le paramètre k dans la première équation. Dans ces conditions, le manque de rigueur dans l'explicitation amène à se questionner sur le niveau de contrôle exercé par l'étudiant.

La correction par Alain d'une autre production étudiante témoigne à nouveau du peu d'importance qu'il accorde à la transparence et à la rigueur dans l'explicitation : il ne pénalise pas le fait qu'on ne précise ni ce que les bornes représentent ni comment on a procédé pour les obtenir. Sa correction qui se limite à modifier la troisième décimale pourrait donner à croire qu'il s'intéresse surtout au résultat produit pour ce problème et porte par conséquent un regard essentiellement pragmatique sur l'outil, dans la mesure où il permet d'en calculer la solution. Mais on pourrait aussi y voir une façon d'affirmer

qu'il n'est pas dupe et que la solution, par son manque de précision, pourrait provenir d'une résolution en mode graphique.

Handwritten work on grid paper:

② $y = k \cos(x)$ $y = kx^2$

$k \int (\cos(x) - x^2)$

10 $k \left(\int_{-0,824}^{0,824} \cos(x) dx - \int_{-0,824}^{0,824} x^2 dx \right) = 2$

$k (1,47 - 0,373) = 2$

$k \approx 1,823$

Figure 22 Résolution du problème par l'étudiant A-04

Une centration momentanée sur la valeur pragmatique de l'outil pour un problème qui ne peut être résolu à la main peut aussi conduire à ne pas attribuer de valeur à un travail effectué si celui-ci ne conduit pas à la solution. Ainsi, Bernard a choisi d'attribuer une note de zéro à un étudiant qui, bien qu'ayant posé correctement et traité une partie de l'équation n'a pas su la résoudre, faute de pouvoir déterminer les bornes de l'intégrale.

Handwritten work on grid paper:

$2 = k \int_0^? (\cos(x) - x^2) dx$

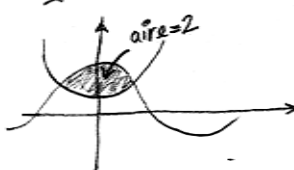
0 $2 = k \left(\sin(x) - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^?$

Figure 23 Tentative de résolution du problème par l'étudiant B-02

Pour Charlotte et Diane, l'explicitation constitue un des enjeux de l'apprentissage. Dans leur barème de correction, la présence des équations se voit attribuer une

reconnaissance, comme en témoigne la Figure 19. On retrouve par conséquent un peu plus de texte chez leurs étudiants pour préciser le contexte ou les intentions de la démarche de résolution, d'autant plus que le langage spécifique à la calculatrice n'est pas jugé recevable par ces deux enseignantes dans la rédaction d'une solution. La production suivante, d'une étudiante de Diane, nous semble en représenter le cas extrême :

2) $y = k \cos x$
 $y = kx^2$



$$k \int \cos(x) dx - k \int x^2 dx = 2$$

Réolvons $\cos(x) = x^2$ avec la TI pour trouver les bornes d'intégration près de 0. On obtient :
 $x = 0,8241$ et $x = -0,8241$

Donc : $k \int_{-0,8241}^{0,8241} \cos(x) dx - k \int_{-0,8241}^{0,8241} x^2 dx = k \left(\int_{-0,8241}^{0,8241} \cos(x) dx - \int_{-0,8241}^{0,8241} x^2 dx \right) = 2$

Demandons à la calculatrice de résoudre cette intégrale :

$$\int_{-0,8241}^{0,8241} \cos(x) dx - \int_{-0,8241}^{0,8241} x^2 dx \rightarrow \text{Nous obtenons } 1,094753\dots$$

Alors $k(1,094753) = 2 \rightarrow k = \frac{2}{1,094753} = 1,8269$

Rép.: pour que l'aire comprise entre les courbes $y = k \cos(x)$ et $y = kx^2$ soit 2, le k doit avoir une valeur de 1,8269.

Figure 24 Résolution du problème par l'étudiante D-02

Toutefois, comme nous l'avons vu avec l'exemple de la Figure 19, l'interdiction d'utiliser le langage de la calculatrice a aussi comme effet de priver l'enseignant d'une information qui lui permettrait à l'occasion de mieux saisir l'utilisation que l'étudiant a faite de l'outil (fonctions et paramètres) ou de comprendre les erreurs syntaxiques qui ont pu survenir.

4 SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS

4.1 Portrait global des compétences démontrées à la question 2 selon l'enseignant

La Figure 25 donne pour chacun des enseignants la fréquence relative des différents types d'erreurs dans les productions de ses étudiants pour le problème 2.

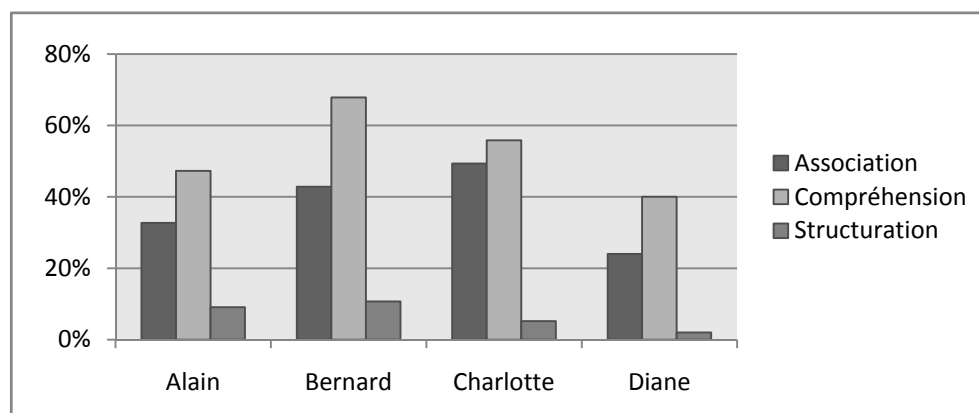


Figure 25 Fréquence d'apparition des différents types d'erreurs selon l'enseignant

Avec l'importance qu'il accorde au travail de la technique, Alain a vu ses étudiants commettre assez peu d'erreur d'association. Comme ce type de problème correspond à sa définition d'un « beau problème » avec la calculatrice, où un recours contrôlé à une méthode numérique s'avère nécessaire, plusieurs de ses étudiants en ont compris le sens et s'y sont assez bien débrouillés.

Dans une proportion un peu plus grande que dans les autres groupes, les étudiants de Bernard ont connu des difficultés avec ce problème. Celles-ci se retrouvent en particulier dans l'identification des bornes (codes⁵ A1, C2 ou C12), dans l'intégration de

⁵ La lettre des codes renvoie au niveau de compétence associé à l'erreur (Association, Compréhension, Structuration ou Reformulation) et le nombre réfère à l'élément de compétence dans ce niveau (voir Annexe A).

l'expression (codes A5 ou A6) et dans l'organisation générale de la résolution (code C5).

On note un taux relativement élevé d'erreurs d'association chez les étudiants de Charlotte. Celles-ci proviennent tantôt du choix arbitraire des bornes d'intégration (code A1), tantôt d'une tentative de calcul algébrique de ces bornes (code A7), tantôt du caractère inachevé de la résolution numérique (code A6), possiblement liée à une erreur de syntaxe (absence du signe de multiplication) dans la communication avec l'outil. Cette erreur de syntaxe pourrait aussi expliquer autant l'absence de graphique que le choix arbitraire et inadéquat des bornes d'intégration.

Il est intéressant de noter que le travail d'explicitation demandé par Diane et Charlotte ne se traduit pas nécessairement en compétences d'explicitation accrues mais paraît plutôt réduire légèrement le nombre d'erreurs de structuration chez leurs étudiants. De son côté, Bernard vise dès le départ la rigueur dans la structuration mais, face à ce problème qui ne permet pas une résolution analytique, ses étudiants ont paru plus démunis.

En plus de commettre moins d'erreurs que les autres, les étudiants d'Alain et de Diane se sont aussi distingués par un recours explicite au graphique dans leur résolution, visible chez les trois-quarts d'entre eux.

Finalement, l'analyse des productions aura surtout mis en évidence la difficulté d'inférer, à partir des informations très parcellaires laissées sur les copies, le raisonnement des étudiants et les actions qu'ils posent. Par exemple, 59% ont éliminé le paramètre k sans explications, 34% ont déterminé correctement les bornes sans référer à la technique utilisée (à l'aide du graphique ou du solveur). Et, même s'il demeure possible que d'autres d'étudiants aient procédé de façon « privée » à une vérification de leur réponse, nous n'en avons les traces que pour seulement trois étudiants.

4.2 Tensions et paradoxes

L'analyse des approches d'intégration de la calculatrice symbolique privilégiées par les enseignants dans ce premier cours de calcul différentiel et intégral et des effets observés sur les pratiques des étudiants a fait ressortir les tensions et paradoxes qui viennent avec l'intégration d'un outil technologique puissant dans l'harmonisation, la consolidation et l'extension rapide de connaissances de base en mathématiques. La gestion de cette complexité demande de la part de l'enseignant un grand doigté, autant dans le choix des tâches que dans la communication des exigences.

Sur le plan pragmatique, si l'outil technologique permet d'aborder des problèmes plus complexes, cette possibilité demeure relativement peu exploitée dans l'enseignement de ce premier cours de calcul différentiel et intégral, car de tels problèmes ne permettent pas de retravailler les techniques plus traditionnelles qui font aussi l'objet d'un enseignement; il s'agit là peut-être d'un sacrifice nécessaire pour ce premier cours. Par ailleurs, les quelques fois où de tels problèmes sont mis à contribution, il peut être tentant pour l'enseignant de porter alors une grande attention à la capacité de l'étudiant à faire produire par l'outil la solution visée, ce qui peut conduire à négliger l'évaluation des autres aspects du travail mathématique effectué.

Sur le plan épistémique, si tous les enseignants rencontrés s'entendent pour souligner l'intérêt des représentations multiples offertes par la calculatrice et s'appuient particulièrement sur le registre graphique pour l'enseignement des concepts, certains d'entre eux mettent en place des mécanismes qui font obstacle à l'utilisation de ce registre pour la résolution, au-delà d'une exploration initiale ou d'une validation. Si le recours au graphique peut servir de levier pour entrer dans un travail d'analyse mathématique, il peut aussi être utilisé par un étudiant pour court-circuiter le travail attendu. Comme les techniques traditionnelles de dérivation et d'intégration demeurent un des enjeux de l'enseignement, le registre symbolique continue à exercer une domination dans le travail mathématique attendu, et cela même lorsqu'on accepte à

certains moments que l'application des techniques dans ce registre soit entièrement prise en charge par la calculatrice.

Pour Alain par exemple, qui met en garde les étudiants contre les usages de la calculatrice qu'il juge abusifs, la résolution numérique n'est vraiment recevable que lorsque les méthodes analytiques (ou les calculs en valeur exacte) ne suffisent pas à produire la solution, et elle demeure préférable à une simple observation sur un graphique ou dans une table de valeurs. Pour l'étudiant qui est initié à toutes ces approches dans un temps relativement court et chez qui les connaissances algébriques sont peut-être encore un peu fragiles, cette hiérarchie n'est pas toujours évidente.

Durant la période d'apprentissage, des consignes claires où les exigences de rigueur sont précisées (ex. registres acceptables, explicitation attendue, obligation de vérification) conduisent l'étudiant à mieux comprendre les attentes et à en assumer la responsabilité au moment de l'évaluation qui suit. Par ailleurs, si l'on veut que l'étudiant tire parti des nouvelles possibilités d'exploration qui s'offrent à lui pour résoudre un problème, il convient peut-être de relaxer à l'occasion certaines exigences de rigueur. C'est entre ces deux positions que paraît évoluer Diane et cela semble réussir à ses étudiants.

Par ailleurs, sur le plan de l'explicitation, viser une rigueur conforme aux normes du langage mathématique, comme le font Charlotte et Diane, impose une autre hiérarchie possiblement aussi opaque pour l'étudiant : alors qu'il est en train d'apprendre à manier simultanément le vocabulaire et la syntaxe de deux nouveaux langages (celui de l'outil et celui des mathématiques du calcul différentiel et intégral), seul le second doit être visible dans ses productions. Or ce langage mathématique, dans son utilisation traditionnelle, ne reflète pas toutes les possibilités et contraintes associées à l'utilisation de la calculatrice. Un tel décalage peut faire obstacle à la communication de la démarche, à une prise en compte dans la correction des difficultés d'ordre technique qui ont pu survenir et à la révision par l'étudiant du travail effectué. Par exemple, le fait d'annoncer à la suite de deux équations l'utilisation de la calculatrice pour poursuivre la

résolution ne renseigne ni sur le choix des équations soumises à l'outil, ni sur la syntaxe utilisée pour les communiquer, ni sur les variables par rapport auxquelles la résolution est appelée à s'effectuer. Contrairement à une résolution algébrique où chaque manipulation est consignée par écrit et sert alors de mémoire des calculs, la documentation d'une démarche assistée par la calculatrice peut être marquée de trous importants, autant dans ce qu'on a demandé à l'outil de faire que dans le traitement qu'il a alors effectué. Sans aller jusqu'à soutenir qu'une séquence de commandes dans le langage de l'outil puisse constituer (à elle seule) une documentation adéquate de la résolution d'un problème mathématique, il conviendrait de réfléchir à la place à accorder à ces deux langages lorsque tous deux font l'objet d'un apprentissage.

Avec une prise en charge par l'outil de certaines étapes de la démarche de résolution de problèmes, l'explicitation devient, plus que jamais, un enjeu fondamental de la formation mathématique. Il ne s'agit plus simplement de justifier et de lier les actions posées, il convient désormais aussi de les décrire. Cette description qui nécessite et favorise une prise de conscience pourrait bien être une condition favorable à l'émergence d'une nouvelle rigueur dans cette pratique instrumentée.

5 CONCLUSION ET ÉPILOGUE

L'étude des approches d'intégration de la calculatrice symbolique chez quatre enseignants d'un premier cours de calcul à l'École de technologie supérieure a permis de faire ressortir une orientation commune, principalement attribuable au manuel utilisé : à des degrés divers, tous ont ainsi cherché par la multiplication des représentations et une présence accrue d'applications à travailler davantage le sens des mathématiques enseignées. En utilisant la calculatrice pour des problèmes où, typiquement, elle n'était pas absolument nécessaire, c'est essentiellement son apport épistémique que les enseignants ont mis à contribution dans l'enseignement et l'apprentissage.

Si l'on a pu noter quelques spécificités propres à chaque enseignant dans le choix des tâches qu'il propose, selon sa vision des mathématiques et de leur enseignement, c'est surtout dans la communication des consignes et dans les attentes à l'endroit des productions des étudiants que les différences ont été les plus marquées : niveau de rigueur attendu, détail de l'explicitation exigé, importance accordée à la mise en équations, valeur accordée à l'exploration, registres de représentation privilégiés, langages admissibles, précision numérique exigée, etc. Ces différents éléments qui contribuent à définir le contrat didactique se manifestent alors, de façon plus ou moins forte, dans les productions des étudiants et permettent d'en apprécier les effets.

L'analyse des productions a d'abord fait ressortir l'importance, autant pour celui qui rédige que pour ceux qui le liront, de documenter dans la démarche de résolution les actions qu'on charge la calculatrice d'effectuer ainsi que les rétroactions qu'elle renvoie, au lieu de les dissimuler comme partie honteuse du travail mathématique effectué. Cette nouvelle dimension à donner aux compétences d'explicitation nous semble jouer un rôle crucial autant dans le développement d'une pratique mathématique instrumentée contrôlée que dans l'évaluation par un tiers du travail effectué.

De façon intéressante, la reconnaissance par l'enseignant d'une valeur aux approches heuristiques doublée d'exigences strictes dans l'explicitation de la stratégie utilisée a paru favoriser une plus grande autonomie dans la résolution de problèmes qui ne pouvaient être résolus à la main. Une telle ouverture aux approches heuristiques rendues possibles par l'outil, si elle peut être perçue comme une baisse des exigences de rigueur dans le raisonnement déployé et un risque de court-circuiter les savoirs mathématiques visés, pourrait donc néanmoins s'inscrire dans le développement de techniques dont la fonction pragmatique permet d'ouvrir considérablement l'espace des problèmes résolubles.

Les tensions entre la valeur pragmatique des outils technologiques et les enjeux épistémiques d'un cours de mathématiques se vivent à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques. Décider de l'équilibre à viser pour un cours demande autant une réflexion sur les enjeux de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de ce cours qu'une prise en compte des caractéristiques de l'outil utilisé et des effets de certaines pratiques d'intégration. Comme ces dernières se révèlent plus clairement au fur et mesure des expérimentations, le processus d'intégration est forcément appelé à évoluer.

Depuis la cueillette des données de 2003, différents éléments ont en effet contribué à faire évoluer l'enseignement de ce premier cours de calcul assisté par la calculatrice symbolique. Une fois intégrées à leur enseignement les tâches typiques du Projet Harvard, qui leur avaient permis de s'appropriier l'outil en accordant une nouvelle importance à la mise en relation des représentations graphiques, symboliques et numériques et à une ouverture vers les applications, les enseignants ont jugé plus profitable de changer de manuel dès l'automne 2004. Ce changement était motivé par la volonté d'outiller les étudiants d'un livre de référence plus concis, plus rigoureux et mieux structuré dans la présentation des résultats mathématiques.

Puis en 2006, dans le but d'accroître la présence et le réalisme des applications présentées, un nouveau recueil d'exercices et de problèmes a été élaboré au sein de l'équipe d'enseignants de mathématiques et de sciences. Mais la mise à contribution des problèmes appliqués d'une plus grande complexité demeure encore plutôt variable d'un enseignant à l'autre. On envisage donc maintenant d'ajouter à cette banque de problèmes des situations d'apprentissages qui, tout en s'inspirant de certaines tâches et approches qui se sont révélées particulièrement porteuses, favoriseront l'émergence de stratégies de validation essentielles à l'application et ouvriront vers le développement de compétences de modélisation. En incluant des problèmes dont les consignes sont propices au développement d'une discipline de rédaction mais laissent à l'étudiant le soin de déterminer quels éléments retenir de la situation, quelles mathématiques utiliser et quels moyens de validation mettre en œuvre, peut-être se rapprochera-t-on un peu plus encore de l'équilibre à viser dans les cours de mathématiques pour futurs ingénieurs.

BIBLIOGRAPHIE

- Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 133-169.
- Artigue, M. (2000). Instrumentation Issues and the Integration of Computer Technologies into Secondary Mathematics Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM, Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, Potsdam.
- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique, note sur un nouveau problème pour la didactique. Dans M. Artigue et al. (dir.) *Vingt ans de didactique en France*. Grenoble : La pensée sauvage, 364–370.
- Ball, L. (2003). Emerging Practices for Recording Written Solutions in a CAS Classroom. *Actes du Colloque européen sur l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques (ITEM-2003)*, Reims.
- Beaudin, M. & Pineau K. (2002). Examples of how Symbolic, Hand-Held Calculators Have Changed the Way we Teach Engineering Mathematics. *Proceedings of the Annual Conference of the American Society for Engineering Education, Computers in Education Division*, Montréal.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Caron, F. (2001). *Effets de la formation fondamentale sur les compétences d'étudiants universitaires dans la résolution de problèmes de mathématiques appliquées*. Thèse de doctorat, Université de Montréal.
- Caron, F. (2004). Niveaux d'explicitation en mathématiques chez des étudiants universitaires. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 279-301.
- De Terssac, G. (1996). Savoirs, compétences et travail. Dans J.M. Barbier (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris : Presses Universitaires de France, 223-247.
- Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. Dans R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer et B. Winkelmann (dirs.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht: Kluwer, 201–211.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Peter Lang.
- González-Martín, A.J. et Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level – the case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 479–486.

- Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.
- Kendal, M., Stacey, K. et Pierce, R. (2002). L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, Dans D. Guin et L. Trouche (dir.) *Calculatrices symboliques – Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 117-149.
- Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Perrenoud, P. (1998). La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. *Revue des sciences de l'éducation*, 24(3), 487-514.
- Picard, G. et Pineau, K. (2001). Symbolic Hand-held Calculators in Teaching Engineering Mathematics. *Proceedings of the 12th Canadian Conference on Engineering Education*. Victoria.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.
- Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 271-288.

ANNEXES

ANNEXE A

	SAVOIR DIRE	SAVOIR ÉVALUER	SAVOIR INTERVENIR
NIVEAU 4 : REFORMULATION <i>Comment pourrais-je représenter un problème aussi complexe ?</i> <i>Que pourrais-je bien faire ?</i>	1. Mettre en relation les objets mathématiques sous-jacents dans un modèle original 2. Combiner des modèles complémentaires 3. Définir des hypothèses	4. Adapter une méthode de résolution	
	5. Généraliser une approche ou un résultat 6. Définir une nouvelle méthode de résolution		
NIVEAU 3 : STRUCTURATION <i>Pourquoi c'est comme ça ?</i> <i>Pourquoi puis-je faire ça ?</i> <i>Est-ce toujours vrai ?</i>	1. Justifier une définition ou une hypothèse 2. Établir et justifier une propriété ou un résultat	3. Choisir une méthode de résolution en fonction de critères (efficacité, convergence, etc.) 4. Utiliser une propriété pour orienter la résolution 5. Repérer les cas limites d'application	
	6. Établir/générer l'ensemble des cas possibles 7. Établir et justifier les conditions d'application d'une méthode/fonction 8. Anticiper / extrapoler des phénomènes		
	1. Traduire / Décrire 2. Identifier des relations entre des variables 3. Identifier un objet mathématique sous-jacent	4. Identifier des cas distincts 5. Définir une démarche de résolution en combinant un ensemble d'objets et de méthodes 6. Vérifier les propriétés d'un résultat	
	7. Interpréter 8. Synthétiser des observations ou résultats 9. Dégager une propriété 10. Valider un résultat par le sens 11. Expliquer le fonctionnement d'une méthode ou fonction 12. Choisir les paramètres appropriés dans l'application d'une méthode/fonction		
NIVEAU 2 : COMPRÉHENSION <i>De quoi s'agit-il au fond ?</i> <i>Comment le dire ?</i> <i>Comment le faire ?</i> <i>Que se passe-t-il ?</i> <i>Cela semble-t-il correct ?</i>	1. Reconnaître un objet ou une propriété 2. Respecter la syntaxe du langage utilisé	3. Associer une propriété à un objet 4. Associer une méthode à un objet/propriété	5. Appliquer une méthode 6. Utiliser une fonction
	7. Effectuer des manipulations algébriques		
SOUS-TÂCHES EFFECTUÉES À L'AIDE DE LA CALCULATRICE			
UTILISATEUR		CALCULATRICE	
1. Juger de la pertinence d'utilisation (ANALYSE) 2. Explorer un objet / phénomène (PLANIFICATION) 3. Expérimenter en modifiant des paramètres (PLANIFICATION) 4. Déléguer une étape de la résolution (EXÉCUTION) 5. Programmer (Analyse, Planification, Exécution) 6. Valider/vérifier le résultat d'un travail algébrique (RETOUR) 7. Valider/vérifier une hypothèse/conjecture (RETOUR) 8. Porter un jugement critique sur le résultat affiché (RETOUR)		0. Effectuer un calcul arithmétique 1. Calculer numériquement 2. Calculer symboliquement 3. Illustrer numériquement 4. Illustrer graphiquement a) Utilisation non nécessaire b) Utilisation pertinente c) Utilisation essentielle	

ANNEXE B

Partie I (50 points)

1. (35 pts) Évaluez les intégrales suivantes. Utilisez la table d'intégrales ci-jointe et indiquez clairement les formules et les changements de variables utilisés. Si une intégrale est impropre, identifiez la raison (ou les raisons) qui la rend impropre.

a) $\int \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)+1} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-1)\sin(2x) dx$

d) $\int \frac{5+3x}{x^2+2x+15} dx$

e) $\int \frac{-3x^2+21x-21}{(x-2)^2(x+1)} dx$

2. (15 pts) a) Trouvez polynôme de Taylor de degré 3 (c'est-à-dire $P_3(x)$) pour

$$f(x) = \frac{3}{1+2x} \text{ autour de } x=0 \text{ en calculant des dérivées.}$$

b) Expliquez comment vous auriez pu obtenir votre réponse à la partie a) à partir de la série pour $\frac{1}{1-x}$.

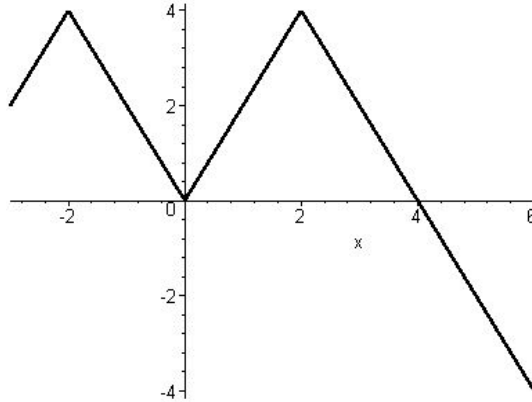
c) Quelle est l'intervalle de convergence de la série obtenue en a) ? Justifiez votre réponse. *Aide : vous pouvez utiliser votre constatation en b) pour déduire l'intervalle de convergence.*

d) Peut-on utiliser la série obtenue en a) pour estimer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{3}{1+2x} dx \text{ ? Si oui, évaluez-la. Sinon, dites pourquoi.}$$

Partie 2 (50 points)

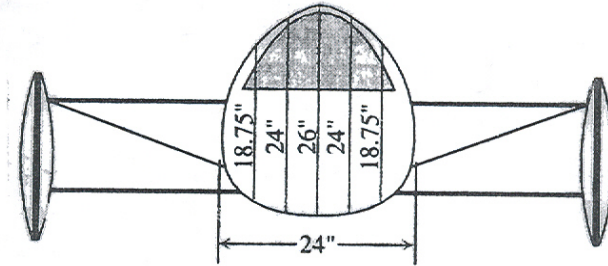
1. (15 pts) Soit $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ où le graphe de $f(t)$ est donné à la figure suivante.



- a) Estimez $G(2)$ et $G(-2)$. *Justifiez.*
- b) Estimez $G'(1)$. *Justifiez.*
- c) La fonction $G(x)$ est croissante sur quel intervalle entre -1 et 6 ?
Justifiez.
- d) La fonction $G(x)$ est concave vers le haut sur quel intervalle entre -1 et 6 ? *Justifiez.*
2. (10 pts) Trouvez la valeur positive k telle que l'aire de la région comprise entre le graphe $y = k \cos(x)$ et celui de $y = kx^2$ est 2 . *Indiquez clairement l'intégrale définie utilisée.*
3. (10 pts) Soit R la région du plan cartésien bornée par les courbes d'équations $y = \cos^2(x)$ et $y = 1$ qui contient le point $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$.
- a) Sur un même référentiel tracez le graphe de chacune de ces fonctions et indiquez ce à quoi correspond la région R .

b) Trouvez le volume du solide obtenu de la révolution de la région R autour de l'axe $y = 0$. Indiquez clairement l'intégrale définie utilisée.

4. (5 pts) La résistance aérodynamique d'un véhicule est, en partie, déterminée à partir de la surface de sa coupe transversale. Afin de minimiser cette résistance, les ingénieurs font en sorte que la section transversale soit la plus petite possible. Utilisez la méthode de Simpson (aussi connue sous le nom de la méthode des paraboles), pour estimer l'aire de la surface transversale du corps du véhicule solaire Solectria® du MIT à partir du diagramme suivant.



5. (10 pts) Des triangles équilatéraux sont successivement retirés d'un triangle équilatéral, voir la suite d'images ci-dessous. La somme des aires des triangles retirés du triangle original forme une série.

a) Trouvez cette série. De quel type de série s'agit-il ? Aide : supposer que A est l'aire du triangle original et exprimer chaque terme de la série en fonction de A .

b) Trouvez la somme de cette série. Aide : vous devriez obtenir une fonction de A .

