

Résolution de problèmes en mathématiques: un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités:

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** Résolution de problèmes en mathématiques
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants
Caroline LAJOIE, Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** De résoudre un problème à problématiser mathématiquement: vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève
Jean-François MAHEUX, Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs
Jean-Philippe BÉLANGER, Lucie DeBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France: les spécificités de la forme QCM
Nathalie SAYAC, Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** La résolution de problèmes à l'école primaire: s'agit-il de «trouver la bonne formule»?
Lalina COULANGE, Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** La résolution de problèmes écrits d'arithmétique: le rôle déterminant des inférences
Marie-Pier GOULET, Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** *Dual-process theory* et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires
Miranda RIOUX, Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels: une exploration du côté de l'enseignement primaire
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire?
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Jeanne KOUDOGBO, Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** Tâches complexes en mathématiques: difficultés des élèves et exploitations collectives en classe
Isabelle DEMONTY, Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

VOLUME XLII : 2 – AUTOMNE 2014

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication

Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction

Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction

Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF

Richard Lacombe

Conception graphique et montage

Claude Baillargeon

Responsable du site Internet

Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit

www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Liminaire

Résolution de problèmes en mathématiques

Viktor FREIMAN

Université de Moncton

Annie SAVARD

Université McGill

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Résolution de problèmes en mathématiques

Viktor FREIMAN

Université de Moncton

Annie SAVARD

Université McGill

Dans le monde de l'éducation, pour toute citoyenne et tout citoyen, la compétence à résoudre des problèmes est souvent citée comme l'une des compétences clés du 21^e siècle. Les jeunes d'aujourd'hui doivent être capables, à la fois, de maîtriser le contenu des matières scolaires et de les mobiliser en situation de résolution de problèmes et de communication, tout en mettant en œuvre une pensée critique. Ces compétences sont appelées «habiletés du 21^e siècle» (*21st century skills*). On y fait également référence lorsqu'on parle en anglais de «*deeper learning*», comme le précise le tout récent rapport des National Academies aux États-Unis (National Academies, traduction de Guay, 2012).

Signe de reconnaissance de l'importance de ces habiletés, les systèmes éducatifs entreprennent les réformes de leurs programmes d'études en les incluant explicitement dans ces programmes sous la forme de compétences transversales, comme au Québec (Programme de formation de l'école québécoise, MELS, 2000), ou de résultats d'apprentissages transdisciplinaires comme au Nouveau-Brunswick, pour le secteur francophone (MEDPENB, 2011). À l'échelle internationale, l'étude PISA (Programme international pour le suivi des acquis des élèves) s'est intéressée à la compétence globale de jeunes de 15 ans lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes de la vie qui sortent du contexte scolaire. À cette fin, elle a évalué leur habileté à cerner les mathématiques dans des problèmes s'inscrivant dans des contextes transdisciplinaires, à repérer les informations et les contraintes pertinentes, à représenter

des processus de résolution alternatifs, à évaluer la pertinence des stratégies pour résoudre des problèmes, à vérifier des solutions et à communiquer les résultats (OCDE, 2003). Toujours dans le cadre du PISA, la résolution de problèmes se situe parmi les composantes d'une culture mathématique qui englobe, entre autres, les processus définis en termes de compétences mathématiques générales, telles que le maniement du langage mathématique, la capacité de modélisation et de résolution de problèmes (<http://www.pisa.gc.ca/fra/culture-math.shtml>).

Les problèmes sont présents dans les programmes d'études sous différentes formes, tantôt comme objet d'apprentissage, tantôt comme outil d'apprentissage en mathématiques, y occupant même une place centrale (Charnay, 1988; MEDPENB, 2011). Poirier (2001) avance que, s'il n'y a pas de problèmes, il n'y a pas d'apprentissages possibles. Toutefois, la résolution de problèmes étant une activité complexe qui demande la mobilisation de plusieurs compétences, dont certaines d'ordre cognitif, social et affectif, elle présente des difficultés pour un grand nombre d'élèves qui se trouvent parfois à court de stratégies ou qui appliquent ce que Focant (2003) appelle les stratégies d'évitement (« *Oh! C'est une résolution de problèmes. Moi je suis nulle, ça ne sert à rien* », p. 55), avant même de lire l'énoncé. La question de la nature de ces compétences, de leur rôle et de leur développement chez l'élève devient ainsi actuelle.

C'est pourquoi les questions sur la façon d'apprendre à résoudre des problèmes, tout comme sur la façon d'apprendre les mathématiques par la résolution de problèmes, nous semblent toujours d'actualité. En témoigne d'ailleurs l'intérêt que ces questions suscitent chez différents groupes de chercheurs et de praticiens depuis quelques années. Par exemple, le Forum canadien sur l'enseignement de mathématiques en 2009 a mis en place trois groupes de travail devant se pencher sur autant de thématiques: la résolution de problèmes au primaire et au secondaire, ainsi que l'évaluation de la résolution de problèmes. Entre autres, le groupe du primaire animé par Savard (2009) a mis en évidence les problématiques associées à l'enseignement (compétences didactiques et mathématiques des enseignants et évaluation différenciée), l'apprentissage (capacité de l'élève à identifier les relations entre les données du problème et à communiquer sa solution et l'apport du contexte (par exemple, le contexte historique) ou le besoin d'une plus grande variété de types de problèmes (incluant les tâches complexes, non routinières, ne se limitant pas aux problèmes d'application).

Les débats sur le rôle et la nature de problèmes et des apprentissages qui y sont associés sont tout aussi intenses au sein du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM). En 2010, on y discutait de l'apprentissage dans et à travers les contextes (Freiman, Roy et Theis, 2011). En 2012, le colloque entier avait la résolution de problèmes comme thème de fond (GDM, 2012). Le colloque international de l'Espace mathématique francophone a permis de faire une étude comparée de l'enseignement de mathématiques dans différents pays francophones en présentant un projet spécial dans lequel les chercheurs ont mis en évidence l'évolution de débats sur la résolution de problèmes en France (Houdement, 2012) et en Belgique (Demonty et Fagnant, 2012). Rappelons également une analyse des résultats des

élèves canadiens dans les items du PISA effectuée par DeBlois, Freiman et Rousseau (2007). Les auteurs ont mis en évidence l'existence d'une corrélation forte entre la littératie et la numératie chez les élèves francophones vivant en milieu francophone minoritaire. En effet, en ce qui concerne la littératie égale, les francophones réussissent mieux en numératie que les anglophones. La langue semble donc être un facteur important en résolution de problèmes mathématiques.

En revenant sur les problématiques qui touchent plus spécifiquement la résolution de problèmes comme activité scolaire, ce numéro spécial cherche à répondre, entre autres, aux questions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de ou à l'aide de la résolution de problèmes, en lien avec les quatre fonctions citées ci-dessus, notamment en ce qui a trait au rôle des contextes : ceux qui habillent des problèmes, ceux qui mettent en lumière un problème authentique et ceux qui problématisent une situation. Les rôles des problèmes dans l'apprentissage des élèves sont multiples. Valentin, Charnay, Douaire et Guillaume (1993) mentionnent le besoin de résoudre de problèmes pour aider l'élève à donner du sens à ses connaissances mathématiques et à mieux comprendre les concepts mathématiques. Les raisonnements sollicités en cours de construction des représentations lors du décodage de l'énoncé du problème, la modélisation et les procédures employées par les élèves ainsi que leur mobilisation qui se poursuit lors du retour sur le problème ou le phénomène à l'étude sont des éléments qui attirent notre attention (Savard, 2008). La compréhension de l'aspect structurel du problème entre ainsi en jeu (Radford, 1996).

La démarche de résolution de problèmes et les stratégies de résolution analysées par Pluvinaud (1992), qui se réfère au modèle de Polya (1965), méritent d'être analysées en profondeur, entre autres dans des contextes de problèmes plus « fermés », parfois liés aux énoncés écrits (« *word problems* », Vergnaud (1982), ou dans ceux qui sont « ouverts » (les problèmes pour « chercher »; Arsac, Germain et Mante, 1988). À cet effet, les pratiques enseignantes qui favorisent le développement du raisonnement en situation de résolution de problèmes (dont la façon de poser un problème et l'utilisation de stratégies de résolution), celui des qualités personnelles des élèves (persévérance, curiosité, autorégulation, métacognition, entre autres), de même que le rôle du contrat didactique, sont des éléments à considérer. Ajoutons la pertinence d'interroger les besoins en développement professionnel (formation initiale et continue) des enseignants.

Finalement, la question des ressources disponibles pour développer ces habiletés en résolution de problèmes chez l'élève doit être posée. Le format textuel des problèmes traditionnellement utilisé pour soumettre un problème à l'élève (énoncé dans un manuel scolaire) peut-il être enrichi par des moyens modernes, avec le support virtuel permettant d'interagir avec l'élève (Freiman, Vézina et Langlais, 2005)? Quel autre format que celui de la réponse écrite (détaillée ou même à choix multiple) fournie par l'élève peut être utilisé pour valider les apprentissages? Les ressources en ligne permettant d'organiser les discussions autour de la résolution de problèmes (blogues, wikis, forums de discussion, logiciels dynamiques) peuvent également être exploitées.

Nous vous invitons à prendre connaissance des onze textes faisant partie de ce numéro, écrits par des chercheurs de la France, de la Suisse, du Québec et du Nouveau-Brunswick et que nous avons répartis en trois sections. La première section met en évidence la complexité de la résolution de problèmes comme activité mathématique sous différents angles historiques, épistémologiques et socioculturels (Lajoie et Bednarz ainsi que Maheux et Proulx). La deuxième section regroupe les textes qui portent, avant tout, sur l'activité d'élève comme résolveur de problèmes en faisant ressortir la créativité dans des productions d'élèves qui présentent une démarche construite (Bélanger, DeBlois et Freiman). Sayac et Grapin analysent, à leur tour, les spécificités des questions à choix multiples, dans un contexte d'une évaluation externe. La démarche de résolution de problèmes intégrant la modélisation est examinée par Coulangue et Reydy. Un rôle important de développement de compétences en lecture pour le rendement des élèves en résolution de problèmes en mathématiques est encore une fois démontré par Goulet et Voyer, qui avancent la compréhension aux questions d'inférence comme facteur clé de réussite. Enfin, les résultats obtenus par Rioux et Couture nous apprennent, entre autres, le besoin d'un traitement didactique nuancé de situations de résolutions de problèmes lorsque l'«apparence d'une relation de proportionnalité» amène l'élève à donner une réponse intuitive erronée, alors que l'adoption d'une attitude de doute serait bénéfique pour pouvoir y porter un regard plus raisonné. Dans la troisième section, les auteurs s'intéressent aux actions de l'enseignant au moment de la résolution de problèmes par les élèves, de même qu'aux tâches proposées. Alors que Savard et Polotskaia nous présentent les actions effectuées lors de l'analyse et de la modélisation des problèmes par des enseignantes de première et de deuxième année, Theis et ses collaborateurs étudient un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire, dispositif élaboré par une enseignante de troisième-quatrième année du primaire. Le texte de Demonty et Fagnant invite ensuite le lecteur à réfléchir sur l'exploitation de tâches complexes par des enseignants de sixième année du primaire. Dans le dernier article, Gauthier propose des scénarios d'enseignement-apprentissage de l'algèbre, destinés à des élèves de douzième année et qui nécessitent une investigation à l'aide d'un logiciel dynamique.

Nous espérons que les articles présentés dans ce numéro d'*Éducation et francophonie* apporteront des réponses aux questions soulevées en ce qui a trait à la résolution de problèmes comme activité scolaire, tout en signalant des points à considérer pour les recherches futures.

Références bibliographiques

- ARSAC, G., GERMAIN, G. et MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon : IREM de Lyon.
- CHARNAY, R. (1988). Apprendre (par) la résolution de problèmes. Le Grand N. Récupéré de http://www.irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/42/42n3.pdf
- DEBLOIS, L. FREIMAN, V. et ROUSSEAU, M. (2007). *Les résultats des élèves aux tests internationaux et leur possible influence sur les thèmes de recherche*. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (p. 135-146). Récupéré de <http://turing.scedu.umontreal.ca/gdm/documents/ActesGDM2007.pdf>
- DEMONTY, I. et FAGNANT, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle*. Actes du colloque EMF 2012 (SPE3, p. 1752-1760). Récupéré de <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- FOCANT, J. (2003). Impact des capacités d'autorégulation en résolution de problèmes chez les enfants de 10 ans. *Éducation et francophonie*, 31(2). Récupéré de <http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/31-2/02-focant.html>
- FREIMAN, V., ROY, A. et THEIS, L. (dir.) (2011). *L'enseignement des mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier?* Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec, Moncton, juin, 2010. Récupéré de <https://sites.google.com/site/gdidmath/actes>
- FREIMAN, V., VÉZINA, N. et LANGLAIS, M. (2005). *Le Chantier d'Apprentissages Mathématiques Interactifs (CAMI) accompagne la réforme au Nouveau-Brunswick. Mathématique virtuelle à l'attention du primaire*. Récupéré de http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip/rubrique.php3?id_rubrique=18
- GROUPE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES DU QUÉBEC (GDM) (2012). *La recherche sur la résolution de problèmes en mathématiques : au-delà d'une compétence, au-delà des constats*. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec, Université Laval, mai 2012. Récupéré de <https://www.dropbox.com/s/xcvmy42wy0j9zhz/2012%20GDM%20Actes.pdf>
- HOUEMENT, C. (2012). La résolution de problèmes en France (6 à 12 ans). Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le 21^e siècle*. Actes du colloque EMF 2012 (SPE3, p. 1795-1805). Récupéré de <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DU DÉVELOPPEMENT DE LA PETITE ENFANCE (MEDPENB) (2011). *Programme d'études. Mathématiques au primaire (maternelle)*. Moncton : Gouvernement du Nouveau-Brunswick.

- LAJOIE, C. et BEDNARZ, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec. Un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(2), 178-213.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2006). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec : Gouvernement du Québec.
- NATIONAL ACADEMIES [trad. K. Guay] (2012). *Développer les habiletés du 21^e siècle à travers les matières de base*. Titre original: *Transferable Knowledge and Skills Key to Success in Education and Work; Report Calls for Efforts to Incorporate 'Deeper Learning' Into Curriculum*. Récupéré de <http://rire.ctreq.qc.ca/2012/07/developper-les-habiletés-du-21e-siècle-a-travers-les-matières-de-base/>
- OCED (2003). *Résoudre des problèmes, un atout pour réussir. Premières évaluations des compétences transdisciplinaires issues de PISA 2003*. Récupéré de <http://www.oecd.org/edu/preschoolandschool/programme-for-international-student-assessment-pisa/34473687.pdf>
- PLUVINAGE, F. (1992). Didactique de la résolution de problèmes. *Petit x*, 32, 5-24.
- POIRIER, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques*. Montréal : ERPI.
- RADFORD, L. (1996). La résolution de problèmes : comprendre, puis résoudre. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec (AMQ)*, 3: 19-30.
- SAVARD, A. (2008). *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire. Vers une prise de décision* (thèse de doctorat non publiée, Université Laval, Québec).
- SAVARD, A. (2009). *Problem Solving in Elementary Mathematics*. Rapport du groupe de travail au Forum canadien sur l'enseignement de mathématiques, Vancouver, avril-mai 2009. Récupéré de <http://cms.math.ca/Reunions/FCM2009/reports/wg10-report.pdf>
- VALENTIN, D., CHARNAY, R., DOUAIRE, J. et GUILLAUME, J.-C. (1993). Quels problèmes pour quels apprentissages. Quelques exemples en mathématiques. *SPIRALE – Revue de recherches en éducation*, 10-11, 109-121. Récupéré de http://spirale-edu-revue.fr/IMG/pdf/6_Valentin.pdf
- VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 32, 31-41.

La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants

Caroline LAJOIE

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Nadine BEDNARZ

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants

Caroline LAJOIE

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Nadine BEDNARZ

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

RÉSUMÉ

La résolution de problèmes est un enjeu clé de l'enseignement des mathématiques à travers le monde et elle occupe une place importante dans les curricula. Pourtant, on a accordé peu d'attention aux défis que pose la résolution de problèmes dans l'enseignement. Ce questionnaire nous a conduites à nous intéresser plus spécifiquement, dans le cas du Québec, au cadre référentiel fourni à l'enseignant pour aborder la résolution de problèmes avec les élèves. Que sait-on des conseils donnés aux enseignants pour aborder cette résolution en classe? Quelle cohérence entre ces conseils donnés aux enseignants et les rôles assignés à la résolution de problèmes dans l'enseignement? L'analyse cible plus spécifiquement les années 2000 au regard de ce qui a été déjà dégagé des périodes précédentes.

ABSTRACT

Solving math problems in Québec – changing roles assigned by programs and advice given to teachers

Caroline LAJOIE
University of Quebec in Montreal, Quebec, Canada

Nadine BEDNARZ
University of Quebec in Montreal, Quebec, Canada

Although problem solving is a key issue in mathematics teaching throughout the world and it holds an important place in the curriculum, little attention has been given to the challenges of problem solving in the context of teaching. This question led us to look more closely, in the case of Quebec, at the frame of reference provided to the teacher for approaching problem solving with students – what do we know about the advice given to teachers for dealing with this challenge in class? What consistency is there between the advice given to teachers and the roles assigned to problem solving? The analysis more specifically targets the 2000s in relation to what was already brought out in previous years.

RESUMEN

La resolución de problemas en matemáticas en Quebec: evolución de los roles asignados por los programas y los consejos dados a los maestros

Caroline LAJOIE
Universidad de Quebec en Montreal, Quebec, Canadá

Nadine BEDNARZ
Universidad de Quebec en Montreal, Quebec, Canadá

Si la resolución de problemas es un reto clave en la enseñanza de las matemáticas en todo el mundo y ocupa un lugar importante en los currículos, poca atención se ha dado a los retos que confronta la resolución de problemas en la enseñanza. Esta cuestión nos llevó a interesarnos más específicamente, en el caso de Quebec, al cuadro referencial que se le ofrece al maestro para abordar la resolución de problemas con sus alumnos: ¿Qué sabemos de los consejos que se dan a los maestros para abordar la resolución en clase? ¿Qué coherencia hay entre los consejos dados a los maestros y los roles asignados en la resolución de problemas? El análisis se orienta más específicamente hacia los años 2000 tomando en consideración lo que se conoce de los periodos precedentes.

Introduction

Sur le plan international, plusieurs études se sont intéressées au développement de la résolution de problèmes dans les curricula (voir notamment Coppé et Houdement, 2009, pour la France; Artigue et Houdement, 2007, pour la France aussi; Santos-Trigo, 2007, pour le Mexique; Cai et Nie, 2007, pour la Chine; D'Ambrosio, 2007, pour le Brésil; Schoenfeld, 2007, pour les États-Unis; Hino, 2007, pour le Japon; ou encore Burkhardt et Bell, 2007, pour la Grande-Bretagne). Ces études ont contribué notamment à éclairer différentes composantes de la notion de problème et à dégager les multiples fonctions que joue la résolution de problèmes dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques : appliquer des connaissances, permettre la construction de connaissances nouvelles, solliciter une activité de recherche mathématique, permettre l'utilisation partagée de plusieurs connaissances dans des situations complexes, travailler la modélisation, développer des heuristiques générales, etc. Ces travaux confirment que les problèmes ont constamment occupé une place dans les programmes et dans les instructions officielles. Ils permettent de comprendre comment la nature et les rôles dévolus à ces problèmes ont changé au fil du temps, en puisant à des influences multiples (Lajoie et Bednarz, 2012; Artigue et Houdement, 2007; Burkhardt et Bell, 2007; Schoenfeld, 2007). De l'énoncé des orientations données aux problèmes et de leur rôle dans l'enseignement, explicité dans ces travaux, à la pratique de cette résolution de problèmes, pensée dans un cadre d'enseignement, le saut est toutefois grand. Comme le font remarquer Burkhardt et Bell (2007), peu d'attention semble avoir été accordée aux défis que ces approches peuvent poser pour les enseignants : « *Failures in introducing novel elements into the implemented curriculum largely arise from the challenge being underestimated* » (p. 403). Il ne suffit pas en effet de présenter des problèmes, d'expliciter différents critères de choix de ces problèmes, de préciser leurs rôles pour que les enseignants mettent en œuvre les fonctions dévolues à ces problèmes ou encore les processus complexes de résolution décrits dans ces programmes. Quel éclairage est fourni aux enseignants pour aborder la résolution de problèmes avec les élèves? Un tel éclairage est-il présent dans les documents institutionnels?

Cette préoccupation à l'égard des enseignants et de la résolution de problèmes nous a amenées à nous intéresser de plus près, pour le Québec, au cadre institutionnel pouvant guider leur pratique, leur manière d'approcher la résolution de problèmes en classe.

Peu de travaux ayant analysé les curricula se sont en effet intéressés à cette dimension¹. Or, différentes recherches menées en collaboration avec des professionnels montrent l'importance de ce cadre institutionnel, qui agit à la fois comme contrainte mais aussi comme levier pour leur pratique. Comme nous le montrent par exemple les études de Lyet et Loreau (sous presse) et Roditi (2013), ce cadre est aussi partie prenante d'un espace d'assurance et d'ajustements de cette pratique, avec une

1. Cette expérience en classe est davantage au cœur des travaux menés au Japon (Hino, 2007) ou en Chine (Cai et Nie, 2007). Nous y reviendrons dans la discussion.

dimension structurante de celle-ci. Il nous apparaît essentiel de regarder cette dimension institutionnelle pour mieux comprendre les défis que posera éventuellement la résolution de problèmes pour ces enseignants.

Cette étude vise ainsi à cerner ce cadre institutionnel à travers, d'une part, les conseils donnés aux enseignants qui sont susceptibles de guider leur manière d'aborder la résolution de problèmes en classe, et d'autre part, les liens, s'ils existent, entre ces conseils et les rôles assignés aux problèmes. En nous attardant à ces conseils au regard des intentions visées par la résolution de problèmes, nous mettons en évidence un élément clé du cadre référentiel fourni à l'enseignant pour approcher cette résolution.

Quelques repères méthodologiques

Le Québec est pris ici comme un « beau cas », au sens d'un « observatoire² » privilégié dans lequel un certain objet peut être étudié (Hamel, 1997). La résolution de problèmes a en effet de tout temps été un élément important de la réalité de l'enseignement des mathématiques au Québec (Lajoie et Bednarz, 2012, sous presse). Elle a été un sujet constant de préoccupations de la communauté professionnelle en enseignement des mathématiques, plus particulièrement au primaire. Le *Fascicule K* (MEQ, 1988), un guide sur la résolution de problèmes qui s'adresse aux enseignants du primaire, témoigne déjà de l'importance du travail en ce domaine, mais on peut penser également aux rubriques régulières dont elle a fait l'objet dans la revue *Instantanés mathématiques*, s'adressant aussi aux enseignants du primaire³. Témoin aussi de cette effervescence au sujet de la résolution de problèmes, la mise sur pied par des membres de l'APAME (Association pour l'avancement des mathématiques à l'élémentaire) du concours *Mathématlon* autour duquel de nombreux problèmes seront expérimentés dans les écoles. Elle a été, par ailleurs, un sujet important de réflexions de la communauté didactique, comme en témoignent plusieurs publications sur ce sujet (voir notamment Lukenbein, 1984-1985; Lemoyne, Giroux et Biron, 1990; Lemoyne et Tremblay, 1986; Bednarz, 1996; Pallascio, 2005; Voyer, 2006; Mary et Theis, 2007). En ce sens, le Québec constitue un observatoire privilégié pour comprendre comment un certain objet lié à l'enseignement des mathématiques, un cadre référentiel fourni aux enseignants pour aborder la résolution de problèmes, s'est développé sur une longue période.

Signalons d'emblée que notre étude ne se situe pas sur le plan de la pratique effective en classe de la résolution de problèmes, mais bien sur le plan du cadre institutionnel pouvant éclairer l'action des enseignants dans ce domaine. Un ensemble

2. Le cas peut être défini comme un observatoire propre à cerner un objet (Hamel, 1997, p. 91). Ce n'est pas un lieu physique ou un contexte, mais bien une entité définie, un système délimité et un point d'observation pertinent pour notre objet d'étude.

3. Voir notamment Grignon, 1983; Landry, 1984-1985; Laforest, 1984-1985. Voir également « Une invitation au problème ouvert », une rubrique qui s'échelonne sur plusieurs numéros de 1996 et 1997; « Ouvertures pour un problème fermé », rubrique parue en 1998 (vol. 34, n° 2); « À partir d'un problème » une rubrique qui s'échelonne durant les années 1998 et 1999; et plus récemment « Les situations-problèmes : au cœur de la réforme en mathématiques » (Corbeil, Pelletier et Pallascio, 2001).

de documents, produits au Québec et pour le Québec, permet de dégager ce cadre institutionnel:

- Les différents programmes d'études élaborés au Québec, qui permettent de situer les orientations données globalement à l'enseignement des mathématiques à l'école, et en particulier à la résolution de problèmes⁴.
- Des documents pédagogiques s'adressant aux enseignants, dans lesquels sont en quelque sorte explicitées les idées sous-jacentes aux programmes à l'égard de cette résolution⁵.
- Une série d'articles parus dans des revues pédagogiques, qui constituent une autre source importante de données pour capter les réflexions à l'égard de cette résolution⁶.

Cinq périodes, qui constituent des jalons importants de l'évolution des programmes, ont été considérées: le Québec d'avant la Seconde Guerre mondiale, celui de l'après-guerre, de l'après-Révolution tranquille (1960-1970), des années 1980-1990 et de la période actuelle (de 2000 à aujourd'hui). Nous nous intéressons plus particulièrement, dans cet article, à la période actuelle pour bien mettre en évidence les éléments nouveaux qui ressortent de ce cadre référentiel, en comparaison des études déjà menées sur les autres périodes (Lajoie et Bednarz, 2012). Cette période récente marque en effet une rupture avec ce qui précède à travers l'introduction de la notion de situation-problème (SP) et du critère de complexité qui la sous-tend (Lajoie et Bednarz, sous presse).

Avant d'entrer dans cette analyse, nous reviendrons brièvement sur les rôles dévolus à la résolution de problèmes (de situations-problèmes) dans l'enseignement, de manière à dégager les aspects les plus marquants de cette évolution. Celle-ci nous permettra de revenir par la suite sur la cohérence entre ces rôles et les conseils donnés aux enseignants (ces rôles agissant en quelque sorte comme fondement en arrière-plan de leur exploitation).

4. Dans les textes des programmes d'études, il est important de spécifier qu'aucune rubrique spécifique n'est consacrée aux rôles associés à la résolution de problèmes ni aux conseils donnés aux enseignants. Les programmes des années 2000 (MEQ, 2001, MELS, 2003, 2005), sur lesquels se centre principalement cet article, avec les documents associés, sont par exemple rédigés de la manière suivante: présentation générale de la discipline, contribution de la mathématique à l'apprentissage de l'élève, relations entre le programme de mathématiques et les autres éléments du programme de formation (domaines généraux de formation, compétences transversales, autres disciplines), contexte pédagogique, présentation de chacune des compétences, puis du contenu de formation (arithmétique, algèbre, géométrie, mesure, statistiques et probabilités). La présentation plus spécifique de chacune des compétences est structurée de la façon suivante: sens de la compétence, composantes, critères d'évaluation et attentes de fin de cycle. La section «contenu de formation» reprend le contenu spécifique, quelques éléments de méthode et des repères culturels. Ainsi, à des fins d'analyse, nous avons dû parcourir l'ensemble des documents, et ce, sous toutes les thématiques, de manière à identifier ce qui relevait des fonctions associées à la résolution de situations-problèmes ou des conseils donnés aux enseignants pour approcher cette résolution.

5. Voir Prototypes d'épreuves, MELS (2008).

6. Voir Corbeil *et al.* (2001) et Pallascio (2005).

Un bref retour sur les rôles assignés à la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques

Notre analyse des documents institutionnels fait ressortir différentes fonctions assignées à la résolution de problèmes au cours du XX^e siècle (Lajoie et Bednarz, 2012). Parmi ces fonctions (voir le tableau 1), deux ont été constamment présentes : une fonction d'application, traditionnellement réservée aux problèmes, mais aussi, même si cette dernière prend une place de moindre importance à certaines périodes, une fonction culturelle, de formation. Il y a là une première dualité centrale, caractéristique de ce que soulignait Gispert (2002) dans sa mise en perspective historique de l'enseignement des mathématiques en France.

Au-delà de ce premier constat, l'analyse plus fine des significations associées à chacune de ces fonctions fait apparaître des évolutions : de l'idée d'application vue comme une mise en pratique des acquis à celle de réinvestissement des concepts⁷; des problèmes forçant l'analyse et le raisonnement des notions aux problèmes visant le développement de la pensée mathématique et d'habiletés générales (généraliser, abstraire, etc.).

Par ailleurs, de nouvelles fonctions font leur apparition dès les années 1970 (voir le tableau 1), marquant une rupture avec ce qui précède. De problèmes avant tout attachés à une fonction d'application des connaissances, dans la première moitié du XX^e siècle, et de ce fait souvent placés en fin de séquence d'enseignement, on passe, dès les années 1970, au recours à des problèmes dont l'intention est d'introduire, d'explorer de nouveaux concepts et propriétés mathématiques, un rôle qui va s'affirmer encore davantage dans les années 1980-1990. Désormais placés en début de séquence d'enseignement, ou au cours de celle-ci, les problèmes sont à la source de la construction de connaissances nouvelles. On observe enfin, au cours de cette évolution, un glissement plus contemporain du rôle des problèmes comme moyen d'étude, comme modalité pédagogique appuyant le travail en classe, à celui qu'ils remplissent comme objet d'étude. Ce nouvel enjeu s'accompagne d'un regard méta sur cette résolution. On cherche à développer par (dans) la résolution de problèmes des stratégies générales de résolution et des attitudes positives.

Ces différentes fonctions sont reprises avec l'introduction de la notion de situation-problème (voir le tableau 1). Ce qui marque toutefois ce début du XXI^e siècle, c'est l'accent mis non plus uniquement sur les connaissances, mais aussi sur les processus mathématiques. Une telle présence peut en effet être repérée dans chacune des fonctions remplies par la résolution de situations-problèmes.

- Dans la fonction d'application : « le recours régulier à la résolution de situations-problèmes en tant que modalité pédagogique permet à l'élève [...] d'élargir, d'approfondir et d'intégrer des concepts et des processus mathématiques » (MELS, 2003, p. 237).

7. Ainsi, si l'on parle encore d'application de connaissances dans les années 1980-1990, on le fait en des termes très différents, et le sens que prend cette application est dès lors autre. L'intention n'est plus seulement celle d'une utilisation de connaissances introduites au préalable, d'une mise en pratique de celles-ci. Elle est beaucoup plus ambitieuse : le problème est une occasion de revoir ces connaissances, d'en élargir le sens, de les approfondir, voire de faire des liens, d'intégrer des concepts.

- Dans la fonction d'amorce à l'apprentissage: la résolution de situations-problèmes « permet à l'élève d'explorer, d'inventer, de construire [...] des concepts et des processus mathématiques » (MELS, 2003, p. 237).
- Dans sa fonction de formation: « [...] sur un plan plus abstrait, elle [la résolution de SP] s'avère aussi un outil intellectuel puissant au service du raisonnement et de l'intuition créatrice » (MEQ, 2001, p. 126).

C'est ce même processus qui est visé lorsqu'on aborde les SP comme objet d'apprentissage: « En tant que processus, la résolution de situations-problèmes constitue un objet d'apprentissage en soi » (MEQ, 2001, p. 124; MELS, 2003, p. 231; MELS, 2005, p. 1).

Tableau 1. **Évolution de 1900 à nos jours des rôles associés aux problèmes (SP)**

		1904-1945	1946-1959	1960-1970	1980-1990	2000...
Différents rôles associés à la résolution de problèmes / SP / différentes significations associées	Fonction d'application	Une fonction d'application fortement liée au monde de la pratique / une intention de mise en pratique des connaissances	Idem	Une intention d'utilisation des connaissances et des techniques apprises	Une intention de réinvestissement des connaissances	Une intention de réinvestissement des concepts et des <i>processus mathématiques</i>
	Fonction de formation	Une occasion de raisonner les notions	Idem	Une occasion de développer la pensée mathématique	Une occasion de développer des habiletés générales (estimer, généraliser, abstraire, etc.)	Une occasion de développer des habiletés intellectuelles faisant appel au raisonnement et à l'intuition créatrice
	Fonction de construction de connaissances			Un problème comme amorce à l'apprentissage de concepts, de propriétés	Un problème à la source de la construction de connaissances nouvelles	Une SP qui permet d'explorer, d'inventer, de construire des concepts et des <i>processus mathématiques</i>
	La résolution de problèmes comme objet d'apprentissage				La résolution comme objet d'étude et habileté de base à développer (s'accompagne d'un regard méta sur cette résolution)	Le processus de résolution de SP comme objet d'apprentissage (s'accompagne d'un regard méta sur ce processus)
	La résolution de problèmes comme modalité pédagogique				La résolution de problèmes vue comme une approche pédagogique, un moyen à privilégier dans l'enseignement des maths	La résolution de SP, en tant que modalité pédagogique, supporte la grande majorité des démarches d'apprentissage en maths
	Une fonction plus générale			Situation servant d'amorce à l'apprentissage		<i>La résolution de SP pour développer les autres compétences</i>

Un deuxième élément marque cette entrée dans le XXI^e siècle, caractérisé par l'apparition de rôles plus *généraux*, en apparence plus ambitieux aussi par leur ampleur: exercer et développer les deux autres compétences du programme, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique (MELS, 2003, p. 240); et favoriser le développement de l'ensemble des compétences transversales, plus particulièrement en sollicitant la pensée créatrice de l'élève, en l'incitant à traiter de l'information, à rechercher l'efficacité dans son travail, souvent collectif, et à développer des façons appropriées de communiquer (MEQ, 2001, p. 126).

Ce rôle plus général sera quelque peu précisé dans le programme du second cycle du secondaire, où l'on fera ressortir le lien spécifique avec des compétences d'ordre intellectuel ou d'ordre méthodologique, telles notamment: la compétence transversale à résoudre des problèmes qui «partage [avec la résolution de situations-problèmes en mathématiques] plusieurs éléments de stratégies et cerne de façon analogue le questionnement et la réflexion» (MELS, 2005, p. 8); la pensée créatrice, lorsqu'en «cherchant à résoudre une situation-problème, [l'élève] envisage plusieurs solutions, explore divers modèles, pistes et stratégies, laisse émerger ses intuitions, accepte le risque et l'inconnu, joue avec les idées, met à l'essai différentes façons de faire, explore de nouvelles stratégies et exprime ses idées sous de nouvelles formes» (MELS, 2005, p. 8); ou encore l'acquisition de méthodes de travail efficaces, l'élève confronté à une situation-problème devant «structurer sa pensée et organiser sa démarche, [et au moment] de présenter sa démarche et d'explicitier son raisonnement, [devant] recourir à des registres de représentation sémiotique appropriés et respecter les règles de rédaction des modèles de présentation retenus» (p. 8).

Comment ces éléments nouveaux, caractérisant les années 2000, vont-ils se traduire dans le cadre référentiel institutionnel, à travers les conseils donnés aux enseignants pour approcher la résolution?

Que conseille-t-on aux enseignants pour aborder la résolution de situations-problèmes dans l'enseignement? Quelles continuités et quels changements par rapport aux périodes précédentes?

À ce stade-ci, deux remarques principales s'imposent. Tout d'abord, notre analyse des différents documents officiels en ce début de XXI^e siècle (MEQ, 2001; MELS, 2003, 2005) met en évidence que les conseils aux enseignants au regard de la résolution de SP sont souvent formulés de manière indirecte. Dans les programmes du primaire et du début du secondaire (MEQ, 2001; MELS, 2003), par exemple, ces conseils sont difficiles à repérer, puisqu'ils ne sont pas formulés explicitement. Qui plus est, ils ne sont pas regroupés dans une même section. Ensuite, si on trouve dans le programme du 2^e cycle du secondaire beaucoup de conseils explicites à l'enseignant (presque tous condensés dans la section «contexte pédagogique»), ceux-ci ne se limitent pas à la résolution de SP. En effet, les conseils qu'on y trouve concernent

parfois la résolution de *situations* d'une manière générale (celles-ci englobant les situations d'application, les situations-problèmes et les autres activités), parfois aussi l'enseignement des mathématiques d'une manière encore plus générale. Nous les avons tout de même pris en compte pour notre analyse.

Des conseils sur la complexité des SP, en rupture avec les périodes précédentes mais en cohérence avec le nouvel accent mis sur les processus mathématiques

Parmi les caractéristiques venant baliser le choix des SP par l'enseignant, celle qui distingue probablement le plus la période s'amorçant avec le XXI^e siècle des périodes précédentes renvoie à une idée nouvelle de complexité (voir la section *Repères méthodologiques*). Nous avons montré l'importance que revêt ce critère de complexité pour le choix des SP, ce qu'il recouvre et la rupture qu'il présente par rapport à ce qui se faisait jusqu'alors (Lajoie et Bednarz, sous presse). Il s'agit donc là d'un enjeu central auquel sont confrontés les enseignants. Or cette nouvelle caractéristique s'accompagne uniquement de deux conseils distincts pour l'enseignant.

Tout d'abord, l'enseignant est encouragé à privilégier des situations complexes, c'est-à-dire des situations qui mobilisent l'ensemble des composantes d'une compétence, représentent un défi intellectuel, suscitent un conflit cognitif, favorisent la prise de risques et se prêtent à plus d'une démarche (MELS, 2005, p. 14). Parmi les paramètres à considérer dans le choix (ou la construction) des SP, plusieurs caractérisent en fait la complexité des situations considérées : l'étendue des concepts et processus à mobiliser, le degré de familiarité/degré d'autonomie exigé de l'élève, le nombre de contraintes, les types de registres de représentation sollicités et les passages entre ces registres, le nombre d'étapes que comporte la solution, le niveau d'abstraction exigé pour s'approprier la situation, la nature des liens intra-mathématiques sollicités (concepts et processus, liens entre plusieurs champs des mathématiques) ou interdisciplinaires, etc.

Ensuite, des allers-retours sont suggérés entre des situations complexes et des situations simples en cours de processus d'apprentissage.

L'enseignant doit s'assurer que l'élève progresse dans le développement de ses compétences. Plusieurs paramètres balisant cette progression interviennent au regard de la complexité des situations d'apprentissage et d'évaluation [...] Ces paramètres n'évoluent pas nécessairement de façon linéaire. Des allers-retours sont donc souhaitables entre le simple et le complexe, entre le concret et l'abstrait [en référence aux objets ou aux contextes] ou entre le quantitatif et le qualitatif [pas de détails dans le programme sur ce à quoi ces termes réfèrent] (MELS, 2005, p. 15).

Ces deux conseils détonnent par rapport à d'autres donnés au cours de la première moitié du XX^e siècle. En effet, cette idée de complexité des situations proposées prend la place d'un souci d'adaptation à l'enfant et celle d'alternance entre des situations simples et des situations complexes remplace une idée de gradation des problèmes du plus facile au plus difficile (pour de nombreux extraits de documents

tirés de la première moitié du XX^e siècle, voir Lajoie et Bednarz, 2012). Ce conseil de privilégier des situations complexes est toutefois à rapprocher de l'accent mis non plus uniquement sur les connaissances, comme c'était le cas précédemment, mais aussi sur les processus mathématiques ainsi que sur le développement des autres compétences disciplinaires (raisonner, communiquer à l'aide du langage mathématique) (voir la première section). Il est donc cohérent avec les fonctions nouvelles dévolues aux SP faisant leur apparition en ce début de XXI^e siècle.

Des conseils liés au choix de contextes qui reflètent les nouveaux rôles plus généraux assignés à la résolution de SP

Parmi les nouveaux critères pouvant guider le choix des SP par l'enseignant, on trouve dans les programmes des années 2000 des critères qui concernent un recours à des contextes inspirés des autres disciplines (MELS, 2003, p. 237; MELS, 2005, p. 9 et 10), des domaines généraux de formation (environnement, médias, entrepreneuriat, etc.), du contexte historique dans lequel a évolué la mathématique (MELS, 2003, p. 237), ou encore des contextes liés au marché du travail. Dans ce dernier cas, par exemple, on conseille explicitement à l'enseignant de proposer à l'élève « des situations d'apprentissage qui intègrent des contextes liés au marché du travail pour favoriser chez lui l'exploration professionnelle et aussi l'aider à mieux cerner ses goûts, ses champs d'intérêt et ses aptitudes particulières » (MELS, 2005, p. 15). Cette référence à des macro-contextes permet de rejoindre la fonction plus générale associée aux SP dans l'enseignement des mathématiques (voir la première section), ces macro-contextes sollicitant notamment des compétences d'ordre méthodologique d'organisation et de travail efficaces.

À propos de la démarche de résolution : des conseils qui traversent les époques tout en laissant de plus en plus de latitude à l'enseignant

À travers les différentes réformes, plusieurs conseils relatifs à la démarche de résolution de problèmes sont donnés à l'enseignant. Si ces conseils traversent essentiellement les époques, ils ne sont toutefois pas formulés de la même manière au fil du temps. Du début du XX^e siècle jusqu'aux années 1970, quelques conseils précis sont formulés, lesquels mettent l'accent sur l'analyse du problème, le fait de « raisonner le problème », la visualisation du problème (se fermer les yeux, voir la scène), le support (au raisonnement) du dessin et de la manipulation, les traces de la démarche (Lajoie et Bednarz, 2012).

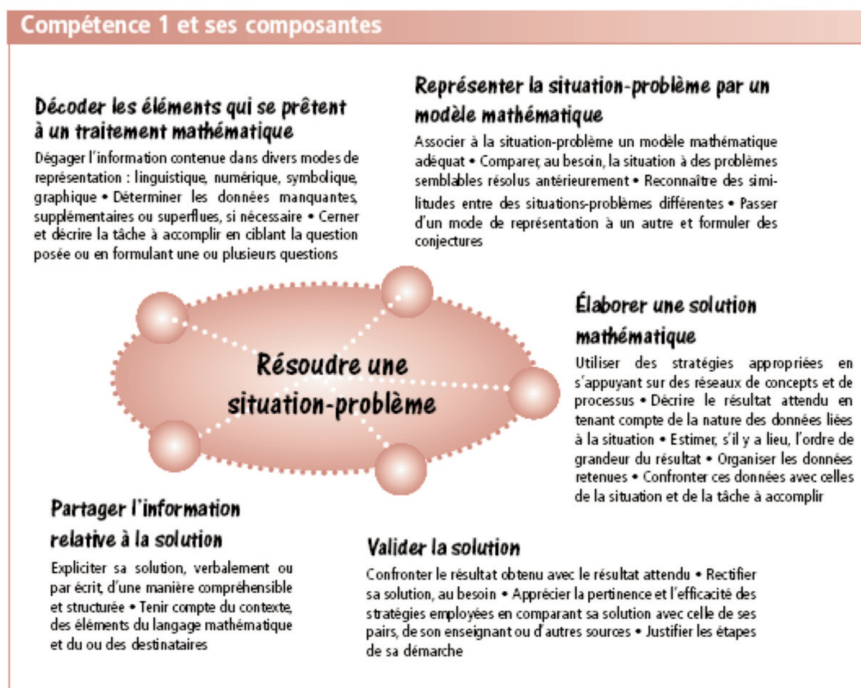
Dans les documents produits au cours des années 1980, on trouve un grand nombre de conseils à l'endroit de l'enseignant quant aux interventions à privilégier et aux stratégies à mettre en place, mais ces conseils, quoique explicites, sont déjà beaucoup plus globaux, moins spécifiques, et ce, dans un but avoué de « laisser une grande liberté d'action à l'enseignante ou à l'enseignant quant aux façons de les intégrer dans leur pratique pédagogique » (MEQ, 1993, p. 17). Comme nous l'avons fait remarquer ailleurs :

[...] cette évolution des conseils donnés aux enseignants, beaucoup plus spécifiques de 1900 à 1960, plus généraux dans les années 80, est sans

doute à examiner en parallèle avec l'évolution de la conception du rôle de l'enseignant (Laplante, 1984-1985). Le mouvement de professionnalisation de l'enseignement se fait en effet sentir dès les années 80 à travers la manière dont on conçoit son intervention en résolution de problèmes : « Le rôle de l'enseignant dans la démarche de résolution de problème est alors plus complexe parce que plus effacé. La formation de base que l'on souhaite donner à l'apprenant est moins orientée vers la technique mais davantage intégrée au développement global de l'enfant. Il s'agit pour l'enseignant de s'impliquer lui-même dans une démarche plutôt que d'être un démonstrateur de solutions. Les exigences de cette approche changent les règles du jeu pour l'enfant et pour l'enseignant. Cela concerne les attitudes, l'environnement de la classe, les situations-problèmes à identifier et, bien sûr, les interventions didactiques (Laplante, 1984-1985, p. 17) » (Lajoie et Bednarz (2012, p. 207-208)).

Dans les documents des années 2000, la tendance se poursuit, et les conseils à l'égard de la démarche de résolution de SP doivent être dégagés, et même déduits, d'une lecture approfondie du programme. En effet, l'enseignant doit déduire ce qui est attendu de lui à l'égard de la démarche de résolution de SP à partir de la description de ce qui est attendu de ses élèves, comme en témoigne l'extrait suivant (MELS, 2003, p. 241), qui consiste en le libellé de la compétence à résoudre des SP.

Figure 1. **Compétence à résoudre des situations-problèmes (MELS, 2003, p. 241)**



Aussi, des «exemples de stratégies associées à la résolution de situations-problèmes» sont fournis à l'enseignant, lui permettant par le fait même d'induire des éléments susceptibles de le guider dans sa manière de travailler la résolution de SP avec ses élèves.

Figure 2. **Exemples de stratégies associées à la résolution de situations-problèmes et pouvant être développées par l'élève au moment de l'exercice de ses compétences (MELS, 2003, p. 262)**

Compréhension

- Distinguer les termes du langage courant et du langage mathématique
- Se représenter la situation mentalement ou par écrit
- Dégager la tâche à réaliser
- Reformuler la situation dans ses propres mots

Organisation

- Établir des liens
- Mobiliser les concepts et les processus
- Utiliser des listes, des tableaux, des schémas, du matériel concret, des dessins

Solution

- Procéder par essais et erreurs
- Faire des retours sur son travail (travailler à rebours)
- Se référer à un problème analogue déjà résolu
- Diviser un problème complexe en sous-problèmes
- Simplifier le problème

Validation

- Vérifier sa solution à l'aide d'exemples ou par un raisonnement
- Utiliser d'autres processus, s'il y a lieu
- Chercher des contre-exemples
- Comparer et confronter ses démarches et ses résultats avec ceux de son enseignant ou de ses pairs

Communication

- Structurer ses idées
- Confronter sa compréhension de mots communs au langage courant et au langage mathématique
- Mobiliser différents modes de représentation
- Expérimenter différentes façons de transmettre un message à caractère mathématique
- Expliquer son raisonnement

On remarque, à la lecture de ces extraits, que non seulement les conseils à l'enseignant sont moins directs et plus généraux qu'ils ne l'étaient auparavant, mais qu'ils sont aussi plus «diffus», en ce sens qu'il faut les dégager d'une longue liste d'attentes à l'égard de la démarche de résolution par l'élève.

Il faut ajouter ici, en lien avec la démarche de résolution, un conseil adressé à l'enseignant, qui ne concerne pas que les SP mais qui est lié au développement des compétences, reprenant l'idée d'un retour métacognitif: «l'enseignant doit amener l'élève à prendre conscience, d'une part, de la façon dont il construit et mobilise ses

savoirs dans diverses situations et, d'autre part, de la possibilité de les réutiliser dans d'autres situations en les adaptant au contexte » (MELS, 2005, p. 13).

La différenciation pédagogique: un nouveau principe plus large derrière plusieurs conseils en continuité avec la ou les périodes précédentes

Avec la réforme des années 2000, la variété des problèmes (SP), une des caractéristiques s'étant élargie au fil des différentes réformes (d'une variété des contextes dans un but avoué d'empêcher la monotonie et l'ennui on est passé à une variété au niveau des types de contextes, du nombre de solutions, de l'adéquation des données, des modes de représentations utilisés, dans un but plus implicite de varier les apprentissages) (Lajoie et Bednarz, 2012, p. 201), s'inscrit dorénavant dans un phénomène plus large de *différenciation pédagogique* visant à amener l'élève à développer au maximum sa culture mathématique (MELS, 2003, p. 237), de même que ses potentialités (MELS, 2005, p. 13).

Ainsi, en lien avec ce phénomène plus large de différenciation pédagogique, on trouve dans les programmes du primaire et du secondaire plusieurs pistes pour l'enseignant. Si ces pistes apparaissent implicitement dans le programme du primaire, elles apparaissent plus explicitement dans ceux du secondaire⁸, en particulier dans celui du deuxième cycle. Parmi les «pistes favorisant une pratique de différenciation» (MELS, 2005, p. 14), on trouve les suivantes, que nous avons pu relier en partie à certains conseils donnés aux enseignants au XX^e siècle :

- amener les élèves à concevoir eux-mêmes des situations (un conseil qui traverse les époques);
- offrir aux élèves la possibilité de choisir entre des situations qui font appel aux mêmes concepts et processus, mais dont les contextes diffèrent (cette possibilité de choix de problèmes par les élèves parmi une liste de problèmes était déjà présente dans les années 1980-1990);
- proposer des situations d'apprentissage qui peuvent être exploitées dans différents champs de la mathématique ou à l'aide de différents registres de représentation sémiotique;
- varier les modalités d'organisation de la classe: activités individuelles ou de coopération (cette idée d'encourager le travail en équipe sans négliger le travail individuel est en continuité avec l'époque précédente).

8. Dans le programme du premier cycle du secondaire (MELS, 2003, p. 237), par exemple, il est mentionné que les situations peuvent être réalisées individuellement ou en équipe, en classe ou à la maison; que leur objet renvoie à des situations pratiques plus ou moins familières, réelles ou fictives, réalistes ou fantaisistes, ou encore purement mathématiques; qu'elles sont inspirées des autres disciplines, de l'environnement de l'élève, des domaines généraux de formation ou du contexte historique dans lequel a évolué la mathématique; qu'elles comportent des données complètes, superflues, implicites ou manquantes; qu'elles peuvent conduire à un ou plusieurs résultats ou, au contraire, ne mener nulle part.

Discussion

Notre analyse a fait ressortir le caractère de plus en plus ambitieux des fonctions assignées à la résolution de situations-problèmes en ce début de XXI^e siècle. Celles-ci intègrent le développement de processus mathématiques et de compétences débordant du champ des mathématiques. Cela va se traduire par des conseils donnés aux enseignants, cohérents avec ces fonctions, privilégiant notamment le recours à des situations complexes, à des contextes issus d'autres disciplines, des domaines généraux de formation ou encore du monde du travail. Quant à l'exploitation en classe de ces situations, les conseils se révèlent ici très généraux, mettant de l'avant le recours aux interactions dans cette exploitation (travail en équipe, confrontation des solutions et points de vue), la nécessité d'un retour métacognitif ou encore la possibilité que les élèves choisissent les situations qui seront résolues, voire même qu'ils en forment. Les éléments importants à travailler, et susceptibles d'orienter l'action des enseignants, restent implicites et doivent être déduits indirectement de ce qui est attendu des élèves. Ainsi, ce qui frappe au terme de cette analyse des années 2000, c'est la quasi-absence de conseils directs destinés à l'enseignant ainsi que le peu d'indications qui lui sont fournies pour approcher ces situations en classe. Le cadre référentiel institutionnel, tel qu'il se dégage de cette analyse, laisse ainsi beaucoup de latitude à l'enseignant dans le choix des SP et dans leur mise en œuvre en classe. Cette ouverture, qui s'inscrit dans le mouvement de professionnalisation de l'enseignement amorcé dans les années 1980-1990, peut s'avérer une arme à deux tranchants. Elle donne en effet lieu à de multiples interprétations possibles, laissant place à un terrain fertile, mais peut en même temps être une source importante d'insécurité pour les enseignants, notamment face aux défis que risque de poser la complexité de ces situations lorsqu'elles seront abordées avec les élèves en classe. Quels défis soulèvent l'analyse de ces situations par les élèves et leur appropriation? Quelles pistes permettent d'approcher cette analyse? Rappelons ici que l'analyse du problème était au cœur de plusieurs conseils précis donnés aux enseignants dans les années 1900-1960 (Lajoie et Bednarz, 2012). Elle semble ici peu prise en compte ou tout au moins sous-estimée. D'autres questions se posent également en lien avec cette complexité. Comment choisir la situation problème qui sera proposée aux élèves? Sur quelle base? Qu'est-ce qui en fait la complexité? De quelle nature est cette complexité? Comment gérer le processus de recherche des élèves à partir des questions et pistes qu'ils retiennent? Quelle synthèse peut-on envisager à partir d'un tel type de situation et de son exploitation? Autant de questions qui se posent à l'enseignant et pour lesquelles le cadre institutionnel apporte peu d'éléments. Or, comme le montraient bien Burkhard et Bell (2007), les défis que ces approches peuvent poser aux enseignants, et qu'on perçoit bien à travers ces questions, méritent qu'on s'y attarde. Ils montrent le travail qui reste à mener, en formation initiale et continue des enseignants, autour du pilotage de ces situations-problèmes en classe. Les travaux menés au Japon autour des « *lesson studies* » ouvrent ici des pistes intéressantes (Hino, 2007). De telles études, impliquant activement des enseignants, s'articulent sur des leçons (les leurs) construites autour de problèmes, des leçons que ces

enseignants partagent, investiguent, interrogent à partir des vidéos en classe, modifient en essayant d'intégrer les points discutés. Ces réflexions permettent d'éclairer progressivement, pour ces enseignants, l'organisation possible d'une leçon construite autour d'un problème, le questionnement de l'enseignant à différentes phases, et ce en lien avec le développement de la pensée mathématique des élèves.

Sur le plan de la recherche, de tels travaux permettraient de mieux comprendre les manières de faire qui se constituent chez les enseignants pour approcher la résolution de situations-problèmes avec les élèves : les critères-en-acte qui guident la sélection, l'aménagement par des enseignants des situations retenues; les manières de faire autour de la présentation et de l'analyse de la situation avec les élèves; les manières dont est approchée la phase de recherche avec les élèves, ou les retours sur les solutions ainsi que la synthèse. Tout un champ de recherche à explorer pour mieux comprendre le travail de l'enseignant autour de ces situations et les défis qu'il pose!

Références bibliographiques

- ARTIGUE, M. et HOUEMENT, C. (2007). Problem solving in France: Didactic and curricula perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 39, 365-382.
- BEDNARZ, N. (1996). Language activities, conceptualization and problem solving. The role played by verbalization in the development of mathematical thought by young children. Dans H. M. Mansfield, N. A. Pateman et N. Bednarz (dir.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children: International Perspectives on Curriculum* (p. 228- 239). Dordrecht : Kluwer.
- BEDNARZ, N. (2002). Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XX^e siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34(4), 146-157.
- BURKHARDT, H. et BELL, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 39, 395-403.
- CAI, J. et NIE, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 39, 459-473.
- COPPÉ, S. et HOUEMENT, C. (2009). Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36^e colloque de la Commission permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (COPIRELEM)*.
- CORBEIL, N., PELLETIER, M. et PALLASCIO, R. (2001). Les situations-problèmes : au cœur de la réforme en mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 32(3), 12-27.

- D'AMBROSIO, U. (2007). Problem solving: A personal perspective from Brazil. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 39, 515-521.
- GISPERT, H. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XX^e siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 34(4), 158-163.
- GRIGNON, J. (1983). La résolution de problèmes, à la recherche d'un nouveau modèle. *Instantanés mathématiques*, 19(3), 3-7.
- HAMEL (1997). *Étude de cas et sciences sociales*. Paris : L'Harmattan.
- HINO, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 39, 503-514.
- LAFOREST, J.-C. (1984-1985). L'évaluation des apprentissages en résolution de problèmes: une pratique essentielle et enrichissante. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial D), 23-29.
- LAJOIE, C. et BEDNARZ, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 12(2), 178-213.
- LAJOIE, C. et BEDNARZ, N. (sous presse). La notion de situation-problème en mathématiques au début du 21^e siècle au Québec: rupture ou continuité? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*.
- LANDRY, Y. (1984-1985). Résolution de problèmes et processus créateur ou à la recherche d'une pratique créatrice. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial C), 23-39.
- LAPLANTE, H. (1984-1985). L'enseignant dans la démarche de résolution de problèmes. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial D), 17-18.
- LEMOYNE, G., GIROUX, J. et BIRON, D. (1990). Connaissances utilisées par des élèves de 8 à 12 ans dans la formulation de problèmes arithmétiques concrets. *European Journal of Psychology of Education*, 5(3), 273-291.
- LEMOYNE, G. et TREMBLAY, C. (1986). Addition and multiplication: Problem-solving and interpretation of relevant data. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), 97-123.
- LUKENBEIN, D. (1984-1985). La résolution de problèmes et le processus d'apprentissage en mathématique. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial D), 5-9.

- LYET, P. et LOREAU, F. (sous presse). Effets en termes de légitimation des travailleurs sociaux et des chercheurs dans une recherche action collaborative sur le travail avec les parents en protection de l'enfance. Dans les actes du colloque pluridisciplinaire et plurisectoriel *Les recherches-actions collaboratives : une révolution silencieuse de la connaissance*. IRTESS de Bourgogne, France, 27-29 mai 2013.
- MARY, C. et THEIS, L. (2007). Les élèves à risque dans des situations problèmes statistiques : stratégies de résolution et obstacles cognitifs. *Revue des sciences de l'éducation*, 33(3), 579-599.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ) (1988). *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes • Orientation générale. Fascicule K* (Document 16-2300-11). Québec : Gouvernement du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ) (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée. Éducation préscolaire et enseignement primaire*. Québec : Gouvernement du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.
- PALLASCIO, R. (2005). Les situations-problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique*, 136, 32-36.
- POIRIER PROULX, L. (1999). *La résolution de problèmes en enseignement. Cadre référentiel et outils de formation*. Paris : De Boeck et Larcier.
- RODITI, E. (2013). Le métier d'enseignant et l'éclairage de la recherche collaborative. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante* (p. 350-363). Paris : L'Harmattan.
- SANTOS-TRIGO, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research practice domain. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 39, 523-536.
- SCHOENFELD, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: Research and theory, practice and politics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 39, 537-551.
- VOYER, D. (2006). *L'influence de facteurs liés à l'élève ou à l'énoncé sur la compréhension en résolution de problèmes écrits d'arithmétique*. Thèse de doctorat en éducation. Québec : Université Laval.

De résoudre un problème à problématiser mathématiquement Vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève

Jean-François MAHEUX

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Jérôme PROULX

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

De résoudre un problème à problématiser mathématiquement Vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève

Jean-François MAHEUX

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

Jérôme PROULX

Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous proposons de considérer l'activité mathématique de l'élève qui traite un « problème » en remplaçant l'idée de « résolution de problème » par celle de problématisation mathématique. Cette reformulation correspond en fait à un changement de perspective sur le plan épistémologique; elle cherche à mettre en évidence l'idée que l'élève, face à une tâche, répond nécessairement au problème qu'il se pose lui-même. Nous illustrons ce changement paradigmatique à l'aide d'exemples divers et nous montrons comment l'activité de problématiser mathématiquement est elle-même en constant mouvement, révélant toute l'importance d'une perspective considérant le point de vue de l'observateur (que ce soit l'élève, l'enseignant ou un chercheur, par exemple). Prenant en partie sa source dans la théorie de

l'enaction, cette proposition conduit à porter un regard sur l'activité mathématique fondée sur le faire mathématique (voir Maheux et Proulx, 2014), plutôt qu'en référence à ce qui serait « mathématiquement bon » dans une sorte d'absolu désincarné.

ABSTRACT

From problem solving to problematizing mathematically - a new approach to student mathematical activity

Jean-François MAHEUX

University of Quebec in Montreal, Quebec, Canada

Jérôme PROULX

University of Quebec in Montréal, Quebec, Canada

In this paper, we approach the student mathematics activity that addresses a “problem” by replacing the idea of “problem solving” by that of *problematizing mathematically*. This reformulation corresponds to a change in perspective on the epistemological level – it seeks to highlight the idea that faced with a task, the student answers the question he asks himself. We illustrate this paradigm shift with various examples and show how the activity of problematizing mathematically is itself in constant movement, revealing all the importance of a perspective that considers the point of view of the observer (whether student, teacher or researcher, for example). Taking its source in part from the theory of enaction, this proposal leads us to take a look at the mathematical activity based on *doing mathematics* (see Maheux & Proulx, 2014), rather than in reference to what would be “mathematically sound” in a kind of disembodied absolute.

RESUMEN

De la resolución de problemas a problematizar matemáticamente: hacia un nuevo enfoque de la actividad matemática del alumno

Jean-François MAHEUX

Universidad de Quebec en Montreal, Quebec, Canadá

Jérôme PROULX

Universidad de Quebec en Montreal, Quebec, Canadá

En este artículo proponemos un enfoque de la actividad matemática del alumno que trata un «problema» remplazando la idea de «resolución de problema» por *problematizar matemáticamente*. Esta reformulación corresponde de hecho a un

cambio de perspectiva en el plano epistemológico; trata de evidenciar la idea de que el alumno, frente a un trabajo, necesariamente responde al problema que él mismo se ha puesto. Ilustramos este cambio paradigmático con la ayuda de ejemplos diversos y mostramos como la actividad de problematizar matemáticamente está, ella misma, en constante movimiento, lo que revela la importancia de una perspectiva que tome en consideración el punto de vista del observador (sea el alumno o el investigador, por ejemplo). Enraizándose parcialmente en la teoría de la enacción, esta proposición nos lleva a ver la actividad matemática basada en el hacer matemático (ver Maheux & Proulx 2014) en vez de en referencia a lo que sería «matemáticamente bueno», como algo de absoluto desencarnado.

*La problématisation suppose d'identifier les traits significatifs
ou encore «relevants» par rapport au contexte de l'interrogation*

M. Fabre (2009, p. 226)

Introduction

Par des travaux souvent réunis sous le vocable «résolution de problème», la recherche en didactique des mathématiques s'intéresse depuis de nombreuses années à la manière dont les élèves (et les enseignants) abordent mathématiquement diverses situations. Ainsi, on définit volontiers un «problème» en parlant de l'élève qui «ne dispose pas» des procédures requises pour conclure sur un énoncé (voir le *Fascicule K*, Gouvernement du Québec, 1988). L'idée, qui occupe une place importante dans les programmes québécois depuis (au moins) les années 1980, a cependant évolué considérablement. En particulier, on reconnaît de plus en plus que l'on ne peut fixer dans l'absolu le caractère problématique d'une situation, celui-ci étant toujours relatif à celui ou celle qui la traite. Témoin de cette évolution, ce qui fut un temps la recherche de «situations fondamentales» en didactique des mathématiques (p. ex. Brousseau, 1988), c'est-à-dire de problèmes que seule l'invention de concepts précis (déterminés par l'enseignant comme objets d'apprentissage) permet de résoudre de façon optimale, élargit aujourd'hui son spectre pour parler de situations «significatives» (situations qui permettent de justifier l'ensemble des stratégies et des concepts visés) ou de situations «initiales d'un processus génétique», c'est-à-dire faisant partie d'une chaîne de situations visant à aborder un concept (Brousseau, 2005). On peut aussi, par exemple, penser aux travaux de Rogalski (2003) qui, depuis une dizaine d'années, conceptualise les multiples réinventions d'une tâche donnée par l'enseignant et les élèves eux-mêmes. Mais l'idée selon laquelle la situation dépend de manière essentielle de la personne qui la rencontre reste cependant assez

périphérique : cette nuance, traditionnellement prise en compte pour définir les limites d'une approche de l'activité de l'élève ou du travail de l'enseignant, semble rarement considérée comme suffisante pour remettre en question l'idée même de « résolution de problème ». En fait, ces observations ne semblent pas avoir conduit à une réorientation majeure de la recherche autour de la résolution de problème, où ce sont surtout les caractéristiques mathématiques des situations (telles qu'interprétées par celui ou celle qui les propose) qui servent de base à l'étude de l'activité mathématique (Xin, 2012; Armstrong, 2013).

Un autre exemple allant dans le même sens concerne les « processus de résolutions » mis en œuvre lors du traitement d'un problème. Le fameux modèle « par étapes » inspiré de Polya (1965), qui suppose que la résolution d'un problème peut être divisée en une suite d'étapes bien définies (compréhension du problème, élaboration d'un plan, exécution du plan, obtention puis vérification de la solution), a peu à peu fait place à des approches plus ouvertes inspirées entre autres des travaux sur la modélisation (Bloom et Leiss, 2005). On donne alors une plus grande part à différentes heuristiques (simplifier, exemplifier, généraliser, etc.) conduisant à une appropriation du « problème » (p. ex. d'un énoncé). Radford (1996), par exemple, note que :

La compréhension [de l'énoncé d'un problème] est conditionnée entre autres par les connaissances antérieures de l'individu. De plus, le fonctionnement de la compréhension dépend du niveau de formation cognitive du modèle de résolution de problèmes auquel l'individu fera appel. [...] Il faut donc être conscients qu'en général on ne peut pas demander à l'élève d'avancer un plan, suite à la lecture du problème. La compréhension et l'élaboration d'un plan ne sont pas des « étapes » indépendantes; ce sont des *processus interreliés*. Probablement qu'il serait plus fructueux de demander à l'élève d'essayer de *plonger* dans le problème, d'essayer des solutions possibles (p. 28-29).

Ce qui l'amène par la suite à faire cette proposition :

En décodant le problème avec ses propres moyens, [l'élève] n'a pas compris la même chose [que nous]. Quoi de plus naturel alors que de [chercher à] voir le problème depuis sa propre perspective, c'est-à-dire depuis ses propres modèles de résolution de problèmes? (p. 30)

Cette proposition de Radford n'est pas anodine, car elle remet en question non seulement l'idée d'un problème qui existerait en dehors de l'élève, mais aussi l'image selon laquelle l'élève résout « un » problème dont la forme ou la nature sont fixées au départ. Cette suggestion dans le sens d'une coévolution du problème et de sa résolution ne semble cependant pas, elle non plus, avoir bousculé de manière importante les travaux sur la résolution du problème. Or, qu'en est-il si nous prenons au sérieux la proposition selon laquelle un problème dépend rigoureusement de celui ou celle qui l'aborde, et de son travail mathématique sur celui-ci au fur et à mesure qu'il ou elle progresse dans sa « résolution »?

Dans cet article, nous proposons d'aborder cette question, qui nous conduit à mettre de côté l'idée même de « résolution de problème », pour parler plutôt de l'activité qui consiste à *problématiser mathématiquement*. Pour ce faire, nous enracinons cette proposition dans une approche biologique de l'activité humaine et de la cognition à laquelle la recherche autour de l'éducation mathématique s'intéresse depuis de nombreuses années (Davis, Sumara et Kieren, 1996) et qui occupe aujourd'hui encore un bon nombre de chercheurs (voir par exemple le forum de recherche dans Proulx, Simmt et Towers, 2009, et le numéro spécial de ZDM dirigé par Reid, Brown, Coles et Lozano, à paraître). Dans la section suivante, nous rappelons brièvement quelques fondements au cœur de l'enaction. Nous nous y appuyons afin de parler de l'activité de *problématiser mathématiquement*, offrant par la suite quelques liens avec les travaux en « *problem posing* » qui intéressent la recherche en didactique des mathématiques depuis une vingtaine d'années (voir par exemple Silver, 2013).

Une entrée sur l'activité mathématique par l'enaction

Les travaux de Maturana et Varela (Maturana, 1988; Maturana et Varela, 1992, 1994; Varela, 1999; Varela, Thompson et Rosch, 1991), souvent associés au terme *enaction*, adoptent un point de vue biologique sur l'activité humaine et la cognition. La perspective biologique a souvent été utilisée en tant que métaphore pour penser la connaissance et l'apprentissage (voir notamment Piaget, Glasersfeld, Siegler, Morss, Dewey), par exemple avec l'idée d'adaptation, d'évolution, etc. Toutefois, pour Maturana et Varela, la cognition est *littéralement* un phénomène biologique, ce qui conduit à parler non plus de « connaissances », mais plutôt d'*action adéquate*, c'est-à-dire permettant de maintenir une relation (fonctionnelle) entre un organisme et son environnement. Ainsi, qu'il s'agisse d'une araignée tissant sa toile, d'une plante orientant ses tiges vers le soleil ou d'un élève répondant à une question mathématique, tous réalisent un acte qui leur permet de continuer à évoluer avec leur environnement, qui est lui-même en évolution. On dit alors de l'activité mathématique de l'élève (par exemple ce qu'on identifie comme ses interprétations, ses stratégies, ses solutions mathématiques) qu'elle est fonctionnelle par rapport au contexte (mathématique) dans lequel celui-ci évolue (Reid, 1996; Zack et Reid, 2003, 2004), contexte dont l'évolution est en partie provoquée par l'action même de l'élève.

Le concept d'action adéquate et son caractère fonctionnel tournent ainsi notre intérêt vers les manières dont les élèves travaillent mathématiquement, ayant soin de montrer comment ce travail est le fait d'interactions entre élèves, d'une part, et tâche ou contexte, d'autre part :

Enactivism prompts us to attend as closely to the preceding actions – the unformulated exploration, the undirected movement, the unstructured interaction, wherein the body is wholly engaged in mathematical play – as to the formal mathematical ideas that might emerge from those actions (Davis, Sumara et Kieren, 1996, p. 156).

Il s'ensuit que l'activité mathématique, bien que liée à l'apprenant et à la tâche (Davis, 1995), ne peut être réduite ni à l'un ni à l'autre : elle émerge, toujours en mouvement, à la rencontre des deux (Davis *et al.*, 1996). On dira par exemple que l'apprenant qui réalise une tâche mathématique fait émerger une stratégie située dans la tâche (Thom *et al.*, 2009), la tâche ayant de son côté permis à cette stratégie de voir le jour. C'est la raison pour laquelle, comme l'explique René de Cotret (1999), on ne peut tenir pour acquis que des propriétés instructionnelles sont présentes de façon inhérente dans les situations offertes aux élèves; nous disons plutôt qu'elles émergent dans l'interaction¹.

Parler d'action adéquate met de l'avant un autre point important de la perspective de Maturana, soit l'observateur : « *Knowledge is adequate action in a domain specified by a questioner* » (Maturana, dans Simon, 1985, p. 37). On attache ainsi l'aspect adéquat de l'action non pas à quelque référentiel objectif, mais au regard d'un observateur qui juge celle-ci. En particulier, la nature « mathématique » des tâches, de l'environnement ou de l'activité de l'élève (y compris, donc, sa qualité d'être « mathématiquement correcte ») dépend de cet observateur (qui peut être l'élève lui-même ou son enseignant ou, encore, un chercheur) :

Thus, if someone claims to know algebra – that is, to be an algebraist – we demand of him or her to perform in the domain of what we consider algebra to be, and if according to us she or he performs adequately in that domain, we accept the claim (Maturana, 1988, p. 4-5).

Si, d'une part, l'enjeu se porte alors sur la manière dont nous allons accepter ou non comme « mathématique » telle proposition d'un élève, il est important de remarquer que, d'autre part, l'action d'observer n'est pas prise en soi, mais abordée comme acte de distinction, de propos, de lecture, qui détermine ainsi l'objet de l'observation... de la même manière que l'action (mathématique) de l'élève ! Les travaux autour de l'enaction attirent notre attention sur ce qui *se réalise* dans/avec une situation particulière pour y apprécier les mathématiques en jeu. Ces travaux offrent la possibilité de conceptualiser l'idée selon laquelle ce qui est proposé à un élève devient un problème, à condition d'être abordé comme tel, et continue d'évoluer sous son action mathématique. Un phénomène de circularité, souvent décrit par Maturana et Varela, est alors à l'œuvre : ce qui fait d'un problème un problème est d'être abordé comme tel, ce problème appelant en même temps les actions particulières... qui en font un problème. Or, qui dit circularité ne dit pas « tourner en rond » : c'est plutôt l'image d'une boucle itérative qu'il faut voir, ce que Davis et Simmt (2004) appellent une « élaboration récursive » et dont le mouvement produit ce que Kieren (1995) appelle « *a world of mathematical significance* » (p. 7) en constante évolution.

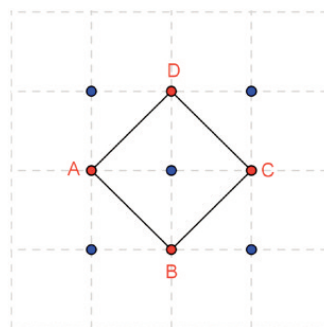
Nous abordons maintenant de manière plus spécifique l'idée du passage de « résoudre un problème » vers celle de *problématiser mathématiquement* à travers cette perspective théorique.

1. On peut relier cela au concept d'*affordances* de Gibson, comme nous l'avons fait dans Proulx (2014).

Problématiser mathématiquement

Varela (1996; Varela *et al.*, 1991) note que la notion de « résolution de problèmes » sous-entend que des problèmes existent en dehors de nous, déjà présents et en attente d'être résolus. Une telle indépendance par rapport à celui ou celle qui agit correspond fort mal aux observations effectuées dans le cadre des travaux en enaction mentionnés plus haut. Varela propose de considérer que nous spécifions les « problèmes » que nous rencontrons, à travers le sens que nous donnons au monde, et que nous sommes ceux qui voient et créent des problèmes à résoudre : bref, que nous posons des problèmes, que nous posons nos propres problèmes. Le verbe « problématiser » permet de mieux rendre compte de cette idée, insistant sur le fait que, du point de vue de l'enaction, il n'y a jamais véritablement quelque chose de « posé » ayant une signification fixe (un problème établi à résoudre), mais toujours une action produisant cette signification. Ce qu'on appelle un problème est alors la reconnaissance, par un observateur, d'une certaine régularité dans un processus suivi de problématisation. On conceptualise peut-être plus facilement cette idée en pensant à la distinction souvent faite entre « solution » et « résolution », la chose et le processus. Dans cette perspective, résoudre et problématiser sont une seule et même chose. La démarche de résolution et le problème résolu, tous deux observés *a posteriori*, se définissent l'un par rapport à l'autre (j'ai résolu le problème auquel ma solution répond!). Mais il s'agit aussi d'un processus vivant, fluide et hautement créatif qui se développe tout au long du travail mathématique. On peut par exemple penser à ce qui s'est produit lorsque nous avons demandé à des enseignants de mathématiques de déterminer mentalement l'aire du carré suivant :

Figure 1. **Quelle est l'aire du carré?**



Les nombreuses propositions que nous avons obtenues correspondent souvent à des manières fort différentes de « voir » la figure et de la « manipuler » mathématiquement. Ainsi, certains ont tout de suite proposé un traitement numérique, donnant aux carrés pointillés une mesure de 1×1 , pour utiliser ensuite la relation de

Pythagore et trouver la mesure de leur diagonale (p. ex. $AB = \sqrt{2}$), puis celle du carré ABCD par la formule d'aire ($\sqrt{2}^2 = 2$). D'autres, plus nombreux, ont procédé à différents découpages, se référant ou non au carré défini par les 4 points en périphérie dont la surface est clairement de « 4 unités », si l'on reprend le quadrillage comme étalon de mesure. Une participante nous a aussi expliqué qu'il n'y avait « pas de problème » là pour elle, car elle a immédiatement reconnu la figure du célèbre *Ménon* de Platon, dans lequel Socrate aide un esclave à doubler la surface d'un carré à l'aide de sa diagonale. L'idée ici est que, d'une part, ces propositions correspondent bel et bien à des problématisations différentes à partir de ce qui a été présenté : tantôt en termes numériques, alors traité par formules, tantôt en termes géométriques, faisant alors souvent appel à des isométries formulées de manière plus ou moins formelle. Mais, plus encore, nous nous avançons vers l'idée selon laquelle chaque « pas » dans la résolution, chaque observation, chaque manipulation correspond à l'émergence d'un *nouveau* problème. Par exemple, un retour sur une des stratégies par découpage décline une première étape, qui revient en fait à la formulation d'un nouveau problème : si l'on considère un déplacement du triangle BCD de manière à former un parallélogramme en l'appuyant sur le triangle ABD, quelle est maintenant l'aire de ce parallélogramme ? La problématisation mathématique se fait tout au long du travail (et, pourrait-on dire, de tout travail mathématique !), et la résolution s'arrête avec celle-ci, que l'on ait ou non produit quelque chose de « satisfaisant » pour soi-même ou pour un autre...

Du point de vue de l'enaction, c'est ainsi avant tout dans les rencontres entre une personne et son environnement que se « posent » les problèmes, ou plutôt qu'ils se créent et se recréent, chacun faisant (chaque fois !) ces rencontres de manière personnelle et unique. On peut ainsi reconnaître l'idée de problématiser mathématiquement face à un énoncé aussi simple que « $2 + 5 = ?$ ». Chacun d'entre nous fait une expérience unique de cet énoncé et le problématisé à sa manière. Cela ne veut pas dire qu'une fois interrogé sur la manière utilisée pour trouver un résultat chacun aura forcément une approche (mathématiquement) différente : au contraire, il y a fort à parier que la majorité d'entre nous reconnaîtront avoir recours aux mêmes « stratégies » et « idées », diront avoir fait une « addition », obtenu « 7 », etc.². Toutefois, même si tous semblent pointer dans la même direction, et parler du même « 7 » en tant que résultat, chacun aura fait sa propre expérience des nombres présentés, de l'addition et du « 7 ». Chacun problématisé l'énoncé « $2 + 5 = ?$ » à sa manière, avec peut-être une façon particulière de concevoir l'addition. On ne pense pas uniquement aux « sens » les plus classiques associés à cette opération (réunion, déplacement, relation entre nombres), mais surtout à l'expérience personnelle de chacun, qui en fera *chaque fois* un exercice unique, avec des résonances singulières. Ainsi, personne ne « voit » ou ne « fait » l'addition exactement de la même manière, et même les nombres évoquent quelque chose d'incomparable pour chacun d'entre nous. Pour certains, le 7 est relié à des objets ou une collection, pour d'autres à un chiffre chanceux, pour d'autres à

2. Et là encore... Une collègue mathématicienne à qui nous avons présenté l'énoncé a réagi en nous demandant immédiatement de spécifier l'ensemble de nombres dans lequel l'opération est posée. En effet, on peut *aussi* avoir comme solution « $2 + 5 = 1$ (modulo 6) », et ainsi de suite !

un célèbre défenseur des Oilers d'Edmonton, pour d'autres à une forme géométrique, pour d'autres à la 3^e position avant 10. D'autres, encore, peuvent surtout y retrouver un mauvais souvenir de mathématiques scolaires... Pour un observateur, la solution peut bien sembler «la même», avoir été obtenue par une série de démarches et de stratégies semblables correspondant à un énoncé «compris» de façon équivalente par tous. Chacun aura néanmoins rencontré, et donc problématisé mathématiquement, l'énoncé « $2 + 5 = ?$ » de manière unique.

Une telle perspective sur le phénomène est intéressante pour aborder de manière constructive une foule d'observations, dont les résultats au fameux problème de «l'âge du capitaine» ne sont qu'un exemple (c'est-à-dire à un énoncé du type «Un bateau transporte 12 moutons et 15 chèvres, quel est l'âge du capitaine?» auquel plusieurs enfants répondent «27 ans»). On voit bien qu'il s'agit de *problématiser à partir de l'énoncé* proposé, mais celui-ci n'étant pas porteur d'un problème (p. ex. absurde) de manière inhérente. L'énoncé porte au mieux un potentiel de problématisation se réalisant de manière variée selon l'élève, les circonstances, etc. Maturana (1987) aime à cet égard raconter l'histoire de l'étudiant à qui l'on demande de déterminer la hauteur d'un édifice à l'aide d'un baromètre et qui propose une pléiade de solutions «valables» (y compris celle d'échanger le baromètre contre l'information recherchée!), mais allant *a contrario* de celle typiquement attendue dans le cadre d'un examen de physique. Tournée vers l'enaction, l'idée de problématiser mathématiquement nous offre ainsi une voie médiane entre le réalisme représentationnel (où un problème existerait en soi) et le solipsisme philosophique (que l'on reproche souvent au constructivisme radical, par exemple, et qui semble rendre théoriquement impossible/intenable la conceptualisation de quoi que ce soit «en dehors» de l'expérience individuelle) (voir Maturana et Varela, 1992; Varela, 1996). De façon plus fine, on considère aussi, par exemple, la manière dont les étudiants peuvent faire de la résolution d'équations algébriques, telles que « $6/x = 3/5$ », un problème de multiplication, de ratio, de fonction, d'algèbre, etc. (voir Proulx, 2013a). Là encore, on a une série de problématisations qui dépendent à la fois de ce qui est présenté aux étudiants (p. ex. l'énoncé « $6/x = 3/5$ » écrit au tableau) et de la lecture qu'ils en font, elle-même sans doute enracinée dans des manières de faire reconnaissables sur le plan individuel ou collectif. On rencontre également cette idée, et de manière très articulée, chez Foucault (p. ex. 1985) lorsqu'il parle de problématisation :

Problematization doesn't mean the representation of a pre-existing object, nor the creation through discourse of an object that doesn't exist. It is the set of discursive and non-discursive practices that makes something enter into the play of the true and the false and constitutes it an object for thought. [...] (Foucault, 1988, cité dans Bacchi, 2012, p. 4).

Foucault is looking to carve out a space between realism and idealism. That is, he postulates that there is something "real" being regulated. Problematization is a description of thinking as a practice (Bacchi, 2012, p. 3).

Ce détour par le philosophe, sociologue et historien français apparaît pertinent à l'égard du traitement détaillé qu'il donne à l'idée de problématisation qui, à l'échelle de son œuvre, va jusqu'à prendre le statut de méthode. Pour Foucault, penser en termes de problématisation conduit à considérer comment et pourquoi certaines choses deviennent des problèmes, et comment ces « choses » sont (trans)formées en « objets » pour la pensée (voir, par exemple, l'analyse de Deacon, 2000). Ses écrits ne portent évidemment pas sur la problématisation mathématique qui nous intéresse ici. Ils concernent plutôt les phénomènes sociaux, tels que la folie, la délinquance ou le pouvoir, mais l'idée de s'intéresser aux conditions dans lesquelles un problème se crée, à sa généalogie possible, est porteuse pour aborder l'activité mathématique. Du point de vue de l'enaction, il n'y a d'ailleurs pas de rupture véritable entre ontogénie, évolution sociale et phylogénie (Maturana et Varela, 1994), le même type de processus étant à l'œuvre, un peu à la façon dont les cellules, les organes et le corps dans leur ensemble peuvent à tour de rôle être considérés comme des organismes en interaction avec leurs environnements (produisant ceux-ci tout en étant produits par eux). Ainsi, l'idée selon laquelle la problématisation est un processus historique dont les aléas permettent d'apprécier le caractère fondamentalement émergent, relationnel et contextuel de ces « objets » dont on s'occupe, répond bien – à l'échelle de l'expérience mathématique – au principe selon lequel chacune de nos actions est le fruit de l'ensemble de notre histoire (Davis, Sumara et Kieren, 1996; Brown et Coles, 2012)³.

En fait, il existe toute une tradition de réflexion sur la notion de « problème » et sur l'activité de problématisation dont on peut tirer des leçons. On peut penser, par exemple, au travail de Meyer (1986), qui examine la question du point de vue de l'histoire de la philosophie. Meyer souligne comment on a longtemps travaillé dans le « non-penser problématologique », qu'il rattache à l'idée de « faits », au lieu de prendre pour base de travail le phénomène d'ouverture que provoque une attitude de questionnement (un problème pouvant toujours mener à une multitude d'autres problèmes)⁴. Une illustration toute simple du changement d'orientation que cela suggère peut être trouvée du côté des fameux « faits mathématiques » qui peuvent donner l'impression de devoir être mémorisés, ayant peu à offrir en termes « conceptuels » (pour reprendre la distinction entre [compréhensions] mathématiques factuelles et conceptuelles souvent rencontrées dans les écrits scientifiques). Or, nous savons très bien que les tables d'addition ou de multiplication, par exemple, peuvent tout à fait être travaillées de façon conceptuelle, en termes de relations entre nombres, de régularités, voire par le biais du « calcul réfléchi ». Comme avec l'addition discutée plus haut, on peut ainsi problématiser l'énoncé « $9 \times 7 =$ », y voir une occasion de questionnement et donc d'engagement dans une activité mathématique variée, que ce soit pour penser à l'aide d'autres résultats et de propriétés ($9 \times 7 = 10 \times 7 - 1 \times 7$, etc.), ou de disposition géométrique, etc. Mayer valorise une aptitude à

3. Étymologiquement, les mots « objet » et « problème » sont d'ailleurs très proches, à travers deux formes du verbe « jeter » : *jacere* (pour ob-*jet*) et *ballein* (pour pro-*blème*).

4. On pourrait aussi se tourner vers Deleuze (1968), qui propose également une réflexion profonde autour de la notion de problème à travers l'histoire des sciences (dont Mayer parle également), ou vers Fabre (2009), cité en exergue, ou encore vers Bachelard (1949)... et vers bien d'autres encore!

mettre en question plutôt qu'à «mettre en réponse» (p. 204) et nous invite ainsi à remettre la question en question (à problématiser la notion de problème), en particulier à l'égard des réponses qui... posent problème (p. ex. à propos de l'âge du capitaine, discuté précédemment)! Ce tournant vers une approche en termes d'attitude, de disposition, qui garde actif le phénomène de problématisation au lieu de l'enfermer dans une activité ou un moment particuliers, colle bien à l'esprit du travail où l'on encourage une forme de conscientisation (en anglais «*awareness*») permettant de considérer le caractère local, contingent, de ce qu'on identifie comme des questions, des réponses, des problèmes, des solutions, des erreurs, des connaissances. L'aspect récursif introduit par Meyer (problématiser, puis problématiser la problématisation, et problématiser cette problématisation, et ainsi de suite) est en phase avec plusieurs éléments de la démarche en enaction, dont l'idée de circularité mentionnée plus haut (p. ex. Maturana, 1988; Maturana et Varela, 1992; Varela, 1988, 1999). Les réponses qui posent problème nous ramènent alors au travail de l'observateur, qui est également une forme de problématisation. Poussant à l'extrême, on peut sans doute aller jusqu'à suggérer qu'*enseigner les mathématiques* n'est autre chose que de participer à la problématisation mathématique des élèves à partir de ce qu'on leur présente et qu'*apprendre les mathématiques* c'est peut-être essentiellement s'engager dans un «champ problématique» (expression empruntée à Deleuze, 1968, p. 214), où «faire mathématique» (Maheux et Proulx, 2014) permet de poursuivre l'enchaînement des questions et des réponses, c'est-à-dire la problématisation mathématique elle-même.

On dira sans doute que nous risquons fort, par une telle approche, de perdre en quelque sorte la spécificité du genre d'activités auxquelles on pense quand on évoque la «résolution de problème». En retour, cet élargissement de la notion peut nous amener à réfléchir davantage aux particularités des situations ou du travail que nous désignons généralement ainsi, et dont l'expression «résolution de problème» masque en quelque sorte la richesse et la diversité. Il s'agit également, et en toute cohérence, de penser que le chercheur en didactique des mathématiques est *aussi* occupé à problématiser mathématiquement, que ce soit au moment de concevoir des situations, d'analyser des productions d'élèves ou le travail d'enseignants, voire de communiquer à propos de ses observations!

Et le «*problem posing*»?

Avec cette proposition de reformulation de l'idée de résolution de problème vers celle de problématisation mathématique, il semble important et intéressant de faire un lien avec d'autres travaux en didactique des mathématiques. Plusieurs courants de recherche pourraient être mis à contribution, l'idée de problématisation telle qu'elle a été discutée plus haut n'étant pas sans rappeler le concept de *mathématisation* par exemple (Bauersfeld, 1994; Brousseau, 1998), voire de modélisation mathématique. Vu l'espace disponible ici et le thème de ce numéro spécial, nous nous contentons d'évoquer quelques pistes du côté de ce qu'on appelle en anglais le

« *problem posing* » (qui se compare bien avec l'expression « *problem solving* »), et qui recouvre en gros ce qu'on envisage en le traduisant par l'expression *composition de problèmes*. Ce genre d'activité, rapporté depuis de nombreuses années (Polya, 1965; Silver, 1994; Brown et Walter, 2005; Kilpatrick, 1987; numéro thématique de ESM, 2013), offre plusieurs parallèles avec ce que nous avons décrit à propos de la problématisation mathématique, en plus d'être souvent discuté en lien avec ce qu'on appelle généralement la résolution de problème. On garde cependant en tête que, selon la perspective proposée ici, il n'est pas question de distinguer le traitement d'un énoncé (vu comme venu de l'extérieur) de la formulation d'un énoncé pouvant faire l'objet d'un traitement mathématique, l'idée fondamentale étant justement que ces deux types d'activités ne sont pas différents l'un de l'autre dans l'expérience qu'on en fait (voir par exemple nos travaux dans Proulx, 2013b; voir aussi Sevim et Cifarelli, 2013). Si s'engager dans la résolution d'un problème c'est forcément *problématiser mathématiquement* ce qui nous est proposé (qu'il s'agisse d'un énoncé ou d'un « problème sans mots » comme on en voit de plus en plus, par exemple dans Voica *et al.*, 2013), il en va de même quand il s'agit de composer entre eux divers éléments afin de proposer une situation ou un énoncé pouvant être abordé mathématiquement.

En ce sens, bien que la *problématisation mathématique* déborde largement le cadre de la formulation de problèmes, plusieurs observations issues de la recherche sur ce type d'activité peuvent nous aider à articuler l'idée lancée par Varela dans le cadre des travaux autour de l'enaction. On pense par exemple aux propos de Kilpatrick (1987), qui souligne le caractère créatif de la *reformulation* de problèmes faisant émerger des liens, des idées. Prenant en compte l'idée selon laquelle celui ou celle qui aborde mathématiquement une situation doit la problématiser mathématiquement pour qu'elle existe à ce moment comme problème, un travail semblable de génération de liens et d'idées mathématiques est certainement à l'œuvre dans ce qu'on pourrait appeler la (re)formulation en tant que problème. Une nuance importante tient cependant au fait que ce processus de reformulation n'est pas nécessairement explicite même pour celui ou celle qui problématise. L'idée de rendre mathématiquement accessible un énoncé par (re)formulation (Whitin, 2004) est également intéressante : pour problématiser, on a recours à des idées mathématiques, ne serait-ce que pour présager la pertinence du travail en cours (aspect fondamental de l'activité mathématique selon Hadamard (1959) par exemple). On reconnaît aussi dans la problématisation mathématique l'idée d'accepter ou de contester ce qui est « donné » par une situation (« *accepting the givens* » et « *challenging the givens* ») comme point de départ pour l'investigation mathématique de la situation rencontrée (Brown et Walter, 2005) (pensez à nouveau à l'âge du capitaine!). Toujours dans le même sens, on trouve même chez Duncker (1945), par exemple, une proposition selon laquelle toute *avancée* sur un problème est en fait une reformulation du problème en question. Ces (re)formulations « locales » s'appuient naturellement sur des définitions, des règles, bref, sur des idées mathématiques relativement familières (Hershkowitz, Schwarz et Dreyfus, 2001) qu'il s'agit de mettre « en discussion » avec la situation (Banwell, Saunders et Tahta, 1972). Et on reconnaît de plus en plus le caractère ouvert, non fini, de ce dialogue, chaque « problème » conduisant à de nouveaux problèmes

dont l'ensemble pourra éventuellement être interprété comme une résolution de celui qui aura stimulé cette génération (Lewis, Petrina et Hill, 1998). Dans sa thèse, Armstrong (2013) cite en ce sens les propos de Vera et Crossman (2004) concernant le travail de création de l'artiste :

As part of the creative process, actors find a problem for themselves, spend some time solving the problem, and find a new problem during the solving of the last one (p. 737).

D'une part, il s'agit évidemment d'un élargissement important du travail fondateur de Silver (1994), qui ouvrait déjà cette voie en reconnaissant au *problem-posing* une présence aux trois « moments » d'une investigation mathématique : avant d'avoir une solution, à l'intérieur de la résolution, et après ce processus. D'autre part, le rapprochement proposé par Armstrong avec les idées de Bauersfeld (1994) en termes de rafistolages et de bricolages (« *tinkering and bricolage* »), caractéristiques du côté « confus » et des « adaptations pragmatiques » qu'il rattache à l'activité mathématique, nous ramène alors tout à fait aux propos de Varela et à sa distinction entre une approche en termes de « problèmes » qui existeraient en dehors du travail de celui ou celle qui les rencontre et la sérieuse prise en compte du travail de problématisation inhérent à toute approche (mathématique) d'une situation.

C'est une idée que l'on retrouve également du côté de la recherche sur la composition de problèmes mathématiques par des élèves, où il a été démontré que la formulation d'énoncés peut conduire à déclencher une activité mathématique productive et prolongée, mettant en oeuvre un processus continu de composition de problèmes subsidiaires (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi et Sriraman, 2005; Ponte et Matos, 1992). Inspiré par l'enaction, nous insistons alors sur le fait que cet effet « déclencheur » ne répond pas à une logique de cause à effet, mais crée des occasions (Kieren, 1995, utilise en anglais le verbe « *to occasion* »), la résultante dépendant évidemment de celui ou celle à qui ces occasions s'offrent. Chacune de ces problématisations conduit à une activité mathématique différente, avec des buts et intentions différentes, mariant très étroitement ce qu'on pourrait appeler la composition et la résolution de problème (voir ici aussi nos propos dans Proulx, 2013b, et ceux de Sevim et Cifarelli, 2013).

Il va de soi que nous faisons ici une lecture fort orientée des écrits autour du *problem-posing* afin de mettre en lumière ce que nous présentons comme l'activité mathématique de l'élève inspirée par les écrits en enaction⁵. L'essentiel pour nous est d'aider à apprécier l'idée d'une perspective où les problèmes que nous rencontrons et les questions que nous posons font autant partie de nous que de notre environnement : ils émergent continuellement de notre constante interaction avec lui. Nous interprétons les événements qui nous entourent comme des éléments à aborder, nous les vivons comme des problèmes à résoudre :

5. On pourrait évidemment faire aussi l'exercice autour de la recherche sur la résolution de problème elle-même, s'intéresser au travail mathématique, aux heuristiques qui y sont présentées sous l'angle particulier de la problématisation : nous souhaitons en fait inviter le lecteur à faire cet exercice, voire à (re)lire les articles composant ce numéro thématique sous cet angle...

La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de poser les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies mais *enactées*, on les *fait-émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d'une manière toujours contextuelle (Varela, 1996, p. 91).

L'interaction en continu avec l'environnement crée en même temps les situations sur lesquelles nous agissons et nos manières d'agir sur elles. Bien sûr, il n'est pas question ici de détermination stricte et prédictible. On parle plus justement de l'ouverture vers un monde de possibles dont l'indétermination est à la fois ce qui permet qu'un « problème » existe et qu'une solution soit probable (mais non certaine) : dialectique dont le fameux travail de Gödel a démontré être au cœur de toute entreprise mathématique. L'idée d'une rencontre aux conséquences inattendues entre un organisme et son environnement, aux racines du travail en enaction, conduit naturellement à considérer que si tels éléments de l'environnement déclenchent des réactions chez certaines personnes, ce ne sera pas nécessairement le cas chez d'autres, d'où l'idée qu'il n'y a pas de « problème » qui soit là « en attente », mais plutôt l'*émergence* de problème dans l'interaction avec, par exemple, une tâche. Dans les mots de Simmt (2000), on ne donne pas de problèmes aux élèves, mais plutôt des énoncés avec lesquels ils font des problèmes : l'énoncé devient problème quand l'élève en fait un problème.

Problématiser mathématiquement – vers une nouvelle conceptualisation de l'activité mathématique de l'élève

Dans ce qui précède, nous avons proposé de considérer ce qu'on appelle généralement la « résolution de problème » en tant que *problématisation mathématique*. Prenant en partie notre inspiration dans l'enaction, cette reformulation, qui nous amène à considérer le problème par l'élève (et non en dehors de lui ou elle), s'appuie sur une approche particulière de l'activité mathématique fondée sur l'idée que nous avons évoquée ailleurs de *faire mathématique* (Maheux et Proulx, 2014). Dans une telle approche du faire mathématique, l'attention se porte non pas sur le savoir ou sur les connaissances – qui sont comme les deux côtés d'une même lentille nous conduisant, comme observateurs, à « voir » l'activité mathématique en termes de « choses » (p. ex. connues ou à connaître) – mais sur l'activité mathématique elle-même, dont l'essentiel est peut-être de la rendre possible, voire désirable. Conceptualiser l'activité mathématique de l'élève en termes de problématiser mathématiquement nous pousse dans cette même direction.

Il s'ensuit que nos recherches, présentées ici surtout au niveau théorique avec quelques illustrations tirées de nos travaux en cours, n'ont pas pour objectif de mettre au point ou de tester ce qui pourrait être une ou des « méthodes » pour apprendre ou enseigner des mathématiques. Nous nous intéressons plutôt à développer de nouvelles

façon d'*aborder* l'activité mathématique de manière à générer de nouvelles voies, de nouvelles questions pour la recherche, et peut-être, éventuellement, de nouvelles possibilités pour l'éducation mathématique (comme nous en parlons dans Proulx, 2010). Cela dit, le mot « méthode » pris au sens étymologique, du grec *methodos* qui signifie « chercher une voie, un chemin », n'est pas sans résonance avec la présente proposition (et on peut la ramener aux idées de Foucault citées plus haut). La nuance est sans doute que nous mettons l'accent sur la recherche elle-même, et son pouvoir générateur, plutôt que sur le chemin ou ce qui serait peut-être une « destination finale ».

Penser que l'élève qui fait (des) mathématique(s) est engagé dans un processus où il problématiser mathématiquement permet de formuler l'activité mathématique de la même manière, c'est-à-dire comme la recherche d'une voie, d'un chemin, dont le point d'arrivée nous est inconnu (sans quoi on ne parlerait pas de « problème » comme le dit Poirier, 2000) : *le chemin se fait en marchant*, pour reprendre l'expression souvent utilisée par Varela (p. ex. 1987; et empruntée au poète Antonio Machado). Nous espérons ainsi répondre en quelque sorte à l'appel de Pimm (2006), qui souligne l'urgence de concevoir des solutions de rechange à l'intemporalisation, à l'impersonnalisation et à la décontextualisation des mathématiques par lesquelles on se tient éloigné de la vie et de ceux qui *font* (des) *mathématique(s)*. Nous avons à quelques reprises évoqué l'aspect créateur de l'activité mathématique vu sous cet angle. Une autre idée-force que l'on peut dégager d'une telle approche est celle du risque associé à toute activité mathématique. Problématiser, c'est créer une ouverture dans laquelle on s'avance sans une idée claire de ce qui nous attend, c'est s'ouvrir à l'invisible, à l'inconnu (p. ex. Roth, 2012). C'est, comme dirait Derrida (1987), *invenir* : à la fois créer et laisser venir une altérité hétérogène et incalculable, préparer sa venue, prendre le risque, la chance de lui ouvrir le passage, alors qu'au moment même de problématiser aucun calcul ne permet de prévoir où cette activité mathématique nous conduira. L'accent est alors véritablement mis sur l'action mathématique, cette pensée disait Bachelard où « l'imprudence est une méthode ».

En parlant d'une nouvelle approche de l'activité mathématique (et) de l'élève, ce qui nous guide n'est pas l'idée d'un rapprochement au sens géométrique du terme, soit une réduction de la distance entre un point de départ et un point d'arrivée. C'est plutôt l'image du rapprochement qui vient en cheminant avec quelqu'un, avançant l'un avec l'autre. L'image d'une rencontre où les détours et les embûches deviennent un monde en commun. Trouvera-t-on dans cette approche une réponse à l'appel de Silver (2013), qui souligne le besoin urgent de développements théoriques permettant d'expliquer le lien entre résoudre et (com)poser des problèmes? Peut-être...

*Tout passe et tout demeure
Mais notre affaire est de passer
De passer en traçant
Des chemins
Des chemins sur la mer*
A. Machado (1973, p. 209)

Références bibliographiques

- ARMSTRONG, A. C. (2013). *Problem Posing as Storyline: Collective Authoring of Mathematics by Small Groups of Middle School Students*. Thèse doctorale, University of British Columbia, Vancouver, C.-B.
- BACCHI, C. (2012). Why study problematizations? Making politics visible. *Open Journal of Political Science*, 2(1), 1-8.
- BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, J. Vrin.
- BANWELL, C. S., SAUNDERS, K. D. et TAHTA, D. S. (1972). *Starting Points*. Stradbroke: Tarquin.
- BAUERSFELD, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 175-198.
- BLUM, W. et LEISS, D. (2005). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), *Mathematical Modeling (ICTMA-12). Education, Engineering and Economics* (p. 222-231). Chichester: Horwood.
- BROWN, L. et COLES, A. (2012). Developing « deliberate analysis » for learning mathematics and for mathematics teacher education. How the enactive approach to cognition frames reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 217-231.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- BROUSSEAU, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques. Cours de la 12^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 165-249). Grenoble: La pensée sauvage.
- BROWN, S. I. et WALTER, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3^e éd.). New York: Routledge.
- CHRISTOU, C., MOUSOULIDES, N., PITTALIS, M., PANTAZI-PITTA, D. et SRIRAMAN, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.
- DAVIS, B. et SIMMT, E. (2004). « Mathématiques pour l'enseignement »: Une recherche longitudinale sur les connaissances mathématiques des enseignants (ou celles dont ils auraient besoin). *Actes du colloque 2004 du Groupe des didacticiens de mathématiques du Québec* (p. 5-21). Québec: GDM.
- DAVIS, B., SUMARA, D. et KIEREN, T. (1996). Cognition, co-emergence, curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 28(2), 151-169.

- DEACON, R. (2000). Theory as practice. Foucault's concept of problematization. *Telos*, 118, 127-142.
- DELEUZE, G. (1968). *Différence et répétition*. Paris : Presses universitaires de France.
- DERRIDA, J. (1987). *Psyché. Invention de l'autre* (tome 1). Paris : Galilée.
- DUNCKER, K. (1945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(5).
- Educational Studies in Mathematics (2013). Dossier thématique. *PME Special Issue: Problem Posing in Mathematics Teaching and Learning: Establishing a Framework for Research*, 83(1).
- FABRE, M. (2009). *Philosophie et pédagogie du problème*. Paris : Vrin.
- FOUCAULT, M. (1985). *Michel Foucault, une histoire de la vérité*. Paris : Syros.
- GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (1988). *Fascicule K. Guide pédagogique, primaire, mathématiques. Résolution de problèmes. Orientation générale*. Québec : Ministère de l'Éducation.
- HADAMARD, J. (1959). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris : Librairie scientifique Albert Blanchard.
- HERSHKOWITZ, R., SCHWARZ, B. et DREYFUS, T. (2001). Abstraction in context. Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- KIEREN, T. E. (juin 1995). *Teaching Mathematics (in-the-middle): Enactivist View on Learning and Teaching Mathematics*. Paper presented at the Queens/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference, Queens University, Kingston, Canada.
- KILPATRICK, J. (1987). Problem formulating. Where do good problems come from? Dans A. H. Schoenfeld (dir.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (p. 123-147). Hillsdale, NJ : Erlbaum.
- LEWIS, T., PETRINA, S. et HILL, A. M. (1998). Problem posing – adding a creative increment to technological problem solving. *Journal of Industrial Teacher Education*, 36(1).
- MACHADO, A. (1973). *Champs de Castille*. Paris : Gallimard.
- MAHEUX, J.-F. et PROULX, J. (2014). Vers le faire mathématique. Essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 19.
- MATURANA, H. R. (1987). Everything is said by an observer. Dans W. I. Thompson (dir.), *Gaia: A way of knowing* (p. 65-82). Hudson, NY : Lindisfarne Press.
- MATURANA, H. R. (1988). Reality: The search for objectivity of the quest for a compelling argument. *Irish Journal of Psychology*, 9(1), 25-82.
- MATURANA, H. R. et VARELA, F. J. (1992). *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding* (éd. rev.). Boston, MA : Shambhala.

- MATURANA, H. R. et VARELA, F. J. (1994). *L'arbre de la connaissance*. Paris : Addison-Wesley France.
- MEYER, M. (1986). *De la problématologie : philosophie, science et langage*. Bruxelles : P. Mardaga.
- PIMM, D. (2006). Drawing on the image in mathematics and art. Dans N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson (dir.), *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity* (p. 160-190). Berlin : Springer.
- POIRIER, L. (2000). *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*. Montréal : Renouveau pédagogique.
- POLYA, G. (1965). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (vol. II). New York : John Wiley & Sons.
- PONTE, J. et MATOS, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in investigation activities. Dans J. Ponte *et al.* (dir.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice* (p. 239-254). Berlin : Springer.
- PROULX, J. (2010). Les objectifs et les illusions de la recherche en didactique des mathématiques. Réflexions et parcours de jeune chercheur. Dans J. Proulx (dir.), *Actes de la journée d'étude sur l'entrée du jeune chercheur dans le milieu de la recherche en didactique des mathématiques : aléas, expériences et significations* (p. 43-50). Montréal.
- PROULX, J. (2013a). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18, 61-90.
- PROULX, J. (2013b). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 309-328.
- PROULX, J. (2014). Mental mathematics and operations on functions. *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (vol. 5, p. 17-24). Vancouver, Canada.
- PROULX, J., SIMMT, E. et TOWERS, J. (2009). RF05: The enactivist theory of cognition and mathematics education research. Issues of the past, current questions and future directions. Dans M. Tzekaki, M. Kaldrimidou et H. Sakonidis (dir.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 249-278). Thessalonique, Grèce.
- RADFORD, L. (1996). La résolution de problèmes : comprendre puis résoudre? *Bulletin de l'Association mathématique du Québec (AMQ)*, 36(3), 19-30.

- REID, D. (1996). Enactivism as a methodology. Dans L. Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 203-210). Valence, Espagne : PME.
- RENÉ DE COTRET, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. Dans G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques (Cognition in Mathematics Education)* (p. 103-120). Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.
- REID, D., BROWN, L., COLES, A. et LOZANO, L. (à paraître). *ZDM*, numéro spécial *Enactivist Methodology in Mathematics Education Research*.
- ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 343-388.
- ROTH, W. M. (2012). Mathematical learning, the unseen and the unforseen. *For the Learning of Mathematics*, 32(3), 15-21.
- SEVIM, V. et CIFARELLI, V. V. (2013). The co-evolution of problem posing and problem solving in the course of Sarah's on-going solution activity. Dans A. M. Lindmeier et A. Heinze (dir.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 137-144. Kiel, Allemagne : PME.
- SILVER, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- SILVER, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education. Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162.
- SIMON, R. (1985). A frog's eye view of the world. Structure is destiny: An interview with Humberto Maturana. *The Family Therapy Networker*, 9(3), 32-37 et 41-43.
- SIMMT, E. (2000). *Mathematics Knowing in Action: A Fully Embodied Interpretation*. Thèse de doctorat, University of Alberta, Edmonton, Canada.
- THOM, J. S., NAMUKASA, I. K., IBRAHIM-DIDI, K. et MCGARVEY, L. M. (2009). Perceptually guided action. Invoking knowing as enaction. Dans M. Tzekaki, M. Kaldrimidou et H. Sakonidis (dir.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 252-256). Thessalonique, Grèce : PME.
- VARELA, F. J. (1987). Laying down a path in walking. Dans W. I. Thompson (dir.), *Gaia: A Way of Knowing. Political Implications of the New Biology* (p. 48-64). New York : Lindisfarne Press.
- VARELA, F. J. (1988). Le cercle créatif. Dans P. Watzlawick (dir.), *L'invention de la réalité. Contributions au constructivisme* (p. 329-345). Paris : Seuil.

- VARELA, F. J. (1996/1988). *Invitation aux sciences cognitives* (P. Lavoie, trad.). Paris : Seuil.
- VARELA, F. J. (1999). *Ethical Know-How: Action, Wisdom, and Cognition*. Stanford : Stanford University Press.
- VARELA, F. J., THOMPSON, E. et ROSCH, E. (1991). *The Embodied Mind. Cognitive Science and Human Experience*. Cambridge, MA : MIT Press.
- VERA, D. et CROSSAN, M. M. (2004). Theatrical improvisation. Lessons for organizations. *Organization Studies*, 25(5), 727-749.
- VOICA, C., PELCZER, I., SINGER, F. M. et CULLEN, C. (2013). When (and how) does a posed problem become a problem? Dans A. M. Lindmeier et A. Heinze (dir.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 137-144). Kiel, Allemagne : PME.
- WHITIN, D. J. (2004). Building a mathematical community through problem posing. Dans R. N. P. Rubenstein et G. W. Bright (dir.), *Perspectives on the Teaching of Mathematics. Sixty-sixth Yearbook* (p. 129-140). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- XIN, Y. P. (dir.) (2012). *Conceptual Model-Based Problem Solving*. Taipei : Sense Publishers.
- XIN, Y. P. et ZHANG, D. (2011). Exploring a conceptual model-based approach to teaching situated word problems. A rejoinder to Jitendra's response to Yan Ping Xin and Dake Zhang. *The Journal of Educational Research*, 104(5), 375-379.
- ZACK, V. et REID, D. A. (2003). Good-enough understanding. Theorising about the learning of complex ideas (part 1), *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 43-50.
- ZACK, V. et REID, D. A. (2004). Good-enough understanding. Theorising about the learning of complex ideas (part 2), *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 24-28.

Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs

Jean-Philippe BÉLANGER

Université Laval, Québec, Canada

Lucie DEBLOIS

Université Laval, Québec, Canada

Viktor FREIMAN

Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs

Jean-Philippe BÉLANGER

Université Laval, Québec, Canada

Lucie DEBLOIS

Université Laval, Québec, Canada

Viktor FREIMAN

Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada

RÉSUMÉ

En approfondissant le concept du jeu symbolique (Vygotsky, 1933/1966) traité dans la théorie de l'imagination créative (Smolucha, 1992), nous avons défini la notion d'imagination et de créativité pour la situer dans le processus d'apprentissage des élèves (DeBlois, 2003). Ces productions s'inscrivent dans le contexte de la résolution de problèmes algébriques par des élèves du troisième cycle du primaire et du premier cycle du secondaire. Notre étude a porté sur 50 productions d'élèves venant d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs (CAMI). Nous avons utilisé la métaphore des couleurs pour cerner les quatre créativités émergeant des productions des élèves.

ABSTRACT

Interpreting the creativity of reasoning in students' mathematics work in a multidisciplinary and interactive learning community

Jean-Philippe BÉLANGER
University Laval, Quebec City, Canada

Lucie DEBLOIS
University Laval, Quebec City, Canada

Viktor FREIMAN
University of Moncton, New Brunswick, Canada

Expanding the concept of symbolic play (Vygotsky, 1933/1966) addressed in the theory of the creative imagination (Smolucha, 1992), we defined the concept of imagination and creativity in relation to the student learning process (DeBlois, 2003). This work falls under the realm of algebraic problem solving by students in third cycle elementary and first cycle secondary. We based our study on 50 examples of student work from a Multidisciplinary Interactive Learning Community (MILC). We used colour metaphors to identify the four types of creativity that emerged from the student work.

RESUMEN

Interpretar la creatividad del razonamiento en las producciones matemáticas de los alumnos de una comunidad de aprendizajes multidisciplinarios interactivos

Jean-Philippe BÉLANGER
Universidad Laval, Quebec, Canadá

Lucie DEBLOIS
Universidad Laval, Quebec, Canadá

Viktor FREIMAN
Universidad de Moncton, Nueva-Brunswick, Canadá

Al profundizar el concepto de juego simbólico (Vygotsky, 1933/1966) tratado por la teoría de la imaginación creativa (Smolucha, 1992), definimos la noción de imaginación y de creatividad para situarla en el proceso de aprendizaje de los alumnos (DeBlois, 2003). Las producciones se sitúan en el contexto de resolución de problemas algebraicos realizados por alumnos de tercer ciclo de primaria y de primer ciclo de secundaria. Realizamos nuestro estudio a partir de 50 producciones de

alumnos provenientes de una Comunidad de aprendizajes multidisciplinarios interactivos (CAMI). Utilizamos la metáfora de los colores para cernir las cuatro creativi-
dades que emergen de las producciones de los alumnos.

Introduction

Les programmes d'études introduits dans le courant de récentes réformes de l'enseignement de mathématiques, comme celle menée au Québec, présentent la créativité comme une composante essentielle de la pensée mathématique. Par exemple, au primaire comme au secondaire, le raisonnement mathématique à développer est déductif, inductif et créatif (MELS, 2006a et b). Les activités d'apprentissage doivent alors solliciter « tout autant l'imagination, la créativité, le désir d'explorer et le plaisir de la découverte que le besoin de comprendre et d'expliquer » (MELS, 2006b, p. 268).

Toutefois, les mathématiques ne semblent pas être perçues comme une discipline ayant une composante « créativité ». Kauffman et Bauer (2004) ont d'ailleurs trouvé que plusieurs élèves s'estiment créatifs dans plusieurs disciplines scolaires, mais pas en mathématiques. Un constat semblable est fait au primaire et au secondaire. Cela se reflète dans les solutions aux problèmes proposés aux élèves. Ces derniers croient qu'ils doivent donner une seule (bonne) réponse en employant une seule (bonne) manière de la trouver (Demonty *et al.*, 2003).

Nous nous sommes donc servis de la base de problèmes et de solutions d'élèves soumis par l'intermédiaire du site Internet CAMI (<http://www.caminb.ca/cfdocs/cami/cami/index.cfm>). Le but de cet outil était d'aider les élèves francophones du Nouveau-Brunswick, une province canadienne bilingue pour laquelle la réforme de l'enseignement de mathématiques (Freiman *et al.*, 2012) s'inscrit dans une logique de programme souhaitant développer des compétences à résoudre des problèmes mathématiques chez les élèves.

La créativité, une manifestation de l'imagination

Le concept de créativité se définit de multiples façons (Mann, 2006). Tant dans ses définitions que dans ses approches psychologiques ou dans les types de recherches menées (Sriraman, 2009), il s'agit d'un concept difficile à cerner. Cette difficulté vient notamment du fait que la créativité peut s'intéresser au produit d'une activité ou encore au processus mis en place afin de la réaliser (Haylock, 1997). En outre, selon Levenson (2011), la créativité peut être absolue ou relative. Elle est absolue lorsqu'elle bouleverse les savoirs institutionnels.

Selon Vygotsky (2004), l'imagination est le moteur de toute activité créative à l'intérieur d'une culture. Il en va de même pour la théorie de l'imagination créative

(Smolucha, 1992). Celle-ci consiste en un agencement de plusieurs travaux de Vygotsky afin de comprendre la créativité et l'imagination au sens vygotkien. Selon cette théorie, l'imagination s'inspire du réel de deux façons. En premier lieu, l'imagination utilise des éléments du réel qu'un individu a expérimentés. En deuxième lieu, elle favorise le processus d'adaptation de l'être humain au réel, dans n'importe quelle activité créative. Dans cette perspective, l'imagination contribue à la construction du système de connaissances personnelles permettant la compréhension de la culture mathématique. Selon Smolucha (1992), ce système de connaissances est géré par l'imagination reproductive et la combinaison imaginée. Intimement liée à notre système de connaissances personnelles, l'imagination reproductive permet de recréer ce qui a été expérimenté. Quant à la combinaison imaginée, elle permet de réorganiser les éléments des expériences passées dans un nouveau contexte et, même, de parvenir à la création de nouvelles actions, une perspective qui s'apparente à la vision de l'imagination et de la créativité de Liljedahl (2009). Selon ce dernier, l'imagination regroupe un ensemble d'expériences personnelles régi par ce qui est considéré comme possible, alors que la créativité est une force qui émancipe la personne afin qu'elle reconsidère ce qui est possible. Ainsi, par la créativité, l'imagination crée de nouvelles relations entre les expériences passées, le présent et le futur. Contrairement à Smolucha (1992), Liljedahl (2009) estime que la créativité des élèves n'est pas contextualisée, mais absolue en fonction du « possible ». Or, de la lecture de Tammadge (1979) nous retenons que le contexte est une composante essentielle à la créativité, qui exige de générer des relations entre des actions et des contextes d'application. Ainsi, dès que nous changeons de contexte, le « possible » est à reconstruire pour l'élève.

Chaque élève construit constamment contre et sur son système de connaissances. En classe de mathématiques, les élèves sont invités à s'approprier une partie de la culture mathématique en s'appuyant sur leurs expériences personnelles. Puisque nous analysons les traces des élèves, nous nous intéresserons à leurs produits. Nous nous intéresserons également à la créativité relative (Levav-Waynberg et Leikin, 2012; Pehkonen, 1997), c'est-à-dire celle qui s'ancre chez un individu à partir de son interprétation et de son système de connaissances. C'est ainsi que, dès le moment où un nombre ou un mot de l'énoncé est remplacé par un autre, l'élève mobilise sa créativité pour créer de nouvelles relations entre le problème et son système de connaissances. Tous les changements de contexte d'un problème n'étant pas équivalents, il nous faut considérer le contexte dans lequel les produits de la créativité des élèves ont été conçus. En effet, les élèves devront adapter leur système de connaissances pour répondre au problème posé. Notre définition de la créativité correspond ainsi à la mise en relation du système de connaissances de l'élève avec les figures, les mots, les nombres présents dans l'activité de la résolution de problèmes, et ce, en fonction du besoin défini par l'élève.

Impact du choix de la théorie de l'imagination créative sur la résolution de problèmes

Selon Wertsch (1990), pour comprendre les travaux de Vygotsky il faut tenir compte de l'origine des changements de la pensée chez l'enfant. En corollaire, il sera important de considérer l'évolution de l'imagination, car c'est elle qui alimente la créativité de l'élève. Après avoir abordé la pensée en concepts au regard des registres sémiotiques, nous poursuivrons en traitant du jeu par rapport aux représentations de la situation.

La pensée en concepts

Selon la théorie de l'imagination créative (1992), à l'adolescence l'imagination se modifie et se transforme sous l'influence de divers regroupements de connaissances que l'élève reconstruit au fil de ses expériences. C'est ce que Vygotsky appelle « la pensée en concepts¹ » (Smolucha, 1992, p. 60). La puissance de la pensée en concepts permet à l'élève de prendre de la distance par rapport à ce qui lui est présenté (Smolucha, 1992), lui donnant ainsi la liberté nécessaire à la création.

En résolution de problèmes, il existe plusieurs façons de représenter un concept mathématique. Pour Duval (1993, p. 39), les registres de représentations sémiotiques sont « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement ». Ils correspondent à différentes représentations d'un même concept mathématique : représentation numérique (nombre), arithmétique (opérations d'addition, de multiplication...), algébrique (algèbre), géométrique (triangle, cube...) et graphique (plan cartésien, figure). Nous définissons le diagramme comme étant un dessin permettant d'actualiser les actions de l'élève, sur la base du potentiel du dessin, afin de matérialiser le possible selon le contexte du dessin (Sinclair *et al.*, 2013).

Étant donné que chaque représentation ne permet d'entrevoir qu'une partie d'un concept ou d'une information en lien avec le problème (Dreyfus et Eisenberg, 1996; Duval, 1993, 2006), les élèves doivent établir des liens entre toutes ces informations. Cette activité peut être exigeante. En effet, pour certains élèves, la création de relations entre les représentations sémiotiques correspond à la principale difficulté en mathématiques (Duval, 2006). Ainsi, en reprenant la théorie de l'imagination créative, nous considérerons que, lorsque la pensée en concepts parvient à regrouper différentes représentations, elle fournit à l'élève un registre de représentation sémiotique lui permettant d'adapter ses connaissances au contexte du problème.

Comme Hitt (2004) ainsi que Hitt et Passaro (2007), en plus de considérer les représentations sémiotiques institutionnalisées, nous nous intéresserons aux mots et aux registres spontanés (diagrammes). À cette fin, il devient nécessaire d'étudier les contraintes du problème, mais aussi celles dont l'élève tient compte dans l'élaboration de sa démarche.

1. Il s'agit d'une traduction libre.

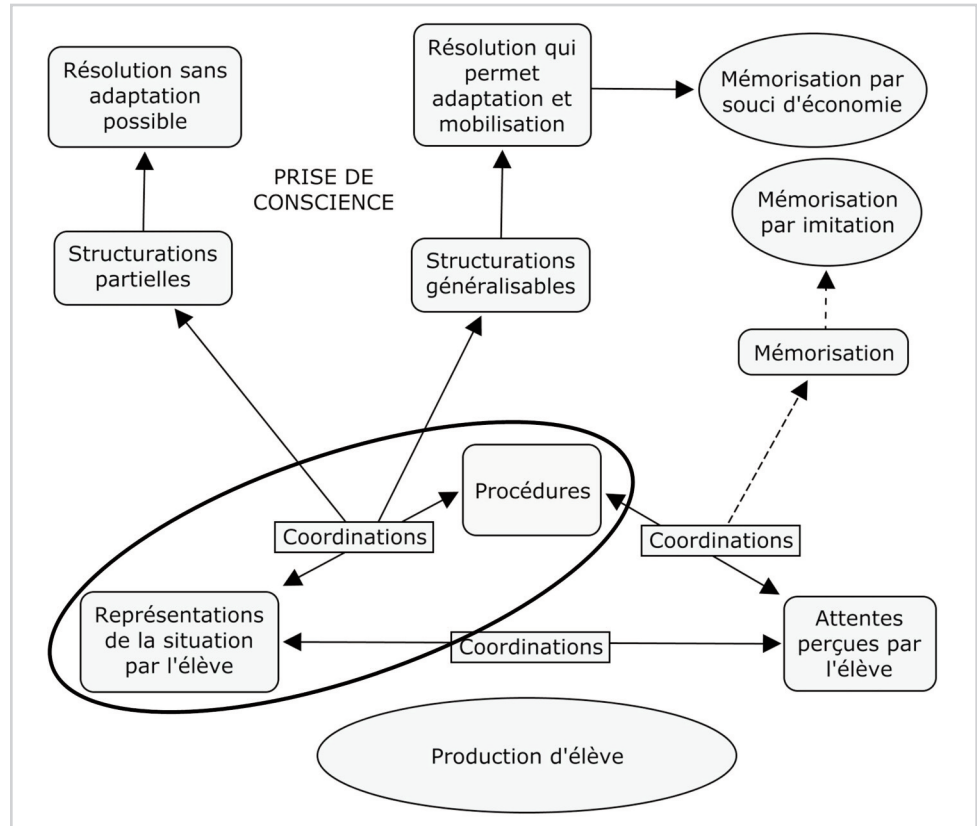
Le jeu des contraintes

Selon Smolucha (1992), le jeu contribue chez l'enfant à la création de situations imaginaires (Vygotsky, 1933/1966). Les situations imaginaires se rapprochent du «réel», puisqu'elles sont composées de règles de conduites implicites et intériorisées par l'expérience de l'enfant. Par exemple, l'enfant qui joue à la maman doit respecter des règles liées au comportement de la mère. L'enfant observe et il mobilise son expérience pour accorder une importance particulière à certaines informations, par rapport à d'autres, dans un environnement physique donné. Peu à peu, son expérience lui permet de gagner une forme de liberté quant à la réalité tangible dont il était dépendant. L'action joue donc un rôle important sur la conscience du jeu par rapport au «réel» (Vygotsky, 1933/1966), mais c'est un détachement de cette action qui favorisera le développement de sa créativité. Les observations qui découlent de ses actions contribuent ainsi à la formation du système de connaissances de l'élève et à la création de règles qui jouent le rôle de contraintes.

La situation imaginaire chez l'enfant correspond ainsi à la représentation de la situation que l'élève s'est construite. Tout comme une situation imaginaire amène l'enfant à générer un nouveau potentiel d'actions, une représentation de la situation soutient un potentiel d'actions pour l'élève. Ainsi, la représentation d'une situation est imprégnée de contraintes implicites et explicites. Toutefois, ce n'est pas l'ensemble de l'environnement qui interagit avec l'élève, mais bien ce qui motive son activité : le milieu. Brousseau (1988, p. 320-321) distingue ainsi l'environnement du concept de milieu : « [Le milieu est] une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine. » Nous nous intéresserons donc au milieu dans lequel l'élève crée.

En considérant l'imagination comme le moteur du raisonnement de l'élève, le raisonnement mathématique serait une forme de jeu en relation avec les contraintes considérées par l'élève et du but qu'il s'est fixé. Cela nous amène à considérer le jeu des contraintes comme un point de départ pour entrevoir la créativité des élèves. Pour rendre opérationnelle cette conception de la créativité, nous devons utiliser un modèle qui fait intervenir à la fois la notion de représentations et celle d'actions. C'est ainsi que le modèle de DeBlois (2003) devient un outil pour interpréter les activités cognitives des élèves.

Figure 1. **Modèle d'interprétation des activités cognitives de l'élève**



Source : DeBlois (2003).

Dans ce modèle, tout comme dans celui du jeu de l'enfant (Vygotsky, 1933/1966), les actions émergent, notamment, des représentations que fait l'élève d'une situation. Par voie de conséquences, ce modèle devient un outil didactique qui nous permet de jeter un pont entre le jeu de l'enfant, ou la « pensée en concepts » de l'adolescent, et un contexte de résolution de problèmes en mathématiques. Le modèle de DeBlois (2003) est composé de trois pôles : les représentations de la situation par l'élève, les attentes perçues par l'élève et les procédures privilégiées par ce dernier. Dans ce travail, nous approfondissons les pôles des représentations de la situation et des procédures pour cerner la créativité qui permet l'alternance entre elles. Alors que les représentations de la situation par l'élève « émergent des énoncés des situations proposées » (DeBlois, 2003, p. 179), les procédures correspondent aux actions que les élèves entreprennent afin de résoudre le problème. Les coordinations réalisées entre ces deux pôles tout au long de la résolution de problèmes de l'élève, des aller-retour que nous considérons comme une alternance, laissent voir la créativité des élèves.

Pour réaliser ce projet, il devient important de cerner l'ensemble des contraintes implicites et explicites des problèmes soumis aux élèves. Il s'agira ensuite de

comparer les contraintes des problèmes avec les interprétations de ces contraintes faites par l'élève, pour étudier comment celui-ci les a intégrées à sa résolution de problèmes.

La notion de problème comme contexte pour réfléchir à la créativité en mathématiques

La résolution de problèmes est au cœur des mathématiques et de leur enseignement (Mason *et al.*, 2010; Fragnant et Vlassis, 2010; Zeitz, 2007). Tout comme Zeitz (2007), nous faisons la différence entre exercice et problème. L'exercice est une question qui se résout immédiatement, alors que le problème correspond à une question plus ouverte qui demande une réflexion importante et nécessite la mobilisation de plusieurs ressources. Au Québec, les problèmes dans les situations d'enseignement-apprentissage (MELS, 2006a) peuvent être contextualisés ou non. Les problèmes contextualisés offriraient un niveau de complexité supérieur aux problèmes non contextualisés, car ils exigent des élèves qu'ils créent des inférences pour les résoudre (Nathan *et al.*, 2002). Par exemple, la résolution de problèmes contextualisés exige que l'élève comprenne diverses relations mathématiques particulières du problème (De Corte *et al.*, 1985). Les travaux de Vergnaud (1981) ainsi que de Marchand et Bednarz (1999) ont contribué à distinguer différents types de relations afin de documenter la complexité d'un problème. Selon ces auteurs, le nombre de relations impliquées en fonction de la mobilisation des données, la nature des relations ainsi que l'enchaînement de ces relations sont des facteurs qui décident de la complexité d'un problème pour l'élève. Les travaux de Manuel (2010) ont proposé cinq caractéristiques pour les analyser. Le contexte ainsi que la complexité permettraient d'apprécier la créativité dans les productions des élèves. Nous avons tenu compte de ces facteurs pour sélectionner les problèmes à l'étude.

Tableau 1. Définitions des caractéristiques d'un problème permettant d'anticiper la créativité des élèves au sens de Manuel (2010)

Caractéristiques	Définitions
Ouvert	Problème ayant de multiples réponses possibles et pour lequel il existe plusieurs façons différentes de le résoudre
Complexe	Problème nécessitant que l'élève génère des relations non triviales entre les données du problème et ses connaissances
Mal défini	Problème pour lequel il manque des données ou des informations pour le résoudre
Contextualisé	Problème mal défini et qui demande une méthode de résolution pour être résolu
Sujet à de multiples interprétations	Problème ayant différentes interprétations possibles

Source : Manuel (2010, p. 44).

Objectifs de la recherche

Par notre projet de recherche, nous entendons analyser les caractéristiques des problèmes et celles des traces laissées par les élèves dans leur production. Nous porterons une attention particulière aux différents registres sémiotiques mobilisés par les élèves afin de proposer une solution. La question de recherche à laquelle nous répondrons est la suivante : Comment se manifeste la créativité des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes mathématiques?

Les objectifs de recherche sont les suivants :

- i. Décrire la créativité des élèves, à partir de leur production.
- ii. Apprécier les rapports entre les registres de représentation sémiotique et les processus dans lesquels s'engagent les élèves.

Méthodologie

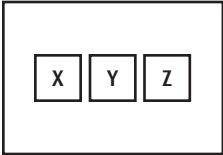
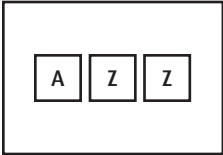
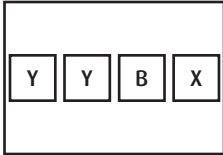
Contexte de recherche : la communauté virtuelle CAMI

Entamée dans le cadre d'une collaboration entre l'Université de Moncton et l'Université Laval, notre étude a permis d'étudier, sous un angle qualitatif, la créativité présente dans les productions mathématiques d'élèves qui utilisent le site CAMI. Nous avons choisi de travailler à partir des traces numériques laissées par les élèves lorsqu'ils résolvent un problème (Freiman et Lirette-Pitre, 2009). Nous croyons que cette analyse pourrait nous donner des outils pour sensibiliser les futurs enseignants à la diversité des processus adoptés par les élèves et la variété des représentations utilisées. En effet, les élèves peuvent utiliser des lettres et des nombres afin de communiquer leur réponse, tout comme ils peuvent introduire des schémas et des tableaux ainsi que divers types d'illustrations imaginées. Pour chacun des problèmes, nous avons retenu dix productions d'élèves en fonction de leur diversité. Les critères retenus sont la différence de registres sémiotiques (Duval, 1993) mobilisés et les différents raisonnements empruntés par les élèves pour trouver une solution. Pour chaque problème, nous avons d'abord effectué une analyse didactique. Nous avons ensuite analysé la démarche de chaque solution retenue pour interpréter la créativité à partir des contraintes liées au problème et des relations logico-mathématiques mises en jeu par les élèves.

Présentation des problèmes retenus

Nous nous sommes intéressés à deux problèmes de transformation et à trois problèmes de taux. Les problèmes de transformation (Marchand et Bednarz, 1999) se définissent comme étant des problèmes où l'élève doit retrouver l'état initial du problème, en créant des relations entre les données. Les problèmes de taux sont des problèmes dans lequel il y a un rapport. Le tableau 2 regroupe l'ensemble des problèmes auxquels nous nous sommes intéressés.

Tableau 2. **Ensemble des problèmes analysés selon leur type au sens de Marchand et Bednarz (1999)**

Type	Numéro et nom	Type
Transformation	N° 1 Le code secret	La tante de Chloé possède une collection d'anciennes pièces de monnaie. Cette collection est rangée dans un coffre. Ce coffre contient trois cadenas pour l'ouvrir. Deux cadenas ont une combinaison à trois chiffres, tandis que la dernière combinaison est de quatre chiffres. La figure suivante illustre les trois cadenas.  Cadenas 1  Cadenas 2  Cadenas 3 Chaque lettre correspond à un chiffre différent. La somme des combinaisons des deux premiers cadenas donne celle du troisième. Seulement un indice est nécessaire pour se souvenir de la combinaison des trois cadenas. Cet indice est le suivant : la valeur de z est impaire. Peux-tu trouver la combinaison des trois cadenas?
	N° 2 Problème des âges	Catherine et Jean ont trois enfants : Jocelyne, Mark et Tom. Ce dernier a deux fois l'âge de Mark, tandis que Jocelyne a trois ans de moins que Tom. Mark est sept fois plus jeune que sa mère. Catherine a entre 45 et 50 ans et Jean a six ans de moins que sa femme. Quel est l'âge de chaque membre de la famille?
Taux	N° 3 Des chiens et des poules	Jean-Yves a plusieurs oiseaux et chiens comme animaux domestiques. Combien d'animaux de chaque espèce a-t-il si ses animaux ont 9 têtes et 26 pattes en tout? La réponse culturellement plausible est 4 chiens et 5 oiseaux.
	N° 4 La ferme de Mathieu	Dans l'enclos, il y a des vaches et des poules. En regardant ces animaux, Mathieu compte 28 têtes et 90 pattes. Combien y a-t-il de vaches?
	N° 5 Les rennes	Lors d'un voyage chez ses grands-parents avant le début de l'hiver, Mélissa est passée avec sa famille près d'un champ où se trouvaient des rennes. Mélissa a décidé de compter les oreilles et les pattes. À son arrivée chez ses grands-parents, elle a raconté cette expérience à son grand-père, qui lui a demandé combien il y avait de rennes. Malheureusement, Mélissa se souvenait seulement que la différence entre le nombre des pattes et celui des oreilles était de 40. Combien y avait-il de rennes?

Analyse du problème permettant de repérer les contraintes

Le modèle de Kintsch et van Dijk (1978) nous a permis de nous intéresser à la cohérence locale de chaque phrase pour repérer les contraintes explicites. Par exemple, le problème n° 4 nous informe qu'il y a «28 têtes» et «90 pattes». Ces mots et ces nombres sont des contraintes explicites. Nous nous intéressons aussi aux indices laissés dans le texte, comme l'accord de certains mots, la construction des figures et

les référents. En outre, certaines inférences doivent être mises à jour afin que le problème ait une cohérence globale. Par exemple, afin de partager 28 têtes et 90 pattes selon le nombre de vaches et de poules, il faut savoir qu'une vache a une tête et quatre pattes, alors qu'une poule a une tête et deux pattes. Comme cette information n'est pas explicite, il s'agit d'une contrainte implicite. Les contraintes implicites contribuent à assurer une cohérence globale entre chaque contrainte. L'ensemble de ces contraintes influencera les représentations que l'élève se donne du problème (DeBlois, 2003).

Analyse de productions d'élèves

Afin d'apprécier la créativité qui émerge dans les solutions des élèves, nous avons choisi d'en faire une lecture « en positif », c'est-à-dire « essayer de comprendre ce qui se passe sur le plan intellectuel [...] et non pas se demander simplement ce qui manque à l'élève et ce qui lui permettrait de réussir » (Charlot, dans Brossard, 2005, p. 11). Nous avons défini les contraintes, les relations entre elles et l'articulation entre les registres de représentation sémiotique utilisés par les élèves. L'analyse des productions d'élèves fait ressortir les composantes de la créativité des élèves, dont la sensibilité des élèves à un milieu, à laquelle nous nous attarderons dans cet article.

La sensibilité des élèves à un milieu est composée des connaissances mobilisées. Cette sensibilité des élèves peut être observée par le choix des mots, des nombres ou encore des figures. L'étude du milieu auquel les élèves sont sensibles permet de repérer les contraintes explicites et implicites qui ont été mises en œuvre par ces derniers. Nous avons voulu éviter de qualifier de bonne ou mauvaise la créativité des élèves. Ainsi, dès que la sensibilité de l'élève permet de supporter l'ensemble des contraintes du problème, nous considérons que le processus est culturellement plausible². Dans le cas contraire, il est culturellement non plausible.

Les résultats de l'analyse et l'interprétation de données

Exemples de solutions d'élèves à partir d'un problème

Nous présentons d'abord le problème 3, suivi de deux solutions d'élèves³ au tableau 3. La solution attendue est 4 chiens et 5 oiseaux.

Jean-Yves a plusieurs oiseaux et chiens comme animaux domestiques. Combien d'animaux de chaque espèce possède-t-il si ses animaux ont 9 têtes et 26 pattes en tout?

-
2. Afin d'étudier la créativité des élèves, nous avons évité de considérer qu'une démarche était vraie ou fausse. Nous avons choisi de situer la démarche par rapport à la culture mathématique. Si la solution produite est plausible en fonction des savoirs socialement partagés de la discipline mathématique, nous la qualifierons de « culturellement plausible ». Dans le cas contraire, elle sera qualifiée de « culturellement non plausible ». Cette façon d'analyser nous permet de reconnaître l'engagement et la créativité des élèves à partir des buts qu'ils se sont donnés. Il devient possible d'interpréter l'activité cognitive des élèves selon leur perspective.
 3. Nous présentons les traces des élèves telles qu'elles apparaissent dans les productions étudiées.

Tableau 3. Deux solutions d'élèves pour le problème 3

Solution 1 (élève de 14 ans)	Solution 2 (élève de 13 ans)
9 têtes = 0	Un oiseau = 2 pattes et une tête
26 pattes = 1	Un chien = 4 pattes et une tête
0 = 1111	3 chiens = 12 pattes et 3 têtes
0 = 1111	7 oiseaux = 14 pattes et 7 têtes
0 = 1111	12 + 14 = 26 pattes
0 = 1111	2 + 7 = 9 têtes
0 = 11	Il a 3 chiens et 7 oiseaux.
0 = 11	
0 = 11	
0 = 11	
0 = 11	
5 x 2 = 10	
2 x 8 = 16	
Il a 4 chiens et 5 oiseaux.	

Dans la solution 1, l'élève associe chaque tête au symbole «0» et chaque patte au symbole «1». À partir de ces représentations, l'élève répartit le nombre de pattes par paires. Les calculs montrent que l'élève dénombre la quantité de pattes par multiples de deux et de quatre. Ainsi, les cinq oiseaux ont une paire de pattes chacun, alors que deux paires de pattes s'imposent dans le calcul de chacun des quatre chiens. Dans son ensemble, la solution de l'élève peut être interprétée comme un processus culturellement plausible.

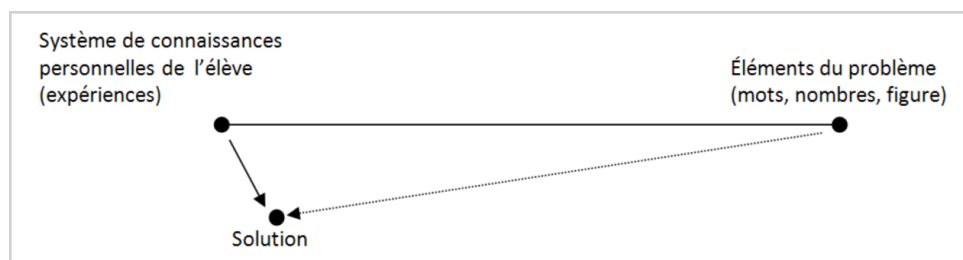
Dans la solution 2, nous voyons que l'élève semble établir des relations multiplicatives, en appliquant une règle de trois pour déterminer le nombre de pattes de chaque animal, ce qui correspond à une partie de l'énoncé. Par la suite, il tente d'arriver au nombre total de pattes (26 pattes) en additionnant 14 et 12. Toutefois, pour additionner le nombre de têtes, il fait la somme en utilisant les nombres 2 et 7 plutôt que 3 et 7. Nous posons l'hypothèse selon laquelle sa connaissance des nombres complémentaires ($2 + 7 = 9$) masque la contrainte à considérer ($7 + 3$). Ainsi, bien que le processus mis en œuvre soit culturellement plausible, l'élève a été sensible à ses connaissances isolées de la contrainte implicite. Chacune des 50 productions d'élèves a été analysée ainsi. Ces analyses ont conduit à reconnaître une diversité de démarches créatives mises en jeu par les élèves. Pour en rendre compte, nous avons utilisé la métaphore des couleurs, évitant ainsi de hiérarchiser ces démarches créatives. C'est ainsi que nous avons pu repérer les différentes «couleurs» de la créativité dans les productions d'élèves étudiées.

Créativité émergente dans les solutions d'élèves

Les problèmes de type « transformation » ont permis de repérer deux couleurs dans la créativité des productions d'élèves, alors que les problèmes de taux ont permis d'en observer quatre : la dominance du système de connaissances personnelles de l'élève, la dominance des contraintes du problème, la mise en relation des contraintes du problème à partir du système de connaissances personnelles de l'élève, de même que la mise en relation des contraintes du problème et des connaissances personnelles de l'élève à partir d'une recherche d'équilibre.

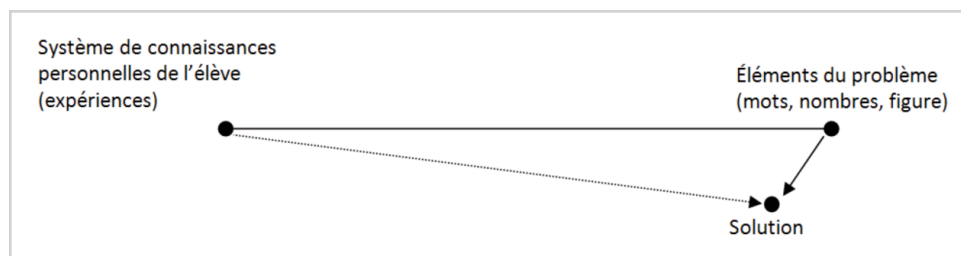
La figure 2 montre la démarche des élèves qui se nourrit essentiellement du système de connaissances personnelles de ces derniers. Dans ce cas, l'imagination génère un autre problème que celui proposé ou, encore, elle permet à certains élèves de proposer des réponses culturellement plausibles, mais avec un processus culturellement non plausible. Par exemple, pour le problème des oiseaux et des chiens, un élève de 12 ans a écrit : 1 chien = 1 tête, 1 oiseau = 2 pattes; 9 chiens = 9 têtes, 13 oiseaux = 26 pattes; Jean-Yves a 9 chiens et 13 oiseaux.

Figure 2. **Dominance du système de connaissances personnelles de l'élève qui oriente les calculs**



La figure 3 montre plutôt un processus qui se nourrit essentiellement des éléments du problème (mots, nombres, figure). Ces démarches d'élèves sont prisonnières des éléments du problème, ce qui laisse peu de place à leur imagination et, par conséquent, à leur créativité. Ainsi, lors de la résolution du problème des oiseaux et des chiens, un élève de 13 ans écrit : $9 + 26 = 35$; alors ils auront 35 animaux.

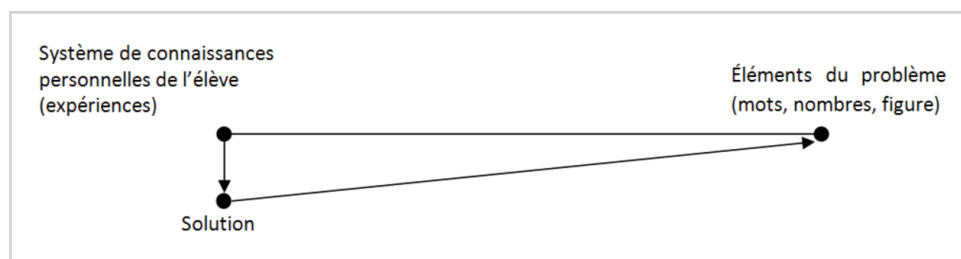
Figure 3. **Dominance des contraintes du problème qui oriente les calculs**



Ces deux couleurs de la créativité manifestée dans les productions des élèves ne permettent pas à l'élève de se doter de représentations culturellement plausibles à l'égard du problème. Elles amènent plutôt les élèves à se concentrer davantage sur l'un des deux pôles sans coordination. Ainsi, les processus observés chez ces élèves négligent soit leurs connaissances personnelles, soit les éléments du problème.

La figure 4 présente le processus des élèves qui abordent le problème à partir de leurs systèmes de connaissances personnelles. Ayant nourri cette créativité, les connaissances des élèves tendent à se coordonner avec les éléments du problème. Toutefois, bien que ce type de créativité génère plusieurs relations, ces dernières ne prennent pas nécessairement en compte les contraintes explicites en jeu. Par la suite, une coordination entre leurs connaissances personnelles et ce qui est présenté dans le contexte est repérée. La solution 2, que nous avons évoquée dans l'exemple du problème des oiseaux et des chiens, en est une illustration.

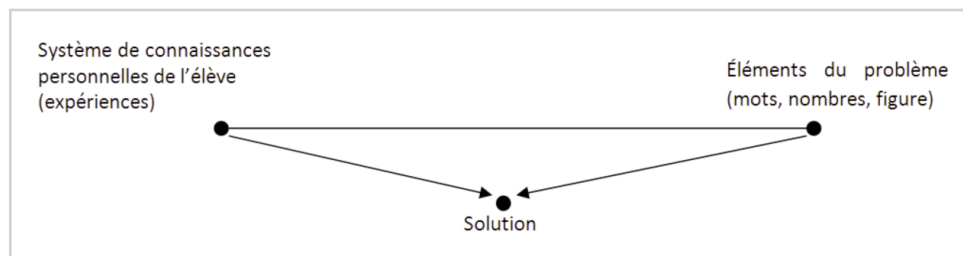
Figure 4. **Mise en relation des contraintes du problème à partir du système de connaissances personnelles de l'élève**



La figure 5 présente un processus qui se nourrit autant du système de connaissances personnelles des élèves que des éléments du problème. Plusieurs relations entre les contraintes implicites et explicites du problème sont présentes dans les productions étudiées. Les élèves qui génèrent ce type de processus ont une vision d'ensemble du problème. Ils commencent les calculs à partir de leur système de

connaissances personnelles et de certains éléments du problème. La solution 1 que nous avons évoquée dans l'exemple du problème des oiseaux et des chiens correspond à cette couleur.

Figure 5. **Mise en relation des contraintes du problème et des connaissances personnelles de l'élève à partir d'une recherche d'équilibre**



Ces résultats enrichissent le modèle de DeBlois (2003) en précisant l'importance du système de connaissance des élèves dans l'élaboration de leurs représentations de la situation. Ces résultats montrent aussi l'importance de permettre aux élèves d'élaborer leurs procédures pour les expérimenter, enrichissant d'autant leurs systèmes de connaissances personnelles. À ce sujet, les procédures se sont manifestées davantage à travers les registres spontané, numérique et arithmétique des élèves.

En effet, pour les cinq problèmes analysés, nous remarquons que, lorsqu'un seul registre de représentation est mobilisé, aucun des processus développés par les élèves n'est culturellement plausible. Toutefois, lorsque plusieurs registres sont mobilisés, les productions sont plus structurées.

Tableau 4. **Nombre de démarches par processus culturellement plausible et par solution culturellement plausible en fonction de l'articulation entre des registres (Bélanger, 2014)**

Articulation des registres de représentation sémiotique	Nombre de démarches ayant un processus plausible	Nombre de démarches ayant une réponse plausible	Nombre total de démarches
Un seul registre	0	1	4
Plusieurs registres indépendamment	4	4	14
Plusieurs registres simultanément	14	16	32
Total	18	21	50

Plus spécifiquement, lorsque le registre langagier est mobilisé simultanément avec un autre registre (spontané, numérique ou arithmétique), cela contribue à ce que le processus soit culturellement plausible. Le registre langagier occupe donc un

rôle important dans les processus de résolution de problèmes chez les élèves. Nos travaux sont donc cohérents avec ceux de Vygotsky (1978).

Nos travaux permettent aussi d'entrevoir autrement le travail de Sinclair *et al.* (2013) et ceux de Hitt (2004). L'une des forces du registre spontané par rapport aux autres registres est qu'il permet de gérer implicitement plusieurs contraintes, tout en soutenant les relations entre ces contraintes. Par exemple, ayant matérialisé les éléments du problème dans un dessin, l'élève s'emploie ensuite à effectuer des groupements d'informations à partir de ses expériences passées. À l'instar des travaux de Zeitz (2007) de Hitt (2004) et de Mason *et al.* (2010), cette recherche confirme l'importance de la présence et de la simultanéité de différentes représentations.

Enfin, nous pourrions poser l'hypothèse selon laquelle plus il y a de contraintes dans un problème, plus le problème est complexe pour les élèves, ce qui n'est pas le cas. Par exemple, le problème des âges et des cadenas sont deux problèmes de transformation comportant six contraintes. Toutefois, l'étude de ces dernières montre que le problème des cadenas comporte deux contraintes implicites, alors que le problème des âges n'en a qu'une. Cinq des six contraintes du problème des cadenas affectent les représentations de la situation alors qu'une seule, celle de la somme, s'applique aux procédures. Dans le problème des âges, deux des six contraintes influent sur les représentations de la situation, alors que quatre contraintes touchent les procédures. Lorsque les contraintes influencent les représentations du problème, cela offre un indicateur en ce qui a trait à la complexité des problèmes.

Pour les cinq problèmes étudiés, les représentations exposées sont culturellement non plausibles dès que l'élève, dans sa démarche: 1) omet l'intégration d'au moins une contrainte explicite; 2) tient compte partiellement d'au moins une contrainte explicite; 3) omet l'intégration d'au moins une contrainte implicite; 4) établit un lien avec une expérience qu'il tente d'adapter au contexte du problème sans toutefois y parvenir; 5) traite indépendamment chaque contrainte; 6) traite indépendamment les éléments du problème qui forment une contrainte.

Pour se doter d'une représentation plausible du problème, les élèves doivent traiter les contraintes comme un système interdépendant, c'est-à-dire en conservant les relations entre et dans les contraintes du contexte. Ainsi, dans un problème où il est question de séparer un nombre de têtes et un nombre de pattes en fonction de deux types d'animaux, certains élèves peuvent associer le nombre de pattes à un type d'animal et le nombre de têtes à l'autre. Pour que leur processus soit cohérent avec la culture mathématique, les élèves doivent tenir compte de la relation entre le nombre de pattes et le nombre de têtes. Une cohérence locale et une cohérence globale doivent faire partie des représentations, bien qu'une contrainte contribuant à une cohérence globale soit parfois utilisée localement.

Conclusion

Nous avons voulu étudier les productions des élèves à la lumière de la notion de créativité. Nous avons pu observer l'importance de l'alternance entre le système de connaissance des élèves et les contraintes des problèmes. Cette alternance a permis de repérer quatre manifestations de la créativité des élèves, lorsque ces derniers résolvent des problèmes mathématiques, malgré le fait que la solution soit unique à chacun des problèmes étudiés. Nous avons pu constater que, même si le processus dans lequel s'inscrit l'élève prend en compte toutes les contraintes du problème, rien n'assure la plausibilité de ce processus ni, par conséquent, celle de la solution. C'est plutôt la cohérence entre les contraintes du problème, arrimées à la sensibilité des élèves, qui fait en sorte que le processus des élèves soit culturellement plausible. Dans ces conditions, la créativité des élèves leur permet d'entretenir une cohérence entre leurs systèmes de connaissances et les problèmes proposés. Les registres de représentation sémiotique jouent, entre autres, le rôle d'aide-mémoire permettant l'adaptation de leurs connaissances aux contextes des problèmes. Les résultats de cette recherche mettent en évidence la richesse de différentes « couleurs » de la créativité qui pourrait être exploitée davantage dans les salles de classe et dans la formation initiale et continue des enseignants.

Références bibliographiques

- BÉLANGER, J.-P. (2014). *L'imagination créative pour interpréter des productions d'élèves en mathématiques de la fin du primaire et du début du secondaire en résolution de problèmes*. Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec.
- BROSSARD, L. (2005). « Le rapport au savoir n'est pas une réponse, c'est une façon de poser le problème. » – Entretien avec Bernard Charlot. *Vie pédagogique*, 135, 11-15.
- BROUSSEAU, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactiques de mathématiques*, 9(3), 309-336.
- DEBLOIS, L. (2003). Interpréter explicitement les productions des élèves : une piste... *Éducation et francophonie*, XXXI, 176-192.
- DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. et DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77(4), 460-470.
- DEMONTY, I., FAGNANT, A. et LEJONG, M. (2003). La résolution de problèmes : un processus complexe de « modélisation mathématique ». *Bulletin d'informations pédagogiques*, 54, 29-39.

- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- FREIMAN, V., RICHARD, P. R. et JARVIS, D. H. (2012). L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick (secteur francophone). Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^e siècle*, Actes du colloque de l'Espace mathématique francophone (EMF2012), Université de Genève, Suisse.
- FREIMAN, V. et LIRETTE-PITRE, N. (2009). Communauté virtuelle d'apprentissages scientifiques et mathématiques interactifs : pistes de recherches didactiques. Dans F. Larose et A. Jaillet (dir.), *Le numérique dans l'enseignement et la formation. Analyses, traces et usages*. Paris : L'Harmattan.
- FREIMAN, V., LANGLAIS, M. et VÉZINA, N. (2005). Le Chantier d'apprentissages mathématiques interactifs (CAMI) accompagne la réforme au Nouveau-Brunswick. *MathVIP: Mathématique virtuelle à l'intention du primaire*. Récupéré le 8 août 2013 de <http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip/>
- HAYLOCK, P. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 68-74.
- HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354.
- HITT F. et PASSARO, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet 2007.
- KAUFFMAN, J. C. et BAUER, J. (2004). Sure, I'm creative – but not in mathematics! Self-reported creativity in diverse domains. *Empirical Studies of the Arts*, 22, 143-155.
- KINTSCH, W. et VAN DIJK, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85(5), 363-394.
- LEVAV-WAYNBERG, A. et LEIKIN, R. (2012). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(4), 311-333.
- LEVENSON, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *Journal of Creative Behavior*, 45(3), 161-234.
- LILJEDAHN, P. (2009). Imagination. Dans B. Kerr (dir.), *Encyclopedia of Giftedness, Creativity and Talent* (p. 447-449). Thousand Oaks, CA : Sage Publications.

- MANN, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.
- MANUEL, D. (2010). *Étude de la créativité mathématique dans les solutions aux problèmes proposés dans la communauté virtuelle CASMI*. Université de Moncton, Moncton, NB.
- MARCHAND, P. et BEDNARZ, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, XXXIX(4), 30-42.
- MASON, J., BURTON, L. et STACEY, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow : Pearson.
- MEDPENB (2011). *Programme d'études : mathématiques au primaire (maternelle)*. Ministère de l'Éducation et du Développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.
- MELS (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise – Enseignement primaire*. Récupéré le 8 juin 2013 de http://www.mels.gouv.qc.ca/dgjf/dp/programme_de_formation/primaire/pdf/prform2001/prform2001.pdf
- MELS (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise – Enseignement secondaire, premier cycle du secondaire*. Récupéré le 8 juin 2013 de http://www.mels.gouv.qc.ca/dgjf/dp/programme_de_formation/secondaire/prformsec1ercycle.htm
- MENB (2009). *Programme d'études : Mathématiques au primaire (version Université de Moncton)*. Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, Direction des services pédagogiques.
- NATHAN, M. J., LONG, S. D. et ALIBALI, M. W. (2002). The symbol precedence view of mathematical development: A corpus analysis of the rhetorical structure of textbooks. *Discourse Processes*, 33(1), 1-21.
- PEHKONEN, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 75-80.
- SINCLAIR, N., DE FREITAS, E. et FERRARA, F. (2013), Virtual encounters : The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 239-252.
- SMOLUCHA, F. (1992). A reconstruction of Vygotsky's theory of creativity. *Creativity Research Journal*, 5(1), 49-67.
- SRIRAMAN, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 41(1-2), 13-27.
- TAMMADGE, A. (1979). Creativity. Presidential address to the Mathematical Association. *The Mathematical Gazette*, 63(425), 145-163.
- VYGOTSKY, L. S. (1933/1966). Play and its role on the mental development of the child. *Soviet Psychology*, V(3), 6-18.

VYGOTSKY, L. S. (1939/1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: The MIT Press.

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (2004). Imagination and creativity in childhood. *Journal of Russian and East European Psychology*, 42(1), 7-97.

WERTSCH, J. (1990). The voice of rationality in a sociocultural approach to mind. Dans L. Moll (dir.), *Vygotsky and Education: Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology* (p. 111-126). New York: Cambridge University Press.

ZEITZ, P. (2007). *The Art and Craft of Problem Solving*. New York: John Wiley.

Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France Les spécificités de la forme QCM

Nathalie SAYAC

Université Paris-Est Créteil, France

Nadine GRAPIN

Université Paris-Est Créteil, France

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France

Les spécificités de la forme QCM

Nathalie SAYAC

Université Paris-Est Créteil, France

Nadine GRAPIN

Université Paris-Est Créteil, France

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une évaluation nationale en mathématiques en fin d'école primaire (élèves de 10-11 ans) en France nous proposons, dans cet article, d'étudier plus particulièrement les items relevant de la résolution de problèmes afin de déterminer quelles compétences et connaissances sont véritablement évaluées par un dispositif comportant une grande part de QCM (questions à choix multiple). À cette fin, nous serons amenées à utiliser un outil didactique décliné en facteurs de complexité et de compétence, mais aussi à considérer les stratégies que les élèves utilisent pour répondre à ce type d'évaluation. Dans une expérimentation menée parallèlement à ce bilan, nous examinerons l'activité de résolution de problèmes suivant deux modalités de questionnement (fermé ou plus classique) afin de déterminer si elles

ont une incidence sur les résultats des élèves. Nous souhaitons ainsi appréhender l'activité de résolution de problèmes en mathématiques aussi bien d'un point de vue cognitif (notamment avec les rétroactions rendues possibles par les QCM) que d'un point de vue institutionnel, en tenant compte de l'influence de différentes modalités d'évaluation.

ABSTRACT

Assessing students' problem-solving abilities in the context of an external evaluation in France – specific features of the MCQ format

Nathalie SAYAC
University Paris-Est Créteil, France

Nadine GRAPIN
University Paris-Est Créteil, France

As part of a national mathematics assessment for students at the end of elementary school (10-11 years old) in France, in this article, we propose a more specific study of problem solving elements to determine which skills and knowledge are actually being assessed through a test made up in large part of MCQ (multiple choice questions). To this end, we will need to use an educational tool broken down into skill and complexity factors, but also to consider student strategies for dealing with this type of evaluation. In an experiment conducted in parallel with this assessment, we will compare the activity of problem solving using two methods of questioning (closed and more classical) to determine if they have an impact on student results. We thus hope to understand the activity of problem solving in mathematics both from a cognitive point of view (with feedback from the MCQ) and from an institutional point of view, taking into account the influence of different assessment methods.

RESUMEN

Evaluar las capacidades de los alumnos en resolución de problemas en el cuadro de una evaluación externa, en Francia: las especificidades de la forma QCM

Nathalie SAYAC
Universidad Paris Est Créteil, Francia

Nadine GRAPIN
Universidad Paris Est Créteil, Francia

En el contexto de una evaluación nacional en matemáticas al terminar la educación primaria (alumnos entre 10-11 años de edad) en Francia, proponemos en este artículo, estudiar específicamente los elementos concernientes a la resolución de problemas, con el fin de determinar cuáles son las competencias y los conocimientos que realmente se evalúan gracias al dispositivo que forma la mayor parte de QCM (preguntas de opción múltiple). Para ello, utilizaremos una herramienta didáctica enunciada en factores de complejidad y de competencia, pero también consideraremos las estrategias que los alumnos emplean para responder este tipo de evaluación. En un experimento realizado paralelamente a este chequeo, confrontaremos la actividad de resolución de problemas siguiendo dos maneras de cuestionar (cerradas o de manera más clásica) con el fin de determinar si tienen alguna incidencia sobre los resultados de los alumnos. Tratamos así de cernir la actividad de resolución de problemas en matemáticas tanto desde un punto de vista cognitivo (especialmente con las retroacciones que ofrece las QCM) que de un punto de vista institucional, teniendo en cuenta la influencia de diferentes modalidades de evaluación.

Introduction

La résolution de problèmes est au cœur des apprentissages mathématiques et tient une place prépondérante dans les programmes scolaires dans de nombreux pays. En France, il est indiqué¹ que la résolution de problèmes en mathématiques est le moyen qui « permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement » et que « la résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique ».

1. Dans le Bulletin officiel (BO), hors-série n° 3 du 19 juin 2008.

Nous proposons dans le cadre de cet article d'interroger une² des évaluations externes menées par le ministère de l'Éducation nationale autour des apprentissages mathématiques en fin d'école primaire (classe de cours moyen deuxième année [CM2], élèves âgés de 10-11 ans), de déterminer quelles connaissances et compétences des élèves sont réellement évaluées dans le domaine de la résolution de problèmes à partir de la nature et de la forme des items proposés: pour analyser l'ensemble des items de ce domaine, nous avons développé un outil que nous présentons dans une première partie. Nous interrogeons également, sur quelques items, les scores de réussite obtenus au regard des modalités d'évaluation choisies (questions à choix multiple [QCM] ou questions à réponse ouverte courte [QROC]³), des stratégies adoptées par les élèves et des rétroactions rendues possibles par les différentes propositions de réponse dans le cas des QCM.

Les évaluations institutionnelles veulent évaluer les connaissances et compétences des élèves en résolution de problèmes: qu'en est-il exactement?

L'évaluation bilan menée en 2008 en fin d'école primaire en mathématiques avait pour objectif d'évaluer les connaissances et les compétences en mathématiques au regard des objectifs fixés par les programmes français sur un échantillon représentatif d'élèves (Ministère de l'Éducation nationale, 2010). Cette évaluation bilan comptait environ 450 items, dont 46 portaient sur des problèmes arithmétiques que nous avons analysés à l'aide d'un outil didactique décliné en facteurs de complexité et de compétence.

Forme des questions et classe de problèmes

Tous les problèmes proposés dans cette évaluation étaient des problèmes de réinvestissement, sans caractère inédit⁴ (aussi bien dans le contenu mathématique que dans la forme de l'énoncé), mettant en jeu presque uniquement des nombres entiers (seuls deux problèmes impliquaient des nombres décimaux non entiers) et sans données numériques inutiles.

Par souci d'efficacité et de faisabilité, les évaluations menées nationalement comportent un grand nombre d'items en QCM (réponses corrigées mécaniquement par un logiciel) et un nombre plus restreint de QROC (réponses corrigées par des enseignants). La plupart des QCM sont proposées avec quatre propositions de réponse, trois distracteurs et une seule réponse correcte. Les distracteurs correspondent le plus souvent à des erreurs anticipées d'élèves, soit parce qu'elles se rattachent

-
2. Nous analysons l'évaluation bilan faite en mathématiques dans le cadre du Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon (CEDRE) en 2008 (Lescure et Pastor, 2012).
 3. Les questions qui ne sont pas sous forme QCM demandent une réponse qui est dans tous les cas un nombre, et pour laquelle la présence des opérations ou du raisonnement n'est pas exigée.
 4. Il s'agit de problèmes additifs ou multiplicatifs similaires à ceux qui sont présents en grande majorité dans les manuels scolaires.

à des conceptions erronées⁵, soit parce qu'elles correspondent à des erreurs « types » dans la résolution de problèmes (mauvais choix de l'opération, erreur de calcul, résultat d'une étape intermédiaire, etc.). Le choix des distracteurs n'est pas sans incidence sur le choix de réponse que fera l'élève, et donc sur le score de réussite à l'item (Sayac et Grapin, accepté).

Dans l'évaluation, sur les 46 items rattachés à la résolution de problèmes, 36 se présentaient sous la forme de QCM, 1 sous forme de Vrai-Faux et 9 sous une forme de QROC. La spécificité du format QCM modifie la tâche proposée à l'élève. Il ne s'agit plus de « produire une réponse », mais de « reconnaître un résultat », ce qui n'implique pas nécessairement la même activité chez l'élève et qui pourrait ainsi justifier une correction « experte » pour les QROC (ce que nous approfondirons plus loin).

Pour préciser les types de problèmes proposés, nous avons utilisé les typologies de problèmes additifs et multiplicatifs décrites par Vergnaud (1990) et reprises par Fénichel et Pfaff (2005). Cette analyse (voir l'annexe 1) montre une répartition assez déséquilibrée des problèmes additifs avec une majorité de problèmes de transformation et de composition de mesures, mais une quasi-absence de problèmes de comparaison et de composition de transformation. Ces derniers étant considérés comme difficiles pour des élèves de l'école primaire (Fénichel et Pfaff, 2005, p. 108), ils sont peu présents dans les manuels scolaires et nous supposons qu'ils sont peu travaillés en classe. De ce fait, les concepteurs de l'évaluation ont choisi de ne pas en proposer. Pour les problèmes multiplicatifs, nous constatons une prédominance des problèmes de proportionnalité (pour lesquels la valeur de l'unité n'est pas donnée dans l'énoncé) menant à la recherche d'une quatrième proportionnelle dans les cas classiques, aucun problème de pourcentage n'étant proposé. Cette analyse pointe la question du contenu de l'évaluation et de la validité des résultats qui pourra en être faite : comment choisir les tâches de l'évaluation pour que celles-ci évaluent vraiment la capacité à résoudre des problèmes, relativement aux programmes de l'école ? Nous constatons qu'entre redondance de certains types de problèmes et absence (ou presque) d'autres, un équilibre serait à trouver.

Décrire le contenu de l'évaluation à travers les problèmes qui y sont posés ne suffit pas à déterminer les connaissances et les compétences qui seront évaluées. Poser la question de l'évaluation de la compétence d'un élève à résoudre un problème demande que l'on interroge d'abord les connaissances et les capacités mises en jeu dans la résolution pour déterminer des indicateurs qui permettront de les évaluer. En effet, résoudre un problème demande, en plus de la mobilisation de connaissances mathématiques, la possibilité de se représenter le problème (Julo, 1995 et 2002) et de mettre en œuvre des compétences transversales, comme celles de « vérifier, justifier, valider » ou encore de « rédiger une solution » (Coppé et Houdement, 2002).

5. Par exemple, au niveau de la comparaison de décimaux, sont proposés des distracteurs qui correspondent à la représentation erronée « un nombre décimal = 2 entiers séparés par une virgule » et qui induisent à penser que, par exemple, $3,14 > 3,8$ car $14 > 8$.

Pour le bilan de 2008, l'évaluation des capacités des élèves à résoudre des problèmes a été faite sans tenir compte réellement de tels processus ou de telles capacités définies spécifiquement et préalablement lors de la conception. Seuls deux types de tâches ont été proposés à l'élève : résoudre un problème (42 items) et reconnaître l'opération à mettre en œuvre dans la résolution (4 items)⁶. Par ailleurs, pour les 9 QROC pour lesquelles l'élève devait résoudre le problème, seules les solutions conduisant à la réponse exacte ont été considérées comme justes, et aucun crédit partiel n'a été accordé du fait de la nature de l'évaluation.

Description des items à partir de facteurs de complexité et de niveaux de compétence

Pour décrire plus précisément le contenu de l'évaluation, nous avons développé un outil s'appuyant sur différents travaux en didactique des mathématiques (Sayac et Grapin, 2013) qui tient compte à la fois de l'énoncé de la question, des savoirs mathématiques en jeu et des compétences dont l'élève doit faire preuve pour répondre. Cet outil, qui se veut fonctionnel pour l'analyse du contenu d'évaluations externes contenant de nombreux items, se décline en deux facteurs de complexité et en trois niveaux de compétence.

Définition des facteurs de complexité et des niveaux de compétence

Facteur de complexité 1 (FC 1) : le contexte de l'énoncé

Dans ce facteur, le niveau de langue de l'énoncé ainsi que la nature des informations à traiter (texte, graphique, schéma, etc.) nous semblent importants à considérer. Le contexte sémantique de l'énoncé (Julo, 1995), la présence de mots inducteurs permettant ou non une représentation aisée du problème posé, peut également se révéler pertinent pour analyser le score de réussite des élèves. En ce qui a trait au contexte de l'énoncé, il est également important de considérer dans quelle mesure ce contexte est lié à la « vie courante » des élèves⁷, car, même si l'efficacité de ces problèmes est loin d'être prouvée (Boaler, 1993; Beswick, 2011), nous rejoignons Van den Heuvel-Panhuizen (2003) qui estime que « la caractéristique principale de ces situations est que les étudiants puissent les imaginer, qu'elles soient "réelles" dans l'esprit des étudiants⁸ ». Ainsi, divers éléments sont pris en compte pour évaluer ce premier facteur de complexité, même si son appréciation générale est laissée à l'initiative du chercheur.

-
6. Exemple d'item dans lequel l'élève doit reconnaître l'opération :
Martin a 24 ans. Il a 5 ans de plus que son frère Jacques. Pour calculer l'âge de Jacques, on peut faire :
☐ $19 + 5$ ☐ $24 - 5$ ☐ $24 + 5$ ☐ $24 - 19$
Le faible nombre d'items correspondant à ce type de tâche, dans lequel l'élève n'a ni à calculer ni à produire lui-même une démarche de résolution, mais où il doit seulement la reconnaître, ne permet pas de donner des éléments complémentaires d'analyse, notamment pour préciser les capacités des élèves des bas niveaux en résolution de problèmes.
 7. Les programmes français de mathématiques (2008, cycle 3) précisent explicitement que « la résolution de problèmes liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement ».
 8. Traduction libre.

Facteur de complexité 2 (FC 2) : les savoirs mathématiques en jeu

Ce facteur est directement lié au savoir mathématique en jeu. De ce point de vue, la tâche à réaliser peut être plus ou moins simple. Nous nous référons aux divers travaux effectués en didactique des mathématiques pour évaluer ce facteur de complexité (notamment la classification des problèmes additifs et multiplicatifs [Vergnaud, 1990]). Dans ce facteur, seront également pris en compte les variables didactiques ainsi que les distracteurs des situations proposées, car ils peuvent avoir une influence non négligeable sur la réussite des élèves, dans un sens positif ou négatif.

Niveau de compétence des items (NC)

Pour ce facteur, nous nous sommes inspirées des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances décrits par Robert (1998) et par Robert et Rogalski (2002) ainsi que des trois niveaux de compétence de Rey (2003).

- Niveau 1 : pour les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire. Les tâches sont usuelles.
- Niveau 2 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées. Les tâches sont relativement usuelles.
- Niveau 3 : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont totalement à la charge de l'élève. Les tâches sont inédites.

Afin d'avoir une vision globale des items de l'évaluation à partir des facteurs et des niveaux de compétence, nous avons attribué pour chaque item : de 0 à 2 points pour le facteur de complexité 1, de 1 à 3 points pour le facteur de complexité 2 et un des trois niveaux de compétence tels que nous les avons définis. Nous proposons en annexe 2 un exemple de répartition des différents facteurs pour 4 items de résolution de problèmes.

Analyse de l'évaluation selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétence

Pour chacun des 46 items, nous avons déterminé les deux facteurs de complexité et un niveau de compétence. Le tableau de répartition de ces items (voir le tableau 1) nous amène à deux constats majeurs. D'une part, aucun problème ne relève du niveau de compétence 3, c'est-à-dire qu'aucun n'est complètement inédit et ne demande à l'élève de faire preuve d'initiative pour le résoudre. D'autre part, la complexité ne relève pas a priori du contexte de l'énoncé (tous les items ont un facteur de complexité 1 inférieur ou égal à 1), ni véritablement du savoir mathématique en jeu : la plupart des nombres impliqués dans les problèmes sont entiers et conduisent à des opérations « simples » pour les résoudre.

Tableau 1. Répartition des items de résolution de problèmes arithmétiques selon les facteurs de complexité et les niveaux de compétence

	Facteur de complexité 1 Contexte de l'énoncé			Facteur de complexité 2 Savoir mathématique en jeu			Nombre d'items total
	FC 1 = 0	FC 1 = 1	FC 1 = 2	FC 2 = 1	FC 2 = 2	FC 2 = 3	
Niveau de compétence 1	9	25	1	24	9	2	35
Niveau de compétence 2	0	9	2	5	5	1	11
Niveau de compétence 3	0	0	0	0	0	0	0
Nombre d'items total	9	34	3	29	14	3	46

Ainsi, l'utilisation des facteurs de complexité et des niveaux de compétence vient en complément des éléments de description utilisés dans le paragraphe précédent. En effet, même si les problèmes proposés sont variés par rapport aux classes de problème et à leur forme (même si l'on peut déplorer la faible proportion de QROC par rapport aux QCM), leur complexité (aussi bien par rapport au contexte de l'énoncé qu'au savoir mathématique en jeu) et le niveau de compétence auquel ils se réfèrent est majoritairement de 1. De tels items ne permettent donc pas de savoir si les connaissances des élèves résisteraient à des situations plus complexes; par conséquent, ils ne sont pas suffisamment variés didactiquement pour pouvoir caractériser les capacités en résolution de problèmes des différents groupes élèves construits à partir de l'échelle des scores⁹.

QCM ou QROC : des items instructifs

Trois problèmes assez proches relevant du champ conceptuel des structures additives et visant à évaluer la capacité d'un élève à résoudre un problème additif de composition de mesure (Vergnaud, 1990) ont été proposés dans l'évaluation à la fois sous forme de QCM et de QROC et ont produit des scores de réussite qui nous ont interpellées.

Ces problèmes avaient pour contexte les distances entre trois villes (annexe 3). Un premier constat peut être fait sur le score de non-réponse, beaucoup plus élevé lorsque l'exercice est proposé en ouvert, et porte sur la recherche d'une des mesures (17,7 % contre 7,4 % pour le problème 2 et 19,8 % contre 7,6 % pour le problème 3). On peut alors supposer que les élèves s'engageraient moins dans la résolution d'un problème « difficile » lorsque ce dernier est proposé en ouvert ou alors que les différentes propositions de réponse « sécurisent » les élèves ou sont utilisées directement par eux pour répondre à la question posée.

9. Le bilan CEDRE conduit à la construction d'une échelle de score et à la définition de six niveaux de performance; chacun de ces groupes est caractérisé par les items que maîtrisent les élèves du groupe (Lescure et Pastor, 2012).

Le deuxième constat porte sur le score de réussite global à chacun de ces exercices : la forme de la question (QCM ou QROC) a peu d'impact sur la réussite dans les deux premiers problèmes (autour de 85 % pour le problème 1, autour de 70 % pour le problème 2), alors que la différence est plus grande dans le cas du problème 3 : les scores de réussite diffèrent de 10 % (62,8 % pour la forme QROC, contre 72,7 % pour la forme QCM).

Ces constats nous ont amenées à investiguer de manière plus approfondie les scores de réussite des élèves et leurs stratégies de réponse aux QCM, avec d'éventuelles rétroactions.

Exploration des QCM

Une expérimentation complémentaire a donc été menée pour explorer ces dimensions. Elle s'est déroulée en juin 2013 et a concerné 195 élèves de CM2, de 9 classes différentes.

Les modalités d'évaluation : QCM ou QROC

Nous avons élaboré deux tests, composés de sept items équivalents du point de vue des tâches mathématiques à effectuer¹⁰, l'un sous forme de QROC, l'autre sous forme de QCM; nous nous intéressons dans cet article uniquement aux items de résolution de problèmes. Dans un premier temps, les élèves ont réalisé le premier test (ouvert) avec leur enseignant, sans qu'aucune indication ou aide leur soit fournie. La trace de leurs calculs nous permettait donc d'avoir accès à leur procédure et à leurs erreurs éventuelles. Dans une deuxième phase (le lendemain), nous sommes intervenues dans les classes¹¹ pour faire passer le deuxième test (QCM) à tous les élèves, individuellement, afin d'observer leurs stratégies et de les interroger sur leur choix de réponses.

Les premiers problèmes que nous comparons (Problème 1 sous forme de QROC et de QCM, annexe 4) relevaient du champ conceptuel des structures additives et de la composition de mesures. Quelles que soient les procédures utilisées, les opérations à effectuer ne comprenaient pas de retenue pour focaliser l'attention sur le choix des opérations et non sur leur complexité. Du point de vue de notre outil d'analyse, ces problèmes sont affectés de faibles facteurs de complexité et de niveaux de compétence moyennement élevés (FC1 = 1, FC2 = 1 et NC = 2).

Les scores de réussite à ces deux problèmes sont extrêmement proches, puisque 70,8 % des élèves ont réussi le problème « ouvert » et 69,2 % le problème QCM, mais nous verrons par la suite que, du point de vue de l'activité de l'élève, ce résultat est à nuancer.

10. Seuls le contexte et les nombres (entre le problème sous forme de QROC et le problème sous forme de QCM) variaient, sans que cela ait un impact sur les procédures et les opérations en jeu.

11. La plupart du temps, nous nous sommes placées dans le couloir attenant à la classe ou dans un espace jouxtant la classe afin que les élèves puissent, à tour de rôle, venir réaliser leur test sans perturber le déroulement de la classe.

Si l'on regarde plus finement combien d'élèves ayant répondu correctement au problème ouvert ont coché la bonne réponse dans la version QCM, il s'avère que l'on ne retrouve pas la totalité des élèves, mais seulement 76 %. Parmi ceux qui ne répondent pas correctement, plus de la moitié (51 %) cochent le distracteur correspondant à une étape intermédiaire du problème. La question des stratégies adoptées par les élèves confrontés à des QCM que nous développerons par la suite est également un élément à prendre en compte dans cette analyse.

Les seconds problèmes relevaient du champ conceptuel des structures multiplicatives, et plus particulièrement d'un problème de proportion simple, avec une présence fictive¹² de l'unité (Problème 2, annexe 4). Du point de vue de notre outil d'analyse, ces problèmes sont affectés de facteurs de complexité et de niveaux de compétence plus élevés que le premier problème (FC1 = 1, FC2 = 2, NC = 3).

Les scores de réussite ont été, pour ces problèmes, très distincts, puisque 19 % des élèves ont réussi le problème « ouvert », alors qu'ils sont 30,3 % à avoir coché la bonne réponse pour le problème QCM. Parmi les élèves ayant donné la bonne réponse au problème ouvert, près de 90 % ont répondu dans le même sens au problème QCM. On peut donc évoquer une cohérence des réponses correctes pour ces problèmes. Néanmoins, on note que de nombreux élèves (39 %) ont trouvé la valeur 900 g pour le problème ouvert, alors que cette réponse n'était pas proposée en distracteur dans le problème QCM. Ces élèves ont certainement été déroutés par le choix des réponses proposées¹³ et ils ont, pour près de la moitié, coché la case 800 g qui correspondait à la valeur la plus proche de leur réponse en ouvert. Les autres choix se sont portés sur les autres réponses proposées, dont environ 20 % sur la bonne réponse.

Ces deux exemples, contradictoires dans leurs résultats, ne nous permettent évidemment pas d'établir un constat général sur l'impact de la forme de la question sur les scores de réussite des élèves, mais ils illustrent la complexité de la problématique de l'évaluation des élèves en résolution de problèmes qui ne peut être réduite à forme QROC/forme QCM. Au-delà des scores de réussite aux différents items, nous avons donc voulu explorer quelles stratégies les élèves développaient pour répondre aux questions posées.

Les stratégies de réponses

Comme nous l'avons relevé dans un problème de proportionnalité de notre expérimentation, le taux de non-réponse peut être plus faible lorsque la question est posée sous forme de QCM. On peut alors supposer que cet écart est dû au fait que les élèves ont la possibilité de choisir la réponse « au hasard ». Mais on peut aussi penser que la présence des distracteurs les « sécurise » et les conduit à mettre en place des stratégies autres que celles d'évitement (Focant, 2003). Pour les notions de stratégie et de procédure dans le cadre de la résolution de problèmes, nous nous référons à Julo (1995) chez qui « la notion de stratégie correspond à un niveau de description

12. Le 1 kg proposé devait être converti en 1000 g, ce qui aboutissait à un problème de proportion simple, sans présence de l'unité.

13. La notion de rétroaction que nous évoquerons plus loin nous permettra de revenir sur cette affirmation.

assez global et qui cherche à rendre compte de l'orientation générale que prend l'activité de résolution, alors que celle de procédure correspond à l'ensemble des opérations élémentaires que l'on met en œuvre pour atteindre le but proposé».

Groupes de stratégies

Dans une précédente recherche (Sayac et Grapin, accepté), nous avons cherché à savoir si les stratégies qu'élaborent les élèves pour répondre aux QCM étaient toujours les mêmes et si elles étaient en lien avec leur niveau de connaissances en mathématiques. Pour cela, nous avons répertorié les stratégies possibles pour des élèves de 11 ans, car il nous a semblé indéniable qu'elles ne pouvaient être identiques à celles d'étudiants adultes (Choppin, 1975; Leclercq, 1987). Nous en avons retenu dix (annexe 5), que nous avons finalement regroupées en trois groupes :

Stratégies A (S1, S2, S9, S10) : stratégies de savoirs

Quand l'élève active des connaissances ou des savoir-faire (techniques – raisonnement) pour choisir la réponse qu'il pense être la bonne : soit il résout complètement la tâche (par la procédure de son choix, juste ou fausse), soit il teste les propositions de réponse et choisit celle qui peut convenir.

Stratégies B (S5, S6, S7, S8) : stratégies de substitution ou de repli

Quand l'élève n'utilise pas ses connaissances mathématiques de façon explicite pour faire un choix : son choix ne repose pas de façon assurée sur ses connaissances.

Stratégies C (S3, S4) : stratégies mixtes

Quand l'élève a entrepris un raisonnement pour répondre à la question posée, mais qu'il se sert des différentes propositions de réponse pour faire un choix.

Stratégies utilisées par les élèves

Concernant les différentes stratégies utilisées par les élèves pour répondre à nos deux problèmes QCM, on peut noter des différences assez marquées, puisque les stratégies A sont utilisées à 73 % pour le problème 1 et à 51 % pour le problème 2, alors que les stratégies B le sont à 10 % pour le problème 1 et à 33 % pour le problème 2. Notre outil d'analyse d'items nous a permis de distinguer ces deux problèmes au niveau des facteurs de complexité et de compétence, le problème 2 ayant des niveaux plus élevés que le problème 1, ce qui pourrait expliquer pourquoi les élèves ont davantage recours à des stratégies de substitution pour le problème le plus difficile. Nous pouvons également préciser que, parmi les élèves qui adoptent des stratégies A, les scores de réussite sont de 85 % pour le problème 1 et de seulement 46 % pour le problème 2. Concernant les stratégies de substitution, elles amènent à des scores de réussite également variés, puisque 35 % des élèves qui les adoptent répondent correctement au problème 1, contre 17 % pour le problème 2.

Si l'on veut affiner cette analyse, on peut relever que, parmi les différentes stratégies retenues, celle qui correspond à une étape intermédiaire de la résolution du problème¹⁴ est la plus déployée, après celle qui amène l'élève à effectuer la tâche

14. S3 : L'élève commence par s'engager dans une procédure de résolution, mais sans aller jusqu'au bout (à la différence de S1); il utilise ensuite les différentes propositions de réponses pour conclure (en choisissant celle qui lui paraît la plus vraisemblable).

demandée jusqu'au bout. Par ailleurs, la stratégie de hasard n'est pas une stratégie très utilisée par les élèves de fin d'école primaire (respectivement 1,54 % et 8,72 % pour les problèmes 1 et 2).

Les rétroactions possibles

Rétroactions liées à la spécificité du format QCM

Résoudre un problème avec une question posée sous forme de QCM apporte à l'élève des éléments de contrôle complémentaires à ceux présents lorsqu'il résout le problème sous une forme ouverte. En effet, s'il obtient un résultat qui ne figure pas parmi les quatre choix de réponse, il sait que ce qu'il a trouvé est faux. Même si dans le cadre d'une évaluation bilan l'élève n'est pas dans une situation d'apprentissage et que l'enseignant n'intervient à aucun moment, nous considérons, dans le cas des QCM, que l'énoncé et les différents choix de réponse constituent un milieu (Brousseau, 1998) qui provoque des rétroactions et amène l'élève à agir sur la situation et à prendre des décisions (changer de stratégie ou de procédure de résolution si la réponse ne figure pas parmi les choix).

Ce type de rétroaction, pour la forme spécifique du QCM, apporte à l'élève « un moyen adéquat [...] pour répondre à ses doutes quant à sa résolution en voie d'élaboration » (Burgermeister et Coray, 2008) et, en ce sens, lui fournit un élément rétrospectif relevant d'un processus de contrôle. Il vient en complément d'autres éléments de contrôle entrant habituellement dans la résolution de problèmes, comme ceux listés par Houdement (2011) qui s'exercent dans le choix d'un modèle (contrôles pragmatiques, sémantiques et syntaxiques).

Les éléments de contrôle prospectifs et rétroactifs (Burgermeister et Coray, 2008) ne sont pas sans influence sur la façon dont l'élève oriente son choix de réponse in fine. La question ne se pose guère lorsque le résultat qu'il trouve coïncide avec un choix de réponse ou lorsque l'élève ne s'est pas engagé dans une stratégie de savoir (s'il a répondu au hasard par exemple). Par contre, lorsque ce n'est pas le cas, l'élève doit prendre une décision.

- D1 : L'élève reste dans une stratégie de savoir et il vérifie ses calculs et/ou modifie éventuellement sa procédure de résolution pour trouver une réponse figurant parmi les choix.
- D2 : L'élève utilise une autre stratégie (de repli ou mixte). Plusieurs possibilités s'offrent alors à lui : il peut choisir le nombre le plus proche du résultat qu'il a obtenu par ses calculs ou choisir le nombre pour lequel l'ordre de grandeur correspond à ce qu'il avait anticipé prospectivement (ou qu'il détermine rétrospectivement) ou, encore, combiner les nombres en présence pour retrouver une des propositions de réponse (Stratégie S8) ou répondre au hasard.
- D1 et D2 : Même après avoir repris ses calculs, l'élève ne trouve aucune des réponses proposées et, de ce fait, il utilise une stratégie autre qu'une stratégie de savoir.

Effet des rétroactions sur les stratégies utilisées et la réussite

Dans le cadre de notre expérimentation, pour le problème 1 comme pour le problème 2, l'effet rétroactif du QCM a été observé pour un nombre semblable d'élèves : 36 élèves (18 % des élèves) pour le problème 1 et 35 élèves pour le problème 2. Par contre, les décisions qui ont été prises par les élèves sont très différentes d'un problème à l'autre : ils prennent majoritairement une décision de type 1 (D1) pour le problème 1 (26 élèves sur 36) et majoritairement une décision de type 2 (D2¹⁵) dans le problème 2 (30 élèves sur 35).

Si l'on observe ensuite la qualité de la réponse choisie après cette décision, on constate que, pour le problème 1, 16 élèves sur 36, soit plus de la moitié, trouvent ensuite la bonne réponse (15 d'entre eux avaient pris une décision D1); alors que, pour le problème 2, seuls 7 élèves sur 35 trouvent ensuite la bonne réponse.

Nous observons ainsi, sur la résolution de ces problèmes, un effet « QCM » lié aux éléments de contrôle apportés par les choix de réponse. On peut alors s'interroger sur le choix des problèmes à proposer sous la forme de QCM plutôt que sous forme ouverte dans les évaluations pour ne pas biaiser les résultats; notre expérimentation tendrait à montrer que, du point de vue des scores de réussite, l'effet « QCM » est finalement très limité pour les problèmes complexes (comme pour le problème 2 de notre expérimentation) dans le sens où l'élève ne sait pas comment modifier sa procédure pour trouver la bonne réponse. Néanmoins, le QCM ne conduit pas forcément l'élève à une même activité que pour une question sous forme ouverte et, de ce fait, ne permet pas d'évaluer les mêmes capacités.

Conclusion

Dans l'élaboration d'un dispositif d'évaluation, le choix des tâches est une étape importante pour garantir la validité des résultats : celles-ci doivent être représentatives du domaine étudié, mais elles ne peuvent pas être exhaustives. Une analyse didactique des tâches permettrait ainsi d'éviter certaines redondances et l'utilisation des facteurs de complexité et de compétence permettrait de garantir des problèmes de complexité variée. Comme nous l'avons montré dans la deuxième partie, le choix des items doit aussi s'accompagner d'une réflexion sur le format de la question (QCM ou non) et sur les modalités de correction afin de pouvoir évaluer différentes compétences qui interviennent dans la résolution d'un problème. Dans le champ de la psychométrie, des modèles (modèles diagnostiques) prenant en compte les différentes compétences qui interviennent dans la résolution d'un problème se développent (Loye, 2011); ils devraient ainsi permettre de prendre en compte des compétences transversales qui interviennent dans la résolution de problèmes et, pour les évaluations bilans, de mieux caractériser les compétences des élèves dans ce domaine.

15. Comme expliqué précédemment, certains élèves trouvaient pour réponse 900 g pour le problème 2. Ce choix n'étant pas proposé, ils ont alors majoritairement choisi 800 g, qui était la masse la plus proche de celle qu'ils auraient voulu choisir.

En ce qui concerne les QCM, même si leur usage en évaluation bilan modifie l'activité de l'élève et par conséquent influe sur les résultats, nous constatons qu'ils amènent l'élève à exercer un autocontrôle sur ses résultats; en ce sens, ils pourraient être exploités de façon constructive en classe pour apprendre à l'élève à reprendre sa démarche, à vérifier ses calculs en toute autonomie, et, par conséquent, l'amener à développer des compétences transversales nécessaires en résolution de problèmes. Cette exploitation, encore à la marge en France, mériterait d'être développée.

Pour conclure, nous dirons que l'évaluation des élèves en résolution de problèmes mathématiques est une question cruciale pour tous les acteurs institutionnels de l'école, mais aussi pour les chercheurs en éducation et en didactique car elle est multidimensionnelle. Elle pose aussi bien la question de la nature de l'évaluation, de son contenu que des résultats qu'elle donne à voir. À travers une évaluation externe menée à grande échelle en France, en fin d'école primaire, nous avons pu montrer comment le choix des problèmes proposés (facteurs de complexité et niveaux de compétence), la nature des questions posées (QCM ou forme ouverte) et la façon dont les élèves répondaient (stratégies, rétroactions) n'étaient pas sans incidence sur ce qui était évalué (capacités, connaissances), ni sur les résultats obtenus. À l'heure où les évaluations nationales et internationales prennent une place de plus en plus grande dans les choix politiques des pays, il convient donc de rester vigilant et de se donner les moyens d'avoir un regard objectif et constructif sur ces évaluations.

Références bibliographiques

- BESWICK, K. (2011). Putting context in context. An examination of the evidence for benefits of « contextualised » tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 367-390.
- BOALER, J. (1993). Encouraging transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content; context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 341-373.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- BURGERMEISTER, P. F. et CORAY, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(1), 63-106.
- CHOPPIN, B. H. (1975). Guessing the answer on objective tests. *British Journal of Educational Psychology*, 45, 206-213.
- COPPÉ, S. et HOUEMENT, C. (2002). Réflexion sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, 69, 53-62.

- FOCANT, J. (2003) Impact des capacités d'autorégulation en résolution de problèmes chez les enfants de 10 ans. *Éducation et francophonie*, 31(2), 45-64.
- HOUEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 67-96.
- JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N*, 69, 31-52.
- FÉNICHÉL, M. et PFAFF, N. (2005). *Donner du sens aux mathématiques. Nombres, opérations et grandeurs*. Tome 2. Paris : Bordas.
- LECLERCQ, D. (1987). *Qualité des questions et signification des scores*. Bruxelles : Labor.
- LESCURE, S., PASTOR, J.-M. (2012). *Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences*. Paris : Scéren.
- LOYE, N. (2011). Validité du diagnostic issu d'un mariage entre didactique et mesure sur un test existant. Dans G. Raîche, K. Paquette-Côté et D. Magis (dir.), *Des mécanismes pour assurer la validité de l'interprétation de la mesure en éducation* (p. 11-29). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2010). *Les compétences en mathématiques des élèves de fin d'école primaire*. Note d'information de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP), n° 10-17.
- REY, B., CARETTE, V., DEFRANCE, A. et KAHN, S. (2003). *Les compétences à l'école : apprentissage et évaluation*. Bruxelles : De Boeck.
- ROBERT, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.
- ROBERT, A. et ROGALSKI, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*, 60, 6-25.
- SAYAC, N. et GRAPIN, N. (2013). *Facteurs de compétence et de complexité en mathématique : un outil au service de la formation des enseignants*. Actes du 25^e colloque de l'ADMEE-Europe, Fribourg.
- SAYAC, N. et GRAPIN, N. (accepté). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degrés de certitude. *Annales de didactique et de sciences cognitives*.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education. An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-170.

Annexe 1

Classification des types de problèmes selon Vergnaud (1990), à partir de Fénichel et Pfaff (2005)

		Nombre d'items
STRUCTURES ADDITIVES		17
TRANSFORMATION DE MESURES	Recherche de l'état final	2
	Recherche de l'état initial	5
	Recherche de la transformation	2
COMPOSITION DE MESURES	Recherche d'une des deux mesures composantes	2
	Recherche de la mesure composée	5
COMPARAISON DE MESURES	Recherche d'une mesure dans le sens de la comparaison	
	Recherche d'une mesure dans le sens contraire de la comparaison	1
	Recherche de la comparaison	
COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS	Recherche de la transformation totale	
	Recherche d'une des deux transformations	
STRUCTURES MULTIPLICATIVES: problèmes d'isomorphisme de mesure		22
PROBLÈMES MULTIPLICATIFS (l'énoncé fait intervenir l'unité)		
Problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle	Recherche du tout	1
	Recherche de la valeur unitaire	3
	Recherche du nombre d'unités	1
Problème de rapport entre deux valeurs de grandeurs de même nature ou problème de comparaison	Recherche de la valeur finale	2
	Recherche de la valeur initiale	
	Recherche du coefficient multiplicateur	
PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ (l'énoncé ne fait pas intervenir l'unité)		
Problème de recherche de quatrième proportionnelle	Problème de type classique	12
	Problème de type pourcentage	
	Problème de comparaison	3
PROBLÈMES MIXTES		7

Annexe 2

Application des facteurs de complexité et niveaux de compétence sur différents items

Exemple extrait de Lescure et Pastor (2012); dans l'évaluation CEDRE 2008, les questions données en exemple ci-dessous ont été posées sous forme de QCM.

Pour faire une salade de fruits, on a utilisé la recette suivante : 800 g de fruits pour 160 g de sucre.		Facteur de complexité 1	Facteur de complexité 2	Niveau de compétence
Item 1	Combien faut-il de sucre pour 400 g de fruits?	1	1	1
Item 2	Combien faut-il de sucre pour 1 600 g de fruits?	1	2	1
Item 3	Combien faut-il de fruits pour 40 g de sucre?	1	2	1
Item 4	Combien faut-il de fruits pour 120 g de sucre?	1	3	3

Pour tous les items, le facteur 1 (relatif à l'énoncé) est le même : l'énoncé est simple et correspond à une situation que l'on peut considérer comme proche de l'élève.

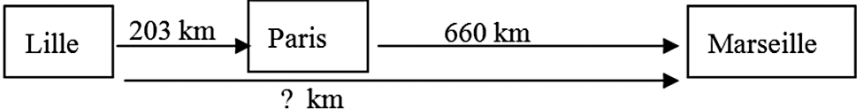
La différence de complexité entre les items se joue au niveau des relations entre les nombres en jeu; ainsi, le rapport entre 800 et 400 est reconnu plus facilement par les élèves que celui entre 40 et 160 ou encore celui entre 120 et 160. Ce qui explique la différence de points attribués au facteur de complexité 2, correspondant au savoir mathématique en jeu.

Enfin, pour les trois premiers items, nous considérons qu'il s'agit d'une application directe de connaissance (niveau de compétence 1), mais que la tâche est moins usuelle pour le dernier (niveau de compétence 3) : les procédures à utiliser pour répondre sont moins disponibles à ce niveau (le rapport entre 120 et 160 n'est pas entier, ni fractionnaire simple; l'élève peut utiliser la question précédente ou encore le retour à l'unité).

Annexe 3

Analyse et score de réussite à trois problèmes additifs extraits de CEDRE 2008, posés sous forme ouverte (o) et sous forme de QCM (qcm).

Problème 1 :

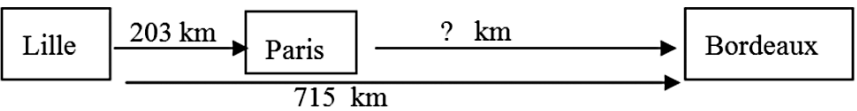


Quelle est la distance entre Lille et Marseille ?

☐ 457 km ☐ 473 km ☐ 663 km ☐ 863 km

Scores de réussite	
Problème 1 o	Problème 1 qcm
Réussite: 85,39 %	Réponse 1 : 2,78 %
Autres réponses: 7,52 %	Réponse 2 : 0,82 %
Pas de réponse : 7,09 %	Réponse 3 : 3,75 %
	Réponse 4 : 86,67 %
	Pas de réponse : 5,83 %

Problème 2 :



Quelle est la distance entre Paris et Bordeaux ?

☐ 512 km ☐ 518 km ☐ 912 km ☐ 918 km

Scores de réussite	
Problème 2 o	Problème 2 qcm
Réussite: 70,79 %	Réponse 1 : 68,62 %
Autres réponses: 11,51 %	Réponse 2 : 10,07 %
Pas de réponse : 17,7 %	Réponse 3 : 3,56 %
	Réponse 4 : 10,32 %
	Pas de réponse : 7,42 %

Problème 2 :

Lille

$\xrightarrow{\quad ? \text{ km} \quad}$

Lyon

$\xrightarrow{\quad 583 \text{ km} \quad}$

Bordeaux

$\xrightarrow{\quad 1265 \text{ km} \quad}$

Quelle est la distance entre Lille et Lyon ?

☐ 682 km
 ☐ 1082 km
 ☐ 1265 km
 ☐ 1848 km

Scores de réussite	
Problème 3 o	Problème 3 qcm
Réussite: 62,8 %	Réponse 1 : 72,7 %
Autres réponses: 17,38 %	Réponse 2 : 7,22 %
Pas de réponse : 19,83 %	Réponse 3 : 3,85 %
	Réponse 4 : 8,25 %
	Pas de réponse : 7,86 %

Annexe 4

Problème 1 (QROC)

Lors des soldes, dans un grand magasin, on a vendu 2 768 vêtements en trois jours.

Le premier jour, 634 vêtements ont été vendus. Le deuxième jour, 1 012 vêtements ont été vendus.

Combien de vêtements ont été vendus le troisième jour?

Problème 1 (QCM)

Une course automobile de 2 879 kilomètres se déroule sur trois jours.

Le premier jour, les concurrents parcourent 745 km. Le deuxième jour, les concurrents parcourent 1 123 km.

Quelle est la distance parcourue le troisième jour?

- ☐ 1 868 km
☐ 1 434 km
☐ 1 756 km
☐ 1 011 km

Problème 2 (QROC)

Pour faire des gâteaux, un pâtissier mélange 300 g de sucre avec 400 g de farine.
Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de farine?

Problème 2 (QCM)

Pour faire une bonne confiture, il faut mettre 300 g de sucre pour 400 g de fruits.

Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de fruits?

- ☐ 600 g
- ☐ 700 g
- ☐ 750 g
- ☐ 800 g

Annexe 5

- S1: L'élève effectue la tâche demandée mentalement ou explicitement, puis il trouve, parmi les propositions, celle qui correspond à la réponse trouvée.
- S2: L'élève reconnaît d'emblée la « bonne » réponse parmi celles proposées (connaissance intériorisée).
- S3: L'élève commence par s'engager dans une procédure de résolution, mais sans aller jusqu'au bout (à la différence de S1); il utilise ensuite les différentes propositions de réponses pour conclure (en choisissant celle qui lui paraît la plus vraisemblable).
- S4: L'élève élimine les propositions qui paraissent fausses, puis déduit de celle(s) qui reste(nt) la bonne réponse.
- S5: L'élève répond au hasard.
- S6: L'élève passe en revue superficiellement toutes les propositions, puis choisit celle qui lui paraît la plus vraisemblable.
- S7: L'élève ne sait pas expliquer sa procédure.
- S8: L'élève combine les nombres en présence de manière à trouver une solution parmi les choix possibles.
- S9: L'élève applique une règle simple intériorisée, correcte ou non (théorème en actes).
- S10: L'élève teste les propositions de réponse une à une, jusqu'à trouver celle qui convient.

La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule »?

Lalina COULANGE

ESPE d'Aquitaine, France

Carine REYDY

ESPE d'Aquitaine, France

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?

Lalina COULANGE

ESPE d'Aquitaine, France

Carine REYDY

ESPE d'Aquitaine, France

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous décrivons et étudions un dispositif collaboratif entre chercheurs, professeurs et élèves de fin d'école primaire (10-11 ans) centré sur la résolution de problèmes mathématiques. À travers l'analyse de trois exemples de problèmes expérimentés dans ce contexte, nous nous interrogeons sur les procédures que les élèves sont à même de développer pour résoudre les problèmes proposés et sur les potentialités de ces problèmes à contribuer à l'enseignement de savoirs algébrique-numériques chez les élèves. Ces analyses nous conduisent à interroger le rôle des formules et de leur production dans la démarche de modélisation algébrique *a priori* visée. Les résultats de notre étude nous amènent alors à considérer deux entrées possibles qui favoriseraient l'enseignement de savoirs préalgébriques à l'école primaire. Enfin, la recherche menée nous incite à penser que les représentations initiales des élèves et des enseignants sur ce qu'est une démarche de recherche en mathématiques ont une influence conséquente sur la mise en œuvre des situations expérimentées.

ABSTRACT

Problem solving in elementary school – is it about “finding the right formula”?

Lalina COULANGE
E.S.P.E. of Aquitaine, France

Carine REYDY
E.S.P.E. of Aquitaine, France

In this article, we describe and study a collaborative arrangement between researchers, teachers and students at the end of elementary school (10-11 years old) focused on mathematical problem solving. Through the analysis of three examples of problems tested in this context, we ask about procedures the students develop to solve the problems, and the potential of these problems to contribute to students' acquisition of algebraic-numerical knowledge. These analyses lead us to question the role of formulas and of their production in the algebraic modelization process formerly targeted. The results of our study suggest considering two possible ways to promote the teaching of pre-algebraic knowledge in the elementary school. Finally, the research suggests that the initial perceptions of students and teachers on the nature of a mathematics research process have a significant influence on the implementation of study situations.

RESUMEN

La resolución de problemas en la escuela primaria: ¿se trata de «encontrar la buena fórmula»?

Lalina COULANGE
E.S.P.E. de Aquitania, Francia

Carine REYDY
E.S.P.E. de Aquitania, Francia

En este artículo, describimos y estudiamos un dispositivo colaborativo entre investigadores, maestro y alumnos del último año de primaria (10-11 años) centrado en la resolución de problemas matemáticos. A través del análisis de tres ejemplos de problemas experimentados en dicho contexto, nos cuestionamos sobre los procedimientos que los alumnos son capaces de desarrollar para resolver los problemas propuestos y sobre las contribuciones potencialidades de esos problemas en la enseñanza de conocimientos algebraico-numéricos entre los alumnos. Esos análisis nos llevan a interrogar el rol de las fórmulas y de su producción en el procedimiento

de modelización algebraica *a priori* determinada. Los resultados de nuestro estudio nos llevan a considerar dos entradas posibles que favorecerían la enseñanza de saberes pre-algebraicos en la escuela primaria. Finalmente, la investigación realizada nos incita a pensar que las representaciones iniciales de los alumnos y de los maestros sobre lo que es un procedimiento de investigación en matemáticas influenciaron consecuentemente la operacionalización de las situaciones experimentadas.

Introduction

Cela fait plusieurs années que notre équipe de formateurs et chercheurs en didactique des mathématiques s'intéresse à la résolution de problèmes à l'école (Bulf *et al.*, 2012; Coulangue et Reydy, 2012; Reydy *et al.*, 2014) et se pose différentes questions à ce sujet. Que peut-on apprendre ou enseigner au sujet de la résolution de problèmes mathématiques? S'agit-il d'apprendre ou d'enseigner des savoirs, des savoir-faire liés à la résolution de problèmes? Si oui, lesquels? Les représentations des élèves et des enseignants sur la résolution de problèmes en mathématiques ont-elles un impact sur les apprentissages visés?

Nous nous intéressons plus spécifiquement dans cet article aux problèmes de généralisation et de modélisation de phénomènes numériques. Quelles sont les procédures envisageables pour résoudre ce type de problèmes? Dans quelles conditions la résolution de ce type de problèmes peut-elle contribuer à l'enseignement de savoirs ou de savoir-faire algébrique-numériques ou «préalgébriques»?

Notre réflexion se nourrit de résultats de recherche en didactique de l'algèbre (Chevallard et Bosch, 2012; Coulangue, 1997; Gascon, 1995; Chevallard, 1989) pour caractériser des procédures et connaissances au regard d'une démarche de généralisation et de modélisation algébrique (Chevallard 1989; Gascon, 1995; Chevallard et Bosch, 2012). Ces auteurs s'intéressent d'une part, à la production de formule permettant de généraliser de tels phénomènes dans une perspective de modélisation algébrique-fonctionnelle. En se référant aux travaux historiques de Viète et de Descartes, ils accordent également de l'importance à un travail sur les paramètres, c'est-à-dire le(s) *nombre(s) supposé(s) connu(s)* qui permettent d'étudier les conditions d'existence de *l'inconnue (ou des nombre inconnus)* ou de validité d'un phénomène donné. Ces chercheurs en didactique affirment qu'il s'agit par là-même d'accéder à de véritables pratiques de modélisation algébriques, c'est-à-dire qui permettent de produire de nouvelles connaissances sur les phénomènes numériques.

Nous retenons notamment de ces travaux l'importance d'identifier, de généraliser et de modéliser les phénomènes numériques en jeu pour conduire à la production de formules algébriques permettant de généraliser ces phénomènes mais aussi à l'étude des conditions éventuelles de possibilité ou d'impossibilité de ces phénomènes.

Contexte de la recherche

Initialement, en 2007, il s'agissait de transposer à deux classes de fin d'école primaire (élèves de 10-11 ans) un dispositif collaboratif entre élèves, enseignants et chercheurs en mathématiques, «MATH.en.JEANS¹», visant à faire vivre des activités de recherche en mathématiques au secondaire (élèves de 11 à 18 ans). Le projet a été repensé de manière à l'adapter aux différentes contraintes spécifiques du primaire. Intitulé «Math.en.3B²» depuis 2009, il concerne maintenant sept ou huit classes, soit environ 200 élèves qui collaborent avec cinq chercheurs en didactique des mathématiques. Le dispositif fait coopérer élèves, enseignants et chercheurs de la manière suivante : un chercheur formule devant une classe entière un énoncé de problème de recherche. Les élèves et le chercheur communiquent ensuite pendant plusieurs mois par courrier électronique. L'enseignant aménage pour les élèves des moments de recherche réguliers consacrés à la résolution du problème au cours desquels ils élaborent collectivement des réponses aux questions posées par le chercheur. L'année se termine par un congrès qui réunit les différentes classes concernées par le projet, leurs enseignants et les chercheurs, durant lequel les élèves présentent leurs résultats par un exposé en plénière et animent des stands. Ce sont les chercheurs qui choisissent les sujets de recherche. Notons que des nécessités dans le choix de ces sujets ont rapidement émergé : puisque les recherches se font sur le temps de travail de la classe ordinaire, ils doivent notamment convoquer des savoirs mathématiques officiellement enseignés ou à enseigner. Les problèmes initiaux et les questions envisagées par la suite doivent également être suffisamment consistants afin de donner lieu à un temps de recherche mathématique long, tout en permettant à une majorité d'élèves de s'engager dans ce travail. Précisons également que les questions de recherche autour de ce projet se sont posées de façon postérieure et donc contingente à sa mise en œuvre effective dans plusieurs classes.

Il s'avère que plusieurs des sujets retenus par l'équipe de chercheurs correspondent à des problèmes de généralisation et de modélisation de phénomènes numériques. En effet, la plupart d'entre eux conduisent à l'émergence de processus généralisés de calcul susceptibles pour certains d'être formalisés au moyen de formules algébriques. Bien que l'algèbre ne soit pas un domaine d'étude enseigné au primaire, nous avons observé de manière récurrente que dans la résolution de ces problèmes les enseignants et leurs élèves cherchent visiblement à aboutir à l'élaboration d'une formule algébrique explicite. Il nous a semblé que le projet «Math.en.3B» donnait à voir la complexité inhérente aux processus intermédiaires à l'œuvre dans cette généralisation algébrique, de même que la gestion de cette complexité par les enseignants ou par les chercheurs engagés dans le projet.

Nous nous sommes intéressés plus précisément à trois problèmes présentés ci-dessous sous forme d'énoncés génériques :

-
1. <http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm>
 2. Les «3B» correspondent aux initiales des trois municipalités dans lesquelles se trouvent les classes concernées.

Problème des poignées de main

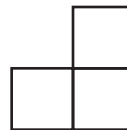
Il y a n personnes dans une assemblée. Pour se dire bonjour, chacun salue les autres par une poignée de main. À combien de personnes chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout?

Problème des escaliers

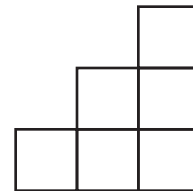
Voici des escaliers à :



une marche



deux marches



trois marches

Combien de « briques » faudrait-il pour construire un escalier à n marches?

Problème de la calculatrice cassée

Une vieille calculatrice ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que l'on peut encore lui faire faire sont $+$, $-$, n et m . Quand on l'allume, l'écran indique N . Comment faire en sorte qu'il indique $N + 1$?

En nous appuyant sur des outils méthodologiques classiques dans une perspective d'ingénierie didactique, nous effectuons des analyses *a priori* et *a posteriori* des situations relatives à la mise en scène didactique de ces problèmes et nous nous interrogeons sur les procédures de résolution des élèves et sur les connaissances sous-jacentes à ces procédures (Brousseau, 1998; Artigue, 2011).

Étude d'un premier problème: les poignées de main

Il s'agit d'un énoncé classique que l'on trouve souvent dans les ouvrages destinés à la formation d'enseignants du primaire en France. Il a d'ailleurs été utilisé bien avant nous par P. Eysseric dans le cadre d'ateliers de résolution de problèmes adressés à des élèves d'un âge similaire (Eysseric, 2003). Dans le cadre de «Math.en.3B», il est posé sous la forme suivante à une classe en 2011 :

Il y a 28 élèves dans votre classe. Pour se dire bonjour, chacun salue son camarade par une poignée de main. À combien d'élèves chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout?

Conformément à notre analyse *a priori*, les élèves répondent relativement aisément à la première question. Mais la recherche d'une réponse à la deuxième question donne lieu à des calculs erronés du type 27×28 ou 27×27 qui ne tiennent pas compte de la contrainte implicite: «On ne serre pas la main deux fois à un même camarade.» Le chercheur ou la chercheuse propose alors de simuler la situation évoquée soit avec un petit groupe d'élèves, soit en classe entière, afin de favoriser l'explicitation collective de cette contrainte et la dévolution de la situation didactique.

3. Il a pu être formulé de façon légèrement différente dans d'autres classes: Vingt professeurs de mathématiques se réunissent. Pour se dire bonjour, chacun salue les autres par une poignée de mains. À combien de personnes chacun serre-t-il la main? Combien de poignées de mains sont données en tout?

Cela permet aux élèves d'arriver assez aisément à des calculs de sommes du type $1 + \dots + 27 = 378$ ou $27 + \dots + 1 = 378$, selon la façon dont la simulation du problème a été jouée. Les calculs sont souvent effectués à la calculatrice, qui est autorisée lors de cette première phase de recherche. En demandant d'étudier un autre cas particulier avec un nombre plus élevé, on amène les élèves à chercher une méthode de calcul plus «générale». Par exemple, la chercheuse qui expérimente ce sujet en 2011 pose la question suivante par courrier électronique aux élèves :

Vous êtes 146 élèves dans votre école. Si on imagine que pour se dire bonjour chacun salue son camarade par une poignée de main, combien de poignées de main sont données en tout?

C'est la recherche d'une économie dans les calculs à effectuer qui va favoriser l'émergence d'un procédé général de calcul. Voici un exemple de scénario observé dans une autre classe. Le premier calcul erroné a donné $27 \times 28 = 756$. Après rectification, les élèves calculent $1 + \dots + 27 = 378$ et remarquent que 378 est la moitié de 756, donc $1 + \dots + 27 = \frac{28 \times 7}{2}$. Ils obtiennent alors la formule $n \times \frac{n-1}{2}$ qui découle d'un seul fait numérique constaté. Notons également que le choix des nombres joue le rôle de variable didactique : la formule apparaît plus aisément dans le cas d'un effectif initial de 20 personnes, car la relation double/moitié est plus facile à identifier pour des nombres comme 190 et 380 que dans le cas présenté ci-dessus. La question de la justification de ce processus de calcul généralisé et de la formule correspondante peut alors être soulevée. Nous y reviendrons.

Mais bien d'autres scénarios sont envisageables, comme celui qui apparaît dans la classe où le problème est expérimenté en 2011. Les élèves écrivent le message suivant à la chercheuse :

On a remarqué qu'on enlève 1 chaque fois.
 Pour 5 élèves: On part de 4, car le premier ne se serre pas la main, soit $4+3+2+1=10$
 Pour 28 élèves: $27+26+25+\dots+1=378$
 Dans notre école, on est 146 élèves. Avec notre méthode, c'était beaucoup trop long.
 $145+144+143+\dots$ Pfff
 On a cherché une méthode moins longue. On a réécrit les différents résultats :
 5 élèves -----> 10
 28 -----> 378
 8 -----> 28
 On a cherché comment on passait du nombre d'élèves au nombre de poignées de main.
 5×2 -----> 10 Vrai
 28×2 -----> 378 Faux
 On ne part pas du nombre donné dans l'énoncé, mais plutôt de ce nombre -1.
 On a vu qu'il fallait diviser le nombre par 2 et le multiplier par le nombre -1, puisqu'on enlève 1 chaque fois. On a trouvé: $(N:2) \times (N-1)$
 5 --> $(5:2) \times (5-1)$
 28 --> $(28:2) \times (28-1)$ Vrai
 8 --> $(8:2) \times (8-1)$ Vrai

Donc, pour 146 élèves :

$$(146:2) \times 145 = 10\,585$$

Le résultat est-il exact?

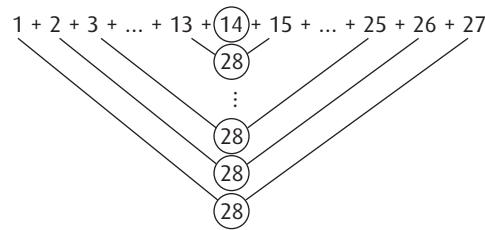
L'analyse de ce message montre que les élèves commencent par constater qu'il s'agit d'ôter 1 au nombre évoqué dans l'énoncé. Ils tentent ensuite d'utiliser les exemples traités au préalable, en cherchant des relations entre les données du problème et les résultats trouvés, ce qu'ils formulent d'ailleurs explicitement: « *On a cherché comment on passait du nombre d'élèves au nombre de poignées de main.* » Ils essaient d'abord de trouver une relation de proportionnalité entre ces différentes données, ce qui paraît cohérent avec les connaissances enseignées en fin de primaire. Mais, échouant et se rappelant qu'il faut ôter 1 au nombre de départ, ils tentent visiblement de trouver un coefficient multiplicateur entre les « nombres d'élèves moins 1 » et les résultats produits lors de leurs différents exemples. Ils aboutissent ainsi au « nombre d'élèves divisé par 2 ». Enfin, ils procèdent à des vérifications sur les exemples. Ce type de solutions engage certes des connaissances anciennes sur les nombres et les relations entre les nombres, mais il nous conduit à interroger le type de processus de généralisation et de modélisation à l'œuvre. En effet, tout se passe comme si, au lieu de s'appuyer sur l'identification d'un phénomène numérique généralisable, les élèves en présupposent l'existence et cherchent à le « découvrir ». C'est loin d'être anodin! Les connaissances mises en fonctionnement par ces élèves semblent presque contre-productives par rapport à celles attendues sur la généralisation et la modélisation.

Il est toutefois possible d'engager les élèves dans la recherche d'une justification de la généralisation numérique-algébrique sous-jacente. Par exemple, le chercheur peut guider les élèves pour faire émerger un constat à partir des sommes intermédiaires produites par les élèves par le biais d'une écriture du type suivant (écriture produite pour un nombre initial de 27 personnes) :

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots + 13 + 14 + \dots + 24 + 25 + 26 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \textcircled{27} \\ \vdots \\ \textcircled{27} \\ \textcircled{27} \\ \textcircled{27} \end{array}$$

et qui conduit au résultat: $13 \times 27 = 27 \times \frac{26}{2}$. La formule à laquelle on peut aboutir est alors $n \times \frac{n-1}{2}$ où n désigne le nombre initial de personnes.

Or nous avons pu constater que ce type de constat n'émerge que par le biais d'un étayage fort de la part du chercheur et de l'enseignant. Par ailleurs, dans les faits, deux cas seraient à distinguer: le cas d'un nombre initial pair ou impair. En effet, pour un nombre initial de 28 personnes, l'écriture de la somme à produire est:



et conduit pour sa part au résultat $(28 \times 13) + 14 = 28 \times \left(\frac{28}{2} - 1\right) + \frac{28}{2}$. La généralisation permettrait dès lors d'aboutir à l'écriture de la formule suivante: $\left(\frac{n}{2} - 1\right) \times n + \frac{n}{2}$ où n désigne le nombre initial de personnes.

Les deux formules obtenues sont bien sûr équivalentes, mais les élèves du niveau considéré ne disposent pas *a priori* des moyens mathématiques requis pour prouver cette équivalence. Remarquons d'ailleurs que, chaque fois que ce type de généralisation surgit dans les classes, seul le cas pair est étudié et généralisé à tous les cas, rendant muette la distinction à opérer entre les cas pair et impair.

En résumé, nos analyses *a priori* et *a posteriori* tendent à montrer que, si l'identification du phénomène numérique semble facilitée par certaines caractéristiques de l'énoncé (par exemple, le fait de pouvoir mimer la situation), la généralisation de ce phénomène est délicate. La production d'une formule paraît soit difficilement accessible à ce niveau, soit à même de se faire par le biais de connaissances n'ayant pas un avenir satisfaisant du point de vue de la démarche de modélisation algébrique. Dès lors, l'institutionnalisation de savoirs liés à des pratiques de modélisation algébrique-numérique paraît poser problème.

Nous nous proposons maintenant d'étudier un deuxième problème expérimenté dans le cadre du projet «Math.en.3B» qui peut paraître analogue au problème des «poignées de main» au sens de Costermans (2001), puisque la «structure profonde» de ces deux énoncés est quasi similaire: il s'agit dans les deux cas de calculer la somme des n (ou $n-1$) premiers entiers. Pour autant, la situation didactique envisageable n'est pas la même⁴. L'habillage retenu dans ce deuxième exemple agit probablement de manière non négligeable sur les procédures des élèves. Précisons également que nous n'avons pas pour objectif *a priori* de favoriser une résolution par analogie, comme cela peut être le cas des auteurs qui jouent sur le caractère isomorphe de problèmes mathématiques. En revanche, nous étions curieux de voir si les élèves seraient capables de reconnaître le caractère identique de la structure mathématique sous-jacente aux deux problèmes lors du congrès final.

4. Cet exemple lié à deux problèmes isomorphes est d'ailleurs à même de donner sens à la distinction faite par Brousseau (1998) entre situation et problème.

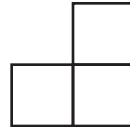
Étude d'un deuxième problème: les escaliers

Ce deuxième problème s'inspire d'une activité publiée dans un numéro spécial de la revue *Grand N* (adressée à un public d'enseignants du primaire, de formateurs et de chercheurs). L'énoncé donné aux élèves est le suivant.

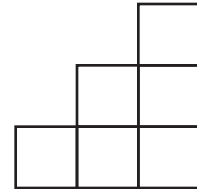
Voici des escaliers à:



une marche



deux marches

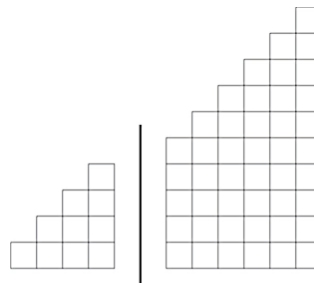


trois marches

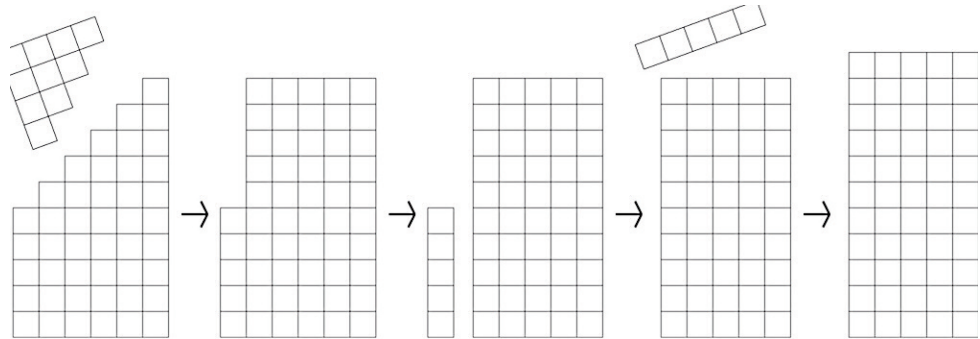
Combien de «briques» faudrait-il pour construire un escalier à 4 marches? Combien pour un escalier à 6 marches? Et pour un escalier à 10 marches?

Les élèves répondent assez rapidement aux premières questions de l'énoncé soit en faisant des dessins, soit en constatant qu'il s'agit d'additionner les entiers compris entre 1 et le nombre total de marches indiqué. La question de la généralisation numérique peut dès lors être posée par le chercheur en proposant de chercher le nombre de briques nécessaires pour construire un escalier de 100, 200 ou 300 marches, par exemple. Cela disqualifie les méthodes basées sur le dessin ou sur des calculs effectués à la main, mais est susceptible de faire émerger des procédures erronées qui tentent de se ramener à un problème de proportionnalité du type «pour un escalier de 200 marches, je multiplie par 20 le résultat trouvé pour un escalier de 10 marches». Pour invalider ce type de proposition, le chercheur peut inviter les élèves à fabriquer collectivement l'escalier en question sur du papier quadrillé. Il peut aussi faire constater que le modèle proportionnel ne fonctionne pas pour des valeurs plus petites (passage d'un escalier à 3 marches à un escalier à 6 marches, par exemple).

Des tentatives de généralisation similaires à celles observées pour le problème des «poignées de main» apparaissent. Mais cet habillage favorise également l'émergence de nouvelles stratégies de type géométrique proposées par des élèves. Nous en détaillons une ci-après, rencontrée dans une classe de CM2 et qualifiée par les élèves de «téléportation de morceaux d'escaliers» après son exposé à la classe par l'élève qui l'avait produite. Celle-ci, Manon, suggère tout d'abord de découper l'escalier de 10 marches de la manière suivante :



Puis elle «téléporte» le morceau de gauche sur le dessin, de manière à recomposer une figure rectangulaire de 11 briques sur 5 briques. Voici une schématisation de sa méthode :



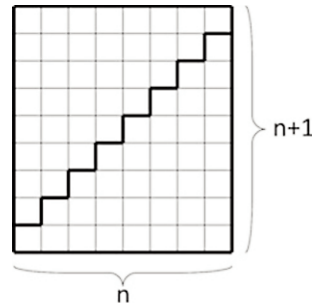
Ainsi, Manon constate que le nombre de briques nécessaires pour construire un escalier de 10 marches est le nombre de briques contenues dans la surface rectangulaire ainsi obtenue, soit $5 \times 11 = 55$. Elle généralise alors sa méthode en affirmant qu'on obtient le nombre nécessaire de briques en multipliant la moitié du nombre de marches de l'escalier par ce même nombre augmenté de 1. La formule produite collectivement par les élèves pour généraliser la «méthode de Manon» est $\left(\frac{n}{2}\right) \times (n + 1)$.

La procédure de résolution sous-jacente à la solution exposée par Manon, puis reprise par la classe, nous semble plus pertinente que les procédures évoquées dans la résolution du problème des «poignées de main». En effet, l'identification d'un phénomène géométrico-numérique en jeu dans la situation est susceptible d'être généralisée et de justifier la formule produite. Elle peut toutefois paraître assez ambitieuse, puisqu'elle suppose un changement de point de vue conséquent sur le problème initialement posé (pour s'autoriser cette stratégie de découpage-recollement) et la mise en œuvre d'une dialectique entre les cadres numérique, géométrique et algébrique. Le fait est que seule Manon produit une telle solution dans la classe observée. De plus, la formulation de la procédure sous-jacente et son appropriation par une majorité d'élèves de la classe ne peuvent se faire sans un étayage fort de la part de l'enseignante et de la chercheuse concernées⁵. En outre, la généralisation correcte de cette procédure supposerait, comme dans le problème des «poignées de main», de distinguer le cas pair (traité par Manon) du cas impair (d'ailleurs envisagé par cette élève qui propose un autre découpage pour ce deuxième cas). Au vu des difficultés rencontrées par la majorité des élèves pour comprendre la «méthode de Manon» sur le seul cas pair, chercheuse et enseignante conviennent de ne pas engager la classe dans la recherche d'un procédé de même type pour le cas impair.

Il existe cependant une procédure géométrico-numérique qui évite la distinction des cas pairs et impairs, envisagée dans notre analyse *a priori* du problème des

5. L'enseignante a d'ailleurs expressément demandé à la chercheuse, première auteure de l'article, de revenir dans la classe à cet effet.

escaliers: il s'agit de remarquer qu'en accolant astucieusement deux escaliers de n marches, on obtient un rectangle de dimensions n sur $(n + 1)$, soit comportant $n \times (n + 1)$ briques.



Mais on introduit alors une figure non présente dans l'énoncé initial, ce qui paraît difficilement pouvoir émerger de l'activité mathématique des élèves. D'ailleurs, lors des expérimentations conduites autour du problème des «escaliers» dans le contexte de «Math.en.3B», cette méthode de résolution est toujours apparue à l'initiative du chercheur ou de la chercheuse ou, encore, de l'enseignant ou de l'enseignante concernés.

En rapprochant les observations et analyses relatives aux problèmes des «poignées de main» et des «escaliers», on peut remarquer que, si l'identification du phénomène numérique en jeu paraît accessible (assez directement pour les escaliers, par l'intermédiaire d'une simulation pour les poignées de main), sa généralisation et l'élaboration d'une formule demeurent délicates. Les connaissances sous-jacentes à une telle démarche de modélisation numérique-algébrique semblent difficilement accessibles pour des élèves de ce niveau. D'ailleurs, le caractère isomorphe de ces deux problèmes, c'est-à-dire la similitude du phénomène numérique en jeu, est rarement identifié par les élèves qui rencontrent les deux énoncés dans le dispositif. Le fait d'obtenir deux formules différentes dans la résolution de ces deux problèmes (qui provient du fait que l'on calcule la somme des n premiers entiers dans un cas et des $(n-1)$ premiers entiers dans l'autre) ne perturbe pas les élèves. La formule reste en quelque sorte «contextualisée» à l'habillage de chacun de ces problèmes. Ce constat renforce les résultats de nos analyses qui tendent à prouver que l'activité mathématique des élèves engagés dans la résolution de ces problèmes relève finalement peu (ou pas) de la généralisation et de la modélisation du phénomène numérique commun à ces deux énoncés. Les démarches qui conduisent les élèves à la production de formules ne permettent pas de mettre en fonctionnement les connaissances à même d'éclairer ou de justifier la modélisation, soit parce qu'elles sont difficilement accessibles pour une majorité d'enfants, soit parce qu'ils trouvent comment produire une formule dont ils présupposent l'existence, sans s'appuyer sur la généralisation du phénomène numérique pourtant à l'œuvre. Ainsi, si ces problèmes représentent en apparence des occasions de «trouver» des formules algébriques, nous pensons qu'ils sont loin d'en occasionner une production qui paraît pertinente au regard de la démarche de généralisation et de modélisation algébrique *a priori* visée.

Voyons maintenant ce qu'il en est pour un problème ne permettant pas d'aboutir à la production d'une formule algébrique, mais dont la résolution relève toutefois d'une démarche de généralisation de phénomènes numériques.

Étude d'un troisième problème: «la calculatrice cassée»

Ce problème a lui aussi été utilisé auparavant par P. Eysseric dans le cadre de ses ateliers de résolution de problèmes. Il a été proposé une première fois en 2007 à une classe de CM2 dans le cadre du dispositif «Math.en.3B», puis à plusieurs reprises à d'autres classes dans les années qui ont suivi :

J'ai à la maison une vieille calculatrice qui ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que je peux encore lui faire faire sont +, -, 5 et 12. Quand je l'allume, l'écran indique 2007. Pouvez-vous m'aider à faire en sorte qu'il indique 2008? Si oui, comment?

La réponse experte à ce problème est fournie par l'identité de Bézout qui est plus précisément visée: «Soient a , b et c , des entiers relatifs. Il existe des solutions entières à l'équation $ax + by = c$ si et seulement si c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$ » et que nous souhaitons faire formuler aux élèves à l'aide de cette recherche.

Dans un premier temps, en procédant par essais-erreurs, les élèves exhibent une ou plusieurs solutions du type $12+12+12-5-5-5-5-5-5$, $5+5+5+5+5-12-12-12...$. Si la solution n'émerge pas spontanément, le chercheur ou la chercheuse incite à l'utilisation de l'écriture multiplicative afin d'améliorer la lisibilité des résultats. On obtient alors $(3 \times 12) - (7 \times 5)$ et $(5 \times 5) - (2 \times 12)$. C'est en proposant aux élèves de résoudre ce même problème avec un autre nombre affiché au départ sur l'écran qu'on les conduit à formuler un énoncé décontextualisé. Par exemple, dans une classe ayant effectué la recherche en 2007 avec la seconde auteure de l'article, les élèves énoncent:

Le problème que nous cherchons à résoudre est: Comment faire +1 en utilisant 5, 12, + et -?

La chercheuse propose alors aux élèves d'étudier d'autres cas particuliers en remplaçant 5 et 12 par 2 et 4, 3 et 8, 4 et 11, 6 et 8, 12 et 15, 9 et 16, etc., qui permettent aux élèves de s'engager dans l'étude de différentes éventualités dans la généralisation du phénomène numérique à l'œuvre. Voici la retranscription d'un courrier électronique adressé par les élèves à la chercheuse à ce moment de la recherche et dans lequel on voit apparaître l'identification effective de cas différents et des ébauches de critères (notamment celui de la parité) liés à cette première étude de cas:

Nous avons trouvé comme résultats:

Avec 6 et 8, on ne peut pas faire + 1, parce que ce sont des nombres pairs.

Avec 9 et 16: $(4 \times 16) - (7 \times 9)$

Avec 2 et 4, on ne peut pas faire + 1, parce que ce sont deux nombres pairs.

Avec 4 et 11: $(3 \times 4) - 11$

Avec 3 et 8: $(3 \times 3) - 8$

Avec 15 et 12: nous cherchons encore...

Pour guider les élèves vers une formulation de résultats qui permettent d'énoncer une généralisation du phénomène numérique et d'amorcer une justification de ce phénomène, la recherche est relancée par une nouvelle intervention de la chercheuse:

Si, dans certains cas, vous ne savez pas faire +1, quel est le plus petit nombre que vous réussissez à obtenir?

Dans la classe ayant expérimenté ce problème en 2007, les élèves écrivent ce message à la chercheuse:

- Avec 6 et 8 ou avec 2 et 4, on ne sait pas faire +1, mais +2. C'est sûrement parce que ce sont deux nombres pairs. On est dans la table de 2.
- Avec 12 et 15, on sait faire 3, et 12 et 15 sont dans la table de 3.
- Avec 3 et 9, on reste dans la table de 3, donc on ne fera pas mieux que 3.
- Avec 5 et 10, on ne pourra jamais faire + 1, car dans la table de 5 et dans celle de 10 le chiffre des unités est toujours 0 ou 5. On sait faire 5 car $10 - 5 = 5$, et on ne pourra pas faire mieux.

Les élèves font référence aux tables de multiplication, outil disponible en fin de primaire. Ils commencent visiblement à repérer, par l'identification de multiples de 5 et de 2, que le plus petit nombre que l'on peut obtenir à partir des deux nombres donnés initialement correspond à un diviseur commun de ces deux nombres. Remarquons que les exemples cités ne mettent pas en avant le fait que le diviseur commun retenu est «le plus grand possible». La dernière phrase du message témoigne pourtant d'une amorce significative de compréhension du phénomène numérique en jeu. Les élèves formulent, *in fine*, un énoncé qui généralise ce phénomène en prenant en charge les différents cas possibles à l'œuvre.

- Quand les deux nombres sont dans la table de 1 et seulement dans la table de 1, on sait faire +1.
- On cherche si les deux nombres sont dans la même table.
- Par exemple, 24 et 40 sont dans la table de 2, de 4 et de 8.
- On regarde la plus grande table: ici, c'est 8.
- Avec 24 et 40, on sait faire 8.

Depuis la mise en place du dispositif, le problème de «la calculatrice cassée» a été expérimenté à plusieurs reprises. Contrairement aux énoncés des «poignées de main» et des «escaliers», le problème de «la calculatrice cassée» ne vise pas *a priori* la généralisation d'un phénomène numérique pouvant conduire à produire une formule algébrique. Il s'agit en revanche de remarquer que le fonctionnement du phénomène numérique est conditionné par un paramètre, le *pgcd* des deux nombres, qui, bien que ne figurant pas aux programmes de l'école primaire, est accessible à ce niveau en évoquant les tables de multiplication. En effet, nos analyses *a priori* et *a posteriori* des situations didactiques attenantes montrent que, grâce à des connaissances numériques anciennes largement accessibles en CM2, les élèves sont à même d'entreprendre une généralisation du phénomène sous-jacent et, surtout, de s'engager d'eux-mêmes, sans nécessité de guidage fort de la part du chercheur ou de la chercheuse ou de l'enseignant ou de l'enseignante, dans l'étude des conditions de possibilité ou d'impossibilité liées à ce phénomène. Au final, le problème de la

«calculatrice cassée» nous paraît plus propice pour faire entrer une majorité d'élèves dans une problématique de modélisation algébrique-numérique que les deux problèmes précédents.

Discussion : s'agit-il de «trouver la bonne formule»?

Les analyses des sujets de recherche expérimentés dans le contexte du projet «Math.en.3B» nous amènent à interroger le rôle des formules et de leur production dans la démarche de modélisation algébrique *a priori* visée. Comme les exemples des «poignées de main» et des «escaliers» en témoignent, tout se passe comme si la présence d'une formule ou son existence présupposée incitaient les élèves à la «trouver le plus vite possible», parfois à l'aide d'un unique fait numérique constaté. On peut d'ailleurs s'interroger sur les origines d'un tel phénomène didactique dans les représentations qu'ont les élèves, voire leurs enseignants, sur ce que recouvre une démarche de recherche et de résolution de problèmes en mathématiques : s'agit-il de trouver «les bonnes formules»? Pour le moins, il semble que les problèmes de «Math.en.3B» qui conduisent à la production d'une formule fassent obstacle à une entrée pertinente dans la démarche de généralisation et de modélisation algébrique-numérique visée initialement. Des difficultés dans les justifications, les formulations ou les décontextualisations des procédures sont également constatées. Il faut bien entendu mettre en regard ces difficultés avec la nature des problèmes posés. Nos analyses montrent en effet que ceux des «poignées de main» et «des escaliers» rendent le processus de généralisation et de modélisation algébrique particulièrement délicat pour des élèves de fin du primaire. Rappelons à ce sujet qu'en s'engageant dans une collaboration avec les enseignants et les élèves, les chercheuses et les chercheurs étaient contraints de trouver des problèmes consistants, capables de résister à plusieurs mois de recherche, et que notre problématique de recherche n'a émergé qu'*après* la mise en œuvre de ce projet collaboratif. Il convient enfin de préciser que les résultats de notre recherche n'ont pas pour objet de remettre en question des tentatives d'enseignement précoce de savoirs algébriques et préalgébriques comme outil de généralisation à l'école primaire par la production de formules, tentatives dont le succès a du reste été éprouvé, entre autres par Radford (2010). Depuis, nous avons d'ailleurs cherché à proposer et à expérimenter de nouveaux problèmes dans le cadre du projet «Math.en.3B» à même de mettre en fonctionnement ce type de savoirs et de rendre la production de formules plus pertinente au regard de la démarche de modélisation algébrique visée. Les résultats de notre étude nous conduisent aussi à considérer une autre entrée possible dans l'enseignement des savoirs préalgébriques à l'école illustrée ici par l'exemple du problème de «la calculatrice cassée» : elle prend appui sur l'étude des conditions de possibilité ou d'impossibilité dans la généralisation de phénomènes numériques. Cette entrée nous semble également au cœur de la démarche de modélisation algébrique, à l'instar d'autres auteurs comme Barallobres (2004), et ce, d'ailleurs, d'une manière cohérente avec notre arrière-plan théorique initial (Chevallard, 1989; Gascon, 1995; Chevallard et Bosch 2012).

Conclusion

La recherche menée nous conduit à nous interroger sur la collaboration d'une équipe d'enseignants et de chercheurs autour d'un projet centré sur la résolution de problèmes. Notamment, elle nous incite à penser que les représentations initiales des élèves et des enseignants sur ce que représente une démarche de recherche en mathématiques ont, dans le cas présent, une influence certaine sur la mise en œuvre des situations expérimentées. Par exemple, «trouver la formule» dans le contexte de certaines de ces situations semble séduire les acteurs du projet bien plus que nous ne l'avions pensé au départ, et ce, au point de prendre parfois le pas sur des enjeux de connaissances que nous considérons *a priori* comme plus en lien avec des apprentissages relatifs à une démarche de recherche en mathématiques.

Références bibliographiques

- ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. Dans C. Margolinas *et al.* (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 15-25). Grenoble : La pensée sauvage.
- BARALLOBRES, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24 (2/3), 285-328.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- BULE, C. *et al.* (2010). *La résolution de problèmes en questions : quels savoirs ou savoir-faire? Quelle institutionnalisation?* Actes du XXXVII^e colloque de la COPIRELEM, La Grande Motte (IUFM Montpellier).
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires. La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.
- CHEVALLARD, Y. et BOSCH, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en didactique des mathématiques*. Numéro spécial hors série *Enseignement de l'algèbre. Bilan et perspectives* (p. 19-39). Grenoble : La pensée sauvage.
- COSTERMANS, J. (2001). *Les activités cognitives : raisonnement, décision et résolution de problèmes*. Bruxelles : De Boeck Université.

- COULANGE, L. (1997). Les problèmes «concrets» à mettre en équations dans l'enseignement. *Petit x*, 19, 33-58.
- COULANGE, L. et REYDY, C. (2012). *La résolution de problèmes en questions: formulation des connaissances et institutionnalisation?* Communication au séminaire de didactique des mathématiques de l'IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes.
- EYSSERIC, P. (2003). Ateliers de recherches en mathématiques. *Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques. Tome 1 – Apprentissage et diversité* (p. 137-156). Paris: ARPEME.
- GASCON, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé. *Petit x*, 37, 43-63.
- RADFORD, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. Dans M. F. Pinto et T. F. Kawasaki (dir.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 73-80. Belo Horizonte, Brésil: PME.
- REYDY, C. et al. (2014). *Un problème ouvert en géométrie pour la formation des enseignants?* Actes du XL^e colloque de la COPIRELEM, Nantes, 2013.

La résolution de problèmes écrits d'arithmétique: le rôle déterminant des inférences

Marie-Pier GOULET

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Dominic VOYER

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

1 Résolution de problèmes en mathématiques

Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill

7 La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants

Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

24 De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève

Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

44 Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs

Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada

64 Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM

Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France

84 La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule »?

Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France

100 La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences

Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

120 Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires

Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

138 Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire

Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada

158 Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire?

Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada

173 Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe

Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique

190 Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer

Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

La résolution de problèmes écrits d'arithmétique: le rôle déterminant des inférences

Marie-Pier GOULET

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Dominic VOYER

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

RÉSUMÉ

La réussite des élèves en résolution de problèmes écrits a souvent été associée aux compétences en lecture. En ce sens, il importe de comprendre comment les habiletés liées à la lecture peuvent s'articuler pour permettre l'apprentissage de la résolution de problèmes écrits. L'objectif de recherche consiste à vérifier l'influence de deux habiletés en lecture sur le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques d'élèves du troisième cycle du primaire. À cette fin, nous avons utilisé un devis quantitatif s'inscrivant dans les études corrélationnelles prédictives. Les 176 élèves ayant participé à l'étude ont réalisé deux épreuves de compréhension en lecture se traduisant par la lecture d'un texte narratif et d'un texte informatif auxquels était rattachée une série de dix questions, soit cinq questions de repérage et cinq questions d'inférence. Les participants ont aussi résolu un ensemble de six problèmes écrits de mathématiques. Les résultats des analyses de régression linéaires effectuées soutiennent que la compréhension aux questions d'inférence représente l'habileté spécifique en lecture qui est la plus liée au rendement en résolution de problèmes écrits. Ces résultats nous amènent à mettre en évidence l'importance de développer l'habileté à émettre des inférences à l'école.

ABSTRACT

Solving word problems in arithmetic – the critical role of inferences

Marie-Pier GOULET

University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Dominic VOYER

University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Student success with solving word problems has often been associated with reading skills. In this sense, it is important to understand how reading skills can be broken down to help students learn how to solve word problems. The objective of this study is to verify the influence of two specific reading skills on problem solving performance among students in third cycle elementary. To do this, we used a quantitative estimate falling within predictive correlational studies. The 176 students who participated in the study took two reading comprehension tests, reading one narrative text and one informative text to which 10 questions were attached - five identification questions and five inference questions. The participants also solved a series of 6 mathematical word problems. The results of the linear regression analyses performed support the idea that comprehension of inference questions is the reading skill most related to performance in solving word problems. These results lead us to highlight the importance of helping students develop the ability to make inferences.

RESUMEN

La resolución de problemas de aritmética escritos: el rol determinante de las inferencias

Marie-Pier GOULET

Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

Dominic VOYER

Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

El éxito de los alumnos en resolución de problemas escritos, ha sido frecuentemente asociado con las habilidades en lectura. Así pues, es importante comprender cómo las habilidades ligadas a la lectura pueden articularse para facilitar el aprendizaje de la resolución de problemas escritos. El objetivo de esta investigación es verificar la influencia de dos habilidades específicas a la lectura sobre el rendimiento en resolución de problemas matemáticos escritos en alumnos del tercer ciclo de primaria. Para lograrlo, utilizamos un cuadro cuantitativo inscrito en los estudios correlacionales predictivos. Los 176 alumnos que participaron en el estudio fueron

sometidos a dos exámenes de comprensión en lectura consistentes en la lectura de un texto narrativo y de un texto informativo a los cuales se les había agregado una serie de 10 preguntas, cinco de las cuales eran preguntas de localización y cinco de inferencia. Los participantes tenían que resolver, asimismo, seis problemas de matemáticas escritos. Los resultados de los análisis de regresión lineal efectuados muestran que la comprensión de las cuestiones de inferencia representa la habilidad específica en lectura que está más ligada al rendimiento en resolución de problemas escritos. Esos resultados nos conducen a evidenciar lo importante que es desarrollar la habilidad de emitir inferencias en la escuela.

Introduction

La réussite en mathématiques, si elle peut comporter différentes facettes, a souvent été caractérisée par l'habileté des élèves à résoudre des problèmes de mathématiques, et souvent des problèmes écrits de mathématiques (Jitendra, Sczesniak et Deatline-Buchman, 2005). Ce type de problèmes, aussi connu sous l'appellation des *word problems* par les Anglo-Saxons, comporte une description écrite d'une situation, souvent issue de la vie courante, qui requiert de l'élève qu'il traduise l'information présentée dans l'énoncé sous une forme mathématique afin de répondre à une ou plusieurs questions (Lash, 1985; Verschaffel, Greer et De Corte, 2000). Pour résoudre ce type de problèmes présenté sous la forme écrite, l'élève doit évidemment lire l'énoncé afin de lui donner un sens. Sa compréhension de l'énoncé, qui peut se traduire par la construction d'une représentation mentale plus qualitative que mathématique de la situation dans laquelle s'inscrit le problème, est approfondie lors d'une démarche active de production de sens (Staub et Reusser, 1995). Le rôle déterminant de la compréhension dans le processus de résolution de problèmes a été mis en évidence par plusieurs chercheurs, dont certains mentionnent que la réussite du problème dépend fondamentalement d'une bonne représentation interne de celui-ci (Cummins, Kintsch, Reusser et Weimer, 1988). Ainsi, résoudre un problème de mathématiques suppose non seulement la construction de représentations logico-mathématiques, mais aussi celle de représentations plus qualitatives, jouant un rôle intermédiaire entre le sens du texte et la mathématisation du problème (Coquin-Viennot et Moreau, 2007). Selon cette perspective, l'élève placé en situation de résolution de problèmes écrits de mathématiques est appelé à accomplir deux tâches: au-delà de son rôle de solutionneur, consistant à résoudre mathématiquement le problème, l'élève est aussi un lecteur qui cherche à donner du sens au texte dans lequel s'inscrit le problème. Ce double rôle attribué à l'élève permet de mettre en évidence la complexité de la tâche de résolution de problèmes qui exige la mobilisation de plusieurs connaissances et habiletés différentes (Weisser, 1999). Outre les connaissances liées au domaine des mathématiques, telles que les habiletés en calcul et les

connaissances des différentes techniques opératoires, nous trouvons aussi la lecture, qui constitue une habileté essentielle afin de résoudre un énoncé de problème écrit.

Problématique

Plusieurs études menées dans le domaine de la résolution de problèmes écrits se sont intéressées aux liens qui existent entre les mathématiques et la lecture. Les résultats probants et originaux obtenus par plusieurs chercheurs justifient l'engouement persistant de cette thématique de recherche au fil des ans. Parmi les travaux réalisés récemment, certains ont porté plus précisément sur les différentes pratiques et stratégies favorisant le développement de la compétence à lire en mathématiques (Camenisch et Petit, 2008; Carter et Dean, 2006; Devidal, Fayol et Barrouillet, 1997), alors que d'autres ont étudié plus précisément les habiletés en lecture pouvant être associées au rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques (Sovik, Frostrad et Heggberget, 1999; Vilenius-Tuohimaa, Aunola et Nurmi, 2008; Voyer, Beaudoin et Goulet, 2012).

Voyer et ses collègues (2012) ont pour leur part mené une étude exploratoire visant à vérifier l'effet de l'habileté en lecture sur le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques d'élèves de quatrième année. Plus précisément, l'habileté en lecture a été évaluée en fonction de la compréhension de texte selon deux structures différentes, soit les textes à structure narrative et les textes à structure informative, et selon deux types de questions différentes, soit les questions de repérage et les questions d'inférence. Les résultats obtenus par ces auteurs soutiennent notamment 1) que les élèves habiles en lecture ne sont pas nécessairement les mêmes selon le type de texte lu (narratif ou informatif), 2) que le rendement en résolution de problèmes écrits serait lié au rendement en compréhension de texte informatif plutôt qu'au rendement en compréhension de texte narratif et 3) que l'habileté à faire des inférences, lors de la lecture d'un texte tant informatif que narratif, s'avère aussi être liée à l'habileté à résoudre des problèmes écrits de mathématiques. De plus, Voyer et ses collègues (2012) concluent que parmi les quatre habiletés spécifiques en lecture ciblées dans le cadre de leur étude, c'est-à-dire l'habileté à comprendre un texte narratif, l'habileté à comprendre un texte informatif, l'habileté à comprendre une question de repérage et l'habileté à comprendre une question d'inférence, il semble que les bons solutionneurs de problèmes écrits de mathématiques soient ceux qui obtiennent de bons résultats en compréhension de texte informatif. En effet, l'habileté à comprendre un texte informatif représente la variable la plus corrélée au rendement en résolution de problèmes écrits.

Sachant que les conclusions issues de l'étude de Voyer *et al.* (2012) s'appuient sur des données obtenues après une expérimentation menée auprès d'élèves de la quatrième année, nous croyons que l'âge des participants a pu avoir un effet déterminant sur les résultats. À cet égard, la littérature rapporte que les textes à structure informative sont non seulement présentés tardivement aux élèves dans les classes du primaire, mais qu'ils sont aussi moins exploités en classe, au sens où les occasions de

familiarisation avec ce type de textes sont moins nombreuses (Campbell, Kapinus et Beatty, 1995; Duke, 2000; Gagnon et Ziarko, 2008). Gagnon et Ziarko (2008) soulignent d'ailleurs que « [...] tant à l'école qu'à la maison, les élèves ont été davantage exposés à la lecture d'histoires leur permettant d'explorer le schéma narratif. Pourtant, tout au long de leur scolarité, ils seront de plus en plus amenés à lire et à écrire des textes documentaires dans les différentes disciplines du cursus scolaire » (p. 10). De plus, il semble que les textes à structure informative soient plus difficiles à lire pour les élèves (Giasson, 2011). Il semblerait que l'utilisation de ce type de texte engendre de nouvelles difficultés en lecture: pour la première fois, les élèves sont appelés à *lire pour apprendre* au lieu d'*apprendre pour lire* (Chall et Jacobs, 2003). Ce changement occasionne souvent chez les élèves ce que plusieurs chercheurs ont nommé le *fourth-grade slump* (« l'effondrement de quatrième année »), faisant référence à une période critique vécue durant la troisième, la quatrième et la cinquième année au regard du développement des compétences en lecture des élèves (Meichenbaum et Biemiller, 1998; Sweet et Snow, 2003). Selon cette perspective, la question qui nous intéresse est de savoir quel est l'effet des quatre variables ciblées dans le cadre de l'étude de Voyer *et al.* (2012), soit l'habileté à comprendre un texte narratif, l'habileté à comprendre un texte informatif, l'habileté à comprendre une question de repérage et l'habileté à comprendre une question d'inférence, sur le rendement en résolution de problèmes écrits d'élèves de sixième année. Par cette question, nous visons à savoir comment les habiletés en lecture peuvent être liées à une habileté à résoudre des problèmes écrits de mathématiques chez les élèves plus âgés, soit des élèves de 11 et 12 ans.

Hypothèse de recherche

Parmi les quatre habiletés spécifiques en lecture ciblées dans le cadre de cette étude, nous avons pour hypothèse que dans le travail auprès d'élèves de sixième année l'habileté à comprendre une question d'inférence sera la variable la plus liée au rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques. En effet, nous pensons que l'expérience des élèves de sixième année en lien avec les textes informatifs, comparativement à leurs pairs plus jeunes, pourrait réduire l'effet de la structure du texte sur le rendement en résolution de problèmes écrits. Par ailleurs, sachant que le processus d'inférence est considéré par plusieurs auteurs comme une composante essentielle pour grand nombre d'activités cognitives telles que la perception, la résolution de problèmes, la compréhension de texte et la communication verbale (Campion, 2012; Fayol, 2003; Giasson, 2007; Ouellet, 2009; Tennent, Stainthorp et Stuart, 2008), nous croyons qu'inversement l'effet du type de questions pourrait augmenter quand on travaille auprès d'élèves de sixième année.

Cadre de référence

Variable mathématique: la composition des énoncés de problèmes écrits

La résolution de problèmes mathématiques en classe se vit souvent à partir d'énoncés écrits de problèmes pouvant être plus ou moins élaborés. Ces énoncés peuvent être des énoncés réduits, c'est-à-dire des textes qui contiennent uniquement les informations qui sont essentielles à la résolution, et où tout ce qui est essentiel est présent (Voyer, 2006), ou des énoncés dont les contextes sont plus riches et plus élaborés. Les énoncés aux contextes bonifiés incluent généralement des informations situationnelles supplémentaires, qui visent à aider l'élève à se représenter le contexte du récit du problème d'une façon plus complète et plus claire, ainsi que des informations explicatives supplémentaires, qui renvoient à des indices ajoutés afin de rendre plus explicites les relations sémantiques entre les ensembles connus et inconnus (Moreau et Coquin-Viennot, 2003; Stern et Lehrndorfer, 1992; Voyer, 2011).

Variable lecture: les types de questions

Les épreuves de compréhension en lecture qu'on fait passer dans les écoles primaires évaluent généralement la compréhension des élèves selon deux niveaux différents: la compréhension littérale et la compréhension inférentielle. Concrètement, ces niveaux de compréhension sont évalués principalement à l'aide de deux types de questions, soit les questions de repérage et les questions d'inférence.

Les questions de repérage sont liées à un niveau de compréhension littérale. Elles exigent de l'élève qu'il repère une information contenue explicitement dans le texte (Bowyer-Crane et Snowling, 2005; Cain et Oakhill, 1999; Giasson, 2003). Selon la classification des questions proposée par Pearson et Johnson (1978), lorsque la relation entre la question et la réponse est très claire, c'est-à-dire lorsque les informations présentées dans la question renvoient explicitement aux informations du texte, ces auteurs utilisent la formulation *textually explicit*. Ainsi, le lecteur n'a aucun lien à faire, il n'a qu'à repérer l'information dans le texte.

Par ailleurs, les questions d'inférence sont liées à un niveau de compréhension inférentielle. Ces questions exigent du lecteur qu'il dégage l'information implicite d'un texte (Nettles, 2006) ou, à l'inverse, qu'il ajoute de l'information au contenu explicite du texte (Campion et Rossi, 1999). Fayol (2000) décrit quant à lui les inférences comme étant «des interprétations qui ne sont pas littéralement accessibles, des mises en relation qui ne sont pas explicites» (p. 20). Différents types d'inférences peuvent être générés selon la nature de l'information à compléter et selon la demande cognitive exigée pour assurer la compréhension.

La typologie des inférences selon Baker et Stein (1981)

La terminologie proposée par Baker et Stein (1981), qui compte deux catégories distinctes, peut être considérée comme une classification générale de l'ensemble des types d'inférences que proposent les différents auteurs. La première catégorie, sous l'appellation de *text-connecting* (inférences de cohésion), renvoie aux inférences qui nécessitent que le lecteur fasse des liens entre les idées et les phrases du texte afin de

trouver la réponse attendue (Baker et Stein, 1981). La deuxième catégorie, appelée *gap-filling* (inférences basées sur les connaissances), fait référence aux questions qui requièrent plutôt du lecteur qu'il mobilise ses connaissances générales afin de pallier une absence d'information explicite dans le texte (Baker et Stein, 1981; Cain et Oakhill, 1999).

Variable lecture : la structure du texte

La structure du texte renvoie à la façon dont les idées sont organisées par l'auteur. Plusieurs études ont été réalisées au sujet des structures définissant les textes narratifs et les textes informatifs. Selon ces recherches, les textes narratifs posséderaient une structure plutôt semblable et familière, tandis que les structures des textes informatifs seraient plus variées (Beck et McKeown, 1989; Meyer, 1975; Mulcahy et Samuels, 1987).

La structure narrative

Considérant l'objet de cette étude, nous proposons une définition de la structure narrative qui s'inscrit principalement dans le domaine de l'enseignement primaire. Selon cette perspective, la structure des textes narratifs se caractérise à l'aide du schéma du récit, qui concerne la structure sous-jacente aux histoires, composée de cinq éléments: la situation initiale, l'élément déclencheur, les péripéties, le dénouement et la situation finale (Giasson, 2007; ministère de l'Éducation du Québec (MEQ), 2006; Thorndyke, 1977).

La structure informative

Malgré certaines différences entre les classifications proposées dans la littérature au sujet de la structure des textes informatifs, les auteurs s'entendent sur le fait que ces structures sont variées et qu'il est rare qu'une seule structure soit présente tout au long du texte. La classification proposée par Meyer (1985), la plus fréquemment utilisée, compte six catégories: 1) la description, 2) l'énumération, 3) la séquence, 4) la comparaison, 5) la relation entre la cause et l'effet et 6) la relation entre le problème et la solution.

La structure des énoncés mathématiques

Selon Voyer *et al.* (2012), le traitement d'un énoncé de problème mathématique s'apparente davantage au traitement fait sur un texte à structure informative qu'à celui fait sur un texte à structure narrative. Bien que les énoncés de problèmes prennent souvent la forme d'une histoire, comme c'est le cas pour les textes à structure narrative, Voyer et ses collègues (2012) rejettent l'idée selon laquelle les énoncés de problèmes peuvent être considérés en soi comme des textes à structure narrative. C'est le cas, notamment, en raison de la rareté ou de la pauvreté de l'intrigue, des personnages et des relations humaines (Gerofsky, 1996). Les énoncés de problèmes étant plus souvent structurés selon des relations logiques et non temporelles, il s'agit là d'un élément commun entre le traitement fait pour comprendre un texte à structure informative et celui fait pour comprendre un énoncé écrit de mathématiques (Solomon et O'Neill, 1998; Voyer *et al.*, 2012).

Objectif et question de recherche

L'objectif de la présente recherche est de vérifier l'influence de deux habiletés spécifiques en lecture, soit la compréhension en lecture selon le type de texte (informatif et narratif) et selon le type de question posée (repérage et inférence), sur le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques d'élèves de sixième année du primaire. Pour atteindre cet objectif, la question soulevée par Voyer et ses collègues (2012) a été reprise, mais en ciblant cette fois-ci un groupe d'élèves plus âgés. La question traitée dans cette étude est donc la suivante: «En considérant la structure du texte et le type de question posée aux élèves lors d'épreuves de compréhension en lecture, laquelle de ces habiletés spécifiques en lecture est la plus liée au rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques d'élèves de sixième année du primaire?»

Méthodologie

Participants

Notre échantillon se compose de 176 élèves de sixième année du primaire venant de cinq écoles de la province de Québec, plus précisément de la région Chaudière-Appalaches. Les élèves constituant notre échantillon sont ceux dont les enseignants titulaires ont accepté de participer à notre expérimentation. Nous avons donc utilisé une méthode d'échantillonnage non probabiliste pour sélectionner les participants de notre étude.

Instrumentation

Deux questionnaires ont été utilisés afin d'évaluer le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques et la compréhension en lecture des élèves. Chacun des questionnaires comprenait à la fois un volet mathématiques et un volet lecture.

Volet mathématiques

Les questions liées à l'évaluation des mathématiques étaient composées de six problèmes inspirés de l'ancienne banque d'instruments de mesure (BIM) de la société GRICS destinés aux élèves de sixième année. Étant donné que les six énoncés de problèmes sélectionnés étaient à l'origine des énoncés réduits, ils ont été modifiés par l'ajout d'informations situationnelles et explicatives, enrichissant ainsi le contexte par rapport à la situation dans laquelle s'inscrit le problème à résoudre. Ces ajouts ont été apportés dans le but de nous rapprocher le plus possible des énoncés de problèmes mathématiques qui se trouvent dans les manuels scolaires et, par le fait même, de ceux utilisés dans le cadre de l'étude de Voyer *et al.* (2012). Il est à noter que, même si Voyer et ses collègues (2012) ont eux aussi utilisé des énoncés issus de la banque BIM afin d'évaluer le rendement en résolution de problèmes des élèves, ils n'ont pas eu à les reformuler étant donné que les énoncés choisis étaient à l'origine suffisamment élaborés.

De plus, une analyse mathématique a été effectuée afin de décrire les différences entre chacun des six problèmes utilisés au regard de la démarche à mettre en œuvre par le solutionneur. Cette analyse inclut aussi la traduction de l'énoncé de problème par une équation algébrique et la description de la place de l'inconnue. À la lumière de cette analyse, nous pouvons affirmer que les problèmes proposés se distinguent les uns des autres en fonction de ce qui est recherché par le solutionneur (recherche d'un état final, d'un état initial ou d'une transformation).

Par ailleurs, les énoncés de problèmes écrits d'arithmétique utilisés dans le cadre de notre recherche correspondent à des problèmes standards (aussi appelés routiniers ou d'application), puisque tous les problèmes choisis peuvent être résolus en mobilisant des connaissances apprises au cours du cheminement scolaire des élèves de sixième année. Tous les problèmes écrits originaux ainsi que les versions modifiées, utilisées dans le cadre de notre étude, sont présentés aux annexes 1 et 2.

Volet lecture

Pour ce qui est du volet compréhension en lecture, les deux textes utilisés sont des versions modifiées de l'épreuve obligatoire de français langue d'enseignement, administrée aux élèves de sixième année du primaire en juin 2010 (MELS). Ces textes ont été sélectionnés en raison de leur structure (un texte narratif et un texte informatif) et du sujet traité (un thème commun pour les deux types de textes). Seuls les textes ont été récupérés de l'épreuve originale : nous avons nous-mêmes construit un questionnaire pour chacun des textes afin d'évaluer la compréhension des élèves. Dix questions ont été formulées pour chaque questionnaire, soit cinq questions de repérage et cinq questions d'inférence. Les questions d'inférence correspondent aux deux catégories proposées par Baker et Stein (1981) qui ont été présentées précédemment, soit des inférences de type *text-connecting* et de type *gap-filling*. Pour ce qui est des cinq questions de repérage, elles ont été construites conformément à la catégorie de questions que Pearson et Johnson (1978) appellent *textually explicit*. Nous avons analysé individuellement les vingt questions afin de nous assurer qu'elles respectaient les catégories précédemment définies. L'analyse effectuée portait sur la question, la réponse attendue, le type de question (repérage, *text connecting* ou *gap-filling*), de même que sur la justification du type de question. De plus, puisque nous avons construit les questionnaires utilisés afin de juger du rendement en lecture et en mathématiques des participants, trois préexpérimentations ont été réalisées pour assurer leur validité interne. Il est à noter que les questions de compréhension en lecture élaborées dans le cadre de l'étude de Voyer *et al.* (2012) correspondaient à ces mêmes catégories, tant pour les questions de repérage que pour les questions d'inférence.

Correction des épreuves administrées

L'ensemble des problèmes écrits a été corrigé à partir d'une grille de correction comprenant cinq niveaux différents, chacun de ces niveaux étant associé à des différences au regard de la démarche et de la réponse de l'élève (voir l'annexe 3 pour les détails des critères). Nous avons choisi d'accorder une note supérieure aux démarches

complètes dont le résultat était exact, en comparaison des démarches complètes comportant une erreur de calcul. Ce choix a été justifié par notre variable dépendante, qui est *le rendement* en résolution de problèmes écrits. En ce qui concerne la correction des deux épreuves de compréhension en lecture, chacune des 10 questions était évaluée sur 2 points pour un total de 20 points. Des grilles de correction détaillées comprenant l'ensemble des réponses possibles ainsi que le nombre de points accordés à chacune de ces réponses ont été construites à la suite d'une analyse *a priori* au regard des réponses et des erreurs possibles pour chacune des questions. Ces grilles ont ensuite été mises à épreuve lors de préexpérimentations.

Pour ce qui est de la correction des épreuves, une même personne a été mandatée pour corriger les 352 copies (176 participants x 2 questionnaires). Une procédure interjuge a été employée afin d'assurer l'efficacité des critères de correction et la rigueur de son application. Quarante-six copies ont été recorrigées par un deuxième correcteur, ce qui correspond à 598 items différents. Le coefficient de corrélation intraclasse obtenu est de 0,97, 1 pouvant être interprété comme un accord parfait.

Déroulement

Chacune des huit classes participantes a été rencontrée à deux reprises, durant deux semaines d'école consécutives. Ces rencontres, d'une durée de 60 minutes, ont eu lieu dans les classes respectives des élèves. Lors de la première séance, les élèves ont eu à résoudre trois problèmes écrits de mathématiques afin d'évaluer leur rendement en résolution de problèmes. Au cours de cette même rencontre, ils devaient aussi lire individuellement un texte à structure narrative, puis répondre à dix questions écrites (cinq questions de repérage et cinq questions d'inférence) afin d'évaluer leur compréhension du texte. À la deuxième séance, le même protocole a été répété, mais cette fois-ci la compréhension en lecture a été évaluée à partir d'un texte à structure informative. La deuxième moitié des problèmes écrits de mathématiques, soit trois autres problèmes, ont été soumis aux élèves lors de cette deuxième rencontre. L'administration des questionnaires s'est vécue exactement de la même façon dans le cadre de l'étude de Voyer *et al.* (2012). Il est aussi à noter que nous avons pris soin de faire varier l'ordre de passation des questionnaires dans les classes participantes.

En somme, nos questionnaires nous ont permis de recueillir des données correspondant à cinq habiletés différentes, traduites par un score de rendement (1) en résolution de problèmes écrits de mathématiques; (2) en compréhension en lecture narrative; (3) en compréhension en lecture informative; (4) en compréhension aux questions de repérage; (5) en compréhension aux questions d'inférence.

Résultats et discussion

Dans le but d'expliquer la variation de notre variable dépendante, soit le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques, soumise à l'influence de nos deux variables indépendantes *structure du texte* et *type de question*, nous avons conduit quatre analyses de régression linéaire simple. Avant de présenter les résultats

de ces analyses, nous exposerons les statistiques descriptives propres à chacune des variables évaluées. Ces statistiques descriptives sont présentées dans le tableau 1, alors que les résultats des quatre analyses de régression linéaires effectuées sont reportés dans le tableau 2.

Tableau 1. **Statistiques descriptives de chacune des variables étudiées**

Statistiques descriptives					
	N	Minimum	Maximum	Moyenne	Écart-type
Score_Résolution problèmes	168	12,50	100,00	67,24	18,51
Score_Narratif	171	10,00	100,00	75,06	18,22
Score_Informatif	170	10,00	100,00	66,76	16,70
Score_Inférence	166	15,00	100,00	62,62	19,46
Score_Repérage	166	40,00	100,00	79,13	14,89

Tableau 2. **Résultats des analyses de régression linéaires simples ayant pour variable dépendante le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques**

Variables indépendantes	r	R ²	Sig.
Score_Narratif	0,334	0,111	< 0,001
Score_Informatif	0,312	0,098	< 0,001
Score_Repérage	0,250	0,063	0,001
Score_Inférence	0,394	0,156	< 0,001

Les données nous montrent que chacune des quatre analyses est statistiquement significative dans un intervalle de confiance de 95 %. Toutefois, avec un coefficient de corrélation de Pearson (r) de 0,39, la relation entre le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques et le rendement aux questions d'inférence est la plus forte. De plus, considérant la valeur du R^2 , nous pouvons conclure qu'autour de 16 % de la variance du rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques peut être expliquée par le rendement aux questions d'inférence.

En réponse à notre question, il semble donc que la variable indépendante, la plus étroitement liée au rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques, soit celle du rendement aux questions d'inférence ($r(166) = 0,394$, $p < 0,001$), ce qui confirme notre hypothèse de recherche. Ce lien privilégié établi entre le rendement aux questions d'inférence en situation de compréhension de texte et celui en résolution de problèmes écrits de mathématiques alimente des questions de transférabilité des apprentissages entre la classe de français et celle de mathématiques.

Discussion des résultats au regard de l'âge des participants

Nous voyons une différence entre les résultats obtenus dans le cadre de l'étude de Voyer *et al.* (2012) et ceux de la présente étude. Selon Voyer et ses collègues (2012), le rendement en résolution de problèmes écrits serait plus lié au rendement en compréhension de texte informatif ($r(68) = 0,360$, $p = 0,003$) qu'au rendement aux questions d'inférence ($r(70) = 0,252$, $p = 0,035$). Considérant les conclusions issues de ces deux études, la question est maintenant de savoir pourquoi l'effet de la structure du texte, qui était étroitement liée au rendement en résolution de problèmes écrits en quatrième année, semble s'atténuer en cours de scolarisation. Inversement, pourquoi l'habileté à générer des inférences est-elle moins importante en quatrième année qu'elle semble l'être en sixième année? Serait-il possible que la structure du texte ait moins d'importance que le traitement qui y est rattaché, soit un traitement littéral (repérage) ou un traitement inférentiel, mais que le peu d'expérience des élèves de quatrième année avec les textes à structure informative ait amplifié l'influence de cette variable sur le rendement en résolution de problèmes écrits?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous croyons que l'âge des participants constitue un premier élément à considérer. Il est possible que la différence d'âge entre les participants, mais surtout la différence au regard de l'expérience relative à la lecture de textes informatifs en sixième année, comparativement à celle en quatrième année, soit à l'origine des différences soulevées entre les deux études. Toutefois, malgré les différences notées entre la présente recherche et celle de Voyer *et al.* (2012), les deux études mettent en évidence le lien privilégié entre l'habileté des élèves à émettre des inférences et leur rendement en résolution de problèmes écrits: seule la force de la relation établie entre les deux variables varie. Selon cette perspective, nous croyons que cette nouvelle connaissance doit maintenant être réinvestie afin de favoriser la compréhension des élèves en résolution de problèmes écrits. Il apparaît maintenant justifié de se demander si le fait de travailler l'habileté à générer des inférences en classe de français peut influencer le rendement des élèves en résolution de problèmes écrits. Il s'agit selon nous d'une piste intéressante, puisqu'elle permettrait de mettre à profit des enseignements spécifiques donnés dans les cours de français afin de favoriser le développement de l'habileté à résoudre des problèmes écrits de mathématiques. C'est dans cette optique qu'une étude a récemment été amorcée afin de vérifier si un enseignement consacré explicitement à l'enseignement de la stratégie d'inférence auprès des élèves peut influencer leur rendement en résolution de problèmes écrits.

Discussion des résultats au regard des implications pédagogiques

Cette précision du rôle des inférences en situation de résolution de problèmes écrits de mathématiques permet d'envisager de nouvelles possibilités afin de travailler la résolution de problèmes avec les jeunes élèves. En effet, le niveau d'habileté en lecture très peu développé des élèves qui amorcent leur parcours scolaire est souvent considéré comme une limite à l'enseignement et à l'apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques, qui est développée principalement à l'aide de problèmes écrits. Pour cette raison, le moment à partir duquel les élèves de cet âge sont placés en situation de résolution de problèmes est souvent retardé. Or, si les compétences

générales en lecture de ces élèves sont souvent vues comme une limite à l'enseignement de la résolution de problèmes présentés sous la forme écrite, l'habileté à faire des inférences, qui s'avère être une variable liée au rendement en résolution de problèmes écrits, peut quant à elle être développée dès le préscolaire (Boyer, 1993; Makdissi, Boisclair et Sanchez, 2006). Selon cette perspective, les résultats issus de la présente étude pourraient être mis à profit afin de commencer le plus tôt possible le développement de l'habileté à résoudre des problèmes chez les élèves, en travaillant leur habileté à générer des inférences.

Limites de l'étude

Dans la présente recherche, l'évaluation des habiletés en lecture et en résolution de problèmes écrits d'élèves de sixième année était visée. Afin de déterminer le rendement de chaque élève, nous avons dû faire des choix concernant les épreuves administrées. En ce qui a trait aux épreuves de mathématiques, le rendement en résolution de problèmes écrits a été obtenu en utilisant uniquement des problèmes d'arithmétique. Il s'agit donc de problèmes faisant intervenir des nombres naturels et les quatre opérations de base, soit l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ce choix a été fait considérant que le champ de l'arithmétique inclut les éléments de base en mathématiques, qui sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS], 2008). Cependant, nous ne pouvons prétendre que les mêmes résultats auraient été obtenus en utilisant des problèmes différents, ce qui soulève certaines questions. Entre autres, considérant les différents champs de la mathématique abordés au primaire, nous pouvons nous demander si le rôle de l'habileté à émettre des inférences est le même lors de la résolution de problèmes écrits de géométrie, de mesure, de statistique ou de probabilité. De plus, sachant que Voyer et ses collègues (2012) n'ont pas utilisé exclusivement des problèmes écrits d'arithmétique, ce choix que nous avons fait de travailler avec ce type de problème peut être vu comme une limite au regard des discussions en lien avec la comparaison établie entre les deux études.

Conclusion

Ce projet de recherche visait à préciser le lien existant entre les habiletés en lecture des élèves et leur rendement en résolution de problèmes écrits chez des élèves de sixième année. Pour atteindre notre objectif, nous avons d'abord considéré que certaines habiletés spécifiques en lecture constituent des indicateurs à privilégier afin de juger du rendement des élèves en résolution de problèmes écrits. Nous avons donc ciblé deux facteurs pouvant influencer le rendement en lecture des élèves, soit la structure du texte et le type de question posée. À l'aide de ces variables, nous voulions vérifier l'influence de l'habileté en lecture, selon la structure du texte (narrative ou informative) et selon le type de question posée (repérage ou inférence), sur le rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques d'élèves de sixième année du primaire. Les résultats des différentes analyses de régression linéaires réalisées

soutiennent que l'habileté à émettre des inférences représente la variable la plus étroitement liée au rendement en résolution de problèmes écrits de mathématiques. Ce résultat nous permet de raffiner le lien entre l'habileté en lecture des élèves et leur habileté à résoudre des problèmes écrits. Nous savons désormais que l'aspect de l'inférence doit davantage être considéré afin d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés de problèmes écrits de mathématiques.

Références bibliographiques

- BAKER, L. et STEIN, N. (1981). The development of prose comprehension skills. Dans C. M. Santa et B. L. Hayes (dir.), *Children's Prose Comprehension: Research and Practice* (p. 7-43). Newark, NJ: International Reading Association.
- BECK, I. L. et MCKEOWN, M. G. (1989). Expository text for young readers. The issue of coherence. Dans L. Resnick (dir.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (p. 47-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- BOWYER-CRANE, C. et SNOWLING, M. J. (2005). Assessing children's inference generation: What do tests of reading comprehension measure? *British Journal of Educational Psychology*, 75(2), 189-201.
- BOYER, C. (1993). *L'enseignement explicite de la compréhension en lecture: modèles d'activités d'enseignement*. Québec: Graficor.
- CAIN, K. et OAKHILL, J. V. (1999). Inference making ability and its relation to comprehension failure in young children. *Reading and Writing*, 11(5), 489-503.
- CAMENISCH, A. et PETIT, S. (novembre 2008). Apprendre à lire par les mathématiques. Dans D. Alamargot, J. Bouchand, E. Lambert, V. Millogo et C. Beaudet (dir.), *Actes du colloque international De la France au Québec: l'écriture dans tous ses états* (p. 12-15). Poitiers, France.
- CAMPBELL, J. R., KAPINUS, B. A. et BEATTY, A. S. (1995). *Interviewing Children about Their Literacy Experiences. Data from NAEP's Integrated Reading Performance Record (IRPR) at Grade 4*. Washington, DC: Office of Educational Research and Improvement.
- CAMPION, N. (2012). *Notion théorique: inférences*. Télé Formation Lecture (TFL). Récupéré de <http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFL/TFL.asp>
- CAMPION, N. et ROSSI, J.-P. (1999). Inférences et compréhension de texte. *L'Année psychologique*, 99(3), 493-527.
- CARTER, T. A. et DEAN, E. O. (2006). Mathematics intervention for grades 5-11: Teaching mathematics, reading, or both? *Reading Psychology*, 27(2/3), 127-146.

- CHALL, J. S. et JACOBS, V. A. (2003). Poor children's fourth-grade slump. *American Educator*. Récupéré de http://www.aft.org/pubs-reports/american_educator/spring2003/chall.html
- COQUIN-VIENNOT, D. et MOREAU, S. (2007). Arithmetic problems at school. When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology*, 77(1), 69-80.
- CUMMINS, D. D., KINTSCH, W., REUSSER, K. et WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20(4), 405-438.
- DEVIDAL, M., FAYOL, M. et BARROUILLET, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'Année psychologique*, 97(1), 9-31.
- DUKE, N. K. (2000). 3.6 minutes per day: The scarcity of informational texts in first grade. *Reading Research Quarterly*, 35(1), 202-224.
- FAYOL, M. (2000). *La lecture au cycle III : difficultés, prévention et remédiations*. Extrait de l'exploitation de l'évaluation nationale en CE2 : la lecture – Actes du séminaire national, Paris, France : Ministère de l'Éducation nationale, Direction de l'enseignement scolaire.
- FAYOL, M. (2003). *Lecture et compréhension : évaluation, difficultés et interventions*. Programme incitatif de recherche en éducation et formation (PIREF), Paris, France. Récupéré de <http://www.cndp.fr/bienlire/01-actualite/document/fayol.pdf>
- GAGNON, R. et ZIARKO, H. (2008). L'apport de la lecture de textes sources dans l'écriture des textes documentaires par des élèves de 2^e année du primaire. *Revue canadienne de linguistique appliquée (RCLA)*, 11(2), 9-30.
- GEROFSKY, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 36-45.
- GIASSON, J. (2003). *La lecture: de la théorie à la pratique* (2^e éd.). Montréal: Gaëtan Morin Éditeur.
- GIASSON, J. (2007). *La compréhension en lecture* (3^e éd.). Bruxelles: De Boeck.
- GIASSON, J. (2011). *La lecture: apprentissage et difficultés*. Montréal: Gaëtan Morin Éditeur.
- JITENDRA, A., SCZESNIAK, E. et DEATLINE-BUCHMAN, A. (2005). An exploratory validation of curriculum-bases mathematical word problem-solving tasks as indicators of mathematics proficiency for third graders. *School Psychology Review*, 34(3), 358-371.
- LASH, A. A. (1985). *Arithmetic Word Problems. Activities To Engage Students in Problem Analysis*. Washington, DC: National Institute of Education (ED), Far West Lab. for Educational Research Development, San Francisco, CA.
- MAKDISSI, H., BOISCLAIR, A. et SANCHEZ, C. (2006). Les inférences en lecture : intervenir dès le préscolaire. *Québec français*, 140(1), 64-66.

- MEICHENBAUM, D. et BIEMILLER, A. (1998). *Nurturing Independent Learners. Helping Students Take Charge of Their Learning*. Cambridge, MA: Brookline.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2006). *Programme de formation de l'école québécoise, version approuvée*. Québec: Gouvernement du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (2008). *Progression des apprentissages au primaire*. Québec: Gouvernement du Québec.
- MEYER, B. J.F. (1975). *The Organization of Prose and Its Effects on Memory*. Amsterdam: North-Holland.
- MEYER, B. J.F. (1985). Prose analysis: Purposes, procedures, and problems. Dans B. Britton et J. Black (dir.), *Understanding Expository Text* (p. 11-64). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- MOREAU, S. et COQUIN-VIENNOT, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils. Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, 73(1), 109-121.
- MULCAHY, P. I. et SAMUELSS, S. J. (1987). Problem-solving schemata for text types: A Comparison of narrative and expository text structures. *Reading Psychology*, 8(4), 247-256.
- NETTLES, D. H. (2006). *Comprehensive Literacy Instruction in Today's Classrooms: The Whole, the Parts, and the Heart*. Boston, MA: Pearson.
- OUELLET, Y. (2009). *L'enseignement explicite d'une stratégie cognitive et métacognitive*. Récupéré de siteeriff.free.fr/strategieinference.doc
- PALLASCIO, R. (2005). Les situations-problèmes: un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique*, 136(1), 32-35.
- PEARSON, P. D. et JOHNSON, D. D. (1978). *Teaching Reading Comprehension*. New York: Holt Rinehart & Winston.
- SOLOMON, Y. et O'NEILL, J. (1998). Mathematics and narrative. *Language and Education*, 12(3), 210-221.
- SOVIK, N., FROSTRAD, P. et HEGGBERGET, M. (1999). The relation between reading comprehension and task-specific strategies used in arithmetical word problems. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 43(4), 371-398.
- STAUB, F. C. et REUSSER, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. Dans C. A. Weaver, S. Mannes et C. R. Fletcher (dir.), *Discourse Comprehension. Essays in Honor of Walter Kintsch* (p. 286-305). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- STERN, E. et LEHRNDORFER, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7(1), 259-268.
- SWEET, A. P. et SNOW, C. E. (2003). *Rethinking Reading Comprehension*. New York: Guilford.

- TENNENT, W., STAINTHORP, R. et STUART, M. (2008). Assessing Reading at Key Stage 2: SATs as Measures of Children's Inferential Abilities. *British Educational Research Journal*, 34(4), 431-446.
- THORNDYKE, P. W. (1977). Cognitive structures in comprehension and memory of narrative discourse. *Cognitive Psychology*, 9(1), 77-110.
- VERSCHAFFEL, L. GREER, B. et DE CORTE, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.
- VILENIUS-TUOHIMAA, P. M., AUNOLA, K. et NURMI, J. E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409-426.
- VOYER, D. (2006). *L'influence des facteurs liés à l'élève ou à l'énoncé sur la compréhension en résolution de problèmes écrits d'arithmétique*. Thèse de doctorat inédite, Université Laval, Canada.
- VOYER, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), 1073-1092.
- VOYER, D., BEAUDOIN, I. et GOULET, M.-P. (2012). De la lecture à la résolution de Problèmes: des habiletés spécifiques à développer. *Revue canadienne de l'éducation*, 35(2), 401-421.
- WEISSER, M. (1999). Les problèmes d'arithmétique: traits de surface, modes de résolution et taux de réussite. *Revue des sciences de l'éducation*, 25(2), 375-399.

Annexe 1

Versions originales et modifiées des énoncés de problèmes associés au texte informatif

° Problème	Énoncé de problème, version originale	Énoncé de problème, version modifiée
1_Informatif	Marie peut écrire 2 mots en 15 secondes sur son ordinateur. Elle écrit pendant 3 minutes et 45 secondes sans arrêt. Combien de mots a-t-elle écrits pendant ce temps?	Marie rêve de devenir secrétaire. Chaque fois qu'elle en a l'occasion, elle s'entraîne à écrire des mots le plus rapidement possible sur son ordinateur. Parfois, sa mère calcule le temps que Marie prend pour écrire une série de mots à l'ordinateur. Elle peut écrire 2 mots en 15 secondes. Si elle écrit pendant 3 minutes et 45 secondes sans arrêt, combien de mots a-t-elle écrits pendant ce temps?
2_Informatif	Louise s'entraîne sur une piste cyclable en vue d'une compétition. La piste mesure 1 200 mètres. Louise fait cinq tours par jour, sept jours par semaine. Combien de kilomètres parcourt-elle par semaine?	Sophie est une grande athlète. Bientôt, elle participera à une compétition internationale qui aura lieu aux États-Unis. Évidemment, elle souhaite remporter la médaille d'or. Afin de bien se préparer, elle s'entraîne sur une piste cyclable qui est située tout près de chez elle. Pour être certaine d'être prête à affronter les autres concurrents lors de la course, Sophie fait cinq tours de piste par jour, sept jours par semaine. Elle ose espérer que s'entraîner sur cette piste qui mesure 1 200 mètres sera suffisant pour gagner. Combien de kilomètres Sophie parcourt-elle par semaine?
3_Informatif	L'enclos carré d'un éleveur mesure 13 m de côté. L'éleveur déménage et réutilise entièrement et uniquement la même clôture. Sur son nouveau terrain, l'enclos sera rectangulaire et devra mesurer 9 m de largeur. Quelle sera la longueur de ce nouvel enclos?	Monsieur Paquet a toujours possédé le même enclos pour élever ses animaux. Depuis maintenant plus de 25 ans, ses animaux vivent dans un enclos carré mesurant 13 mètres de côté. Malheureusement, un projet de construction dirigé par la Ville l'oblige à déménager. Il se dit toutefois qu'il réutilisera entièrement et uniquement la même clôture pour délimiter son nouvel enclos. Sur son nouveau terrain, l'enclos sera rectangulaire et devra mesurer 9 mètres de largeur. Quelle sera la longueur de ce nouvel enclos?

Annexe 2

Versions originales et modifiées des énoncés de problèmes associés au texte narratif

° Problème	Énoncé de problème, version originale	Énoncé de problème, version modifiée
1_Narratif	Claude et Julie doivent distribuer 520 dépliant concernant l'environnement. Chaque jour, Claude distribue 29 dépliant, et Julie, 7 de plus que lui. À ce rythme, combien de jours seront nécessaires pour distribuer tous les dépliant?	Claude et Julie font partie du comité environnemental de leur école. En tant que président et vice-présidente du comité, ils doivent distribuer 520 dépliant aux résidents de leur quartier. Chaque jour après l'école, les deux amis partent dans leur quartier et sonnent aux portes afin de donner les dépliant aux gens et leur expliquer de quoi il s'agit. Claude distribue 29 dépliant par jour, et Julie, 7 de plus que lui. À ce rythme, combien de jours seront nécessaires pour distribuer tous les dépliant?
2_Narratif	Lorsqu'on pêche à une pisciculture, on doit payer le poisson pêché d'après sa longueur. À la pisciculture « Vive la truite », le prix du poisson est de 0,10 \$ le centimètre. Dimanche dernier, Louis s'est rendu à la pisciculture en payant 2,75 \$ pour un billet aller-retour. Il a pêché une truite de 25 cm et une autre de 28 cm. Combien sa journée de pêche lui a-t-elle coûté?	Simon et son père adorent aller pêcher à la pisciculture « Vive la truite » située au cœur de leur village. Chaque fois qu'ils s'y rendent, ils essaient de pêcher le plus grand poisson possible. Il s'agit en quelque sorte d'une compétition amicale entre père et fils. Le seul inconvénient, c'est qu'à la pisciculture « Vive la truite », on doit payer le poisson pêché d'après sa longueur. Le prix du poisson est de 0,10 \$ le centimètre et un montant est aussi exigé pour le billet d'entrée. Dimanche dernier, Simon et son père se sont rendus à la pisciculture et ils ont payé 2,75 \$ chacun pour leur billet d'entrée. Simon a pêché une truite de 25 cm, tandis que son père a gagné le concours en pêchant une truite de 28 cm. Combien cette journée de pêche a-t-elle coûté à Simon et son père?
3_Narratif	Pour payer sa radio au prix de 65,45 \$, taxes incluses, Pierre fait plusieurs paiements. Il pourra l'emporter chez lui lorsqu'il l'aura complètement payée. Il fait un premier paiement de 20 \$. Puis il fait deux autres paiements de 14,75 \$ chacun. Quelle somme lui reste-t-il à verser avant de pouvoir emporter sa radio chez lui?	Pour son anniversaire, Pierre décide de se faire plaisir et de s'offrir une magnifique radio. Cet achat coûte 65,45 \$, taxes incluses. Puisqu'il n'a pas tout l'argent nécessaire afin de payer la radio immédiatement, le marchand lui propose de faire plusieurs paiements. Pierre doit donc payer la totalité du prix avant de pouvoir apporter son achat chez lui. Le jour même de l'achat, il fait un premier paiement de 20 \$. Deux semaines plus tard, il fait deux autres paiements de 14,65 \$ chacun, un le lundi et un second le samedi. Quelle somme lui reste-t-il à verser avant de pouvoir emporter sa radio chez lui?

Annexe 3

Critères de correction des problèmes écrits de mathématiques

Les six problèmes écrits ont donc été notés de 0 à 4, selon les critères suivants :

- 4: Démarche complète pertinente et réponse exacte.
- 3: Démarche complète pertinente, mais résultat inexact en raison d'une erreur de calcul ou de retranscription ou d'interprétation des résultats.
- 2: Démarche partielle pertinente avec cohérence dans la démarche.
(L'élève ne se rend pas jusqu'au bout de sa démarche)
- 1: Amorce d'une démarche pertinente. La démarche n'est pas cohérente dans son ensemble.
- 0: Démarche absente ou erronée.

Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires

Miranda RIOUX

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Audrey Ann COUTURE

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

***Dual-process theory* et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**

Miranda RIOUX

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Audrey Ann COUTURE

Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Plusieurs variables peuvent être manipulées afin de complexifier volontairement le traitement d'un problème additif de comparaison. Dans cet article, nous cherchons à déterminer si 1) la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée et 2) l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques sont des variables à considérer lors de la conception de tels problèmes. Afin de vérifier l'effet de ces variables sur les taux de réussite ainsi que sur les stratégies de résolution adoptées, nous avons recruté 272 étudiants universitaires, lesquels ont été invités à résoudre des problèmes additifs de comparaison. Nous avons sélectionné, dans la littérature, deux problèmes dont les taux de réussite étaient particulièrement bas. Nous avons ensuite élaboré une version modifiée de ces problèmes, version à l'intérieur de laquelle seules les valeurs numériques variaient. Nous avons effectué une analyse par problème et comparé les taux de réussite des deux versions. Nos résultats indiquent un taux de réussite significativement plus bas aux problèmes originaux. L'analyse des réponses révèle par ailleurs qu'il nous a été possible de

manipuler les valeurs numériques de manière à freiner la formulation d'un jugement intuitif incorrect.

ABSTRACT

Dual-process theory and additive comparison problem solving by university students

Miranda RIOUX

University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Audrey Ann COUTURE

University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Several variables can be manipulated to deliberately complicate an additive comparison problem. In this article, we attempt to determine if 1) congruity between the writing of numbers and the relationship expressed and 2) the appearance of a proportional relationship between numerical values, are variables to consider when designing such problems. To test the effect of these variables on success rates and on the problem solving strategies adopted, we recruited 272 university students, who were invited to solve additive comparison problems. From the literature, we selected two problems for which the success rates were particularly low. We then developed a modified version of these problems, within which only the numerical values varied. We performed one analysis per problem and compared the success rate for the two versions. Our results indicate a significantly lower success rate for the original problems. The analysis of answers reveals that we were able to manipulate numerical values to curb the formation of incorrect intuitive judgments.

RESUMEN

Dual-process theory y resolución de problemas aditivos de comparación realizados por estudiantes universitarios

Miranda RIOUX

Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

Audrey Ann COUTURE

Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

Se pueden manipular diversas variables para complicar voluntariamente el tratamiento de un problema aditivo de comparación. En este artículo buscamos determinar: a) si la congruencia entre la escritura de los números y la relación expre-

sada, y 2) si la apariencia de una relación de proporcionalidad entre los valores numéricos, son variables que deben ser consideradas durante la concepción de tales problemas. Con el fin de verificar el efecto de dichas variables sobre la tasa de éxito así como sobre las estrategias de resolución adoptadas, reclutamos 272 estudiantes universitarios, quienes fueron invitados a resolver problemas aditivos de comparación. Seleccionamos en la literatura dos problemas cuya tasa de éxito era particularmente baja. En seguida, elaboramos una versión modificada de dichos problemas, versión al interior de la cual sólo los valores numéricos variaban. Realizamos un análisis por problema y comparamos las tasas de éxito de las dos versiones del problema. Nuestros resultados indican una tasa de éxito significativamente inferior para los problemas originales. El análisis de las respuestas muestra, por otro lado, que es posible manipular los valores numéricos de manera que se frene la producción de un juicio intuitivo incorrecto.

Problématique

Les problèmes additifs de comparaison posent de nombreuses difficultés aux élèves du primaire. Selon DeBlois (2011), ces problèmes ont une structure relationnelle qui les rend plus difficiles à traiter que les problèmes additifs de réunion ou de transformation. Si ces problèmes posent des difficultés aux élèves des classes primaires, ils ne devraient pas poser problème aux étudiants universitaires, lesquels ont appris à résoudre des problèmes beaucoup plus complexes durant leur parcours scolaire. Dans cet article, nous tentons d'éclairer le faible taux de réussite obtenu par des étudiants universitaires à deux problèmes bien connus de comparaison additive, et ce, en manipulant ces problèmes de manière à tester l'influence de deux nouvelles variables.

Deux problèmes de comparaison additive

Le problème du bâton et de la balle (Frederick, 2005)

Dans une étude menée auprès de plus de trois mille étudiants universitaires, Frederick (2005) a comparé les taux de réussite des étudiants aux deux problèmes suivants :

« Un bâton et une balle coûtent 1,10 \$. Le bâton coûte 1,00 \$ de plus que la balle. Combien coûte la balle? »

« Une banane et un bagel coûtent 37 cents. La banane coûte 13 cents de plus que le bagel. Combien coûte le bagel? »

Son analyse a révélé que le premier problème avait un taux d'échec beaucoup plus élevé que le second. Comment expliquer cette différence? Le contexte du problème n'est certes pas le même, mais cette différence est-elle suffisante pour expliquer l'écart observé dans les taux de réussite? En fait, Frederick a mis en évidence que, contrairement au second problème, le problème du bâton et de la balle incitait les étudiants à émettre une réponse intuitive incorrecte, laquelle se traduisait par une simple soustraction des données numériques. Selon Kahneman, « [p]resque tout le monde rapporte une tendance initiale à répondre 10 cents parce que la somme de 1,10\$ se sépare naturellement en 1\$ et 10 cents et parce que 10 cents est dans le même ordre de grandeur que la réponse » (trad. libre de Kahneman, 2003, p. 699).

Le problème de la piste de course (Gillard *et al.*, 2009)

Gillard, Van Dooren, Schaeken et Verschaffel (2009) ont proposé le problème suivant à 167 étudiants de la Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation de l'Université de Louvain :

«Hélène et Kim courent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 5 tours, Kim en aura parcouru 15. Quand Hélène en aura parcouru 30, combien Kim en aura-t-elle parcouru?»

Leur analyse a révélé un taux d'échec moyen de 45 %. Les erreurs commises par les étudiants dans la résolution de ce problème étaient pour la plupart liées à l'utilisation d'un raisonnement proportionnel. Les auteurs mentionnent également que moins les étudiants disposaient de temps pour résoudre le problème, plus ils avaient tendance à utiliser un raisonnement proportionnel. Dans une étude menée auprès de 33 futurs enseignants du primaire, Cramer, Post et Currier (1993) ont expérimenté un problème presque en tous points similaire. Leur étude montrait que 32 des futurs enseignants du primaire avaient résolu ce problème en utilisant un raisonnement proportionnel. D'ailleurs, selon Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens et Verschaffel (2004) qui ont originellement expérimenté, auprès de 729 élèves du primaire, le problème qui fut ensuite repris par Gillard et ses collègues (2009), la fréquence de l'utilisation d'un raisonnement proportionnel augmente avec le niveau scolaire des élèves et varie selon le contexte du problème. En effet, chez les élèves de 6^e année ayant participé à l'étude, alors que 50,3 % des réponses données au problème de la piste de course étaient liées à un raisonnement proportionnel, dans le problème suivant, seulement 12,6 % des réponses données étaient liées à un raisonnement proportionnel :

«Aujourd'hui, Bert fête ses 2 ans et Lies fête ses 6 ans. Quand Bert aura 12 ans, quel âge aura Lies?»

Comme pour le problème du bâton et de la balle, il convient de s'interroger sur les facteurs déclenchant l'utilisation d'un raisonnement intuitif erroné. Selon Van

Dooren et ses collègues (2004), le contexte du problème expliquerait la propension à utiliser, à tort, un raisonnement proportionnel. Pour arriver à cette conclusion, il aurait été souhaitable, selon nous, que les nombres soient les mêmes dans les deux problèmes expérimentés.

Hypothèses de recherche

Pour éliminer l'influence du choix des nombres dans cette tendance 1) à soustraire les nombres en présence et 2) à utiliser un raisonnement proportionnel, il pourrait s'avérer intéressant d'expérimenter deux problèmes partageant le même contexte, mais comportant des données numériques différentes. Nous postulons qu'à elles seules la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée (variable n° 1) ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité (variable n° 2) sont deux variables susceptibles d'influencer le taux de réussite des problèmes de comparaison additive en favorisant une réponse intuitive. Nous testerons indépendamment l'influence de ces deux variables.

Cadre théorique

Dual-process theory

Selon la *Dual-process theory* (Stanovich et West, 2000; Stanovich, 2009), deux systèmes cognitifs permettent aux individus de porter des jugements: le système 1 (S1) et le système 2 (S2). Le premier système servirait d'assise à l'expression de jugements intuitifs, tandis que le second commanderait une pensée beaucoup plus lente et analytique. Dans la littérature concernant cette théorie (p. ex. Leron et Hazzan, 2009; Tzur, 2011; Böckenholt, 2012), le problème du bâton et de la balle est souvent utilisé pour illustrer comment le système 1 peut prendre le pas sur le système 2. En regardant cette situation à travers le prisme de la didactique, une question nous est apparue: est-il possible de manipuler un problème mathématique de manière à favoriser un jugement s'appuyant sur l'un ou l'autre de ces systèmes? Dans le cas du premier problème, la congruité entre l'écriture décimale du montant d'argent (1,10\$) et la relation exprimée (1\$ de plus) explique probablement, comme l'a signalé Kahneman (2003), pourquoi le système 1 a pris le pas sur le système 2. Si la relation exprimée avait été autre (p. ex. 80 cents de plus), il n'y aurait plus eu de congruité entre l'écriture du nombre et la relation exprimée et nous postulons, comme dans le problème de la banane et du bagel, que le jugement émis par les étudiants aurait été moins intuitif. Dans le cas du second problème, l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données (5, 15 et 30) explique probablement l'expression d'un jugement qui s'appuie sur le système 1. Si les nombres avaient été autres (p. ex. 3, 4 et 7), peut-être, encore une fois, que les réponses données auraient été moins intuitives.

Définition opérationnelle des deux variables à l'étude

Plusieurs variables concourent à déterminer la complexité des problèmes mathématiques soumis aux apprenants. Certaines de ces variables sont sous le contrôle de l'enseignant et peuvent affecter la réussite des problèmes: il s'agit des variables didactiques (voir Brousseau, 1982). Roegiers (2011) a récemment regroupé ces variables en trois grandes catégories: les variables d'identification, les variables mathématiques et les variables d'habillage. Le tableau 1 en offre un aperçu synoptique.

Tableau 1. **Variables affectant la difficulté des situations-problèmes (Roegiers, 2011)**

Catégories de variables	Variables
1. Variables d'identification	1.1 Répertoire cognitif 1.2 Produit attendu 1.3 Niveau d'ouverture de la situation-problème
2. Variables mathématiques	2.1 Opérations mises en œuvre 2.2 Nombre d'étapes élémentaires et hiérarchisation de ces étapes 2.3 Degré de continuité du processus de résolution minimal
3. Variables d'habillage	3.1 Présentation de la situation-problème 3.2 Place de la question 3.3 Ordre de présentation des données 3.4 Existence de données parasites 3.5 Existence d'indices facilitateurs 3.6 Niveau d'évidence de la réponse 3.7 Cadre 3.8 Caractère significatif de la situation

Jusqu'à tout récemment, nous pensions que ces variables étaient les seules sur lesquelles l'enseignant pouvait agir. Les résultats obtenus par des étudiants universitaires au problème du bâton et de la balle (Frederick, 2005) et au problème de la piste de course (Gillard *et al.*, 2009) nous ont toutefois amenées à réviser notre jugement. Nous envisageons maintenant la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données comme des variables qui peuvent être manipulées par l'enseignant afin d'augmenter ou de diminuer la complexité des problèmes soumis aux apprenants.

La congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée

Dans un problème de comparaison additive, il y a traditionnellement un ensemble de référence, un ensemble comparé ainsi qu'une relation de comparaison (aussi appelée différence) (Vergnaud, 1990; DeBlois, 2011). Dans cette étude, nous considérons qu'il y a congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison

exprimée lorsque cette relation est symbolisée par un nombre faisant partie intégrante de l'écriture de l'ensemble de référence, de l'ensemble comparé ou de la réunion de ces deux ensembles. Par exemple, considérons le nombre «315» comme étant l'ensemble de référence et l'expression «15 de plus» comme étant la relation de comparaison exprimée. Puisque «15» fait partie intégrante de l'écriture décimale du nombre «315» ou, autrement dit, puisqu'il est possible d'entendre ce «15» lors de la lecture du nombre, on dira qu'il y a congruité entre l'écriture de l'ensemble de référence et la relation de comparaison exprimée. Dans ce cas, cela ne pose aucun problème puisque, pour trouver l'ensemble comparé, il suffit d'additionner ou d'enlever 15 à 315. Or, dans le problème du bâton et de la balle, les données numériques correspondent à la réunion des deux ensembles (1,10\$) et à la relation de comparaison (1,00\$ de plus). Comme dans le cas précédent, il y a congruité entre les nombres et la relation de comparaison exprimée, puisque «1,00\$» fait partie intégrante de l'écriture décimale du nombre «1,10\$». Toutefois, pour trouver la valeur de l'ensemble de référence (valeur de la balle) il ne suffit pas de soustraire 1,00\$ de 1,10\$. Nous avons vu que selon Kahneman (2003) la congruité entre ces deux nombres pousse néanmoins les étudiants universitaires à effectuer cette soustraction.

L'apparence d'une relation de proportionnalité

Selon Lamon (2007), la proportionnalité est un concept mathématique permettant de décrire une situation à l'intérieur de laquelle il existe une relation constante (k) entre deux quantités covariantes, x et y . La relation de proportionnalité se traduit généralement par une fonction linéaire de forme $y = kx$, où k est le coefficient de proportionnalité. Bien qu'il y ait, dans un problème de comparaison additive, une relation constante entre les valeurs numériques associées à l'ensemble de référence (x) et l'ensemble comparé (y), cette relation n'est pas proportionnelle puisque y est égal à $x + b$ et non à kx . Dans le cadre de cette étude, nous dirons toutefois qu'il y a «apparence» de relation de proportionnalité lorsque les valeurs numériques associées à l'ensemble de référence (x) et l'ensemble comparé (y) forment un rapport entier. Par exemple, dans le problème de la piste de course, les valeurs numériques 5 (ensemble de référence) et 15 (ensemble comparé) induisent l'apparence d'une relation de proportionnalité, car le rapport entre 15 et 5 est égal à 3, et 3 est un entier. Pour plusieurs répondants, il semble alors naturel de multiplier 30 par 3 pour trouver la valeur manquante, et ce, même si la relation de comparaison est additive et non multiplicative. Cette tendance a été maintes fois observée dans la littérature sur le sujet (Cramer et al., 1993; De Bock, Verschaffel et Janssens, 2002; Van Dooren, De Bock, Evers et Verschaffel, 2006; Gillard *et al.*, 2009).

Objectif de recherche

Vergnaud (1990; 1994) a mis en relief le fait qu'il était possible de jouer sur les valeurs numériques présentes dans un problème de manière à augmenter la complexité cognitive de la tâche de résolution. Il a entre autres démontré qu'il était possible de simplifier ou de complexifier cette tâche en variant le domaine numérique concerné, la grandeur des nombres impliqués ou l'écart entre ces derniers. Il n'a

toutefois pas exploré, dans les problèmes additifs de comparaison, l'influence de variables telles que 1) la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée et 2) l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques. Cette ambition est donc au cœur de la présente étude. Nous postulons en effet que ces variables constituent des attributs heuristiques qui interfèrent dans l'interprétation des situations de comparaison additive et qui, par conséquent, influencent le taux de réussite des problèmes où ils sont présents.

Méthode

Participants à l'étude

Cette étude a été menée à l'hiver 2013, auprès d'étudiants fréquentant l'Université du Québec à Rimouski, campus de Rimouski. En tout, 272 étudiants ont été recrutés. La participation à cette étude s'est effectuée sur une base volontaire et a été encouragée par le tirage de deux iPad.

Plan de constitution des données

Afin d'explorer l'effet de deux nouvelles variables sur la complexité cognitive d'une tâche de résolution de problèmes arithmétiques, nous avons tout d'abord recensé, dans la littérature portant sur la *Dual-process theory*, deux problèmes additifs de comparaison. Nous les avons sélectionnés parce que, d'une part, dans les expérimentations menées, les taux de réussite de ces problèmes étaient faibles et parce que, d'autre part, les auteurs attribuaient ces résultats à l'émission d'un jugement intuitif s'appuyant sur le système 1. En voici une présentation détaillée.

Le premier problème recensé a été élaboré par Frederick (2005) et a été présenté plus tôt dans ce texte. Dans ce problème, rappelons que la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée semblait inciter les participants à répondre intuitivement 0,10\$. Nous souhaitons reprendre l'expérimentation menée par Frederick, mais cette fois-ci en proposant des problèmes dont les variables d'identification, les variables mathématiques et les variables conventionnelles d'habillage (Roegiers, 2011) sont en tous points identiques. Nous avons ainsi élaboré une version modifiée de ce problème, version à l'intérieur de laquelle seules les variables numériques diffèrent. Nous avons donc substitué 1,10\$ et 1,80\$ à 1,00\$ et 1,10\$. Bien que ces valeurs numériques soient différentes, elles seraient néanmoins similaires selon Vergnaud (1990, 1994), en ce sens qu'elles sont toutes les quatre décimales, qu'elles comportent trois chiffres, dont deux après la virgule, qu'elles sont inférieures à deux et que la différence de chaque couple de valeurs est inférieure à un. Nous avons toutefois fait en sorte qu'il n'y ait plus de similitudes entre la relation de comparaison exprimée (1,10\$) et l'écriture du montant total (1,80\$).

Le second problème recensé a été proposé par Gillard *et al.* (2009) et incite également les répondants à émettre une réponse intuitive, laquelle s'appuie apparemment sur l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données. Dans les travaux effectués par Gillard et ses collègues (2009), les répondants avaient

tendance à traiter ce problème comme s'il s'agissait d'un problème de proportionnalité et à le résoudre en mettant en rapport les valeurs numériques concernées, c'est-à-dire en appliquant une règle de trois. Dans le cadre de cette étude, nous avons voulu comparer les taux de réussite de ce problème avec ceux d'une version dont seules les valeurs numériques ont été modifiées, et ce, de manière à enlever l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données. Dans cette version, les valeurs 5, 15 et 30 ont donc été remplacées par les valeurs 8, 13 et 20, lesquelles ne peuvent former un rapport entier qui induirait l'apparence d'une relation de proportionnalité.

La collecte des données s'est déroulée du mois de février au mois d'avril 2013. Les sujets devaient alors traiter les deux problèmes, l'un dans sa version originale (avec effet de cadrage potentiel) et l'autre dans sa version modifiée (sans effet de cadrage). Nous avons choisi de ne pas présenter aux sujets les deux versions d'un même problème. Sans cette précaution, les sujets auraient été susceptibles d'apparier les deux versions de chaque problème et auraient ainsi risqué d'harmoniser, *a posteriori*, les schémas de résolutions adoptés. Ainsi, 136 sujets ($276 \div 2$) ont répondu à chaque version des problèmes 1 et 2. Ils étaient installés dans un local universitaire supervisé, avaient droit à une calculatrice et pouvaient prendre tout le temps nécessaire pour répondre aux questions. Nous souhaitons en effet contrôler l'atmosphère ambiante, limiter au minimum les risques que surviennent des erreurs de calcul et éviter que le facteur temps affecte la résolution des problèmes proposés et précipite la formulation d'un jugement intuitif (Gillard et al., 2009).

Plan d'analyse

Nous avons d'abord effectué un traitement quantitatif des données constituées, lesquelles ont été corrigées par l'assistante de recherche et analysées grâce au logiciel SPSS 20. Les réponses émises aux quatre problèmes ont donc été évaluées de façon dichotomique. Un score de 1 a été attribué aux réponses exactes, tandis qu'un score nul a été attribué aux réponses erronées, comme aux réponses manquantes. Pour chaque problème, il a ainsi été possible de calculer un taux de réussite. Nous avons ensuite comparé les taux de réussite des problèmes originaux et des problèmes modifiés. Afin de vérifier si les différences dans les taux de réussite étaient significatives, nous avons également réalisé, pour chaque couple de problèmes, un test de khi-deux d'association. Nous avons ensuite analysé la nature des erreurs commises par les étudiants. Pour y arriver, nous avons consigné les réponses émises aux quatre questions dans le logiciel d'analyse SPSS 20, lequel nous a permis d'analyser la fréquence de chaque réponse et de quantifier, parmi les réponses à score nul, l'importance relative des réponses intuitives.

Résultats

Dans cet article, nous présentons les résultats associés à deux problèmes de comparaison additive, lesquels ont respectivement été empruntés aux travaux de Frederick (2005) et de Gillard *et al.* (2009).

Résultats relatifs au premier problème

L'analyse des scores obtenus par les répondants dans les deux versions du premier problème révèle qu'il y a une différence importante dans les taux de réussite des deux versions. Le tableau 2 présente les deux versions du problème 1 et compare leurs taux de réussite.

Tableau 2. **Comparaison des taux de réussite des deux versions du problème 1**

	Version avec effet de cadrage (version originale)	Version sans effet de cadrage (version modifiée)
Énoncé	Un bâton et une balle coûtent en tout 1,10 \$. Le bâton vaut 1,00 \$ de plus que la balle. Quel est le prix de la balle? (Frederick, 2005)	Un bâton et une balle coûtent en tout 1,80 \$. Le bâton vaut 1,10 \$ de plus que la balle. Quel est le prix de la balle?
Taux de réussite	25 %	43 %

Entre les deux versions de ce problème, il y a un écart de 18 % dans les taux de réussite. La version modifiée a ainsi un taux de réussite 72 % plus important que le taux de réussite de la version originale. Notons au passage que les réponses manquantes représentent, pour les deux versions de ce problème, moins de 5 % des réponses erronées et moins de 2 % du nombre total de réponses. Le test de khi-deux que nous avons effectué révèle que l'écart noté dans les taux de réussite est hautement significatif ($\chi^2(1) = 9,461$, $p = 0,002$; $\phi = 0,187$). Le phi montre toutefois que seulement près de 3 % des variations de la variable réussite du problème 1 s'explique par les variations de la variable congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée (ϕ élevé au carré = 0,034969). En ce qui a trait à l'analyse des réponses, il convient de noter, comme l'illustrent les figures 1 et 2, que le rapport entre le nombre de réponses correctes et le nombre de réponses intuitives est beaucoup plus élevé dans la version modifiée. Par réponse intuitive, nous entendons ici une réponse qui correspond à la différence des deux valeurs numériques du problème. Dans la version modifiée, il y a en effet 58 réponses correctes pour 68 réponses intuitives, alors que dans la version originale il y a seulement 34 réponses correctes pour 95 réponses intuitives.

Figure 1. Fréquence relative de chaque réponse à la version originale de la question 1

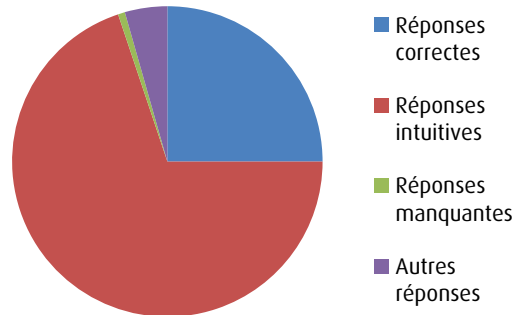
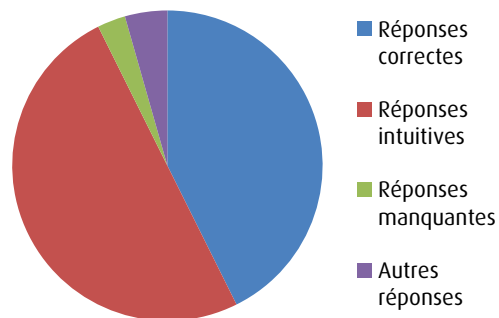


Figure 2. Fréquence relative de chaque réponse à la version modifiée de la question 1



Ainsi que l'illustre la figure 3, la similitude entre l'écriture de la somme d'argent (qui se découpe naturellement en 1 \$ et 0,10 \$) et le prix du bâton (1 \$ de plus) semble inciter les étudiants à répondre 0,10 \$, même lorsqu'une démarche algébrique les conduit à la bonne réponse (0,05 \$).

Figure 3. Démarche associée à la première version du problème 1

1. Un bâton et une balle coûtent en tout 1,10\$. Le bâton vaut 1,00\$ de plus que la balle. Quel est le prix de la balle?

x: prix du bâton
y: prix de la balle

$$x + y = 1,10$$

$$y + 1 = x$$

$$y + 1 + y = 1,10$$

$$1 + 2y = 1,10$$

$$2y = 0,10$$

$$y = 0,05$$

Réponse: 0,10\$

Résultats relatifs au second problème

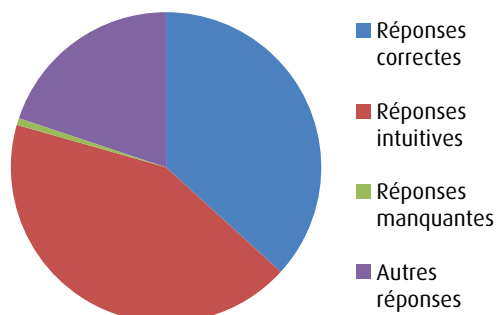
L'analyse des scores obtenus par les répondants dans les deux versions du second problème révèle également une différence importante dans les taux de réussite des deux versions. Le tableau 3 présente les deux versions du problème 2 et compare leurs taux de réussite.

Tableau 3. **Comparaison des taux de réussite des deux versions du problème 2**

	Version avec effet de cadrage (version originale)	Version sans effet de cadrage (version modifiée)
Énoncé	Hélène et Kim courent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 5 tours , Kim en aura parcouru 15 . Quand Hélène en aura parcouru 30 , combien Kim en aura-t-elle parcouru? (Gillard <i>et al.</i> , 2009)	Hélène et Kim courent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 8 tours , Kim en aura parcouru 13 . Quand Hélène en aura parcouru 20 , combien Kim en aura-t-elle parcouru?
Taux de réussite	38 %	51 %

Entre les deux versions de ce problème, il y a écart de 13 % des taux de réussite. La version modifiée a ainsi un taux de réussite 34 % plus élevé que le taux de réussite de la version originale. Notons au passage que les réponses manquantes représentent, pour les versions 1 et 2, moins de 1 % des réponses erronées et moins de 1 % du nombre total de réponses. Le test de khi-deux que nous avons effectué révèle que l'écart noté dans les taux de réussite est significatif ($\chi^2(1) = 5,965$, $p = 0,015$; $\phi = -0,148$). Le phi montre toutefois que seulement près de 2 % des variations de la variable réussite du problème 2 s'expliquent par les variations de la variable apparence d'une relation de proportionnalité (ϕ élevé au carré = 0,021904). En ce qui a trait à l'analyse des réponses, il convient de noter, comme le montrent les figures 4 et 5, que le rapport entre le nombre de réponses correctes et le nombre de réponses intuitives est beaucoup plus élevé dans la version modifiée. Par réponse intuitive, nous entendons ici une réponse qui correspond à l'application d'une règle de trois.

Figure 4. Fréquence relative de chaque réponse à la version originale de la question 2



– Le participe passé *parcouru* est invariable dans le texte qui suit lorsque le verbe est précédé de « en ». Voir le tableau 3.

Figure 5. Fréquence relative de chaque réponse à la version modifiée de la question 2

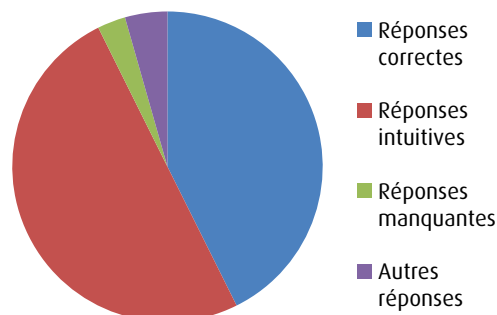


Figure 6. Démarche associée à la première version du problème

4. Hélène et Kim courent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 5 tours, Kim en aura parcouru 15. Quand Hélène en aura parcouru 30, combien en aura parcouru Kim?

Hélène = 5 tours 15 tours Kim $\frac{15 \times 30}{5} = 90$
 $\searrow$ X tours Kim.
 30 tours
 Réponse: 90 tours.

Dans la version modifiée, il y a en effet 70 réponses correctes pour 51 réponses intuitives, alors que dans la version originale il y a seulement 50 réponses correctes pour 58 réponses intuitives. Comme le montre la figure 6, l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les trois données du problème semble ici inciter les étudiants à appliquer une règle de trois pour trouver la réponse.

Discussion et conclusion

Dans cette étude, nous avons testé deux variables qui étaient, à notre avis, susceptibles d'induire un jugement intuitif lors de la résolution de problèmes additifs de comparaison. Il s'agit 1) de la congruité entre la relation de comparaison exprimée et l'écriture des valeurs numériques et 2) de l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques. Nos résultats mettent en relief un taux de réussite significativement plus bas des problèmes originaux. Nous expliquons ce phénomène par un effet de cadrage numérique, effet qui semble affecter le choix des stratégies de résolution et, par voie de conséquence, le taux de réussite des problèmes soumis.

L'effet de cadrage numérique renvoie de manière générique aux changements qui surviennent dans l'interprétation des informations numériques d'un problème lorsque ces informations sont décrites dans des cadres différents, mais équivalents (Wong et Kwong, 2005a, 2005b; Kwong et Wong, 2006). Un des exemples les plus éloquents de cet effet nous a été livré par Tversky et Kahneman au début des années 1980 : il s'agit du *Asian disease problem*. Dans ce problème, deux programmes alternatifs étaient proposés afin de combattre une maladie qui risquait de tuer 600 personnes. Si le premier programme était adopté, 200 personnes allaient être sauvées. Si le second était adopté, il y avait une probabilité de $1/3$ de sauver 600 personnes, et une probabilité de $2/3$ que personne ne soit sauvé. Même si les deux programmes étaient équivalents en termes d'efficacité, la majorité des répondants ont préféré le premier programme au second (Tversky et Kahneman, 1981). Dans cette étude, nous proposons une définition alternative de l'effet de cadrage numérique. Certes, cet effet peut être associé aux changements qui surviennent dans l'interprétation des informations numériques d'un problème lorsqu'il est traduit dans un cadre différent. Or, selon nous, il peut également être associé aux changements qui surviennent dans l'interprétation d'un problème lorsque le cadre est identique mais que les données numériques sont différentes. Ce sont alors les données numériques, et non le contexte, qui encadrent le raisonnement et qui sont susceptibles de précipiter une réponse intuitive incorrecte. Cela a d'ailleurs été observé par Van Dooren, De Bock, Evers et Verschaffel (2008), qui ont démontré qu'il était possible de provoquer, chez les élèves du primaire, une surutilisation de la proportionnalité dans les problèmes où il y a une valeur manquante (*Missing-Value Problems*), et ce, uniquement en modifiant les valeurs numériques des problèmes. Selon eux, plus les élèves acquerraient de l'expérience dans le traitement de problèmes de proportionnalité, moins le choix des valeurs numériques aurait un impact sur la réussite des problèmes où il y a une valeur manquante. Nous avons toutefois noté la présence de cet impact chez des sujets

adultes, lesquels ont plus d'expérience que les élèves du primaire dans le traitement de problèmes de proportionnalité. Ferions-nous le même constat que Van Dooren et ses collègues (2008) en présentant nos deux problèmes à des élèves du primaire? De plus amples recherches seraient nécessaires pour répondre à cette question.

La congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison exprimée ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données sont-elles des variables didactiques au sens de Brousseau (1982)? Nous soutenons que oui, puisque nous avons été en mesure de les manipuler de manière à affecter non seulement les taux de réussite des problèmes, mais les stratégies de résolution adoptées par les participants. Il faut toutefois interpréter nos résultats avec prudence. D'une part, nous n'avons soumis qu'un seul couple de problèmes pour chaque variable à tester. Aurions-nous, par exemple, été en mesure d'observer des résultats similaires avec un autre couple de problèmes de comparaison additive où nous aurions manipulé la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée? D'autre part, les valeurs obtenues pour le ϕ forcent à adopter une certaine humilité. Bien que nos variables puissent être manipulées de manière à affecter la réussite des problèmes additifs de comparaison, il convient de se demander si elles sont les seules à expliquer les écarts observés dans les taux de réussite des problèmes soumis aux étudiants. Si les recherches menées par Alter, Oppenheimer, Epley et Eyre (2007) sur le concept de «*fluency/disfluency*» pourraient éclairer de manière différente les résultats de la présente étude, un meilleur contrôle des conditions expérimentales aurait peut-être, par ailleurs, mené à des résultats différents. En effet, les participants n'étaient pas restreints dans le temps et ils pouvaient, à leur guise, utiliser ou non une calculatrice. Ces conditions peuvent avoir créé des interférences dans nos données et pourraient expliquer la taille de l'effet des deux variables sur les taux de réussite des problèmes.

À notre avis, la didactique des mathématiques gagnerait à intégrer, dans sa réflexion, le fruit des recherches menées en psychologie du jugement intuitif. Car, si l'on ne saurait attaquer un problème mathématique sans une part d'intuition, il faut apprendre à se méfier de nos idées premières et adopter une attitude de doute par rapport à celles-ci. En manipulant des variables qui induisent un effet de cadrage, il serait éventuellement possible d'entraîner les élèves à adopter cette attitude de doute et à utiliser leur système 2 pour traiter les problèmes soumis. À l'instar de Leron et Hazzan (2006), nous soutenons ainsi que «l'implication pédagogique la plus importante [de la *Dual-process theory*] est la nécessité d'entraîner les individus à être conscients de la façon dont le système 1 et le système 2 fonctionnent et à inclure cette prise de conscience dans leur boîte d'outils en résolution de problèmes» (trad. libre de Leron et Hazzan, 2006, p. 123). Par ailleurs, si la manipulation de la variable «apparence d'une relation de proportionnalité» a provoqué, chez les sujets, la formulation de réponses intuitives erronées, il est raisonnable de penser que ces sujets avaient été surexposés à des problèmes de proportionnalité à l'intérieur desquels les valeurs numériques formaient un rapport entier. Cet attribut serait alors devenu pour eux un attribut heuristique sur lequel s'appuyer pour déterminer s'il s'agit ou non d'une situation de proportionnalité. Les enseignants gagneraient ainsi à proposer

aux élèves des situations de proportionnalité où il n'y a pas toujours un rapport entier entre les valeurs numériques, question d'éviter un effet de contrat et de favoriser, chez leurs élèves, l'émission d'un jugement plus lent et analytique. En ce qui a trait à la variable manipulée dans le problème du bâton et de la balle, nous recommandons aux enseignants de ne pas hésiter à proposer aux élèves des problèmes où il y a une congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison exprimée. À notre avis, les élèves développeraient alors un schéma général de résolution qui leur permettrait de s'appuyer sur le système 2 lorsqu'une illusion cognitive de la réponse est générée par un problème.

Références bibliographiques

- BÖCKENHOLT, U. (2012). The cognitive-miser response model. Testing for intuitive and deliberate reasoning. *Psychometria*, 77(2), 388-399.
- BROUSSEAU, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques. Dans *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, France.
- CRAMER, K., POST, T. et CURRIER, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion. Research implications. Dans D. T. Owens et S. Wagner (dir.), *Middle Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics* (p. 159-178) États-Unis: National Council of Teachers of Mathematics.
- DEBLOIS, L. (2011). *Enseigner les mathématiques. Des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter*. Québec: Presses de l'Université Laval.
- DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L. et JANSSENS, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 65-89.
- FREDERICK, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25-42.
- GILLARD, E., VAN DOOREN, W., SCHAEKEN, W. et VERSCHAFFEL, L. (2009). Proportional reasoning as a heuristic-based process. Time constraint and dual task considerations. *Experimental Psychology*, 56(2), 92-99.
- KAHNEMAN, D. (2003). Mapping bounded rationality: A perspective on judgment and choice. *American Psychologist*, 58(9), 697-720.
- KWONG, J. Y. Y. et WONG, K. F. E. (2006). The role of ratio differences in the framing of numerical information. *International Journal of Research in Marketing*, 23(4), 385-394.

- LAMON, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. Dans F. K. De Lester (dir.), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*, (vol. 1, p. 629-667). États-Unis: National Council of Teachers of Mathematics.
- LERON, U. et HAZZAN, O. (2006). The rationality debate. Application of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 105-126.
- LERON, U. et HAZZAN, O. (2009). Intuitive vs analytical thinking. Four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 263-278.
- ROEGIER, X. (2011). *Les mathématiques à l'école primaire*. Tome 2. Bruxelles: De Boeck.
- STANOVICH, K. E. et WEST, R. F. (2000). Individual differences in reasoning. Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Sciences*, 23(5), 645-665.
- STANOVICH, K. E. (2009). *What Intelligence Tests Miss. The Psychology of Rational Thought*. New Haven, ct: Yale University Press.
- TVERSKY, A. et KAHNEMAN, D. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice. *Science, New Series*, 211(4481), 453-458.
- TZUR, R. (2011). Can dual processing theories of thinking inform conceptual learning in mathematics? *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 597-636.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D. et VERSCHAFFEL, L. (2004). Students' overreliance on proportionality. Evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 385-392.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. et VERSCHAFFEL, L. (2006). Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems. How numbers may change solutions. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 305-312.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. et VERSCHAFFEL, L. (2009). Students' over-use of proportionality on missing-value problems. How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 1-25.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170.
- VERGNAUD, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. Dans M. Artigue (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud* (p. 177-191). Grenoble: La pensée sauvage.

- WONG, K. F. E. et KWONG, J. Y. Y. (2005a). Comparing two tiny giants or two huge dwarfs? Preference reversals owing to number size framing. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 98(1), 54-65.
- WONG, K. F. E. et KWONG, J. Y. Y. (2005b). Between-individual comparisons in performance evaluation. A perspective from prospect theory. *Journal of Applied Psychology*, 90(2), 284-294.

Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire

Annie SAVARD

Université McGill, Québec, Canada

Elena POLOTSKAIA

Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1 **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7 **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24 **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44 **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64 **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84 **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100 **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120 **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138 **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158 **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173 **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190 **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire¹

Annie SAVARD

Université McGill, Québec, Canada

Elena POLOTSKAIA

Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Cet article présente la gestion de l'accessibilité aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels ayant des structures additives par des enseignantes de première et de deuxième année du primaire. Nous avons utilisé un modèle ethnomathématique pour analyser les effets de cette gestion sur l'accès aux mathématiques pour les élèves. Nous avons constaté que les enseignantes attribuent plusieurs rôles à la résolution de ces problèmes et que les gestes didactiques qu'elles posent en fonction de ces rôles peuvent affecter négativement cet accès. Afin de les outiller

1. Cette recherche a bénéficié du soutien financier du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec (Programme de soutien à la formation continue du personnel scolaire).

pour reconnaître les rôles qu'elles attribuent à la résolution de problèmes et leurs effets sur l'accessibilité aux mathématiques par les élèves, de même que pour les aider à modifier leurs perceptions de ces rôles en vue de bonifier leurs interventions en classe, nous avons développé une activité de formation portant sur l'analyse et la représentation des structures additives présentes dans les problèmes textuels. Dans cet article, nous discutons des gestes didactiques des enseignantes avant, pendant et après la formation.

ABSTRACT

Managing access to mathematics in solving word problems – an exploration at the elementary school level

Annie SAVARD
McGill University, Quebec, Canada

Elena POLOTSKAIA
University of Quebec in Outaouais, Québec, Canada

This article presents the management of mathematics accessibility in solving word problems that contain additive structures created by grades 1 and 2 teachers. We used an ethnomathematical model to analyze the effects of this management on mathematics accessibility for students. We found that teachers assign multiple roles to solving these problems and that the educational actions they pose geared to these roles can negatively affect this access. To equip them to recognize the roles they assign and their effects on the students' access to mathematics, and to support them in modifying these roles to improve their classroom interventions, we developed a training activity on the analysis and representation of additive structures in word problems. In this article, we discuss the teachers' educational actions before, during and after the training.

RESUMEN

Gestionar el acceso a las matemáticas en la resolución de problemas textuales: una exploración del lado de la enseñanza primaria

Annie SAVARD
Universidad McGill, Quebec, Canadá

Elena POLOTSKAIA
Universidad de Quebec en Outaouais, Quebec, Canadá

Este artículo presenta la gestión de la entrada a las matemáticas en la resolución de problemas textuales que poseen estructuras aditivas, realizada por maestros de 1º y 2º año de primaria. Utilizamos un modelo etno-matemático para analizar los efectos de la gestión sobre la iniciación de los alumnos a las matemáticas. Constatamos que los maestros atribuyen varios roles a la resolución de problemas y que los gestos didácticos que realizan en función de dichos roles pueden afectar negativamente dicha iniciación. Con el fin de equiparlos para reconocer los roles que ellos atribuyen y sus efectos sobre la entrada de los alumnos a las matemáticas, y para apoyarlos en su modificación con el fin de bonificar sus intervenciones en clase, hemos desarrollado una actividad de formación sobre el análisis y la representación de estructuras aditivas presentes en los problemas textuales. En este artículo, discutimos los gestos didácticos de los maestros antes, durante y después de la formación.

Introduction

La résolution de problèmes textuels mettant en scène les structures additives est une activité traditionnelle dans les programmes de formation du primaire. Les enseignants du primaire, qui ne sont pas spécialisés en enseignement des mathématiques, peuvent attribuer différents rôles à la résolution de problèmes textuels dans l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, un enseignant peut penser qu'un problème textuel sert à pratiquer l'addition ou la soustraction. Le sens donné aux rôles des problèmes peut affecter directement l'apprentissage des élèves (Bartolini Bussi, Canali et Ferri, 2011; Leikin, 2009). Le choix des problèmes, l'introduction à la tâche, les instructions que l'enseignant donne aux élèves peuvent aussi influencer l'accès de ces derniers aux différents aspects de la tâche ainsi que leur raisonnement mathématique par rapport à la tâche (Jackson et Cobb, 2010; Jackson, Shahan, Gibbons et Cobb, 2012). Les buts de cette recherche étaient de trouver une façon de sensibiliser les enseignants aux rôles qu'ils attribuent à la résolution de problèmes ayant des structures additives ainsi que de les aider à modifier et à bonifier leurs pratiques enseignantes relatives à ces tâches, c'est-à-dire leurs gestes didactiques. Nous avons, dans cet esprit, formulé les questions de recherche suivantes :

1. Quels sont les rôles que les enseignants du premier cycle du primaire attribuent aux tâches de résolution de problèmes textuels? De quelle façon l'attribution de ces rôles par les enseignants affecte-t-elle l'accessibilité aux mathématiques présentes dans ces tâches pour leurs élèves?
2. Comment peut-on sensibiliser les enseignants aux rôles qu'ils attribuent à la résolution de problèmes ayant des structures additives pour les aider à modifier leurs perceptions de ces rôles et ainsi bonifier leurs pratiques enseignantes?

Un cadre d'analyse de la résolution de problèmes comme tâche éducative

Deux paradigmes de la résolution de problèmes additifs s'opposent. Le premier, que nous appellerons le *paradigme opérationnel*, met l'accent sur l'addition et la soustraction comme opérations arithmétiques. De ce point de vue, les problèmes textuels peuvent être considérés comme des exercices où les connaissances sur les opérations arithmétiques peuvent être appliquées ou développées. Ce paradigme correspond à une séquence de l'enseignement des mathématiques où les élèves apprennent d'abord comment additionner et soustraire, puis essaient de résoudre les différents problèmes textuels pour mettre cette connaissance en pratique et obtenir la compréhension conceptuelle des opérations. Le paradigme opérationnel n'exclut pas le raisonnement relationnel comme un élément nécessaire dans la résolution des problèmes arithmétique. Toutefois, ce raisonnement est vu comme un raisonnement plus avancé qui se base sur la connaissance des opérations.

Plusieurs études visant à comprendre les difficultés des élèves dans la résolution des problèmes textuels ont proposé des classifications de ces problèmes en fonction de leurs structures sémantiques et mathématiques (Carpenter, Fennema, Franke, Levi et Empson, 1999; Nesher, Greeno et Riley, 1982; Riley, Greeno et Heller, 1984; Vergnaud, 1982). Des travaux contemporains (Barrouillet et Camos, 2002; Nunes, Bryant, Evans, Bell et Barros, 2011; Pape, 2003; Thevenot, 2010) montrent que certains problèmes sont particulièrement difficiles à résoudre, car ils nécessitent une analyse flexible et holistique de leur structure mathématique. Pourtant, selon une perspective adoptant le point de vue du paradigme opérationnel, les structures additives ne sont pas vues comme une connaissance mathématique indépendante, soit l'étude des relations entre des quantités, mais plutôt comme des sens différents de deux opérations arithmétiques.

Le second paradigme, que nous appellerons le paradigme relationnel, apparaît dans les ouvrages de Davydov (1982) et dans des études plus récentes (Iannece, Mellone et Tortora, 2009; Xin, Wiles et Lin, 2008). Selon Davydov (1982), la notion de relation additive est «la loi de composition par laquelle la relation entre deux éléments détermine un troisième élément unique comme fonction²» (p. 229). Davydov (1982) a postulé qu'une compréhension adéquate de la relation additive est la base de l'apprentissage de l'addition et de la soustraction. Selon ce point de vue, les opérations arithmétiques ne sont pas le moyen de comprendre une situation, mais servent d'outils pour modifier la situation, une fois que celle-ci est comprise. C'est la recherche du troisième élément par l'étude de la relation entre les deux premiers éléments qui amène à modifier la situation. Selon une perspective adoptant le point de vue du paradigme relationnel, une tâche de résolution de problèmes devrait donner l'occasion d'analyser les relations additives présentes dans la situation.

Nous considérons le paradigme opérationnel comme un cadre d'analyse des problèmes, alors que le paradigme relationnel éclaire le but didactique de la tâche de

2. Traduit par les auteures.

résolution de problèmes additifs, car il vise le développement de la compréhension de la relation additive.

Un cadre d'analyse des gestes didactiques des enseignants

Habituellement, un problème textuel décrit une situation qui est contextualisée dans la vie réelle ou dans l'imaginaire. Pour analyser les contextes présents dans les problèmes, nous avons utilisé le modèle ethnomathématique Math and Citizenship Competencies Learning Model, inspiré par Mukhopadhyay et Greer (2001) et développé par Savard (2008). Selon ce modèle, une tâche de résolution du problème peut contenir des contextes de différents ordres : un contexte socioculturel, un contexte citoyen et un contexte mathématique. Le modèle ethnomathématique suggère que les contextes socioculturel et citoyen jouent un rôle important dans la tâche en donnant aux élèves le premier accès à la situation et en servant de lien entre les mathématiques du problème et la vie de l'enfant. Ce modèle assume également que les étudiants passent d'une analyse quotidienne de la situation en contexte socioculturel à une analyse mathématique des quantités et des relations mathématiques pour modéliser la situation en contexte mathématique. Le développement du raisonnement mathématique devient possible grâce à cette analyse du contexte mathématique du problème. Le développement d'une pensée critique fait également partie de ce modèle. Une pensée critique peut se développer à l'intérieur même du contexte mathématique ou bien par l'utilisation des résultats mathématiques pour fournir un nouvel éclairage aux contextes socioculturel et citoyen.

Nous avons voulu étudier comment les enseignantes effectuent le passage entre les contextes socioculturel et mathématique des problèmes pour guider les élèves dans l'analyse des relations additives présentes dans les tâches.

Méthodologie

Dans le cadre d'un projet de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation du Québec, nous avons conçu et mis en œuvre un programme de formation pour aider les enseignants à revoir leurs pratiques et à concevoir de nouvelles approches de l'enseignement de la résolution de problèmes ayant des structures additives. Nos participantes avaient plus de six années d'expérience au primaire : six enseignaient en première année et six en deuxième année. Nous avons vu notre projet comme une conversation continue entre les enseignants, la conseillère pédagogique de la commission scolaire et nous. Nous présentons dans cet article les quatre phases de la conversation.

Pour répondre à la première question de recherche, nous avons procédé en deux phases. Nous avons d'abord étudié les pratiques des enseignantes, avant toute intervention de notre part. Nous avons interrogé les enseignantes quant aux motifs guidant leur choix de problèmes textuels à proposer à leurs élèves. Nous les avons

aussi interrogées sur les interventions qu'elles effectuent régulièrement pendant la résolution des problèmes par les élèves :

1. Comment choisissez-vous un problème pour votre activité de résolution de problèmes?
2. Quelles sont vos interventions principales pendant la résolution du problème par les élèves?

Nous avons recueilli et analysé leurs réponses. À partir de ces informations, nous avons défini les rôles attribués ainsi que les contextes suggérés par leurs réponses.

Nous avons demandé à certaines de nos participantes de nous permettre de les filmer en classe en début d'année durant une activité de résolution de problèmes. Pendant cette phase, nous avons utilisé la classification de problèmes proposée par Riley *et al.* (1984) pour analyser la structure des problèmes présentés aux élèves³. Ensuite, nous avons utilisé le modèle ethnomathématique et le paradigme relationnel pour analyser les gestes didactiques des enseignantes, c'est-à-dire ce qu'elles font pour amener les élèves à passer d'un contexte à un autre.

Deux nouvelles phases ont été nécessaires pour nous permettre de répondre à notre deuxième question de recherche. À la phase trois, nous avons conçu et proposé aux enseignantes un jeu de rôle afin qu'elles puissent clarifier pour elles-mêmes les différents contextes mis en œuvre dans le problème. Nous avons choisi d'attirer leur attention sur les contextes socioculturel et mathématique, car le premier est la porte d'entrée du problème, alors que le second est l'objet de la situation d'enseignement/apprentissage. Nous avons également attiré leur attention sur les étapes de résolution d'un problème mathématique textuel. Nous avons filmé et analysé ces sessions de formation en définissant les contextes. Nous avons continué à former nos participantes en leur proposant d'autres discussions sur les structures mathématiques et sur leur enseignement dans le paradigme relationnel. La tâche de résolution d'un problème est vue comme une occasion pour l'élève d'analyser la structure mathématique du problème à partir du contexte socioculturel ou, autrement dit, l'habillage du problème. L'élève doit reconnaître la relation additive contenue dans le problème, la représenter en utilisant un diagramme, puis dégager l'opération arithmétique, exécuter l'opération pour trouver la réponse numérique et, finalement, donner le sens à cette réponse dans le contexte socioculturel du problème.

Dans la phase quatre, nous avons filmé dans des classes les activités de résolution de problèmes mises en œuvre par les participantes à la suite de la formation reçue. Nous avons transcrit et analysé les points importants des enregistrements avec les enseignantes pendant les sessions de formation et également en classe avec leurs élèves.

Dans cet article, nous présentons l'analyse des résultats pour chacune des phases. Nous utilisons des pseudonymes pour nommer les enseignantes. En appliquant l'approche qualitative-interprétative (Savoie-Zajc, 2000), nous voulons donner

3. Selon une perspective adoptant le paradigme relationnel, la classification des problèmes permet, entre autres, de définir la nature des relations entre les données, soit la structure du problème.

un sens aux rôles que les enseignantes attribuent aux tâches de résolution de problèmes et aux gestes didactiques qu'elles posent.

Résultats et analyse

Les différents rôles de la résolution de problèmes

Au début du projet, les enseignantes participantes étaient libres de choisir des problèmes textuels ayant des structures additives pour travailler avec leurs élèves. Nous leur avons demandé les motifs justifiant leur choix de problèmes et leurs interventions pendant l'activité de résolution des élèves. Nous avons également filmé certaines de nos participantes, en début d'année scolaire, avant toute intervention de notre part.

En portant une grande attention au contexte socioculturel, des enseignantes ont perçu le rôle de la résolution de problèmes textuels comme étant de favoriser la socialisation et la motivation des élèves. La tâche a été perçue comme une occasion de lier la tâche à la vie quotidienne des élèves ou aux événements culturels importants de la société. C'est ce que nous a expliqué Kristine, enseignante de première année : « *J'essaie d'intégrer les autres matières en contexte actuel.* » Diane, enseignante de deuxième année, est allée dans le même sens : « *Je choisis des problèmes selon [...] les thèmes en fonction de la saison ou d'un événement, par exemple Noël, la Saint-Valentin...* » Elle a ajouté qu'elle veut susciter l'intérêt des élèves : « *Je questionne l'intérêt des étudiants au contexte.* » En classe, lors de l'introduction d'un problème textuel à résoudre, Anna a rappelé à ses élèves l'activité des papillons vécue la semaine précédente et elle a fait un lien avec les sciences de la nature (Anna, 1^{re} année), alors que Betty a dit que l'histoire pourrait porter sur un des élèves de la classe (Betty, 1^{re} année).

Un autre rôle que nos enseignantes ont attribué à la résolution de problèmes textuels est d'offrir une possibilité de développer les habiletés langagières des élèves. La tâche a été perçue comme une occasion de travailler la lecture et la compréhension du texte ainsi que le vocabulaire et la ponctuation. Le processus de compréhension de lecture a donc été utilisé dans les textes des problèmes présentés aux élèves : « *On travaille les mots nouveaux par rapport au contexte* », nous a dit Diane, enseignante de deuxième année. En classe de première année, Anna a montré le texte sur un tableau blanc interactif, une phrase à la fois, et elle a lu la phrase avec les élèves. Les enseignantes désiraient donner accès aux textes des problèmes à leurs élèves en discutant des mots utilisés dans les problèmes : « *Je m'assure que le vocabulaire utilisé est bien compris* », nous a affirmé Betty, enseignante de première année. Toujours en classe de première année, Anna a encadré la lettre majuscule au début du premier mot et le point ou point d'interrogation à la fin de chaque phrase. Nous pensons que le fait de travailler les habiletés langagières pour elles-mêmes, comme l'a fait Anna, risque de détourner l'attention des élèves de la tâche mathématique et peut créer une surcharge cognitive pour ces derniers.

En se concentrant davantage sur le contexte mathématique, des enseignantes ont perçu le rôle de la résolution de problèmes textuels qui est de favoriser la mobilisation de concepts mathématiques déjà appris, de modéliser et de développer des habiletés métacognitives. Ainsi, le rôle consistant à mobiliser des concepts mathématiques dans la résolution de problèmes est lié à une réutilisation des concepts. Dès lors, la tâche a été perçue principalement comme une occasion d'utiliser des connaissances déjà acquises et non pas comme une occasion d'acquérir de nouvelles connaissances :

« *Je choisis des problèmes selon les concepts [mathématiques] déjà vus en classe* » (Diane, 2^e année).

« *Je prends en considération les thèmes [mathématiques] déjà travaillés en classe pour que les problèmes aient un sens pour les élèves* » (Betty, 1^{re} année).

« *J'invite les élèves à utiliser les connaissances mathématiques déjà acquises* » (Kristine, 1^{re} année).

La modélisation mathématique a été identifiée comme un des rôles associés à la résolution de problèmes. Ainsi, Betty, enseignante de première année, a soutenu la compréhension de ses élèves en identifiant les données du problème, soit les nombres présents dans le texte : « *Je clarifie les données importantes.* » En classe, elle a demandé à ses élèves de représenter les nombres du texte sur leurs doigts. Sa collègue de première année a elle aussi amené ses élèves à identifier les données : en classe, Anna a discuté avec les élèves des phrases qui contiennent des nombres, les appelées « les données importantes » et a encerclé les nombres et les descripteurs. Diane, enseignante de deuxième année, a soutenu ses élèves dans l'organisation des données : « *Nous organisons les données.* » Cette organisation est en fait une procédure pour représenter les données, par dessin ou en utilisant des objets, pour faciliter le calcul, comme nous l'a montré Anna. En classe, celle-ci a expliqué aux élèves qu'ils pouvaient employer n'importe quelle stratégie ou n'importe quel matériel. Elle a aussi suggéré de dessiner des papillons ou des petits cercles, mais elle n'a proposé aucune explication concernant la différence entre une image artistique et une représentation graphique de la structure mathématique du problème. La modélisation semble donc consister à identifier les données numériques contenues dans le texte et à les représenter pour opérer.

Le rôle de la résolution de problèmes dans le développement d'habiletés métacognitives a pris forme sous l'organisation du travail de résolution. Ainsi, Kristine, enseignante de première année, a proposé à ses élèves de jouer un personnage afin de bien marquer les différentes étapes de la résolution et d'amener ainsi les élèves à organiser leur travail : « *J'utilise des personnages : le penseur, l'architecte et le constructeur.* »

La reconnaissance des relations entre les quantités, l'analyse et la représentation de la structure mathématique du problème et la recherche de l'opération mathématique à effectuer basée sur l'analyse n'ont pas été mentionnées par nos enseignantes ni même observées en classe. En fait, les données recueillies nous amènent à faire l'hypothèse que les enseignantes n'arrivaient pas à distinguer la situation décrite dans le problème de sa structure mathématique. Le mode de représentation

par objets que les enseignantes utilisaient à la manière d'Anna pour modéliser le problème supportait bien le calcul, mais ne favorisait pas vraiment la discussion ni sur les relations quantitatives, ni sur la structure du problème.

Effets sur l'accessibilité aux mathématiques présentes dans la tâche

Nous avons analysé les instructions données par deux enseignantes de première année avant que les élèves commencent à travailler individuellement, ainsi que les actions des élèves pendant le travail individuel. Notre attention a porté sur l'introduction du problème aux élèves et nous avons essayé de voir comment cette introduction leur a facilité l'accès à la structure mathématique du problème. En nous situant dans le paradigme relationnel, nous nous sommes attardées aux éléments présents ou non dans les instructions données par l'enseignante en relation avec l'analyse des relations présentes dans le problème.

L'enseignante Anna a utilisé le problème de comparaison de quantités de papillons dans lequel la différence est inconnue.

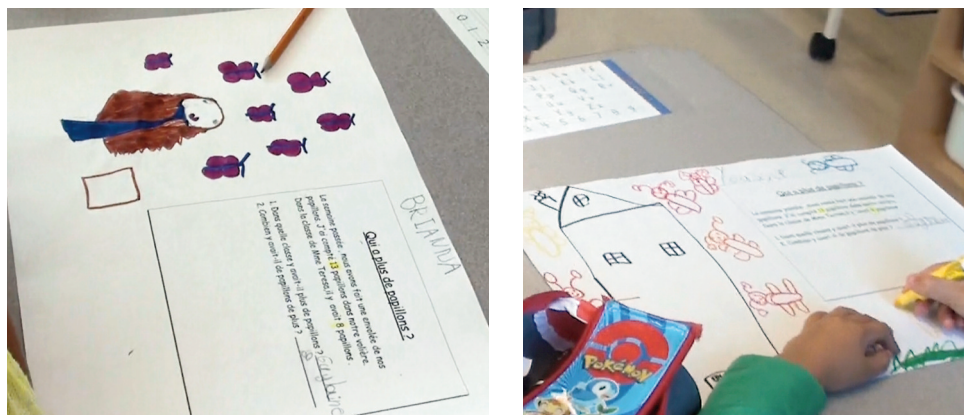
La semaine passée, nous avons fait s'envoler nos papillons. J'ai compté 13 papillons dans notre volière. Dans la classe de madame Teresa, il y avait 8 papillons. Quelle classe a le plus de papillons? Combien de plus?

Le contexte socioculturel choisi par Anna est bien près de ses élèves, car ils venaient de vivre l'activité d'envolée de papillons la semaine précédente. Anna a présenté l'activité aux élèves comme une résolution de problème et elle a attiré leur attention sur la lecture du texte du problème. Elle a montré le texte sur le tableau blanc interactif, une phrase à la fois, a lu la phrase avec les élèves, a encerclé la lettre majuscule au début du premier mot et le point à la fin de chaque phrase. Anna a rappelé à ses élèves l'activité de papillons vécue la semaine précédente et elle a fait un lien avec les sciences de la nature. Ensuite, elle a essayé de travailler le contexte mathématique. Anna a discuté avec les élèves des phrases qui contiennent des nombres, a appelé ces phrases « les données importantes » et a encerclé les nombres et les descripteurs, mais elle n'a pas discuté le sens de l'expression mathématique « de plus que » avec les élèves.

Anna a précisé à ses élèves le type de réponses qu'elle attendait pour ce problème (le nom de l'enseignante-personnage du problème et le nombre de différences) et elle a indiqué où ces réponses doivent être inscrites sur la feuille. Pour renvoyer les élèves aux méthodes de représentation et de calcul déjà vus en classe, elle leur a dit qu'ils pouvaient employer n'importe quelle stratégie ou n'importe quel matériel : dessiner des papillons ou des petits cercles, se servir des jetons de calcul, utiliser la droite numérique, utiliser ses doigts, etc. Elle a suggéré aux élèves de laisser des traces de leur démarche sur le papier pour expliquer leur raisonnement en vue de trouver la réponse, mais elle n'a proposé aucune explication concernant la différence entre une image artistique et une représentation graphique de la structure mathématique du problème.

Plusieurs élèves ont dessiné des papillons, certains sans référence aucune aux données du problème. Dans ce cas, les dessins n'ont fourni de réel support ni à la compréhension mathématique du problème ni aux calculs.

Figures 1 et 2. Représentations du problème de papillons par des élèves



Plusieurs élèves ont dessiné le nombre correct de papillons ou de petits cercles, mais sans organisation particulière sur papier. Il semblerait que plusieurs élèves ne savaient plus quoi faire ensuite. Certains ont encerclé les nombres dans le texte, mais ne semblaient pas être en mesure de poursuivre. Un élève a utilisé la droite numérique pour trouver la différence entre les deux nombres. Quelques élèves ont écrit une expression mathématique correcte ($13-8$) et calculé la réponse mentalement. Nous avons vu que des élèves ont essayé de représenter le problème, mais il semblerait qu'ils n'aient pas reconnu la structure mathématique du problème ou n'aient pas cherché à la découvrir. Nous en concluons que les élèves ne savaient pas représenter la structure mathématique du problème, mais qu'ils étaient en mesure de représenter l'histoire ou le processus de calcul.

L'enseignante Betty a utilisé le problème de comparaison de l'âge où le référent est inconnu.

Amélie a 6 ans. Elle est 2 ans plus âgée que sa sœur Rita. Quel âge a Rita?

Betty, elle aussi, a commencé sa leçon dans le contexte socioculturel. Elle a tenté de renvoyer les élèves à leur vie quotidienne en disant que l'histoire pourrait porter sur un des élèves de la classe. Betty a montré le texte du problème à l'écran et elle a lu une phrase à la fois avec les élèves. Ensuite, elle a tenté d'accéder au contexte mathématique en attirant l'attention des élèves vers les nombres. Quand ils trouvaient ensemble un nombre dans le texte, elle demandait aux élèves de représenter ce nombre sur leurs doigts. Elle a ensuite comparé les différentes représentations du nombre 6 sur les doigts des deux mains. Betty n'a pas discuté le sens de l'expression relationnelle « 2 ans plus âgée que... ». Elle a donc attiré l'attention des élèves sur la représentation du nombre 2 en tant que quantité plutôt qu'en termes relationnels. Ce qui risquait d'induire les élèves en erreur, puisque dans ce problème le nombre 2 représente une différence. Finalement, Betty a demandé aux élèves de trouver la réponse en faisant des marques sur leur ardoise.

Certains élèves ont écrit la réponse immédiatement, puis ils ont essayé de composer l'expression mathématique. Quelques élèves ont dessiné les deux personnes, ils ont inscrit leurs âges et se sont arrêtés à cette étape. D'autres ont écrit l'expression mathématique attendue, soit $6 - 2 = 4$. Quelques élèves ont écrit la réponse 4 et l'ont illustrée avec quatre points. D'autres encore ont écrit l'expression mathématique incorrecte $6 + 2 = 2$ ou bien l'expression mathématique $6 + 2 = 8$ qui ne correspond pas au problème posé.

Nous pouvons voir que les deux enseignantes ont porté une grande attention à la lecture du texte et au vocabulaire. Elles ont été sensibles au contexte socioculturel en faisant des liens avec la vie des élèves. Les discussions portant sur le contexte et les aspects linguistiques ont pris beaucoup de place dans les deux activités. Nous ne sommes cependant pas parvenues à observer une discussion explicite sur la structure mathématique du problème. Les instructions données par les enseignantes ont été imprécises quant à l'analyse mathématique et à la représentation que leurs élèves devaient utiliser. Les élèves devaient-ils représenter le problème comme un événement quotidien (dessiner des papillons ou des personnes), devaient-ils dégager les relations quantitatives entre les données, ou faire les deux? Les instructions sur le travail mathématique attendu des élèves n'ont pas été très claires non plus. Les élèves devaient-ils deviner la réponse, utiliser les opérations arithmétiques d'addition ou de soustraction vues en classe, ou bien commencer par l'analyse de relations quantitatives entre les données? Bref, nous n'avons observé aucun geste didactique des enseignantes qui confirmerait que celles-ci ont porté une attention spéciale et explicite à la structure mathématique du problème au moment d'introduire la tâche. Nous pouvons conclure que les instructions données par les enseignantes n'ont pas été vraiment claires quant au rôle de la résolution, c'est-à-dire de favoriser le développement de la compréhension de la structure mathématique du problème.

Nous pensons que cette absence de clarté a provoqué les effets suivants. La majorité des élèves ne sont jamais arrivés à voir ou à discuter la structure mathématique du problème : ils étaient préoccupés à dessiner, colorier, deviner, compter et écrire des expressions mathématiques (correctes ou non correctes). Très peu d'élèves se sont préoccupés d'analyser la structure ou de la représenter. Bref, pour la majorité des élèves, les instructions données par les enseignantes lors de l'introduction des tâches n'ont pas favorisé l'accès à la structure mathématique du problème.

L'analyse en classe des discussions qui suivaient le travail individuel des élèves nous permet d'affirmer que ces enseignantes ne sont pas parvenues à guider leurs élèves du contexte socioculturel du problème vers la structure mathématique présente en contexte mathématique. Ainsi, les participantes ont vu la représentation, entendue comme première étape de la modélisation, comme un dessin quelconque, soit une représentation du contexte, des nombres ou du calcul. Le dessin n'offre pas nécessairement de support à la compréhension de la structure mathématique du problème. Les données du problème visées par les enseignantes semblent inclure seulement les nombres utilisés dans le texte, les relations en étant absentes. En fait, ce qui ressort de nos données est le manque d'outils dont disposent les enseignantes pour représenter la structure mathématique afin de modéliser le problème et de jus-

tifier le choix d'une opération. Une des enseignantes a ainsi abandonné la discussion portant sur le choix de la soustraction comme opérateur dans le problème comparant les âges de deux personnes en disant : « *J'ai choisi un mauvais problème.* »

Sensibiliser les enseignantes : le jeu du capitaine

Afin d'aider les enseignantes à bien distinguer entre le contexte socioculturel et la structure mathématique du problème, nous avons utilisé le jeu du capitaine créé par Polotskaia (2009) pour les élèves du primaire. Les participants doivent représenter le problème textuel donné de façon telle qu'une autre personne, qui n'a pas lu le texte, puisse ensuite calculer la réponse. Certaines règles doivent être respectées :

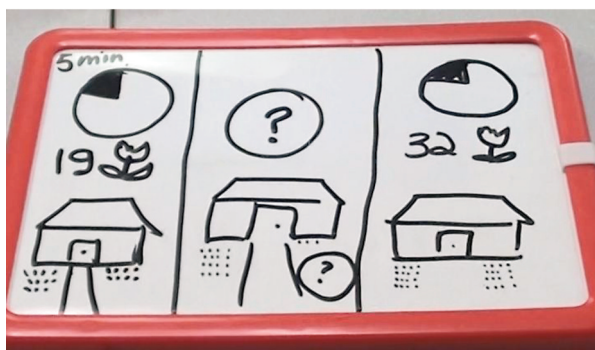
- Le problème doit être représenté par un dessin ou un diagramme.
- On ne doit pas utiliser de mots ni même de lettres.
- On peut utiliser seulement les nombres mentionnés dans le texte et le symbole « ? ».
- On ne peut pas utiliser les symboles d'opérations mathématiques, sauf « = ».

Nous avons réparti les enseignantes en équipes de trois. Un membre de chaque équipe jouait le rôle du capitaine. Le capitaine a quitté la pièce pendant que les matelots créaient le message graphique pour représenter le problème. Ensuite, le capitaine essayait de décoder le message et de calculer la réponse. Nous présentons ici un exemple de problème et d'une représentation créée par des enseignantes.

Annie aide sa mère à planter des tulipes devant la maison. Elles ont planifié de planter 32 tulipes. Elles ont travaillé pendant 5 minutes et ont planté quelques tulipes. Il reste 19 tulipes à planter. Combien de tulipes ont été plantées?

Ce problème a la particularité de rechercher un terme manquant. Ainsi, l'expression mathématique $32 = ? + 19$ illustre bien le défi de représenter les tulipes plantées dont le nombre est inconnu.

Figure 3. Représentation du problème des tulipes par un groupe d'enseignantes



Les enseignantes ont porté beaucoup d'attention aux détails du contexte socio-culturel du problème (« devant la maison », « des tulipes », etc.). À travers la discussion qui suivait le jeu, les enseignantes ont reconnu qu'elles ont davantage représenté la situation que la relation mathématique. Cette conversation a mis en lumière, pour les chercheuses comme pour les participantes, l'absence de clarté quant à la distinction entre le contexte socioculturel et le contexte mathématique. Le jeu est devenu un moment révélateur pour les participantes au sujet de cette distinction.

En cours de jeu, certains capitaines ont été incapables de résoudre le problème en utilisant le message préparé par leur équipe. Ce qui nous a aidées à attirer leur attention vers les différents types d'informations présents dans un problème textuel qui peuvent dégager ou ombrager la structure mathématique du problème.

Nous avons poursuivi la formation en introduisant les Diagrammes Range-Tout (Polotskaia, 2010) qui permettent de représenter la structure des problèmes. Grâce à cette technique de diagrammes, nous avons pu mieux outiller les enseignantes pour l'analyse des problèmes additifs ainsi que pour les représentations qui reflètent ces structures. Nous avons également discuté avec elles de l'introduction et de l'utilisation de ces diagrammes auprès de leurs jeunes élèves. Nous nous sommes particulièrement intéressées au développement de l'habileté des enseignantes à interroger et à discuter les structures mathématiques avec les élèves.

Bonifier les pratiques enseignantes

Pour voir les résultats de nos interventions auprès des enseignantes, nous avons filmé quelques séquences d'enseignement dans les classes. Les participantes devaient présenter aux élèves un problème ayant une structure additive et les guider dans l'analyse et la représentation de la structure mathématique du problème. Nous présentons ici deux activités filmées dans une classe de première année et dans une classe de deuxième année. Nous portons notre attention sur ce que font les enseignantes pour amener leurs élèves à analyser la structure mathématique du problème.

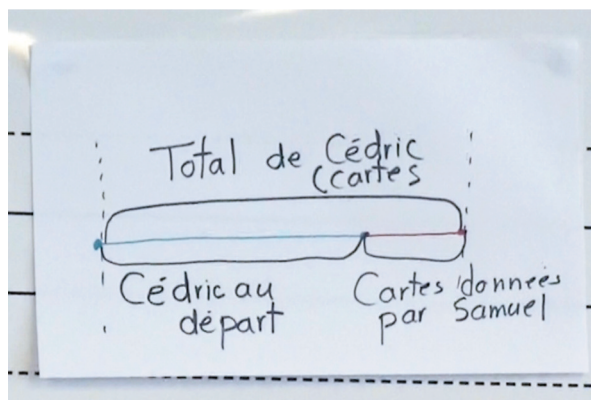
En première année, l'enseignante Anna a utilisé une situation de transformation positive qui ne comporte pas de questions à poser aux élèves. La situation présente l'état initial, la transformation et l'état final, dont les nombres ne correspondent pas les uns aux autres. La situation est donc mathématiquement impossible. Anna a commencé la leçon en rappelant aux élèves qu'ils ont déjà analysé plusieurs situations et problèmes mathématiques et qu'ils ont construit des représentations pour mieux les comprendre. Quelques diagrammes sont collés au tableau. L'enseignante a révisé rapidement les activités vécues et les diagrammes construits et a proposé qu'aujourd'hui les élèves utilisent si possible leur connaissance des diagrammes. Anna a mis le texte de la situation au tableau et demandé à un élève de lire le problème phrase par phrase.

Cédric a 15 cartes. Samuel lui en donne 3. Cédric a maintenant 20 cartes.

Elle a expliqué qu'il s'agissait des cartes *Skylander* que ses élèves collectionnent. Anna a demandé immédiatement aux élèves ce qu'ils pensaient de la situation décrite. Les élèves ont pensé que la description n'était pas exacte, car « ça ne fait pas

20». D'autres nombres peuvent être changés pour rendre la situation en ordre, c'est-à-dire correcte. Anna a discuté avec les élèves de toutes les possibilités de nombres qui peuvent ne pas être corrects dans le texte, c'est-à-dire chacune des trois données numériques. Certains élèves ont proposé de calculer à l'aide de la calculatrice, mais l'enseignante a insisté : avant de calculer, il faut construire le diagramme pour trouver la phrase mathématique à taper sur la calculatrice. Anna a commencé à construire le diagramme et a proposé aux élèves de réfléchir sur ce que ce diagramme représente par rapport au problème. Elle a dessiné deux segments de couleurs différentes, l'un après l'autre. Les élèves ont répondu que le premier segment représentait les cartes de Cédric au départ, alors que le deuxième représentait les cartes données par Samuel. L'enseignante a inscrit cette information sur le diagramme (voir la figure 4). Toujours en utilisant les suggestions des élèves, Anna a complété le diagramme en expliquant qu'on doit considérer toutes les cartes ensemble pour voir le total des cartes de Cédric (voir la figure 4). Jusqu'à présent, aucun nombre n'a été utilisé sur le diagramme. Anna a poursuivi la discussion pour examiner la première possibilité de correction : corriger le nombre total des cartes de Cédric. Elle a redessiné le diagramme en y ajoutant les nombres connus et le point d'interrogation. Elle a demandé aux élèves de formuler la question pour ce problème. Ensuite, Anna a interrogé les élèves au sujet de la phrase mathématique pour calculer le nombre inconnu. Le moment est ainsi venu pour un élève de taper la phrase sur la calculatrice.

Figure 4. Diagramme construit par Anna



De la même manière, Anna a examiné les deux autres possibilités de corrections avec les élèves. Chaque fois, le calcul est confié à la calculatrice.

Anna a toujours porté attention à lier son activité à la vie des élèves. Toutefois, au cœur de cette activité se trouvait l'analyse mathématique de la situation. Anna a clairement orienté ses élèves vers la structure mathématique du problème. Pendant la discussion, les relations entre les données ont été étudiées plusieurs fois. Ainsi, Anna a utilisé les descriptions qualitatives des données, et non pas les nombres. Elle

a utilisé des expressions comme « les cartes de départ », « le total de cartes » au lieu de considérer seulement les nombres. Elle a ainsi attiré l'attention des élèves sur le rôle de chaque donnée dans la relation décrite dans le problème.

En deuxième année, l'enseignante Clara a utilisé la situation de comparaison de deux distances. La différence est inconnue.

Le petit frère de Julianne a parcouru 15 km à vélo. Julianne a parcouru 23 km. Combien de kilomètres Julianne a-t-elle parcourus de plus que son petit frère?

Clara a commencé l'activité en rappelant aux élèves l'activité de la veille. Puis elle leur a demandé de décrire et de discuter les deux types de diagrammes qu'ils ont utilisés, lesquels sont affichés au tableau.

Figure 5. Deux diagrammes affichés au tableau de la classe de Clara

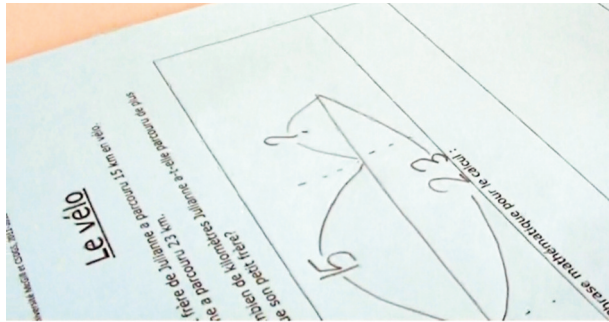


Ensemble, ils ont discuté dans quels cas (comparaison ou autre) il convient d'utiliser chaque diagramme. Clara a précisé aux élèves qu'ils devaient déterminer d'abord quel diagramme représente mieux la situation. Ensuite, ils devaient trouver la phrase mathématique qui indique le calcul à faire pour résoudre le problème. Un élève a lu le problème à voix haute, puis Clara a relu le problème encore une fois. Clara a demandé aux élèves de trouver ce qu'on connaît dans le problème et de préciser ce que l'on cherche. Clara a proposé aux élèves de travailler en équipe de trois pour discuter et argumenter leur choix.

L'équipe d'élèves que nous avons observée a choisi le diagramme de comparaison (« ce qui est en haut au tableau »). Bien que deux membres de l'équipe aient dessiné le diagramme à un segment et que le troisième ait tracé le diagramme à deux

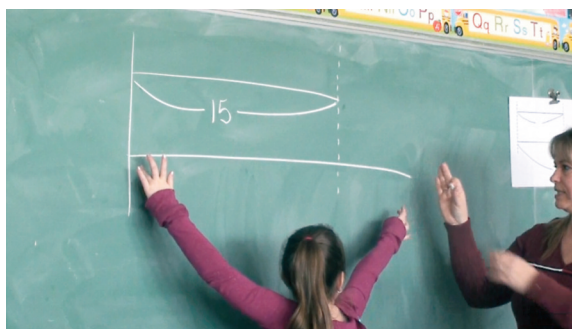
segments, les trois membres ont identifié correctement quelles parties de ces diagrammes devaient représenter les données du problème (voir la figure 6). Ensemble, les membres de l'équipe ont trouvé la phrase mathématique 23-15.

Figure 6. **Représentation construite par un élève**



En discussion en grand groupe, tous les élèves ont confirmé qu'ils ont utilisé le diagramme de comparaison. Clara a proposé de discuter comment identifier les données sur le diagramme et elle a demandé aux élèves de venir les montrer au tableau et d'argumenter leur choix en se référant au problème (voir la figure 7). S'appuyant sur le diagramme construit, les élèves ont proposé la phrase mathématique pour trouver l'inconnue. Clara a ensuite demandé aux élèves, qui avaient déjà calculé la réponse, d'annoncer le nombre. Ensemble, les élèves et l'enseignante ont expliqué ce que le nombre trouvé représente dans l'histoire.

Figure 7. **Discussion sur la représentation**



Dans cette activité, l'enseignante n'a pas discuté avec les élèves du contexte du problème. Toutefois, ce contexte porte sur la vie de tous les jours des élèves de cet âge (excursion à vélo, parcours en kilomètres). Le temps de l'activité est principalement

consacré à l'identification de la structure mathématique du problème et à la coordination entre le problème et la représentation par un diagramme. L'enseignante a clairement indiqué les étapes de l'analyse à faire : identifier le type de diagramme ; définir les données du problème sur le diagramme choisi. La procédure de calcul n'a pas été discutée, puisque l'enseignante voulait guider ses élèves dans l'analyse du problème afin d'identifier les données importantes et de choisir l'opération à effectuer. Dans la discussion qui a suivi, le nombre calculé constituant la réponse a été reconnu comme un élément mathématique de la situation et son sens dans la réalité du problème a été discuté.

Nous voulons maintenant indiquer quels gestes didactiques ont facilité l'accès des élèves à l'analyse mathématique de problèmes dans les activités décrites. Premièrement, au début de chaque activité, les deux enseignantes ont invité les élèves à se rappeler l'expérience mathématique vécue précédemment qu'elles, les enseignantes, jugeaient pertinente pour l'activité. Anna a discuté les problèmes et les activités dans lesquelles les diagrammes ont été utilisés. Clara a discuté les deux types de diagrammes utilisés auparavant. Ce rappel des connaissances mathématiques facilite l'accessibilité au problème, comme l'ont suggéré Jackson *et al.* (2012). De plus, il permet d'attirer l'attention des élèves vers le contexte mathématique de la situation. Deuxièmement, les deux enseignantes ont prêté attention au contexte du problème : elles ont choisi un contexte socioculturel simple et facilement accessible aux élèves. De plus, Anna a brièvement discuté du contexte avec ses élèves. Toutefois, dans les deux cas, le contexte n'a pas pris la place principale dans l'activité. On peut dire qu'il agit comme porte d'entrée dans le domaine mathématique en servant de toile de fond aux relations mathématiques présentes dans le problème. Troisièmement, l'aspect linguistique est traité, dans les deux cas, en accord avec les besoins mathématiques des élèves. Anna a formulé le problème en un texte court et simple et elle a lu le texte phrase par phrase avec les élèves. Clara a demandé à un élève de lire le texte à voix haute, puis elle l'a elle-même relu. Nous pouvons constater que le travail sur l'aspect linguistique sert d'outil pour assurer l'accès à l'analyse mathématique et n'est plus un apprentissage langagier en soi. Les enseignantes ont ainsi abordé le contexte socioculturel de façon directe et simple afin de faciliter le passage des élèves vers le contexte mathématique de la situation. Quatrièmement, l'analyse mathématique constitue le noyau des deux activités. Les deux enseignantes ont très clairement annoncé leurs attentes mathématiques. Anna a utilisé une intrigue mathématique (situation impossible) pour amorcer la discussion sur les relations entre les données. Elle a dessiné un diagramme et elle a demandé aux élèves de l'interpréter. Clara a explicitement formulé ses attentes en précisant les étapes de travail que les élèves devaient suivre. La procédure de calcul n'a pas été discutée dans ces deux activités, puisque ce n'était pas l'enjeu. Ce choix pédagogique a envoyé le message suivant aux élèves : le plus important dans l'activité ce sont les relations entre les quantités et la représentation de ces relations. Enfin, les deux enseignantes ont porté une grande attention aux relations entre les quantités discutées, leur place dans la représentation et leur rôle dans l'histoire initiale. On peut conclure que les enseignantes ont attribué un grand rôle à la structure mathématique du problème

dans la résolution. Le contexte mathématique est dorénavant explicite pour elles et elles sont maintenant en mesure de guider les élèves à l'intérieur de ce contexte.

Discussion et conclusion

L'analyse des deux premières étapes de notre conversation continue avec nos enseignantes a clarifié les rôles spécifiques qu'elles attribuaient à l'activité de résolution de problèmes textuels ayant des structures additives. Nous avons pu catégoriser ces rôles selon les contextes socioculturel et mathématique. Ainsi, les rôles attribués dans le contexte socioculturel, soit de favoriser la socialisation et la motivation des élèves et d'offrir une possibilité de développer les habiletés langagières des élèves, se reflétaient dans leurs pratiques pédagogiques. Toutefois, l'utilisation des pratiques associées à ces rôles ne s'effectuait pas toujours au profit de l'analyse mathématique du problème. Ces enseignantes avaient de la difficulté à distinguer le contexte mathématique, car elles faisaient uniquement référence aux nombres présents dans le texte et ne voyaient pas clairement la structure mathématique du problème. Elles s'attachaient plutôt à l'habillage du problème, c'est-à-dire au contexte socioculturel. Ce qui pouvait camoufler le raisonnement mathématique que les élèves devaient mettre en œuvre dans l'activité et pouvait affecter négativement leur accès à la tâche. L'activité de formation le « jeu du capitaine » nous a aidées à créer un conflit cognitif et à mettre en lumière la problématique. Ce moment révélateur a permis aux enseignantes de s'ouvrir aux nouvelles idées et au changement proposé plus tard lors de la formation. Ce jeu de rôle a aidé également les participantes à développer un regard éclairé sur la structure mathématique du problème et à reconnaître le travail spécifique qu'elles doivent mettre en place pour aider leurs élèves à « mathématiser » le problème.

Nous avons réalisé qu'une seule activité est insuffisante pour changer profondément une pratique enseignante. Durant la formation, nous avons proposé aux participantes plusieurs autres activités, notamment une analyse de problèmes, la composition de problèmes pour leurs élèves, l'observation et l'analyse d'extraits d'enseignement tirés de vidéos tournées dans le cadre du projet. Nous avons aussi porté une grande attention à l'instrumentation didactique de nos participantes. Nous avons partagé avec elles plusieurs activités et scénarios didactiques pour mieux soutenir leur travail dans la classe. Nous pouvons constater que nos efforts ont porté leurs fruits. L'analyse des observations à la fin de l'année a montré un grand changement dans les pratiques d'enseignement. Les enseignantes portent maintenant une attention particulière au contexte mathématique du problème. Elles utilisent différentes activités pour amener leurs élèves à dégager et à discuter la structure mathématique du problème. L'intérêt porté au contexte socioculturel sert dorénavant à donner accès au contexte mathématique. Les enseignantes montrent ainsi qu'elles sont en mesure de créer des ponts entre les contextes afin d'amener les élèves en contextes mathématiques pour modéliser et résoudre des problèmes textuels ayant des structures additives.

Références bibliographiques

- BARROUILLET, P. et CAMOS, V. (2002). Savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences (version longue). Ministère français de la Recherche, programme Cognitique, école et sciences cognitives.
- BARTOLINI BUSSI, M. G., CANALINI, R. et FERRI, F. (2011). Towards cultural analysis of content: Problems with variation in primary school. In J. Novotná et M. Hana (dir.), *The Mathematical Knowledge Needed for Teaching in Elementary Schools CEMT11* (p. 9-21).
- CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FRANKE, M. L., LEVI, L. et EMPSON, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH : Heinemann.
- DAVYDOV, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction: Cognitive Perspective* (p. 225-238). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- IANNECE, D., MELLONE, M. et TORTORA, R. (2009). Counting vs. measuring: Reflections on number roots between epistemology and neuroscience. Dans M. Tzekaki et M. Kaldrimidou (dir.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, p. 209-216). Thessalonique, Grèce : PME.
- JACKSON, K. J. et COBB, P. A. (2010). Refining a vision of ambitious mathematics instruction to address issues of equity. Dans *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Denver, CO.
- JACKSON, K. J., SHAHAN, E. C., GIBBONS, L. K. et COBB, P. A. (2012). Launching complex tasks. Consider four important elements of setting up challenging mathematics problems to support all students' learning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(1), 24-29.
- LEIKIN, R. (2009). Multiple proof tasks. Teacher practice and teacher education. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *ICMI Study19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (p. 2-31 – 2-36). Taipei, Taiwan : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- MUKHOPADHYAY, S. et GREER, B. (2001). Modeling with purpose. Mathematics as a critical tool. Dans B. Atweh, H. Forgasz et B. Nebres (dir.), *Sociocultural Research on Mathematics Education: An International Perspective* (p. 295-311). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- NESHER, P., GREENO, J. G. et RILEY, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

- NUNES, T., BRYANT, P., EVANS, D., BELL, D. et BARROS, R. (2011). Teaching children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*, 371-388.
- PAPE, S. J. (2003). Compare word problems. Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology*, 28(3), 396-421.
- POLOTSKAIA, E. (2009). Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique. Dans *Problem Solving and Institutionalization of Knowledge. Proceedings of CIEAEM 61* (p. 178-183). Montréal : G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).
- POLOTSKAIA, E. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ*, L(1) (novembre), 12-28.
- RILEY, M. S., GREENO, J. G. et HELLER, J. L. (1984). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (dir.), *The Development of Mathematical Thinking* (p. 153-196). Orlando, FL : Academic Press.
- SAVARD, A. (2008). *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision*. Université Laval.
- SAVOIE-ZAJC, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 171-198). Sherbrooke : Éditions du CRP.
- SUN, X. et CHAN, K. (2009). Regenerate the proving experience: An attempt for improvement original theorem proof constructions of student teachers bby using spiral variation curriculum. Dans F.-L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *ICMI Study19 Conference. Proof and Proving in Mathematics Education* (p. 2-172 – 2-177) Taipei, Taiwan : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- THEVENOT, C. (2010). Arithmetic word problem solving. Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica*, 133(1), 90-95.
- VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (p. 39-59). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- XIN, Y. P., WILES, B. et LIN, Y.-Y. (2008). Teaching conceptual model-based word problem story grammar to enhance mathematics problem solving. *The Journal of Special Education*, 42(3), 163-178.

Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire?

Laurent THEIS

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Térèse ASSUDE

Université d'Aix-Marseille, France

Jeanette TAMBONE

Université d'Aix-Marseille, France

Marie-Pier MORIN

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Jeanne KOUDOGBO

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Patricia MARCHAND

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire?¹

Laurent THEIS

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Térésa ASSUDE

Université d'Aix-Marseille, France

Jeanette TAMBONE

Université d'Aix-Marseille, France

Marie-Pier MORIN

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Jeanne KOUDOGBO

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Patricia MARCHAND

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

-
1. Cette recherche a bénéficié du soutien financier du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (Programme de soutien à la recherche et au développement en adaptation scolaire et sociale, Theis *et al.*, 2012-2014) et du ministère des Relations internationales du Québec (64^e session de la Commission permanente de coopération franco-québécoise, Theis *et al.*, 2013-2014, n° 64-308).

RÉSUMÉ

La résolution de situations-problèmes mathématiques constitue un défi particulièrement grand pour les élèves en difficulté. Dans cet article, nous analysons un dispositif d'aide expérimenté par une enseignante du deuxième cycle du primaire. Ce dispositif consiste à mettre en place un système didactique auxiliaire (SDA), sous la forme d'une séance de travail avec les élèves qu'elle présume être en difficulté, deux jours avant la résolution d'une situation-problème en classe. À l'intérieur de ce SDA, l'enseignante explique la situation-problème et demande aux élèves d'anticiper ce qu'ils devront faire en classe deux jours plus tard. Nous avons dégagé quatre fonctions potentielles de ce dispositif: 1) une fonction chronogénétique, qui se manifesterait entre autres à travers le temps supplémentaire dont disposent les élèves en difficulté et la possibilité de connaître le problème avant qu'il ne soit traité en classe; 2) une fonction topogénétique, qui pourrait aider les élèves en difficulté à assumer leur position d'élève; 3) une fonction mésogénétique, qui permettrait aux élèves de rencontrer les paramètres de la situation-problème; et 4) une dialectique entre la suspension et l'anticipation de l'action. Nous présentons en quoi consistent ces fonctions potentielles et nous nous interrogeons sur les conditions de viabilité de ce système didactique auxiliaire.

ABSTRACT

Potential functions of an assistance system to support mathematical situation-problem solving among at-risk elementary-level students

Laurent THEIS

University of Sherbrooke, Québec, Canada

Térèse ASSUDE, Jeanette TAMBONE

University of Aix-Marseille, France

Marie-Pier MORIN, Jeanne KOUDOGBO, Patricia MARCHAND

University of Sherbrooke, Québec, Canada

Solving mathematical situation-problems is a major challenge for at-risk students. In this article, we analyze an assistance system tested by a second-cycle elementary school teacher. This system consists of setting up an auxiliary educational system (AES), in the form of a work session with students presumed to be having trouble, two days before the students are asked to solve a situation-problem in class. Within this AES, the teacher explains the situation-problem and asks the students to think about what they will do in class two days later. We identified four potential functions of this system. (1) A chronogenetic function, which manifests through the extra time given to at-risk students and the opportunity to get acquainted with the

problem before it comes up in the classroom, (2) A topogenetic function, which could help at-risk students take on their position as students, (3) a mesogenetic function, which gives them the opportunity to get acquainted with the parameters of the situation-problem and (4) a dialectic between the suspension and anticipation of action. We present what these potential functions involve and investigate the viability conditions of this auxiliary educational system.

RESUMEN

Cuales son funciones potenciales de un dispositivo de ayuda para apoyar la resolución de una situación – problema matemático entre alumnos con dificultades en primaria

Laurent THEIS

Universidad de Sherbrooke, Quebec, Canadá

Teresa ASSUDE, Jeanette TAMBONE

Universidad d'Aix-Marseille, Francia

Marie-Pier MORIN, Jeanne KOUDOGBO, Patricia MARCHAND

Universidad de Sherbrooke, Quebec, Canadá

La resolución de situaciones – problema matemático constituye un desafío particularmente importante para los alumnos con dificultades. En este artículo analizamos un dispositivo de ayuda experimentado por una maestra de segundo ciclo de primaria. El dispositivo consiste en la construcción de un sistema didáctico auxiliar (SDA), que adopta la forma de una sesión de trabajo con los alumnos potencialmente en dificultad, dos días antes de la resolución de una situación – problema en clase. Al interior del SDA, la maestra explica la situación – problema y pide a los alumnos de anticipar lo que deberán hacer en clase dos días más tarde. Hemos despejado cuatro funciones potenciales de dicho dispositivo. 1) Una función cronogenética que se manifiesta, entre otras cosas, a través del tiempo suplementario de que disponen los alumnos con dificultades y la posibilidad de familiarizarse con el problema antes de que sea tratado en clase; 2) una función topo-genética que puede ayudar a los alumnos con dificultades a asumir su posición de alumno; 3) una función meso-genética que les permitirá familiarizarse con los parámetros de la situación problema y 4) una dialéctica entre la suspensión y la anticipación de la acción. Explicamos en qué consisten esas funciones potenciales y nos interrogamos sobre las condiciones de viabilidad de ese sistema dialectico auxiliar.

Introduction

La compétence à résoudre des situations-problèmes mathématiques est au centre du programme de formation de l'école québécoise en mathématiques (MELS, 2003), tant au primaire qu'au secondaire. La résolution de problèmes y est alors à la fois objet d'apprentissage et moyen pédagogique pour apprendre les mathématiques. La résolution d'une situation-problème peut s'avérer un défi particulièrement grand pour des élèves qui présentent un retard ou qui ont des difficultés d'apprentissage pouvant les mener à l'échec.

De manière générale, sur le plan de la recherche, on peut distinguer deux grands courants en ce qui a trait à l'enseignement des mathématiques à des élèves ayant des difficultés d'apprentissage (Giroux, 2014). Un premier courant de recherche travaille dans une optique de remédiation aux difficultés des élèves. Un second courant aborde plutôt la problématique en tentant de développer le potentiel mathématique chez les élèves en difficulté (Mary, Squalli et Schmidt, 2008). Notre projet s'inscrit dans ce deuxième courant, puisque nous partons de l'hypothèse que le travail sur des situations-problèmes mathématiques complexes peut être bénéfique pour des élèves en difficulté. Mais quelles sont alors les conditions favorables à l'engagement des élèves en difficulté dans ces situations-problèmes et à l'apprentissage des concepts mathématiques visés? Telle est la question générale de la recherche-action dans laquelle s'inscrit le travail à l'origine de cet article.

Afin de déterminer quelles sont ces conditions, nous avons collaboré avec huit enseignantes d'une école primaire québécoise, publique et alternative, dont le projet pédagogique s'articule entre autres autour d'une approche par projets. Notre recherche est de nature collaborative, puisque ce n'est pas une recherche «sur» les enseignants, mais une recherche «avec» les enseignants. Dans le cadre du projet, nous avons accompagné les enseignantes participantes dans la planification de situations-problèmes mathématiques susceptibles de favoriser l'engagement et l'apprentissage des élèves en difficulté. Nous avons filmé les mises en œuvre par les enseignantes dans la classe. Par la suite, les enseignantes ont visionné l'enregistrement et sélectionné quelques passages qui leur paraissaient particulièrement significatifs au regard de la problématique des élèves en difficulté. Ces extraits ont été présentés et discutés à l'intérieur de séminaires avec l'ensemble des participants.

Au cours de l'expérimentation, une enseignante de troisième et quatrième année, Sylvie, a décidé de mettre en place une mesure particulière visant à favoriser l'engagement et l'apprentissage de neuf élèves en difficulté. Elle a ainsi proposé de prendre à part les élèves en difficulté deux jours avant la réalisation de la situation-problème en classe afin de leur expliquer la consigne. Nous nous sommes intéressés à la mise en œuvre de ce dispositif d'aide et à ses effets, mais dans le cadre de cet article nous explorerons surtout les fonctions potentielles d'un tel type de dispositif, que nous considérons comme un système didactique auxiliaire (SDA).

Émergence d'un prototype et éléments théoriques

Un dispositif d'aide aux élèves en difficulté dans la résolution de problèmes mathématiques a été mis en œuvre dans la classe à l'initiative de l'enseignante. À quels problèmes est-il venu répondre? Quelles conditions ont permis son émergence? Au regard de l'entretien réalisé auprès de l'enseignante que nous avons observée, nous pouvons apporter trois réponses à ces questions. La première concerne le projet de recherche. L'enseignante a décidé de réutiliser et d'adapter une situation-problème qu'elle avait proposée l'année précédente à d'autres élèves. En participant au projet de recherche, elle voulait apporter un changement important pour que les élèves puissent s'investir dans la tâche et ne pas rester «sans rien faire». La deuxième réponse est relative au problème professionnel de l'enseignante: celui de gérer la résolution de problèmes mathématiques en classe de manière générale et particulièrement pour les élèves en difficulté. La troisième réponse est d'ordre institutionnel. La présence d'une stagiaire dans la classe a permis à l'enseignante de partager la classe en deux groupes: un petit groupe d'élèves en difficulté avec qui elle va travailler et le groupe constitué par le reste de la classe pris en charge par la stagiaire.

Il nous paraît important, au regard de ces premiers éléments de réponses, de modéliser ce dispositif d'aide. Dans un premier temps, nous mettrons l'accent sur les structures d'un tel dispositif. Dans un deuxième temps, l'analyse nous permettra d'élargir notre éventail au-delà de ce que nous avons observé, non seulement en mettant l'accent sur les fonctions réelles, mais surtout en indiquant les fonctions potentielles qu'un tel dispositif pourrait avoir. Entre ces deux moments de modélisation, nous décrirons et analyserons quelques effets de ce dispositif tel qu'il a été mis en œuvre.

Un système principal, un système auxiliaire

Pour Chevallard (1995), l'espace de l'étude est constitué non seulement par les systèmes didactiques² principaux (les classes), mais aussi par un ensemble de systèmes didactiques auxiliaires (internes ou non à l'établissement) qui sont des aides à l'étude: par exemple, les systèmes d'aide aux devoirs.

L'enseignante, Sylvie, propose une réorganisation observable de l'étude dans un espace qui n'est pas celui de la classe. Elle regroupe temporairement des élèves qui sont en difficulté et réaménage ainsi l'espace de l'étude pour ces élèves dans un système que nous définirons comme auxiliaire (système didactique auxiliaire – SDA) de celui de la classe, qui est le système principal (système didactique principal – SDP) (Chevallard, 1995; Tambone, 2014). Un système didactique auxiliaire dépend du principal. Cette dépendance se manifeste d'abord par les enjeux de savoir du système didactique principal, qui pilotent aussi le système didactique auxiliaire. Contrairement à ce qu'on observe dans le système principal, dans les SDA mis en

2. On se réfère ici au système didactique (formé par le professeur, l'élève et le savoir) associé à la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) qui constitue la plus petite unité de signification de l'analyse didactique.

place après les SDP pour les élèves en difficulté, en principe, il n'y a pas d'avancement du temps didactique (Chevallard et Mercier, 1984), puisque les objets de savoir qui y sont travaillés sont anciens.

Par contre, souvent les élèves en difficulté qui fréquentent le ou les SDA doivent rétablir des rapports avec les objets de savoir qui ont été rencontrés dans le SDP, car ces rapports n'étaient pas conformes à ceux visés dans le SDP. Ainsi, la question des relations entre un SDP et le ou les SDA mis en place se pose : comment faire en sorte que ce que l'on fait dans le SDA puisse avoir un impact dans le SDP? Les travaux de Tambone (2014) montrent qu'un élève en difficulté, c'est un élève qui a perdu de sa « valeur scolaire » dans le SDP, c'est-à-dire qu'il n'arrive pas à prendre sa place d'élève. Surtout, cet élève n'est pas reconnu comme étant susceptible de faire avancer le temps didactique, car la valeur se gagne dans la classe en développant un rapport adéquat au temps didactique officiel. Il semble alors que le travail réalisé dans le SDA doit pouvoir renverser cet état de fait et faire en sorte que l'élève en difficulté puisse retrouver sa place d'élève en reprenant de la valeur scolaire dans le SDP.

Outre l'analyse des relations entre SDP et SDA en ce qui concerne la possibilité pour l'élève en difficulté de prendre de la valeur scolaire, notre outillage pour analyser et modéliser les fonctions de ce dispositif d'aide à la résolution de problèmes est constitué du triplet de genèses : topogenèse, chronogenèse et mésogenèse (Chevallard, 1992; Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000).

La topogenèse est relative aux différentes places et responsabilités que les sujets peuvent venir occuper dans un certain système didactique : par exemple, la position « professeur », la position « élève ». La place « élève en difficulté » n'est pas une place prévue au départ par l'institution, mais dans un SDA la place élève est occupée par des élèves qui sont souvent considérés comme étant en difficulté. Il nous semble important de distinguer topos, position et rôle (Assude *et al.*, 2014) : le topos est la place prévue par l'institution; la position est la manière dont un sujet occupe cette place; le rôle concerne les fonctions que le sujet assume dans une certaine place ou position.

La chronogenèse concerne les rapports entre les différentes temporalités existantes dans un système didactique : le temps didactique, qui est le temps du savoir; le temps d'enseignement, qui est le temps des différentes situations d'enseignement; le temps d'apprentissage des acteurs.

La mésogenèse est relative aux conditions dans lesquelles le sujet rencontre le savoir, notamment les milieux pour l'apprentissage. Il s'agit d'analyser notamment comment les différents milieux permettent la construction de la référence concernant le savoir dans le SDP et dans le SDA.

Ces points de vue nous permettront de préciser certains effets de la mise en œuvre du SDA (dispositif d'aide à la résolution de problèmes) dans le cadre du SDP. Ce dispositif est un prototype pour l'enseignante, au sens où c'est la première fois qu'elle l'implémente pour répondre à un certain nombre de problèmes. Il est aussi un prototype pour la recherche, et c'est pour cette raison que nous allons au-delà de l'observé en analysant les fonctions potentielles d'un tel type de dispositif.

Description et contraintes de la situation-problème présentée par l'enseignante

La situation-problème proposée par Sylvie à ces élèves est la suivante :

Figure 1. Consigne de la situation-problème proposée



Nom : _____

novembre 2012

Je décore mon casier

Tu dois décorer la porte de ton casier avec une œuvre que tu réaliseras lors du cours d'arts plastiques _____. Tu pourras débiter ton œuvre lorsque le support pour la réaliser sera prêt. Pour ce faire, tu dois **déterminer la taille du carton** sur lequel tu produiras ton chef-d'œuvre. Afin de mettre en valeur ta création, tu colleras celle-ci sur un carton de couleur qui devra **dépasser de 20 millimètres sur tous les côtés**. Chaque élève doit réaliser sa propre création.

Lors de la présentation orale de la consigne, le carton du dessous est présenté comme un cadre : « Il va y avoir un cadre autour. Vous savez ce que je veux dire? Ça, ça fait joli. Je veux que le cadre dépasse de 20 millimètres de chaque côté. » Par ailleurs, l'enseignante a ajouté une contrainte supplémentaire : elle spécifie explicitement que c'est elle-même qui coupera le carton³ avec la trancheuse et que les élèves devront rédiger un message qui lui permettra de comprendre comment elle doit couper ce carton. Il devient dès lors nécessaire que l'élève indique toutes les dimensions du carton et qu'il les exprime sous forme d'unités conventionnelles.

Une des caractéristiques de la situation-problème présentée est qu'elle est fortement ancrée dans la réalité. Les élèves sont amenés à déterminer les dimensions d'un dessin et de son cadre, qui sera réellement réalisé par la suite et apposé sur la porte de leur casier scolaire. Plusieurs contraintes associées au domaine du réel doivent alors être prises en compte par les élèves. D'un côté, le dessin ne devra pas recouvrir la poignée de la porte, ni les pentures de la porte. D'un autre côté, il est nécessaire pour chaque élève de négocier avec le partenaire avec qui il partage son

3. Dans les extraits vidéo, il reste souvent implicite si ce message doit concerner le petit carton, le grand carton, ou encore les deux. Lors de nos analyses, nous avons pu inférer que l'enseignante faisait référence la plupart du temps au petit carton – celui sur lequel l'élève a dessiné.

casier l'espace qui est dévolu à chacun. Ce sont là des éléments qui restent cependant implicites dans la consigne écrite. Par ailleurs, il n'y a aucune indication dans la consigne sur ce qui constitue une taille acceptable du dessin, ni sur la forme que celui-ci doit prendre.

L'un des enjeux principaux de la tâche pour l'élève est de constituer un modèle approprié de ce qui est attendu de lui : déterminer la taille du carton qui contient le dessin d'abord et trouver ensuite les dimensions du plus grand carton, sur lequel le dessin sera collé. Il devient dès lors nécessaire de comprendre que ce carton plus grand doit dépasser de 20 mm de tous les côtés – et pas juste d'un seul.

Parmi les difficultés conceptuelles auxquelles on pourrait s'attendre lors du travail sur cette situation-problème, citons d'abord les enjeux liés aux prises de mesures sur le cadre de porte et sur le dessin. Certaines difficultés sont également liées à l'unité de mesure choisie pour le cadre, à savoir 20 millimètres. Comme les millimètres ne sont pas facilement visibles et dénombrables sur la règle des élèves, ceux-ci devront probablement procéder à une conversion en centimètres.

Ce qui se passe dans le système didactique auxiliaire

1 - Synopsis

L'intervention de Sylvie auprès des neuf élèves en difficulté est d'une durée de 23 minutes. Elle se sépare en quatre étapes différentes que nous allons expliquer par la suite : 1) Explication de l'énoncé et révélation de contraintes liées au réel; 2) Travail individuel avec écriture, par les élèves, de ce qu'ils pensent devoir faire en classe; 3) Mise en commun des constats des élèves à travers un guidage par l'enseignante qui permet de faire apparaître différents objets de savoir; 4) Travail individuel avec écriture, par les élèves, de ce qu'ils vont faire en classe.

1.1 - Explication de la consigne (3 minutes)

Lors de l'explication de l'énoncé, Sylvie fait d'abord part aux élèves de l'intention qu'elle poursuit à travers ce dispositif auxiliaire.

J'ai décidé, [...] qu'aujourd'hui [...] je vous la présente avant [la situation-problème]. [...] Quand jeudi je vais en parler à tout le monde, vous allez savoir un peu plus ce qu'il faut faire.

Par la suite, elle explique oralement la consigne de la situation-problème. Ce faisant, elle dévoile tout de suite un certain nombre d'obstacles qui sont implicites dans la consigne écrite.

C'est vous qui décidez de la grandeur. Il faut que votre dessin entre sur la porte du casier, c'est logique. Vous avez vu à droite de votre porte, il y a aussi des pentures. Il y en a deux, une en haut, une en bas. Il ne faut pas que votre dessin soit là-dessus parce que ça va ouvrir mal, ça va fermer mal. Il ne faut pas que votre dessin soit sur la poignée non plus. [...] C'est pas deux élèves sur la même feuille, chaque élève a sa feuille.

D'une certaine façon, Sylvie pointe dès le départ un certain nombre de contraintes du réel, dont les élèves devront tenir compte par la suite. Toutefois, Sylvie introduit également une contrainte supplémentaire, qui, comme nous l'avons vu dans la description de la tâche, influence les stratégies possibles de résolution : au final, c'est l'enseignante qui découpe la feuille sur laquelle se trouve le dessin, ce qui oblige les élèves à lui indiquer les mesures dont elle a besoin pour le découpage. Nécessairement, ces mesures devront être conventionnelles pour que la communication puisse avoir lieu (même si la nature conventionnelle reste implicite). Par ailleurs, Sylvie précise aussi explicitement qu'il est nécessaire que la grande feuille dépasse de 20 mm de tous les côtés : « Je veux que le cadre dépasse de 20 millimètres de chaque côté. 20 millimètres en haut, en bas, à droite, à gauche. »

1.2 - Travail individuel (2 minutes)

Le travail individuel vise à ce que les élèves puissent anticiper ce qu'ils devront faire face à la situation-problème le jour du travail dans le SDP (en classe). Sylvie l'introduit ainsi :

« Écris ce que tu penses que tu vas devoir faire jeudi quand je vais dire OK, vas-y ! Va devant la porte de ton casier, puis décide la grandeur de ton carton. Qu'est-ce que tu vas devoir faire pour choisir la grandeur de ton carton ? »

Tout d'abord, il est important de noter que la demande orale donnée aux élèves par Sylvie d'écrire ce qu'ils pensent devoir faire n'est pas tout à fait identique à la consigne écrite qu'elle avait ajoutée sur le document distribué aux élèves (« Avant de te mettre en action, note ce que tu comprends de la situation »). Alors que la consigne écrite traduit une logique de compréhension, la consigne orale se situe davantage dans une logique d'action. Comme nous allons le voir plus tard, ce glissement posera des difficultés à certains élèves, puisqu'une question presque identique leur sera posée à nouveau vers la fin du SDA.

Par ailleurs, cette introduction du travail individuel révèle également un autre élément des attentes de Sylvie à l'égard des élèves : pour travailler sur le problème, il est nécessaire de se rendre physiquement au casier, qui se trouve dans le couloir. Par ailleurs, Sylvie insiste pour que les élèves disposent d'exactly deux minutes pour réfléchir individuellement. Plus tard, lors de l'entrevue post, elle justifiera cette précision par une volonté de ne pas insécuriser les élèves : « J'ai dit "Vous avez deux minutes" pour ne pas insécuriser ceux qui se disaient "c'est long deux minutes", et puis qui n'ont rien à faire. »

1.3 - Mise en commun en grand groupe (14 minutes)

Immédiatement après le travail individuel, Sylvie sollicite, tour à tour, différents élèves qui expliquent ce qu'ils pensent devoir faire. Il est à noter qu'il n'y a pas de mutualisation des constats faits par les élèves, puisqu'ils ne sont pas incités à partager entre eux leur compréhension de ce qu'ils doivent faire et que les échanges passent toujours par l'enseignante.

Sylvie construit alors un modèle de ce qui est attendu sur une feuille visible par les élèves, au fur et à mesure que ceux-ci parlent de ce qu'ils pensent devoir faire en fonction de ce qu'ils ont compris de la situation. En même temps, en construisant ce modèle pour les élèves, Sylvie prend en charge, à travers cet échange, cet élément (le modèle) qui aurait pu faire l'objet d'une construction dans le cadre de cette situation-problème.

1.4 - Deuxième période de réflexion individuelle (2 minutes)

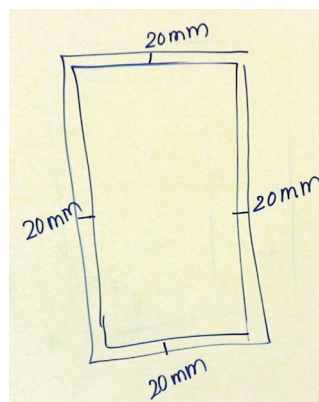
Dans le cadre d'une dernière période de réflexion individuelle à la fin du dispositif, Sylvie demande encore une fois aux élèves d'écrire: «Je te redonne encore 2 minutes, tu écris ce que tu penses que tu vas faire, tu écris ce que tu penses que tu vas faire.» Cette consigne est assez similaire, dans sa formulation, à celle donnée oralement lors de la première période de réflexion («Écris ce que tu penses que tu vas devoir faire jeudi quand je vais dire OK, vas-y!»). Pour les élèves, toutefois, il a été difficile de comprendre clairement les intentions de l'enseignante pour cette deuxième période de réflexion. Plusieurs d'entre eux n'ont rien écrit et Sylvie a fini par réviser ses exigences à la baisse: «Tu peux écrire "Je sais ce que j'aurai à faire".»

2 - Différences entre le fonctionnement du SDA et du SDP

Afin de bien comprendre la portée du SDA, il nous semble important de souligner deux différences majeures dans la façon dont apparaissent deux objets centraux dans la situation-problème: l'émergence du modèle de la situation ainsi que les contraintes liées au réel.

Tout d'abord, nous avons vu que dans le SDA le modèle de ce que les élèves ont à produire dans la situation-problème émerge à travers une discussion avec les élèves, qui passe par l'enseignante. Au fur et à mesure que la discussion progresse, Sylvie dessine sur une feuille le modèle de ce qui est demandé aux élèves. Lors de la réalisation en classe, ce modèle apparaît dès les premiers instants de la situation-problème, à travers l'explication de la consigne, puisque Sylvie en dessine une figure au tableau.

Figure 2. Figure dessinée par l'enseignante au début du SDP



Ce choix peut paraître étonnant, puisque notre description de la situation-problème a révélé que la construction du modèle constitue l'un des enjeux centraux de la situation-problème. Une piste d'explication de ce choix se trouve peut-être dans l'entrevue réalisée après le SDA, lorsque Sylvie révèle les intentions qu'elle poursuit à travers sa situation-problème: « [...] S'ils savent bien mesurer à la fin, je vais être contente. S'ils pensent d'ajouter le cadre... Ben ça je fais ça pour mes quatrième année plus que pour mes troisième, je fais ça le cadre pour mes quatrième année et les élèves forts. » Il ressort de cet extrait que la construction du modèle ne fait pas partie, pour Sylvie, des objets visés par la situation.

Comment expliquer alors qu'elle élabore ce modèle avec les élèves dans le SDA? Comme cette construction n'est pas centrale pour l'enseignante, on peut supposer que, dans le SDA, consacrer davantage de temps à construire le modèle en collaboration avec les élèves vise plutôt à aider les élèves en difficulté à mieux s'approprier le problème.

Ensuite, nous avons vu dans le SDA que Sylvie pointe, dès la présentation de la consigne, différentes contraintes de la situation liées au réel, dont la présence des pentures de porte et de la poignée et la nécessité d'avoir un dessin par élève. Or, lors de la réalisation de la situation-problème en classe, ces contraintes ne sont pas révélées d'emblée aux élèves. Lors de l'entrevue, Sylvie explique ce choix dans le SDA: «C'est une contrainte, qui est supplémentaire, qui est déjà trop difficile pour eux.» D'une certaine manière, Sylvie semble donc intervenir, en dévoilant certaines contraintes du réel, afin de permettre aux élèves de se centrer sur l'enjeu de la situation-problème qui, pour elle, est surtout la mesure. Cette façon d'intervenir est alors similaire à celle qu'elle utilise en individuel auprès des élèves en difficulté: «J'ai vraiment donné plus d'informations [dans le SDA]. Parce qu'en un-à-un avec les élèves en difficulté je fais toujours ça. J'enlève tout ce qui n'est pas obligatoire et puis je me dis: qu'est-ce que je veux qu'ils fassent?»

En même temps, comme il s'agit de la première fois que Sylvie a recours au dispositif d'aide décrit dans cet article, elle entretient encore des doutes importants sur cette manière d'intervenir: «J'ai oublié de le mentionner: souvent je me disais "Est-ce que là, je le dis ou pas?". Et puis si j'étais en un à un je le dirais. Et puis là je me disais: "Je suis comme en un à un avec neuf élèves en difficulté".»

En synthèse, nous pouvons dire que Sylvie a mis en place un système didactique auxiliaire dans lequel elle a recours à un guidage fort pour dégager les contraintes du problème et construire le modèle avec les élèves. En classe, par contre, elle fournit directement le modèle aux élèves, tout en utilisant un guidage faible pour ce qui est des contraintes du réel. Voyons maintenant comment nous pouvons modéliser ce dispositif au-delà de l'observé.

Fonctions potentielles du prototype

Nous avons identifié quatre fonctions potentielles de notre prototype.

Une première fonction est une fonction chronogénétique. Cette fonction peut se manifester de différentes manières. L'une de ces manières consiste à donner plus

de capital-temps aux élèves en difficulté. Le rythme du SDP étant considéré comme trop accéléré pour ces élèves, le fait de donner plus de temps peut leur permettre de s'engager plus facilement dans le problème. D'ailleurs, pour Sylvie, cet élément était déterminant, puisque, lors de l'entrevue post-action elle aborde l'enjeu du temps pour les élèves en difficulté.

Je pense qu'il y en a [des élèves en difficulté] qui s'expriment, alors qu'ils ne se seraient pas exprimés [en classe] parce que ça va juste trop vite. Là, vraiment, tout le monde [les élèves en difficulté] est au même rythme: ils ont le temps d'avoir une idée, de l'exprimer⁴.

Donner plus de temps est ce qu'on fait aussi lorsqu'on implémente un dispositif d'aide après avoir vu le problème dans la classe. Ainsi, ce qui fait la différence avec le prototype expérimenté ici, ce n'est pas le «plus de temps», c'est surtout la «rencontre avant» avec le problème. Cette «rencontre avant» permet à l'élève en difficulté de se trouver dans une «position haute» par rapport aux autres élèves. Cela ne signifie pas qu'il sait ce qu'il faut faire étant donné les choix effectués par l'enseignante, mais qu'il sait ce qui vient après, c'est-à-dire qu'il sait de quoi il s'agira.

Une deuxième fonction de ce prototype est une fonction topogénétique. Le travail de Tambone (2014) montre que les élèves en difficulté n'arrivent pas à prendre une position d'élève dans le SDP, car ils ne sont pas reconnus comme ayant un rôle dans l'avancement du temps didactique. Ils sont même vus comme étant ceux qui retardent le temps didactique et leur valeur scolaire est minime. Le prototype vise à redonner une place à l'élève en difficulté en le rétablissant dans son topos d'élève et dans son rôle chronogénétique.

D'ailleurs, nous avons été en mesure d'observer, lors de la résolution de la situation-problème en classe, certaines manifestations de cette fonction topogénétique. Ainsi, Alice, une élève qui a participé au SDA et qui, aux dires de Sylvie, n'intervient pas souvent en classe d'habitude, a pu clairement assumer sa position d'élève à deux reprises en classe. Tout d'abord, lors de l'explication de la consigne à l'ensemble de la classe, Alice a demandé la parole à Sylvie: «Est-ce que je peux dire ce qu'on a fait? Parce que moi...» Sylvie décide toutefois de l'interrompre tout de suite, probablement parce que l'intervention d'Alice se situe juste avant un premier moment d'échange en équipes sur ce que les élèves ont compris de la tâche et l'explication qu'Alice voulait fournir aurait risqué de court-circuiter ce moment. Ensuite, lors de l'échange en équipes, on peut observer Alice, qui, à un moment donné, s'adresse à son coéquipier, tout en lui montrant, par des gestes, ce qu'il faut faire dans la tâche. Lorsque nous avons montré ces deux extraits de la bande vidéo à l'enseignante lors d'une rencontre de retour sur l'activité, elle nous a confirmé que ces comportements sont plutôt atypiques pour Alice.

Une troisième fonction est une fonction mésogénétique. En rencontrant la situation-problème avant, les élèves ne savent pas forcément comment ils doivent faire ce

4. Nous sommes conscients dans ce contexte qu'au-delà du temps supplémentaire dont disposaient les élèves, il est possible que le regroupement en petits groupes ait également eu une influence.

qu'ils sont censés faire, mais ils savent de quoi il s'agit. Ce prototype permet aux élèves de rencontrer les règles définitoires⁵ du jeu (Sensevy, 2007) ou, dans ce cas-ci, de la situation-problème qu'ils sont censés résoudre, mais qu'ils ne résolvent pas réellement encore. Cette fonction mésogénétique du prototype est difficile à tenir et à gérer par un enseignant : comment anticiper les actions à entreprendre pour déterminer les mesures des deux cartons alors qu'on ne peut pas le faire? Les élèves en difficulté dans la résolution de problèmes rencontrent un milieu où sont explicitées les règles définitoires, mais aussi certains implicites qui concernent les contraintes du réel et les contraintes de la situation-problème : par exemple, il faut tenir compte du cadre ou de la poignée. Cette rétention apparaît comme un élément important pour dire juste ce qu'il faut pour ne pas empêcher le déroulement de la résolution de la situation-problème dans le SDP.

Une quatrième fonction est celle de la dialectique entre la suspension et l'anticipation de l'action. En mettant l'accent sur la définition de la situation-problème, sur l'explicitation des implicites de certaines contraintes, sur la mise par écrit de ce qu'on doit faire sans le faire, l'enseignante cherche à créer les conditions pour que l'élève en difficulté puisse entrer plus facilement dans le milieu du problème dans le cadre du SDP. Cette suspension de l'action est alors conçue comme un moyen pour que les élèves puissent anticiper ce qu'ils doivent faire sans que le rythme soit trop accéléré⁶.

Ces fonctions ne sont pas indépendantes et doivent être pensées dans leurs interrelations. L'existence de ces différentes fonctions dans un dispositif d'aide n'est pas forcément synonyme d'un apprentissage, mais plutôt de création de conditions pour que l'élève rentre dans l'étude (et ne soit pas face à la page blanche). Le prototype tel qu'on pourrait l'envisager à partir de ce qui a été mis en œuvre est un simulateur chrono-topo-mésogénétique qui permet de simuler le jeu (ou la situation-problème) sans le jouer complètement, qui permet aux élèves en difficulté de prendre une position d'élève en lien avec l'avancement du temps didactique et l'anticipation de l'action.

Discussion

Que retenir finalement du dispositif mis en place par Sylvie, sous forme de prototype? Tout d'abord, le dispositif correspond aux caractéristiques d'un système didactique auxiliaire. D'une part, ce qui se fait dans le SDA est en lien direct avec ce qui se fait dans la classe. D'autre part, dans le SDA observé, le temps didactique semble ne pas avancer, puisque ce que Sylvie demande aux élèves de faire est d'anticiper les actions qu'ils vont entreprendre en classe pour résoudre la situation-problème proposée⁷.

-
5. Il s'agit là des règles qui permettent de définir le problème et de jouer au jeu auquel on est censé jouer. Les règles stratégiques, quant à elles, permettent de trouver des stratégies gagnantes pour le jeu.
 6. Nous ne posons pas dans cet article le problème des rapports entre action et anticipation de l'action.
 7. Il nous semble nécessaire ici de rappeler que, pour Sylvie, le savoir visé par cette situation-problème est celui de la mesure. C'est bien par rapport à cet enjeu « officiel » que le temps didactique n'avance pas. Bien sûr, l'analyse a priori de la situation-problème a également révélé un enjeu de modélisation de la situation, mais cet enjeu est celui identifié par les chercheurs et non celui poursuivi par l'enseignante.

Nous avons pu constater que, pour ne pas perturber le fonctionnement du SDP, il est impératif que les élèves du SDA ne s'avancent pas au-delà d'un travail sur les règles définitives de la situation-problème. D'une certaine façon, l'intervention en classe d'Alice, qui voulait expliquer aux autres élèves ce qu'il faut faire dans la situation, illustre bien cette tension. Si la mise en place du SDA a permis à Alice d'assumer sa position d'élève dans cette situation, Sylvie n'avait néanmoins d'autre choix que de couper court à son intervention, afin de ne pas révéler tout de suite ces règles à l'ensemble de la classe⁸. On peut s'imaginer que ces effets seraient encore plus difficiles à gérer pour l'enseignante de la classe si les élèves participant au SDA s'avançaient plus loin dans la résolution du problème.

Par ailleurs, comme les élèves du SDA sont uniquement dans l'anticipation de ce qu'il faut faire dans le SDP, il n'y a pas encore de rétroaction possible du milieu. Il devient alors difficile de confronter au réel les élèves qui partent sur une piste erronée. Une stratégie possible serait de faire échanger les élèves entre eux, pour confronter leurs points de vue, mais Sylvie n'y a pas recours. Elle prend plutôt en charge la discussion avec les élèves, qui passe toujours par elle, ce qui lui permet d'agir elle-même sur les interventions des élèves. Dans notre observation, les difficultés qui résultent de l'absence de rétroaction sont probablement accrues par la nature de la situation-problème proposée. Comme le milieu proposé y est plutôt flou et fortement ancré dans le réel, Sylvie n'a probablement pas d'autre choix que de donner directement aux élèves certaines contraintes du réel dont ils auraient pu se rendre compte s'ils avaient pu entrer dans la situation, comme la présence des pentures, de la poignée de la porte, etc.

On peut se demander si ces différences avec le SDP constituent des conditions de viabilité du SDA et, notamment, si l'absence d'avancement du temps didactique représente un élément clé à cet égard. En outre, les fonctions que nous avons dégagées du SDA mis en place par l'enseignante pour venir en aide aux élèves en difficulté restent pour l'instant au niveau théorique. D'autres expérimentations seront nécessaires pour pouvoir en vérifier la portée réelle auprès des élèves en difficulté.

Références bibliographiques

ASSUDE, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study. Integration of CABRI in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 183-203.

8. Il est important de noter que, même si l'enseignante a dû couper court à l'intervention d'Alice, l'élève n'en montre pas moins qu'elle sait de quoi il s'agit et que son questionnement reste centré sur la tâche.

- ASSUDE, T., PEREZ, J.-M., SUAUI, G., TAMBONE, J. et VÉRILLON, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(1), 33-57.
- CHEVALLARD, Y. (1985/1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-111.
- CHEVALLARD, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noïrfalisse et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.
- CHEVALLARD, Y. et MERCIER, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille : IREM.
- GIROUX, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, L. DeBlois, H. Squalli et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (p. 11-44). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- MARY, C., SQUALLI, H. et SCHMIDT, S. (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. Dans J. Myre Bisaillon et N. Rousseau (dir.), *Les jeunes en grande difficulté. Contextes d'intervention favorables* (p. 169-192). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT DU QUÉBEC (MELS) (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire*. Québec : Gouvernement du Québec.
- SENSEVY, G., MERCIER, A. et SCHUBAUER-LEONI, M. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(3), 263-304.
- SENSEVY, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves* (p. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- TAMBONE, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation – Pour l'Ère nouvelle*, 47, 51-71.

Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe

Isabelle DEMONTY

Université de Liège, Liège, Belgique

Annick FAGNANT

Université de Liège, Liège, Belgique

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe

Isabelle DEMONTY

Université de Liège, Liège, Belgique

Annick FAGNANT

Université de Liège, Liège, Belgique

RÉSUMÉ

Cet article s'intéresse aux tâches complexes proposées en Belgique francophone en guise d'exemples d'outils permettant d'évaluer les compétences en mathématiques des élèves en fin d'enseignement primaire (6^e année). En confrontant les résultats de deux recherches portant sur une même tâche complexe (observation d'élèves lors de la résolution de la tâche en petits groupes, d'une part, et observation de situations d'enseignement menées en groupe-classe, d'autre part), le présent article tente d'apporter un éclairage aux questionnements suivants : 1) Quelles exploitations collectives les enseignants proposent-ils pour aider les élèves ? 2) Prennent-ils en compte les erreurs et les difficultés des élèves ? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces ? Globalement, si les résultats montrent que les enseignants s'appuient partiellement sur les difficultés des élèves et sur les démarches qui se sont avérées les plus efficaces lors l'observation des élèves en situation autonome de résolution, ils révèlent également un guidage directif de la part des enseignants et un implicite quant aux raisons guidant certains choix de démarches plutôt que d'autres risquant *in fine* de ne pas suffisamment soutenir le développement des compétences visées.

ABSTRACT

Complex tasks in mathematics – students’ difficulties and open classroom discussion

Isabelle DEMONTY
University of Liège, Liège, Belgium

Annick FAGNANT
University of Liège, Liège, Belgium

This article focuses on complex tasks proposed in the French community of Belgium as examples of tools to assess the mathematical skills of students at the end of elementary school (grade 6). By comparing the results of two studies based on the same complex tasks (observation of students while solving the problem in small groups, and observation of teaching situations conducted in a class), the article attempts to shed light on the following questions: (a) What open classroom discussion do the teachers suggest to help the students? (b) Do they take their errors and difficulties into account? and (c) do they base their interventions on the students’ most effective approaches? Overall, although the results show that the teachers base their approaches partly on the students’ difficulties and use the approaches that proved most effective when students solved problems independently, they also reveal a directional guidance on the part of teachers, and an implicit as to why to choose certain approaches over others, a practice which may ultimately undermine the development of targeted skills.

RESUMEN

Tareas complejas en matemáticas: dificultades de los alumnos y explotaciones colectivas en clase

Isabelle DEMONTY
Universidad de Lieja, Lieja, Bélgica

Annick FAGNANT
Universidad de Lieja, Lieja, Bélgica

Este artículo se interesa a las tareas complejas propuestas en Bélgica francófona en guisa de ejemplos de herramientas para evaluar las competencias en matemáticas de los alumnos al terminar la educación primaria (6º grado). Al confrontar los resultados de dos investigaciones cuyo objeto era la misma tarea compleja (observación de los alumnos durante la resolución de una tarea en grupo pequeño, por una parte, y observación de situaciones de enseñanza realizadas en grupo, por otra parte), el

presente artículo trata de clarificar las cuestiones siguientes: a) ¿qué explotaciones colectivas propone los maestros para ayudar a los alumnos?; b) ¿toman en cuenta sus errores y dificultades?; y c) ¿se apoyan en procedimientos eficaces? De manera global, si los resultados muestran que los maestros se apoyan parcialmente en las dificultades de los alumnos y en procedimientos que han revelado ser efectivos durante la observación de los alumnos en situación autónoma de resolución, también muestran una orientación directiva de parte de los maestros y otra implícita en lo que se refiere a las razones que orientan la elección de ciertos procedimientos más que de otros, que corren el riesgo, *in fine*, de no obrar suficientemente en el desarrollo de las habilidades definidas.

Introduction

Depuis quelques années, le concept de compétence est au cœur des programmes d'études de nombreux pays européens (Eurydice, 2012). On attend aujourd'hui des élèves qu'ils puissent mobiliser et intégrer des ressources externes (documents authentiques et variés, comme des plans, des tarifs...) et des ressources internes (les différents types de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes dont doivent disposer les individus) pour faire face à des situations complexes et inédites (Beckers, 2012). Plusieurs recherches ont mis en évidence les difficultés importantes rencontrées par les élèves face à ces tâches complexes, particulièrement en mathématiques pour le domaine qui nous occupe (Carette, 2007; Crahay et Detheux, 2005; Fagnant, Demonty, Dierendonck, Dupont et Marcoux, 2014).

Cet article s'intéresse aux tâches complexes que propose le système scolaire belge francophone en guise d'exemples d'outils permettant d'évaluer les compétences des élèves à la fin de l'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans). En mathématiques, ces tâches complexes se présentent sous la forme de problèmes comportant plusieurs étapes de résolution et nécessitant la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel et De Corte, 2008)¹. Même si elles ont été conçues au départ pour s'insérer dans un modèle d'évaluation diagnostique «en phases» (comme le préconisent Rey, Carette, Defrance et Kahn, 2006), ces tâches complexes peuvent également être utilisées en classe dans des situations d'enseignement/apprentissage portant sur la résolution de problèmes. Lors de telles séances, les enseignants ont un rôle important à jouer pour soutenir les élèves dans

1. Verschaffel et De Corte (2008) envisagent la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique impliquant la construction d'une représentation du problème (ou d'un modèle de situation); la modélisation de cette représentation sous une forme mathématique (ou la construction d'un modèle mathématique); la mise en œuvre de ce modèle en vue d'obtenir un résultat mathématique qui devra être interprété et évalué en référence au modèle de situation, avant d'être communiqué de façon à répondre à la question posée. Ce modèle n'est pas linéaire et de nombreux allers-retours entre les différentes étapes peuvent être envisagés tout au long du processus de résolution.

le développement des compétences requises pour appréhender et résoudre efficacement ce type de tâches. Mais comment s'y prennent-ils pour exploiter en classe ces tâches complexes de mathématiques? Plus précisément: 1) Quelles exploitations collectives proposent-ils pour aider les élèves? 2) Prennent-ils en compte leurs erreurs et leurs difficultés? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces?

Pour tenter d'éclairer ces questionnements, cet article se propose de mettre en perspective les résultats de deux études portant sur une même tâche complexe de mathématiques. La première étude (Demonty, Dupont et Fagnant, 2014) cherchait à mieux comprendre la façon dont les élèves appréhendent la tâche complexe, les démarches qu'ils adoptent et les principales difficultés qu'ils rencontrent. S'appuyant sur une observation de situations d'enseignement/apprentissage en classe, la deuxième étude (Fagnant, Dupont et Demonty, à paraître) cherchait à observer la manière dont les enseignants exploitent ce type de tâches complexes au cours des moments collectifs en classe.

Éclairage théorique

S'inscrivant dans la logique des questionnements soulevés en introduction, l'éclairage théorique abordera succinctement deux volets: le premier s'intéresse à l'exploitation collective des tâches complexes, alors que le second aborde la question de la prise en compte des démarches et des difficultés des élèves.

Exploitation collective des tâches complexes

Une étude réalisée par Ginsburg, Cooke, Leinwand et Pollock (2005) dans 12 pays ayant participé à PISA et TIMSS en 2003 montre qu'une démarche classique d'enseignement consiste à procéder à une analyse collective des problèmes proposés aux élèves avant de laisser ces derniers gérer les aspects plus techniques de la résolution. Les auteurs ont constaté que les élèves les plus faibles éprouvent des difficultés spécifiques à mettre en œuvre des processus cognitifs de haut niveau (capacité à raisonner ou à résoudre des problèmes) et ils font l'hypothèse que ces déficiences seraient en partie attribuables aux opportunités limitées qui leur sont offertes de réaliser ce type de tâches dans les cours de mathématiques.

D'après Monnier et Amade-Escot (2009), cette tendance serait particulièrement marquée dans les classes accueillant des élèves faibles où «les gestes professoraux se traduisent par un éclatement des contenus enseignés sous forme de microtâches très individualisées et une absence de phase d'institutionnalisation des savoirs» (p. 60). Ainsi, même si les tâches proposées devraient faire appel à des demandes cognitives élevées, les enseignants ont tendance à les décomposer en sous-problèmes permettant aux élèves d'appliquer les procédures requises, sans que le type de raisonnement à mettre en œuvre fasse réellement l'objet d'un enseignement explicite.

Julo (1996, 2002) va dans le même sens en mettant en doute l'efficacité de telles pratiques d'enseignement. En orientant les démarches de résolution par une décomposition des tâches complexes ou en palliant les difficultés ponctuelles par des

consignes spécifiques, on pense le problème à la place de l'élève et on le conduit à ne travailler que les aspects procéduraux de la démarche. Or, les difficultés des élèves se situent en amont, et ce sont des aides centrées sur l'élaboration d'une représentation pertinente du problème qu'il conviendrait plutôt d'envisager.

Ces divers constats rejoignent largement ceux mis en évidence par les sociologues français, notamment par les travaux de Bonnery (2007, 2009) et la notion de « cadrage », à la fois trop large et trop étroit, qu'il a largement documentée dans diverses disciplines scolaires. L'auteur a ainsi montré comment l'enseignant, par des aides ponctuelles fournies aux élèves pour qu'ils accomplissent les tâches proposées, parvient à donner à chacun (aux élèves et à lui-même) l'illusion d'une construction collective de connaissances (ou du développement de compétences), alors qu'en réalité certains élèves sont complètement « passés à côté » des enjeux de l'apprentissage visé. Certains dispositifs didactiques se caractériseraient ainsi par un cadrage à la fois « trop large », entretenant un certain flou sur les objectifs poursuivis, sur les démarches à mettre en œuvre et sur les savoirs en jeu, et « trop étroit », donnant des consignes qui conduisent à décomposer les tâches complexes en mini-tâches, permettant ainsi aux élèves de dépasser des difficultés ponctuelles, mais ne les amenant pas *in fine* à cerner les enjeux cognitifs de la tâche globale.

Prise en compte des démarches et des difficultés des élèves

Comme on l'a vu, une analyse collective du problème risque de faire passer les élèves à côté des enjeux de l'apprentissage. Dans le même ordre d'idées, des « aides » trop ciblées sur la réalisation de la tâche, ou trop « guidées » par les étapes à réaliser pour la résoudre, risquent de permettre aux élèves de « réussir » la tâche sans pour autant contribuer au développement des compétences visées. Mais, que ce soit pour organiser cette analyse collective, pour penser ces « aides ponctuelles » ou, mieux encore, pour pouvoir réagir adéquatement aux balbutiements de démarches proposées par les élèves, comment les enseignants procèdent-ils ?

Pour œuvrer au développement des compétences visées, il est important que les enseignants disposent de connaissances leur permettant d'anticiper les compréhensions, mais aussi les incompréhensions spécifiques de leurs élèves. Or, traditionnellement, la formation initiale des enseignants vise le développement d'une base de connaissances solide et de capacités pédagogiques générales, sorte de « bon sens » qui les amène à réagir de manière appropriée lorsqu'ils sont devant une classe (Sliver, 2009). C'est dans cette perspective que sont pensées bon nombre de formations d'enseignants qui consistent à amener les futurs enseignants à avoir une bonne maîtrise des contenus tout en les plongeant rapidement dans les classes pour qu'ils effectuent leurs stages d'enseignement.

En comparant les connaissances possédées par des enseignants de mathématiques d'écoles américaines et chinoises, Silver (2009) met en évidence que les enseignants compétents maîtrisent les contenus mathématiques et qu'ils exploitent ceux-ci avec leurs élèves en étant capables d'envisager les « demandes cognitives » que l'acquisition de ceux-ci nécessite. Cet éventail de connaissances (qui s'approche de la notion de *pedagogical content knowledge* mise en évidence par Schulman dans

les années 1980; voir notamment Crahay *et al.*, 2010; van der Sandt, 2007) recouvre trois facettes interreliées : 1) les aspects clés liés au contenu (les idées mathématiques centrales recouvertes par le contenu ainsi que leurs domaines de validité); 2) les obstacles cognitifs que les élèves risquent de rencontrer dans les situations mobilisant ces contenus (communément appelées erreurs, incompréhensions des élèves); 3) les points charnières, c'est-à-dire les stratégies d'enseignement ou les activités susceptibles d'aider les élèves à dépasser les obstacles cognitifs pour pouvoir comprendre en profondeur les aspects clés des idées mathématiques ainsi que leur domaine de validité. C'est essentiellement à la troisième facette que nous allons nous intéresser ici, en cherchant à repérer non seulement les erreurs des élèves et les difficultés qu'ils rencontrent, mais en identifiant aussi les démarches qui semblent s'avérer les plus efficaces.

Éclairage empirique appuyé sur une confrontation entre deux études exploratoires

Pour éclairer les divers questionnements soulevés dans cet article, nous appuyons nos propos sur deux études qui impliquaient l'exploitation de la même tâche complexe avec des élèves de dernière année de l'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans). Dans les deux études, la tâche complexe a été proposée aux élèves comme une situation cible au sens de Roegiers (2007), c'est-à-dire une situation problème demandant aux élèves de réinvestir et d'intégrer un ensemble de concepts et de procédures censés avoir été préalablement acquis.

Cette partie est organisée en trois volets : une présentation de la tâche complexe exploitée, quelques résultats issus de la première étude permettant de pointer les erreurs, difficultés et démarches efficaces face à la réalisation de cette tâche complexe et, enfin, quelques résultats d'une seconde étude permettant d'éclairer certains aspects des pratiques des enseignants. Les deux études se déroulent dans des classes différentes. L'approche méthodologique adoptée dans cet article consiste donc à considérer que les difficultés et les démarches les plus fréquemment observées dans la première étude sont significatives et permettent dès lors d'éclairer les résultats observés dans la seconde étude.

La tâche complexe exploitée

La tâche complexe intitulée «Côté cour, côté jardin» a été choisie parmi les exemples d'outils d'évaluation proposés sur le site du ministère de l'Enseignement pour les élèves de ce niveau scolaire. Elle se trouve en annexe 1.

Dans cette tâche, il s'agit de calculer le coût total de l'aménagement d'un espace et de vérifier si l'association de parents dispose d'assez d'argent pour réaliser ce projet. La tâche comporte quatre sous-problèmes, assez aisément identifiables dans le descriptif de la tâche grâce aux quatre tirets permettant de les énoncer un à un. Chaque sous-problème constitue en lui-même une tâche relativement complexe qui nécessite de mobiliser plusieurs savoirs et savoir-faire mathématiques et d'exploiter

des ressources externes (un plan du jardin à aménager – ce plan est présenté à l'échelle 1:100) et un tarif permettant de calculer le prix du matériel de jardin; les élèves peuvent aussi avoir recours à leurs instruments de mesure habituels et à une calculatrice).

Dans le cadre de cet article, nous nous focaliserons sur les sous-problèmes 2 et 3, parce que ceux-ci ont posé d'importantes difficultés aux élèves lors de l'étude 2 et qu'ils ont donné naissance à une variété de démarches de résolution.

Le **sous-problème 2** se présente comme un problème d'intervalle où il s'agit de déterminer le nombre de forsythias à prévoir, sachant qu'il faut les planter en ligne et les espacer d'un mètre, le tout sur une distance de 10 mètres, sachant qu'il faut placer une fleur à chaque extrémité. Parmi les divers documents dont ils disposent, les élèves doivent sélectionner les informations reprises dans la figure 1.

Figure 1. Informations nécessaires à la résolution du sous-problème 2

Extrait du plan	Extrait du tarif	Extrait de l'énoncé
 Remarque: Aucune mesure n'apparaissait sur le plan. Nous avons indiqué les mesures pour faciliter la compréhension des démarches de résolution possibles.	Forsythia: 6,95 € la pièce	Calculer le coût du travail suivant: Planter une rangée de forsythias qui doivent être espacés d'un mètre l'un de l'autre.

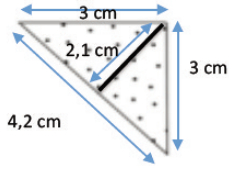
La première démarche consiste à placer une règle graduée sur le parterre représenté sur le plan et à indiquer par un point la position de chaque plante sur le plan (faire un point à chaque centimètre), sachant que les première et dernière plantes sont déjà représentées sur le plan. Il s'agit ensuite de compter le nombre de plantes représentées (11).

La deuxième démarche envisagée se base sur le mesurage de la distance entre les deux plantes situées aux extrémités (soit 10 cm). Elle conduit à déduire qu'il faudra planter 11 fleurs, puisqu'il y en a une à chaque extrémité.

Dans les deux cas, une fois le nombre de forsythias trouvé, il s'agit de déterminer le prix, sachant qu'un forsythia coûte 6,95 €.

Le **sous-problème 3** demande de planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire, puis de calculer le prix de l'achat nécessaire, sachant que ces fleurs sont vendues en paquets de 15. Le terrain à couvrir a la forme d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent chacun 3 m. Les élèves doivent s'appuyer sur les informations reprises dans la figure 2.

Figure 2². Informations nécessaires à la résolution du sous-problème 3

Extrait du plan	Extrait du tarif	Extrait de l'énoncé
 Remarque : Aucune mesure n'apparaissait sur le plan. Nous avons indiqué les mesures pour faciliter la compréhension des démarches de résolution possibles.	Narcisse : 5,95 € le paquet de 15	Calculer le coût du travail suivant : Planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire.

Pour résoudre ce problème, il s'agit d'abord de calculer l'aire du triangle (soit en pavant la surface par des carrés d'un mètre de côté, soit en appliquant la formule de calcul d'aire du triangle). Pour appliquer le calcul d'aire, les élèves doivent choisir une base (soit un côté de l'angle droit, soit l'hypoténuse) et une hauteur correspondant à la base choisie. Selon le choix effectué, ils seront confrontés à des mesures entières (3 cm pour la base et pour la hauteur dans le premier cas), soit à des mesures décimales risquant d'engendrer une certaine imprécision de la mesure. Dans le premier cas, on obtient une aire de $4,5 \text{ cm}^2$; dans le second cas, l'aire obtenue est comprise entre 4 cm^2 et $4,4 \text{ cm}^2$. Il faut ensuite prévoir de planter 20 fleurs par mètre carré de terrain et donc multiplier l'aire trouvée à l'étape précédente par 20 pour déterminer le nombre de fleurs à acheter. Les fleurs se vendent en paquets de 15 pièces. Si les élèves ont obtenu une aire égale à $4,5 \text{ m}^2$, la règle de 3 mène au constat qu'il faut acheter 90 pièces, donc 6 paquets. En revanche, si les élèves ont obtenu une aire égale à $4,3 \text{ m}^2$ par exemple, il faut qu'ils réalisent une étape supplémentaire pour acheter un nombre entier de paquets de fleurs (en prenant en compte le fait que les fleurs se vendent par paquets de 15, il faut acheter 6 paquets, donc 90 narcisses, même si on n'a besoin que de 86 fleurs par exemple).

L'observation des démarches et des difficultés des élèves face à la tâche complexe

La première recherche visait à appréhender les démarches des élèves face à la résolution de cette tâche à travers l'observation d'une activité de résolution en petits groupes. Vingt et un groupes de trois élèves ont été observés; les échanges ont été filmés et les interactions ont été retranscrites (pour en savoir plus, voir Demonty *et al.*, 2014).

Pour le **sous-problème 2**, le calcul du coût n'a posé aucune difficulté aux élèves (les fleurs se vendant à la pièce), mais la détermination du nombre de fleurs à acheter a été problématique pour plusieurs. Les deux erreurs les plus fréquentes consistaient à mesurer la longueur du parterre, puis à considérer qu'il fallait 10 fleurs (puisque la

- On s'attend ici à ce que les élèves reconnaissent visuellement le triangle comme étant un triangle rectangle. Le problème ne demande pas que les élèves reconnaissent qu'il est isocèle, mais ils peuvent éventuellement procéder à une mesure des deux côtés de l'angle droit et ainsi constater que les côtés ont la même longueur.

longueur séparant les deux extrémités était de 10 mètres et qu'il convenait d'espacer les fleurs d'un mètre) ou 12 fleurs (car la longueur totale du parterre où ces fleurs allaient être plantées était de 12 mètres ou parce qu'ils ont mesuré 10 cm, puis ajouté 2 fleurs aux extrémités)³.

Un constat intéressant est que les groupes ne sont parvenus à une solution correcte que lorsque la démarche de dénombrement avait été envisagée (en dessinant un rond à chaque centimètre environ ou en utilisant une latte pour marquer ces centimètres); les démarches s'appuyant uniquement sur un mesurage de la distance séparant les deux extrémités, sans procéder à un dénombrement du nombre de fleurs, ont conduit tous les groupes à une solution erronée (généralement en s'appuyant sur un achat de 10, voire de 12 fleurs).

Pour le **sous-problème 3**, deux difficultés principales sont apparues : la nécessité de calculer l'aire du parterre (plusieurs groupes ont pensé qu'il fallait prévoir 20 narcisses en tout et non par mètre carré), et le calcul du coût des narcisses qui étaient vendus par paquets de 15.

Dans ce problème impliquant un calcul de l'aire d'un triangle isocèle rectangle, la prise même des mesures sur la figure semble déterminante pour obtenir la réponse correcte : les groupes qui ont choisi comme base du triangle l'hypoténuse ont obtenu une réponse incorrecte dans dix cas sur onze. À l'inverse, ceux qui ont choisi un côté de l'angle droit comme base ou qui ont procédé à un dénombrement ont, dans tous les cas, obtenu la réponse correcte. Ce contraste de réussite s'explique par le fait que seule la seconde procédure aboutissait à une commande de 90 narcisses, qui est un multiple de 15. Comme indiqué dans l'analyse *a priori*, une fois ce nombre trouvé, il suffisait de commander les 6 caisses de 15, sans devoir se poser la question d'arrondir la commande de fleurs au multiple de 15 supérieur. L'observation des élèves a révélé une autre procédure efficace : certains élèves ont calculé le prix « théorique » de 20 narcisses en appliquant une règle proportionnelle au départ du prix des 15 narcisses, puis ont multiplié ce prix par l'aire du triangle. Avec une aire de 4,5 m², correspondant exactement à 20 narcisses, cette procédure fonctionne, mais avec une autre valeur de l'aire elle conduit à transgresser la contrainte de l'achat en caisses de 15.

L'observation des démarches mises en œuvre par des enseignants lors de l'exploitation de la même tâche complexe dans d'autres classes

La seconde étude s'est déroulée dans cinq classes du même niveau scolaire. Les enseignants avaient reçu la tâche complexe et étaient invités à exploiter celle-ci avec leurs élèves en toute liberté quant à la méthodologie qu'ils souhaitaient utiliser. Dans toutes les classes, les enseignants ont procédé à une phase de mise au travail consistant à présenter la tâche complexe aux élèves, suivie d'une phase de résolution,

3. D'autres erreurs moins fréquentes ont consisté à estimer qu'il fallait 5 fleurs (en considérant que la distance d'un mètre à prévoir entre deux fleurs correspondait en réalité à un mètre de chaque côté de la fleur – $10 \div 2 = 5$), 6 fleurs (par un raisonnement analogue au précédent au départ d'une longueur de 12 mètres – $12 \div 2 = 6$ – ou par l'ajout d'une fleur, puisqu'il fallait prévoir une fleur à chaque extrémité – $10 \div 2 = 5$ et $5 + 1 = 6$) ou même 4 fleurs (en plaçant une fleur tous les deux mètres et en ne prenant en compte aucune des deux extrémités – les fleurs étant placées à 2, 4, 6 et 8 m).

organisée en individuel ou en petits groupes, puis d'une phase de mise en commun / correction, à nouveau collective (pour en savoir plus, voir Fagnant *et al.*, à paraître).

Dans le présent article, nous allons nous centrer sur les deux moments collectifs en vue d'éclairer les questionnements mentionnés en introduction de l'article.

Lors de l'**étape de mise au travail**, les interventions des enseignants se situent à un niveau très général et portent sur la présentation de la tâche globale (lecture des consignes), sur l'exploitation des documents mis à disposition (présentation du plan et du tarif), voire sur les modalités du travail de groupe (importance de justifier ses démarches auprès des autres élèves). Un enseignant a procédé d'emblée à une analyse collective de chacun des sous-problèmes en guidant les élèves vers l'identification des éléments importants du problème et en les orientant vers les stratégies à mettre en œuvre pour résoudre les sous-problèmes: pour le sous-problème 2, l'enseignant amène les élèves à trouver les données pertinentes à prendre en compte (on doit placer une fleur à chaque extrémité et espacer les fleurs d'un mètre; il faut également veiller à respecter l'échelle du plan). Pour le sous-problème 3, il mentionne une donnée essentielle du problème (planter 20 fleurs par mètre carré) et précise qu'il faut calculer l'aire d'un triangle en rappelant la formule à utiliser.

Un deuxième enseignant a procédé de façon un peu similaire, mais en interrompant cette fois la phase de travail après un premier temps de recherche, l'ayant conduit à constater que de nombreux élèves semblaient en difficulté. Comme dans la classe mentionnée précédemment, l'enseignant guide l'analyse du problème et oriente les démarches de résolution à mettre en œuvre: pour le sous-problème 2, il attire explicitement l'attention des élèves sur une stratégie efficace en leur demandant de dénombrer les fleurs; pour le sous-problème 3, il les informe qu'il va falloir calculer l'aire du triangle, sans toutefois orienter la réflexion sur les longueurs à mesurer.

Lors de la mise en commun / correction, les interventions concernant les sous-problèmes sont généralement très directives et se résument globalement à guider les élèves vers la démarche de résolution que l'enseignant semble avoir lui-même choisie de privilégier. Un extrait de verbatim, en annexe 2, permet d'illustrer nos propos.

Pour le sous-problème 2, les enseignants valorisent généralement la démarche de dénombrement pour trouver le nombre de fleurs à planter, alors qu'ils sont plusieurs à ne pas accepter un dénombrement pour le calcul de l'aire dans le sous-problème 3 (démarche sans doute jugée trop informelle à ce niveau d'enseignement, l'application de formules ayant fait l'objet d'un enseignement explicite). Lorsqu'ils orientent le calcul de l'aire dans le sous-problème 3, les enseignants conduisent généralement les élèves à s'appuyer sur la mesure des deux côtés de l'angle droit. Les motivations qui les incitent à privilégier cette démarche restent néanmoins du domaine de l'implicite dans toutes les classes. Pourtant, ces choix ont des implications non seulement quant à la résolution du problème, mais aussi quant aux objets de discussion en classe. Ainsi, la procédure de calcul d'aire privilégiée empêche le questionnement relatif à l'arrondi du nombre de caisses à l'unité supérieure. Le guidage de la suite de la résolution conduit aussi à calculer le nombre de narcisses nécessaires avant de calculer le nombre de caisses à acheter. Cela permet d'éviter la

démarche consistant à calculer d'abord le prix de 20 narcisses (sans tenir compte de la contrainte d'une vente en caisse de 15) pour le multiplier ensuite par l'aire du triangle. Mais cela empêche aussi de discuter de l'adéquation ou non de cette façon de procéder en référence aux contraintes de l'énoncé.

Discussion et conclusion

S'appuyant sur une tâche complexe de mathématiques élaborée pour des élèves de fin d'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans), l'article s'est intéressé à la façon dont les tâches complexes sont exploitées en classe par les enseignants : 1) Quelles exploitations collectives les enseignants proposent-ils pour aider les élèves? 2) Prennent-ils en compte les erreurs et les difficultés des élèves? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces?

Globalement, les interventions collectives des enseignants anticipent certaines difficultés rencontrées par les élèves face aux sous-problèmes à résoudre (p. ex. : trouver le nombre de narcisses dans le sous-problème 2 et calculer l'aire du triangle dans le sous-problème 3). Il semble aussi que ces interventions orientent les élèves vers les stratégies qui s'avèrent les plus efficaces pour résoudre les problèmes posés. Ces « guidages » se font souvent de manière très directive (incitation à utiliser la stratégie de dénombrement pour le sous-problème 2 et à calculer l'aire en s'appuyant sur la mesure des côtés de l'angle droit pour le sous-problème 3 par exemple), mais sans explicitation des raisons ayant présidé à la valorisation de cette démarche plutôt que d'une autre. Les exploitations collectives étant très guidées par l'enseignant, que ce soit au moment de la mise au travail ou lors de la mise en commun, cette façon de procéder ne conduit toutefois pas à la prise en compte de toutes les erreurs et difficultés spécifiques rencontrées dans la première étude (par exemple, l'orientation vers le dénombrement pour le sous-problème 2 conduit à éviter certaines erreurs, tout comme l'orientation vers le calcul de l'aire appuyé sur les mesures des côtés de l'angle droit permet d'éviter de rencontrer le problème d'approximation de mesures ainsi que celui nécessitant d'arrondir la commande à l'unité supérieure).

Au vu de ces résultats, il semble que l'on peut considérer que les enseignants s'appuient partiellement sur les difficultés rencontrées par les élèves et qu'ils parviennent globalement à les orienter vers des démarches efficaces. S'ils disposent sans doute d'une certaine capacité à envisager les obstacles cognitifs que les élèves rencontrent dans la résolution de cette tâche complexe (Silver, 2009), leur façon de procéder empêche aussi que certaines erreurs ou difficultés potentielles ne soient érigées en objet de discussion. Or, les observations centrées sur les stratégies des élèves recueillies dans la première recherche nous amènent à penser que ces débats auraient été déterminants pour permettre à bon nombre d'élèves d'aboutir, à partir de leurs stratégies spontanées, à des résolutions plus efficaces des problèmes proposés.

Par ailleurs, à l'instar de Ginsburg *et al.* (2005) ou de Bonnery (2007, 2009), nous avons aussi constaté un guidage assez directif et des opportunités limitées offertes aux élèves pour qu'ils identifient eux-mêmes les nœuds spécifiques de difficultés

relatifs aux différentes étapes de la tâche à résoudre. Dans certains cas, les interventions des enseignants ont lieu avant même que les difficultés ne se posent réellement aux élèves, puisque la tâche est déjà très orientée dès qu'elle leur est présentée (analyse collective du but, exploitation des documents mis à disposition, décomposition en sous-problèmes... et même parfois analyse détaillée de chacun d'eux). Lors de la phase de correction, la plupart des interventions des enseignants orientent les élèves vers la démarche que l'enseignant a choisi de privilégier.

Le guidage directif des enseignants pourrait traduire leur souci d'amener les élèves à s'appropriier le « cadrage instruit » que nécessite la résolution de telles tâches complexes (Carette, 2007). Cette façon de procéder pourrait avoir une certaine efficacité dans la mesure où le guidage est bien orienté vers les démarches efficaces. Toutefois, ce type d'intervention ne faisant généralement l'objet d'aucune justification (en tout cas dans les moments de travail collectif), on peut craindre que sa portée soit limitée. Pour paraphraser les propos de Cèbe, Pelgrims et Martinet (2009), cela reviendrait à ne pas enseigner explicitement à tous ce que l'école exige de tous, « tout en exigeant de tous ceux qu'elle accueille qu'ils aient ce qu'elle ne leur donne pas » (p. 48). On peut en effet craindre que les interventions des enseignants révèlent un guidage à la fois (trop) directif dans la résolution de ces tâches et (trop) implicite quant aux raisons guidant certains choix de démarches plutôt que d'autres. Pour le dire autrement, on pourrait évoquer un cadrage à la fois « trop étroit », conduisant à décomposer le problème en microtâches requérant simplement d'appliquer les procédures identifiées, et « trop large », peu susceptible d'aider les élèves à cerner les enjeux réels des apprentissages et risquant *in fine* de ne pas suffisamment œuvrer au développement des compétences visées (Bonnery, 2007 et 2009).

L'approche proposée dans cet article, consistant à confronter les résultats de deux recherches menées dans des classes différentes au départ d'une même tâche complexe, comporte nécessairement certaines limites, liées notamment à l'hypothèse de départ selon laquelle les difficultés et les démarches observées dans l'étude 1 étaient suffisamment significatives pour éclairer les quelques résultats exploités dans l'étude 2. D'autres erreurs, difficultés et démarches sont sans doute apparues dans les classes observées, mais force est de constater que celles-ci semblent avoir peu influencé la gestion des phases collectives par les enseignants, puisque ceux-ci les « dirigent » en suivant la logique de leur propre démarche de résolution plutôt qu'en partant d'une confrontation des démarches et des solutions des élèves. Évidemment, nos analyses n'ont porté que sur les moments collectifs, et c'est sans doute durant la phase de travail individuel ou en petits groupes que les interactions enseignant-élèves ont pu porter davantage sur des démarches et des erreurs spécifiques. Cette problématique pourrait aussi être éclairée en interrogeant les enseignants sur leur analyse *a priori* de l'activité, puis sur la façon dont ils estiment *a posteriori* avoir pu gérer leur séquence en prenant en compte les erreurs, difficultés et démarches initialement identifiées, mais aussi celles rencontrées dans « le feu de l'action » et nécessitant une régulation en direct. Pour rappel, la tâche complexe proposée est issue d'un outil d'évaluation de compétences en trois phases, inspiré du modèle de Rey *et al.* (2006). Dans le cadre de la présente recherche, seule la tâche complexe a été

proposée aux enseignants, mais il serait intéressant de voir, dans une recherche future, si une consultation du dossier enseignant, comprenant notamment les critères de correction de la tâche complexe, mais aussi les deux autres phases de l'outil, pourrait ou non influencer leurs pratiques didactiques.

Finalement, que l'on adhère ou non à l'approche par compétences dont les tâches complexes analysées dans cet article découlent en droite ligne, il est intéressant de constater que, dans la situation analysée, les difficultés principales des élèves ne se situent pas tant dans la gestion de la complexité elle-même (exploitation des ressources externes, décomposition de la tâche complexe en sous-problèmes...) que dans la résolution de chacun des sous-problèmes singuliers. Autrement dit, on retombe alors sur une question qui a déjà fait couler beaucoup d'encre et qui porte sur les différentes façons d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes (Demonty, Fagnant et Lejong, 2004; Verschaffel et De Corte, 2008), sans leur proposer des aides qui court-circuitent le travail nécessaire à la construction d'une représentation efficace du problème (Julo, 2002) et sans leur enseigner des méthodes générales dépouillées des contenus auxquels elles s'appliquent (Houdement, 2003).

Références bibliographiques

- BECKERS, J. (2012). Introduction et mise en perspective théorique. Dans J. Beckers, J. Crinon et G. Simons (dir.), *Approche par compétences et réduction des inégalités d'apprentissage entre élèves. De l'analyse des situations scolaires à la formation des enseignants* (p. 7-16). Bruxelles : De Boeck.
- BONNERY, S. (2007). *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficulté et dispositifs pédagogiques*. Paris : La Dispute.
- BONNERY, S. (2009). Scénarisation des dispositifs pédagogiques et inégalités d'apprentissage. *Revue française de pédagogie*, 167, 13-23.
- CARETTE, V. (2007). L'évaluation au service de la gestion des paradoxes liés à la notion de compétence. *Mesure et évaluation en éducation*, 30(2), 49-71.
- CARETTE, V. (2008, 2011). Les caractéristiques des enseignants efficaces en question. *Revue française de pédagogie*, 162, 81-93. [Article republié dans *Éducation et Formation*, e-296, 2011, p. 71-83].
- CÈBE, S., PELGRIMS, G. et MARTINET, C. (2009). Quelles pratiques d'enseignement pour les élèves en difficulté d'apprentissage? Dans G. Chapelle et M. Crahay (dir.), *Réussir à apprendre* (p. 47-57). Paris : Presses universitaires de France.
- CRAHAY, M. et DETHEUX, M. (2005). L'évaluation des compétences, une entreprise impossible? Résolution de problèmes complexes et maîtrise de procédures mathématiques. *Mesure et évaluation en éducation*, 28(1), 57-78.

- CRAHAY, M., WANLIN, P., ISAIEVA, E. et LADURON, I. (2010). Fonctions, structuration et évolution des croyances (et connaissances) des enseignants. Une revue critique de la littérature anglo-saxonne. Note de synthèse. *Revue française de pédagogie*, 172, 85-129.
- DEMONTY, I., DUPONT, V. et FAGNANT, A. (2014). Analyse des régulations interactives entre élèves lors de la résolution d'un problème mathématique en groupe. *Les cahiers des sciences de l'éducation*, 36, 175-214.
- DEMONTY, I., FAGNANT, A. et LEJONG, M. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème! Outil méthodologique à l'usage des enseignants (8-10 ans)*. Bruxelles : De Boeck.
- EURYDICE (2012). *Developing Key Competences at School in Europe: Challenges and Opportunities for Policy*. Eurydice Report. Luxembourg : Publications Office of the European Union.
- FAGNANT, A., DEMONTY, I., DIERENDONCK, C., DUPONT, V. et MARCOUX, G. (2014). Résolution de tâches complexes, évaluation « en phases » et compétence en mathématiques. Dans C. Dierendonck, B. Rey et E. Loarer (dir.), *L'évaluation des compétences en milieu scolaire et en milieu professionnel* (pp. 179-189). Bruxelles : De Boeck.
- FAGNANT, A., DUPONT, V. et DEMONTY, I. (à paraître). Régulation interactive et résolution de tâches complexes en mathématiques. Dans L. Mottier Lopez et W. Tessaro (dir.) *Le jugement professionnel, au cœur de l'évaluation et de la régulation des apprentissages des élèves*. Ouvrage soumis pour publication suite au colloque REE, Genève, septembre 2013.
- GINSBURG, A., COOKE, G., LEINWAND, S. et POLLOCK, E. (2005). *Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from 2003 TIMSS and PISA*. Washington, DC : American Institute for Research.
- HOUEMENT, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, 7-23.
- JULO, J. (1996). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N*, 69, 31-52.
- MONNIER, N. et AMADE-ESCOT, C. (2009). L'activité didactique empêchée : un outil d'intelligibilité de la pratique enseignante en milieu difficile. *Revue française de pédagogie*, 168, 59-73.
- REY, B., CARETTE, V., Defrance, A. et KAHN, S. (2006). *Les compétences à l'école. Apprentissage et évaluation* (2^e éd.). Bruxelles : De Boeck.
- ROEGIER, X. (2007). *Des situations pour intégrer les acquis scolaires*. Bruxelles : De Boeck.

- SILVER, E. A. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: What might we learn? *The International Journal of Mathematics Education*, 41, 827-832.
- VAN DER SANDT, S. (2007). Research framework on mathematics teacher behaviour: Koehler and Grouws' framework revisited. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 3(4), 343-350.
- VERSCHAFFEL, L. et DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (2^e éd.) (p. 153-176). Bruxelles : De Boeck.

Annexe 1

La tâche complexe « Côté cour, côté jardin », proposée par la Commission d'outils d'évaluation (<http://www.enseignement.be>)

Côté cour, côté jardin

Contexte

Des élèves projettent d'aménager l'espace autour du bac à sable.
Sur les conseils d'un papajardinier, ils décident de :

- planter 20 lavandes dans un parterre de forme carrée,
- planter une rangée de forsythias qui doivent être espacés d'un mètre l'un de l'autre.

Pour t'aider, les deux trous des extrémités ont été représentés.

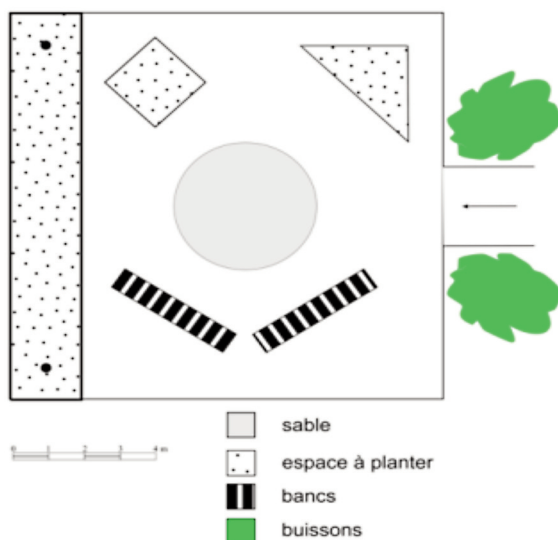
- planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire,
- placer autour du bac à sable une bordure en bois qui dépasse du sol de 20 cm.

L'association des parents de l'école offre un budget de 185 € pour ce projet.

Tâche

Vérifie si la somme offerte par l'association des parents est suffisante pour réaliser le projet.
Justifie ta réponse par des calculs.

Plan de l'espace à aménager



Extrait du tarif

Articles	Prix
Arbustes	
Amélanchier	11,80 € la pièce
Deutzia	6,50 € la pièce
Forsythia	6,95 € la pièce
Salix	9,95 € la pièce
Spirée	7,00 € la pièce
Fleurs	
Amaryllis	11,95 € la pièce
Gaillarde	10,95 € le paquet de 5
Iris	5,95 € le paquet de 25
Lavande	4,95 € le carton de 5
Lis	8,50 € le paquet de 8
Narcisse	5,95 € le paquet de 15
CEillet	8,85 € le paquet de 6

Rouleaux de bordure en bois



L : 180 cm H : 30cm

4,70 €

Annexe 2

Illustration d'un « guidage directif » lors de la mise en commun

Guidage directif visant à orienter la démarche de résolution vers une démarche informelle (sous-problème 2) ou vers une démarche plus formelle (sous-problème 3)	
Sous-problème 2 P. « Qu'est-ce qu'on doit faire? » E1. « Planter une rangée de forsythias. » P. « Allez, vas-y... Planter une rangée de forsythias qui doivent être?... espacés?... » E1. « D'un mètre l'un de l'autre et y'en aura deux. » P. « Pout t'aider, les deux trous des extrémités ont été représentés, alors montre un peu » [...] Donc, quand vous lisez un plan, l'espace à aménager, il faut essayer de le comprendre. Pour comprendre, on regarde la...? » Plusieurs élèves: « Légende » [...] P. « Combien on peut mettre de forsythias entre ces deux points-là en sachant que... Regarde l'échelle. Lis un peu l'échelle. » [...] « Il y a un mètre d'écart et c'est combien de cm? » [...] <i>[S'ensuit une explication sur l'échelle et une incitation à mesurer.]</i> « Tu as combien entre les deux trous? » E3. « 10 » P. « 10 [...] donc, de là à là, tu as 10 cm. Donc ici tu vas en mettre combien? On va voir... 1 cm, j'en mets 1, je suis à...? » E. « 3 cm » P. « 2 cm, c'est chaque fois 1 cm entre, hein? Je suis à 2. Donc 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et là, c'est le trou. J'en ai mis combien entre? J'en ai 9, mais plus les deux des extrémités, ça fait? Onze trous. Ok? J'ai 11 trous. Qui avait trouvé 11 trous? Donc, tous ceux qui n'ont pas trouvé 11 trous, ils n'ont pas la bonne réponse. Donc je dois planter combien de forsythias? 11, 11 forsythias à planter.... »	Sous-problème 3 P. « Oui, je vois ce que tu veux dire. Donc, tu as ton triangle. Je vais le quadriller. C'est ça? » E. « Oui. » P. « Mais le problème c'est que, si je fais un quadrillage, ça c'est un carré? [...] Le problème, c'est que vous utilisez des choses qui sont non conventionnelles. Donc, qu'est-ce que je pourrais utiliser pour savoir la surface de tout cela? » <i>Aucun élève ne réagit.</i> P. « Regarde. Quand je t'avais donné un carré ou un rectangle et que je t'ai donné l'aire. Soit tu t'amuses à me dire que un carré c'est 1 cm² et tu les comptes. Soit tu appliques une formule. Et c'est quoi la formule? [...] » E. « Base fois hauteur. » <i>S'ensuit une explication relative au calcul de l'aire d'un rectangle...</i> P. « Je vais faire la même chose pour le triangle. C'est quoi l'aire du triangle? » E2. « Longueur fois largeur. » P. « Tu n'utilises pas les bons termes. Je suis d'accord que c'est la longueur multipliée par la largeur, divisé par 2 parce qu'il y a deux triangles dans un rectangle, mais ce ne sont pas les bons termes. » E3. « Base fois hauteur, divisé par 2. » P. « Base fois hauteur, divisé par 2, parce que dans un triangle il y a une base et une hauteur; il n'y a pas de longueur, ni de largeur... » <i>Tous les élèves n'ont pas pris les mêmes mesures dans le triangle (certains ont pris l'hypoténuse comme base) et les précisions de mesure varient ... Un élève propose une base de 4,3 cm...</i> P. « 4,3? <i>[Il mesure.]</i> C'est 4,2. On va prendre cette base-là et cette hauteur-là pour avoir plus facilement [les deux côtés de l'angle droit]: ça fait 3 et 3. » <i>P explique alors son calcul (3*3/2), puis propose de le transformer en tenant compte de l'échelle.</i>

Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer

Mathieu GAUTHIER

District scolaire francophone Sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Revue scientifique virtuelle publiée par l'Association canadienne d'éducation de langue française dont la mission est la suivante : « Par la réflexion et l'action de son réseau pancanadien, l'ACELF exerce son leadership en éducation pour renforcer la vitalité des communautés francophones ».

Directrice de la publication
Chantal Lainey, ACELF

Présidente du comité de rédaction
Lucie DeBlois,
Université Laval

Comité de rédaction
Sylvie Blain,
Université de Moncton
Lucie DeBlois,
Université Laval
Nadia Rousseau,
Université du Québec à Trois-Rivières
Jules Rocque,
Université de Saint-Boniface
Mariette Thérberge,
Université d'Ottawa

Directeur général de l'ACELF
Richard Lacombe

Conception graphique et montage
Claude Baillargeon

Responsable du site Internet
Étienne Ferron-Forget

Diffusion Érudit
www.erudit.org

Les textes signés n'engagent que la responsabilité de leurs auteures et auteurs, lesquels en assument également la révision linguistique. De plus, afin d'attester leur recevabilité, au regard des exigences du milieu universitaire, tous les textes sont arbitrés, c'est-à-dire soumis à des pairs, selon une procédure déjà convenue.

La revue *Éducation et francophonie* est publiée deux fois l'an grâce à l'appui financier du ministère du Patrimoine canadien et du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

acelf

ASSOCIATION
CANADIENNE
D'ÉDUCATION DE
LANGUE FRANÇAISE

265, rue de la Couronne, bureau 303
Québec (Québec) G1K 6E1
Téléphone : 418 681-4661
Télécopieur : 418 681-3389
Courriel : info@acelf.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales
du Québec
Bibliothèque et Archives du Canada
ISSN 1916-8659 (En ligne)
ISSN 0849-1089 (Imprimé)

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

Rédacteurs invités :

Viktor FREIMAN et Annie SAVARD

Liminaire

- 1** **Résolution de problèmes en mathématiques**
Viktor FREIMAN, Université de Moncton
Annie SAVARD, Université McGill
- 7** **La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants**
Caroline LAJOIE, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Nadine BEDNARZ, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 24** **De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève**
Jean-François MAHEUX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal, Québec, Canada
- 44** **Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs**
Jean-Philippe BÉLANGER, Université Laval, Québec, Canada
Lucie DEBLOIS, Université Laval, Québec, Canada
Viktor FREIMAN, Université de Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada
- 64** **Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM**
Nathalie SAYAC, Université Paris-Est Créteil, France
Nadine GRAPIN, Université Paris-Est Créteil, France
- 84** **La résolution de problèmes à l'école primaire : s'agit-il de « trouver la bonne formule » ?**
Lalina COULANGE, ESPE d'Aquitaine, France
Carine REYDY, ESPE d'Aquitaine, France
- 100** **La résolution de problèmes écrits d'arithmétique : le rôle déterminant des inférences**
Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 120** **Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires**
Miranda RIOUX, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
Audrey Ann COUTURE, Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada
- 138** **Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire**
Annie SAVARD, Université McGill, Québec, Canada
Elena POLOTSKAIA, Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada
- 158** **Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ?**
Laurent THEIS, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Térèse ASSUDE, Université d'Aix-Marseille, France
Jeanette TAMBONE, Université d'Aix-Marseille, France
Marie-Pier MORIN, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Jeanne KOUDOGBO, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
Patricia MARCHAND, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- 173** **Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe**
Isabelle DEMONTY, Université de Liège, Belgique
Annick FAGNANT, Université de Liège, Belgique
- 190** **Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer**
Mathieu GAUTHIER, District scolaire francophone sud, Nouveau-Brunswick, Canada

Perceptions des élèves du secondaire par rapport à la résolution de problèmes en algèbre à l'aide d'un logiciel dynamique et la stratégie Prédire – investiguer – expliquer

Mathieu GAUTHIER

District scolaire francophone Sud, Nouveau-Brunswick, Canada

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'un projet d'innovation en apprentissage mis en œuvre par le ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, nous avons créé et expérimenté quatre scénarios d'enseignement-apprentissage de l'algèbre en 12^e année du secondaire, touchant particulièrement le concept de paramètres de fonctions introduit à l'aide d'une stratégie Prédire-Investiguer-Expliquer et d'un logiciel dynamique, dans un contexte de résolution de problèmes. Cette recherche exploratoire de type développement adopte une approche de design d'un produit éducatif ou, encore, de création d'activités d'apprentissage particulières (Loiselle, 2001). Les données qualitatives ont été recueillies auprès des élèves, à l'aide d'un questionnaire et d'entrevues semi-dirigées.

D'une part, le contexte de vie réelle et l'aspect visuel d'une investigation dynamique et interactive à l'aide d'un logiciel semblent avoir rendu l'apprentissage des fonctions plus signifiant pour l'élève. Ils ont permis à l'élève de voir des liens entre différentes représentations mathématiques, le rendant plus autonome dans les démarches de résolution de problèmes. D'autre part, ce changement de pratique conduit possiblement à une rupture du contrat didactique, ce qui a déstabilisé certains élèves qui cherchaient, alors, plus de clarté et d'encadrement de la part de l'enseignant. Cette complexification du processus de résolution de problèmes appelle donc une étude plus approfondie de cette pratique innovante afin de déterminer son impact réel sur les apprentissages des élèves et la dynamique de la salle de classe.

ABSTRACT

Perceptions of high school students on algebra problem solving, using dynamic software and the Predict-Investigate-Explain strategy

Mathieu GAUTHIER

Southern Francophone School District, New Brunswick, Canada

As part of a learning innovation project initiated by the New Brunswick Ministry of Education, we created and tested four algebra teaching-learning scenarios at the grade 12 level, which touched particularly on the concept of function parameters introduced using a Predict-Observe-Explain strategy and dynamic software in a problem solving context. This development-type exploratory research adopts a design approach for an educational product, or the creation of specific learning activities (Loiselle, 2001). Qualitative data were collected from students through a questionnaire and semi-structured interviews.

On one hand, the real-life context and the visual aspect of a dynamic and interactive investigation using software seems to have made the learning of functions more significant for the student, and provided a chance to see connections between different mathematical representations, making the students more independent in the problem solving process. On the other hand, this change in practice may have led to a breakdown in the didactic contract, which destabilized some of the students, who were looking for more clarification and supervision from the teacher. This innovative practice of complexifying the problem-solving process deserves further study to determine its real impact on student learning and classroom dynamics.

RESUMEN

Percepciones de los alumnos de secundaria relacionadas con la resolución de problemas en álgebra con la ayuda de un software dinámico y de la estrategia predecir - investigar – explicar

Mathieu GAUTHIER

Distrito escolar francófono Sur, Nueva-Brunswick, Canadá

En el cuadro de un proyecto de innovación en aprendizaje iniciado por el Ministerio de Educación de Nueva-Brunswick, creamos y experimentamos cuatro escenarios de enseñanza-aprendizaje del álgebra para el 12º año de secundaria, abordando particularmente el concepto parámetros de funciones, el cual había sido introducido gracias a una estrategia Predecir-Investigar-Explicar y con la ayuda de un software dinámico, en un contexto de resolución de problemas. Esta investigación exploratoria, de tipo desarrollo, adoptó el enfoque de diseño de un producto educativo o de creación de actividades de aprendizaje particulares (Loiselle, 2001). Los datos cualitativos fueron colectados entre los alumnos a través de un cuestionario y de entrevistas semi-dirigidas.

Por una parte, el contexto realista y el aspecto visual de una investigación dinámica e interactiva con la ayuda de un software parece haber convertido el aprendizaje de las funciones más significativo para el alumno y en una posibilidad de visualizar los lazos entre diferentes representaciones matemáticas, volviéndolos más autónomos en el procedimiento de resolución de problemas. Por otra parte, dicho cambio de prácticas condujo posiblemente a una ruptura del contrato didáctico, lo que desestabilizó a ciertos alumnos que pedían más explicaciones y más encuadramiento de la parte del maestro. Esta complicación del proceso de resolución de problemas merece el estudio más profundo de esta práctica innovadora con el fin de determinar su impacto real sobre los aprendizajes de los alumnos y sobre la dinámica en el salón de clases.

Introduction

Depuis des années, nous observons que les élèves du secondaire éprouvent des difficultés en algèbre, en général, et en apprentissage de paramètres de fonctions, en particulier. Lorsque les élèves se mettent à étudier différents types de fonctions et différentes formes de leurs représentations pour comprendre le rôle de chaque paramètre, ils voient peu de liens entre les règles et les graphiques de fonctions. De plus, ils ne perçoivent pas l'utilité de cette matière qui leur paraît trop abstraite et « déconnectée » de la vie réelle, ce qui les rend encore moins motivés dans les apprentissages

et diminue leur taux de réussite des épreuves d'évaluation pour ce volet du programme d'études. Ces difficultés sont bien documentées par les chercheurs (Saboya et Bednarz, 2008; Kramarski, 2004; Mavers, 2009; Knuth, 2000; Star, 2000), alors que la recherche de nouvelles pratiques se poursuit. Comment pouvons-nous rendre les apprentissages de nos élèves plus signifiants?

Freiman, Richard et Jarvis (2012) ont documenté les efforts constants faits pour réorienter l'enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick, Canada, en mettant l'accent sur le développement de sens et sur la compréhension, et ce, « dans un contexte de résolution de problèmes, parfois complexes, pour lesquels les élèves n'ont pas de procédures toutes prêtes » (MENB, 2003, p. 18). Par conséquent, le programme d'études articule clairement le besoin d'introduire des problèmes en lien avec les situations de vie réelle, ce qui permet aux élèves de s'engager dans un processus authentique de construction d'une démarche de résolution et donne plus de sens aux concepts mathématiques (MENB, 2003). Toutefois, la mise en pratique de ces idées commence tout juste à se forger un chemin dans nos salles de classe et doit être soutenue par des recherches dans le contexte local.

Ainsi, un appel de propositions de projets innovants lancé par le gouvernement du Nouveau-Brunswick dans le cadre du programme de Fonds d'innovation en apprentissage (FIA) nous a poussé à concevoir et à mettre à l'essai une stratégie PIE (prédire-investiguer-expliquer) qui intègre la résolution de problèmes à l'aide d'un logiciel d'algèbre dynamique Graphe Easy. Dans cet article, nous présentons les résultats de cette expérimentation réalisée dans une classe de 12^e année dans le cadre d'un cours optionnel dont le contenu principal est l'étude de graphiques de différents types de fonctions.

Plus spécifiquement, le but de la recherche était de cerner comment se *développe une approche d'enseignement intégrant les TIC et la stratégie PIE dans un contexte de résolution de problèmes portant sur l'analyse de graphiques de fonction et du rôle de paramètres, lorsqu'on prend en considération la façon dont les élèves perçoivent l'apport des TIC et la stratégie PIE.*

En suivant la méthodologie de recherche-développement, nous avons conçu et réalisé, durant un semestre, quatre scénarios d'enseignement-apprentissage. À l'aide d'un journal du chercheur, de questionnaires et d'entrevues semi-dirigées, nous avons recueilli les perceptions des élèves portant sur leur vécu lors de la mise à l'essai de cette pratique innovante.

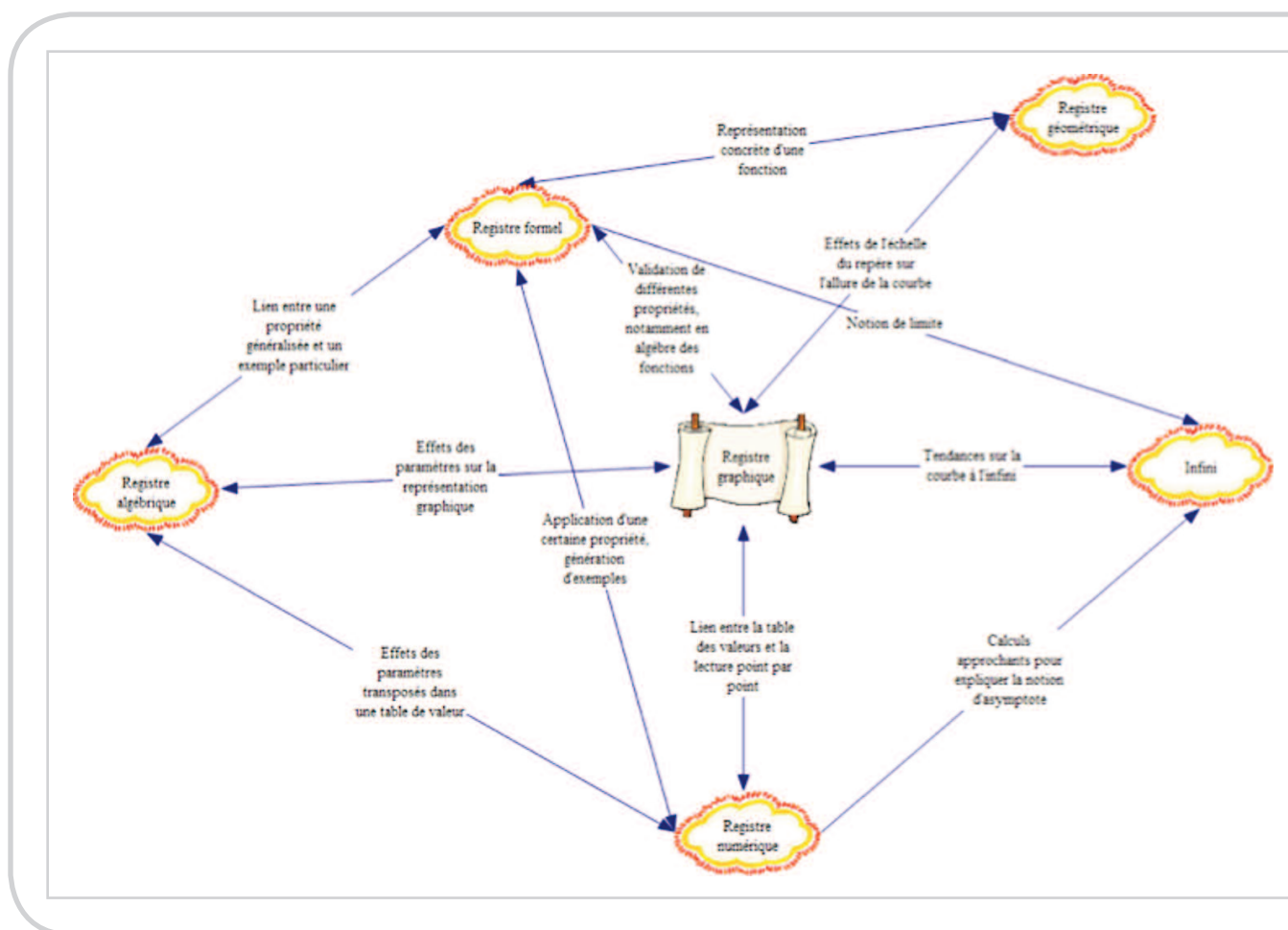
Contexte de recherche

Au Nouveau-Brunswick, les élèves obtiennent leur diplôme d'études secondaires après la 12^e année et peuvent accéder directement aux études universitaires. Le cours de Math30411, où la stratégie PIE a été expérimentée, est un cours optionnel exigé comme condition d'admission dans différents programmes du premier cycle universitaire. Le cours aborde un seul résultat d'apprentissage général (RAG) se situant dans le domaine de l'algèbre qui prévoit notamment une étude approfondie

du rôle des paramètres et des transformations de onze types de fonctions ainsi que de leurs caractéristiques : la croissance, le signe, les racines, le domaine, l'image et les extrema.

De plus, selon le programme d'études, les mathématiques doivent être présentées comme «un réseau de connaissances qui se donnent mutuellement du sens» (MENB, 2008, p. 26). L'atteinte de ce but passe, entre autres, par le développement chez l'élève des habiletés à faire des liens entre divers registres mathématiques. En didactique des mathématiques, dans un contexte d'analyse d'une fonction, Bloch (2002) a identifié six registres : le registre formel (lié aux notations), géométrique (lié aux transformations), algébrique (lié aux équations), numérique (lié aux tableaux de valeur), graphique (lié aux courbes dans un repère) et le concept de l'infini (lié aux représentations qui y sont liées, telles que les asymptotes). À partir du graphique d'une fonction, l'élève est amené graduellement à une coordination interregistre telle que définie par Duval (1995) en y intégrant les autres registres. La figure 1 illustre les liens peuvent être établis entre les six registres.

Figure 1. Lien entre les six registres de Bloch (2002) en ayant le registre graphique comme registre principal



Dans notre pratique habituelle, les élèves éprouvaient beaucoup de difficultés à déterminer les caractéristiques d'une fonction et à tracer un graphique à l'aide de leur règle. En suivant la stratégie PIE dans un contexte de résolution de problèmes à l'aide d'un logiciel dynamique permettant de tracer des courbes rapidement en faisant varier les paramètres de la fonction, l'élève pourra observer les résultats de ses essais, émettre des hypothèses, les valider à l'aide d'un raisonnement explicatif, tout en associant les paramètres de la fonction à un modèle mathématique de la situation réelle. Dans la prochaine section, nous décrirons notre cadre de référence axé sur la stratégie PIE, l'intégration de TIC ainsi que le processus itératif et dynamique de résolution de problèmes.

Cadre de référence

Stratégie PIE

La stratégie PIE est une façon innovatrice d'intégrer les investigations dans l'apprentissage des mathématiques. Elle se déroule en trois phases : prédiction, investigation et explication. Il s'agit ainsi d'une adaptation de la stratégie POE (Prédire-Observer-Expliquer), élaborée par Gunstone et White (1992) pour l'enseignement des sciences. Selon Joyce (2006), cette stratégie incite les élèves à explorer un concept en les engageant dans le processus d'investigation et dans des discussions pour comprendre les phénomènes observés.

La phase de *prédiction*, selon Lim, Kim, Cordero, Buendia et Kasmer (2007), contribuerait à la manifestation des conceptions de l'élève qui jouent un rôle important dans le questionnement initial par rapport au problème. Quant à la phase d'investigation, elle permet d'explorer le problème à l'aide de différentes approches et représentations (NCTM, 2000). Tandis que certains chercheurs, selon Yeo et Yeap (2009), semblent présenter la résolution de problèmes (dans un contexte d'une tâche fermée) comme une activité distincte par rapport à la démarche d'investigation (liée à une tâche ouverte), nous adoptons, dans le cadre de notre recherche, un point de vue différent qui fait référence à l'habileté « d'intégrer les résultats d'une investigation dans un plan permettant de résoudre un problème » (Bloom, Engelhart, Furst, Hill et Krathwohl, 1956, cités dans Yeo et Yeap, 2009). Nous rejoignons également Dias et Durand-Guerrier (2005) qui avancent que l'utilisation de cette démarche serait essentielle pour augmenter la créativité des élèves lors de la manipulation des objets mathématiques. Finalement, l'explication des démarches employées et des observations faites par l'élève l'aide à articuler son raisonnement, à réfléchir sur le processus de résolution de problèmes et à établir des liens entre les concepts construits (NCTM, 2000), ce qui pourra contribuer à justifier sa démarche et à généraliser ses stratégies de résolution de problèmes (Williams, 2003).

TIC et apprentissage de fonctions

Au cours de dernières décennies, les études sur l'utilisation de la technologie dans l'enseignement de mathématiques se multiplient en apportant, entre autres,

une nouvelle dimension aux investigations mathématiques, qui force les élèves à être plus systématiques et rigoureux dans leur raisonnement et à élaborer des démarches dynamiques (Canada et Blair, 2005; Vilus-Boas, 2010).

SRI International (2007) a recensé plusieurs études liant l'utilisation des TIC à l'autorégulation des apprentissages en mathématiques. À leur tour, Zimmerman, Bonner et Kovach (2000) avancent que les apprentissages autorégulés améliorent la compréhension des contenus et l'efficacité de l'apprentissage. Selon Ormrod (2008), l'utilisation des TIC pourrait renforcer a) l'élaboration de standards et de buts, b) l'auto-observation, c) l'autoévaluation et d) l'autoréaction (Ormrod, 2008, p. 140), agissant ainsi sur sa propre efficacité et son autonomie. Une utilisation plus soutenue de TIC peut également avoir un impact positif sur la compréhension des élèves grâce à une modélisation des relations mathématiques, comme le mentionne la récente étude de Minh (2012) qui porte sur l'apprentissage de fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage. Selon l'auteur, le logiciel Casyopée met en évidence des représentations multiples, géométriques et algébriques, ainsi que le calcul formel, ce qui peut aider les élèves « à modéliser des relations de dépendance impliquées dans une situation géométrique donnée, faciliter les activités sur les fonctions et, finalement, promouvoir une compréhension flexible des fonctions » (Minh, 2012).

Le caractère dynamique de ce type d'apprentissage a été souligné par Sinclair, Healy et Reis Sales (2009), cités dans Jiang, White et Rosenwasser (2011), qui avancent « que la nature même des représentations dynamiques mathématiques, la continuité et le changement constant qui se produisent au fil du temps offrent aux élèves différentes possibilités de la pensée réflexive, que les diagrammes statiques et images ne peuvent pas offrir » (p. 9; traduction libre). À leur tour, Karadag et McDougall (2009) suggèrent l'utilisation de GéoGebra comme outil cognitif dont l'utilisation se déroule selon les trois modes (expliquer, explorer et modéliser) et les quatre étapes de résolution de problèmes de Polya (1957) (voir le tableau 1). Dans le contexte d'utilisation de TIC, Moreno-Armella, Hegedus et Kaput (2008) ont défini les cinq stades de l'évolution de la symbolisation : 1) le stade statique et inerte; 2) le stade kinesthésique et esthétique; 3) le stade statique du calcul; 4) le stade dynamique discret et 5) le stade dynamique continu. Les deux derniers stades sont de nature dynamique, ce qui donne plus de contrôle à l'élève sur les objets mathématiques en lui fournissant une rétroaction plus immédiate.

Karadag et McDougall (2009) ont étudié l'enseignement de la dérivée en un point en effectuant des manipulations à l'aide d'une fiche de travail dynamique. Les auteurs avancent que ce genre d'activité permet à l'élève de visualiser les objets mathématiques tout en ayant une meilleure compréhension des relations entre les concepts mathématiques. Ils concluent toutefois qu'étant bien plus à l'aise avec ce genre de support visuel aux apprentissages, grâce aux technologies, les élèves peuvent toujours avoir des défis liés aux notations et à la symbolisation algébrique même après avoir participé à ce type d'activités.

Tableau 1. **Trois façons d'utiliser GéoGebra**
(Karadag et McDougall, 2009, p. 14, traduction libre)

	Expliquer	Explorer	Modéliser
Comprendre le problème	- Décrire les données fournies - Identifier les inconnues	- Fournir des fiches de travail aux élèves - Demander aux élèves d'explorer le problème - Guider les élèves dans l'identification des inconnues	- Fournir le théorème à modéliser - Identifier les données fournies - Décrire l'inconnue
Concevoir le plan	- Voir comment les variables sont-elles liées les unes aux autres - Énoncer la stratégie	- Demander aux élèves quelle est la relation entre les variables - Guider les élèves dans la création d'une stratégie	- Développer des objets mathématiques - Analyser la relation entre les objets
Mettre le plan à exécution	- Recueillir de nouvelles données pour développer une solution en manipulant des objets mathématiques - Poser des questions directives	- Aider les élèves à interagir avec les objets mathématiques afin de recueillir plus de données - Guider les élèves dans l'identification des propriétés des données recueillies	- Manipuler les objets pour vérifier si tout fonctionne correctement - Créer des conjectures - Vérifier les conjectures
Revenir sur la solution	- Répéter la procédure appliquée - Poser des questions du type Que se passe-t-il si...?	- Encourager les élèves à modifier le problème - Demander aux élèves de poser des questions du type Que se passe-t-il si...?	- Modifier les variables - Créer des problèmes verbaux décrivant le cas étudié - Poser de nouveaux problèmes

Yerushalmy et Gilead (1997) rappellent que la technologie a modifié l'apprentissage de l'algèbre sous plusieurs aspects. Ils citent l'exemple des équations : les manipulations, souvent apprises par cœur dans l'enseignement « traditionnel », sont mieux maîtrisées par deux processus distincts avec le support informatique, la manipulation d'équation et le visionnement des solutions. Dans leur expérimentation, ils ont amené des élèves à déterminer les solutions d'équations et d'inéquations linéaires ainsi que d'équations quadratiques. Or, nous leur proposons de représenter la différence entre les deux côtés de l'équation sous forme d'une fonction, puis de tracer leur graphique à l'aide d'un logiciel pour finalement déterminer la solution de l'équation. Les auteurs résument que l'utilisation de la technologie a aidé à changer le format de l'apprentissage des manipulations d'équations, passant à un apprentissage plus signifiant.

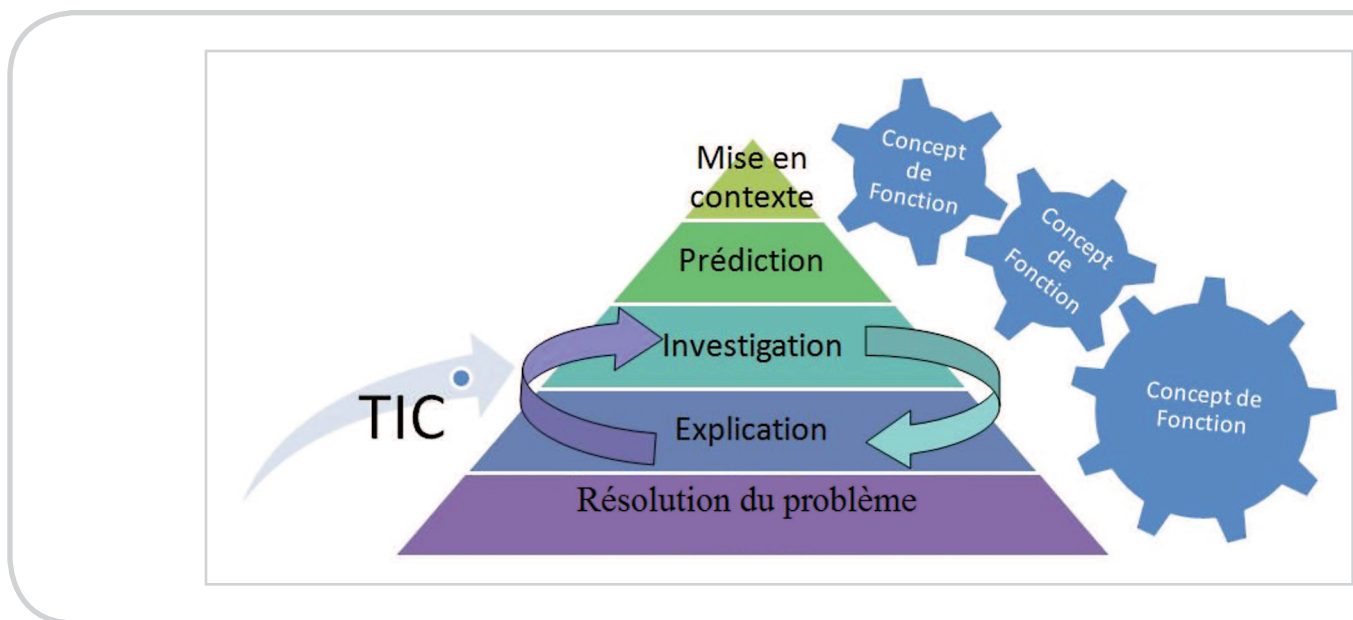
De cette brève recension, nous retenons que l'utilisation des TIC en mathématiques peut améliorer les apprentissages en les rendant plus signifiants, plus visuels, plus dynamiques, voire plus autorégulés. Pour notre recherche, nous avons choisi le

logiciel Graphe Easy, un traceur permettant de représenter graphiquement plusieurs fonctions à partir de leur règle. Le logiciel Graphe Easy présente à l'élève des options d'investigation de fonctions semblables à celles fournies par le logiciel GéoGebra, utilisé par Karadag et McDougall (2009), en ce qui a trait à l'exploration des fonctions et de leurs graphiques.

Une nouvelle façon de résoudre des problèmes en mathématiques : vers un modèle dynamique

En mettant ensemble différents éléments de notre cadre de référence, soit la stratégie PIE et l'utilisation des TIC pour soutenir l'enseignement-apprentissage du concept de fonction dans un contexte dynamique de résolution de problèmes permettant aux élèves de faire des liens entre les différents registres, nous avons proposé un modèle pour concevoir nos scénarios d'enseignement-apprentissage. Les éléments de ce modèle sont présentés dans la figure 2.

Figure 2. **Modèle présentant l'interaction des éléments du cadre de référence**



Ainsi, chaque scénario débute avec une mise en contexte d'un problème où l'élève devra trouver une fonction modélisant cette situation. Par la suite, l'élève fait une prédiction sur l'allure de la courbe représentant cette situation. Cette prédiction se fera sur papier présentant un repère non gradué afin que l'élève puisse appréhender le graphique de façon globale, comme le suggèrent Saboya et Bednarz (2008). Cette phase de prédiction est suivie d'une série d'investigations et d'explications où l'élève étudiera les paramètres de la fonction de façon séquentielle, en offrant un étayage à l'élève, comme le propose Knuth (2000). À cette étape, l'élève aura recours au logiciel Graphe Easy qui l'aidera dans ses investigations, en les rendant plus rigoureuses et dynamiques (Canada et Blair, 2005; Vilus-Boas, 2010).

Après avoir franchi les trois étapes de la stratégie PIE, l'élève retourne au problème initial, pour lequel les données seront précisées afin de lui permettre de modéliser la situation et de trouver une solution. Le scénario se termine par une modélisation d'une autre situation, ce qui permet à l'élève de réinvestir ses apprentissages dans un autre contexte et de faire des transferts.

Notre recherche, rappelons-le, vise le développement d'une approche d'enseignement de mathématiques au secondaire intégrant les TIC et la stratégie PIE dans un contexte de résolution de problèmes portant sur l'analyse de graphiques de fonction et du rôle de paramètres. À cette fin, nous nous fixons comme *premier objectif de concevoir les scénarios d'enseignement-apprentissage et, comme deuxième objectif, de les mettre en application dans une salle de classe en tenant compte de la façon dont les élèves perçoivent l'apport des TIC et la stratégie PIE.*

Dans la prochaine section, nous décrivons notre démarche méthodologique.

Méthodologie

Afin d'atteindre les objectifs de notre recherche, nous avons opté pour une démarche qualitative de type recherche-développement sous forme de design d'un produit éducatif, ou bien de création d'activités d'apprentissage particulières (Loiselle, 2001), ce qui répond au mieux à la nature de notre étude. Ainsi, nous avons retenu les quatre étapes suivantes suggérées par Loiselle (2001) :

1. Une phase d'analyse préalable
2. Une phase de production et de planification
3. Une phase de mise à l'essai
4. Une phase d'évaluation et de révision

Les deux premières étapes rejoignent notre premier objectif, alors que la troisième étape correspond à notre deuxième objectif. Quant à la quatrième étape, elle est prévue comme suite de notre étude exploratoire, donc ne fait pas partie de nos analyses présentées dans les prochaines sections.

En suivant ce modèle, à la première étape, nous avons analysé les enjeux de notre pratique actuelle ainsi que des pistes d'amélioration proposées dans la littérature. Le compte rendu de cette analyse est présenté dans les premières sections de notre article. Lors de la deuxième étape, nous avons conçu quatre scénarios d'enseignement-apprentissage, portant sur l'étude de l'une des fonctions du programme d'études, soit la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, la fonction rationnelle et la fonction sinusoïdale. Ce travail a été fait selon notre modèle incorporant les TIC et la stratégie PIE. Ces scénarios ont été mis à l'essai pendant une année scolaire avec quatre groupes d'élèves de 12^e année, ce qui correspond à la troisième étape de notre démarche de recherche. Après cette étape, nous avons recueilli des propos d'élèves à l'aide d'un questionnaire et d'entrevues semi-dirigés, comme suggéré par Borg et Gall (1989) et repris par Loiselle (2001). Ces données nous ont permis de mettre en évidence des apports du modèle ainsi que de suggérer des

modifications dans nos scénarios et dans leurs applications en salle de classe. Dans les sous-sections suivantes, nous présentons les détails de ces analyses.

Participants

Puisque notre recherche a été réalisée dans le cadre d'un projet plus grand (FIA), les participants de la recherche étaient les élèves de quatre classes d'une école secondaire du Nouveau-Brunswick inscrits dans les cours de mathématiques de 12^e année. Rappelons que, selon le régime pédagogique de l'école francophone du Nouveau-Brunswick, les cours de mathématiques de 12^e année ne sont pas obligatoires pour tous les élèves. L'auteur était l'enseignant dans l'une de ces classes. Cet aspect particulier était l'objet d'une approbation éthique. Puisqu'il s'agissait d'un cours, tous les élèves devaient participer à la réalisation de scénarios en salle de classe. En ce qui concerne le questionnaire de recherche, ils avaient le choix de remplir (ou non) le questionnaire de recherche. Selon les normes éthiques en matière de recherche, nous avons pris les mesures appropriées pour préserver l'anonymat des élèves. Parmi les 94 élèves inscrits au cours MATH30411 et participants au projet FIA, 64 ont rempli le questionnaire (15 de la classe du chercheur et 49 des autres classes). De plus, quatre élèves (deux garçons et deux filles) de la classe du chercheur ont été sélectionnés au hasard pour un entretien semi-dirigé.

Conception des scénarios pédagogiques

En accord avec le premier objectif de recherche, quatre scénarios portant sur les transformations et les caractéristiques des fonctions ont été élaborés. Les scénarios ont intégré les TIC, sous forme d'un logiciel dynamique auquel chaque élève avait accès dans une salle d'informatique, et la stratégie PIE a été employée dans un contexte de résolution de problèmes.

De plus, l'implantation de scénarios s'est échelonnée sur un semestre, ce qui nous a permis d'y apporter des ajustements. Les scénarios pédagogiques ont été validés par une enseignante afin de s'assurer qu'ils se conforment au programme d'études. Nous avons également demandé à deux élèves de 12^e année inscrits dans des cours de mathématiques à un niveau supérieur de lire chaque scénario pour vérifier, entre autres, leur compréhension du langage utilisé. Enfin, il y a eu une étape de validation en correspondance avec le modèle décrit dans notre cadre de référence (mise en situation, prédiction, investigation, explication et mise en application dans une situation de résolution du problème initial).

Calendrier de réalisation du projet

Tableau 2. **Calendrier de réalisation du projet**

Semaine 1	Évaluation diagnostique
Semaine 3	Scénario 1 : La fonction racine carrée
Semaine 5	Scénario 2 : La fonction valeur absolue
Semaine 7	Scénario 3 : La fonction rationnelle
Semaine 10	Scénario 4 : Les fonctions trigonométriques
Dernière semaine du semestre	Collecte de données par questionnaire
Mois de juin	Collecte de données par entretien semi-dirigé

Questionnaire, guide d'entrevue et journal du chercheur

En relation avec notre deuxième objectif, nous avons recueilli les propos des élèves volontaires à l'aide de deux outils : un questionnaire à remplir et des entretiens semi-dirigés. Les questions posées étaient des questions ouvertes portant sur divers aspects de notre modèle. Le journal du chercheur a été utilisé pour noter les observations et les réflexions en cours de réalisation de scénarios. Les données obtenues par l'entremise du questionnaire (questions ouvertes) ainsi que les verbatim des entretiens ont fait l'objet d'une analyse thématique inductive (Boyatzis, 1998; Paillé et Muchielli, 2008).

Résultats

Rappelons qu'en explorant comment se développe une approche d'enseignement intégrant les TIC et la stratégie PIE dans un contexte de résolution de problèmes portant sur l'analyse de graphiques de fonction et du rôle de paramètres, nous nous sommes fixé comme **premier objectif de concevoir les scénarios d'enseignement-apprentissage** et, comme **deuxième objectif, de les mettre en application dans une salle de classe en tenant compte de la façon dont les élèves perçoivent l'apport des TIC et la stratégie PIE**. Nous présentons nos résultats selon chaque objectif de la recherche.

Objectif 1. Conception de scénarios pédagogiques

Comme nous l'avons mentionné dans la section sur la méthodologie, quatre scénarios ont été élaborés qui portaient sur les fonctions racine carrée, valeur absolue, valeur sinusoïdale et valeur rationnelle, qui sont nouvelles aux yeux de l'élève.

Comme nous l'avons soulevé dans notre problématique, dans notre pratique courante chaque fonction a été présentée sous une forme « traditionnelle », à partir d'un exposé théorique par l'enseignant (fonction de base, l'effet d'un paramètre sur la fonction de base, des exemples et des exercices d'application). Le rôle de l'élève

était plutôt passif et consistait à écouter les explications de l'enseignant, à mémoriser les faits et à les reproduire dans le cadre d'exercices répétés plusieurs fois et d'un problème de mise en application de règles apprises. Nous avons également remarqué chez les élèves un manque d'intérêt et une compréhension limitée quant aux différents registres.

Ainsi, dans le cadre de la mise en pratique de notre modèle intégrant l'approche PIE et les TIC, chaque scénario commence par une mise en situation faisant appel à un contexte de la vie de tous les jours. Le tableau 3 présente le contexte utilisé lors de la mise en situation dans chaque scénario.

Tableau 3. **Contexte de la résolution de problème de chaque scénario**

Type de fonction du scénario	Contexte de la résolution de problème
Fonction racine carrée	Construction d'un « quarter-pipe »
Fonction valeur absolue	Opération de vidange d'un réservoir
Fonction rationnelle	Construction d'une sortie d'autoroute
Fonction sinusoidale	La hauteur d'une personne dans une grande roue

Afin de donner plus de détails sur la façon dont les scénarios ont été construits, nous présentons le texte du scénario 2 dans l'annexe. Voici comment il s'est déroulé en pratique :

Mise en situation

Afin d'introduire la fonction « valeur absolue », nous avons créé une situation où l'élève devait modéliser une opération de vidange d'un réservoir d'eau à débit constant. La mise en situation est présentée au tableau 4.

Tableau 4. **Mise en situation pour le 2^e scénario**

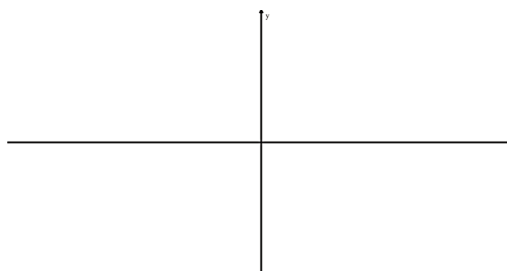
Ashley est la personne responsable de l'entretien du réservoir d'eau potable pour sa municipalité. La semaine prochaine, elle devra coordonner une opération qui vise à vider une partie du réservoir pour ensuite le remplir à nouveau. Le débit auquel l'eau sort du réservoir est le même que celui enregistré lorsque le réservoir se remplit. Elle doit trouver la fonction qui représente la quantité d'eau dans le réservoir en fonction du temps.

Phase de prédiction

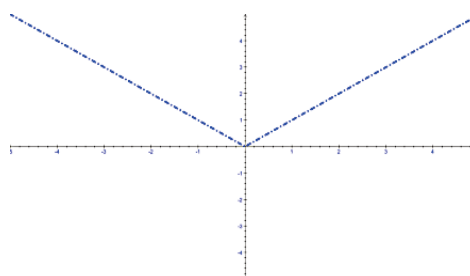
Lors de la phase de prédiction, la première dans la démarche PIE, l'élève doit d'abord tracer à main levée l'allure de la courbe. Ensuite, il choisit parmi une série de graphiques celui qui modélise correctement la situation. Le tableau 5 présente la phase de prédiction.

Tableau 5. Les deux temps de la phase de prédiction du scénario 2

- À main levée, Ashley présente l'allure générale de la courbe qui représente la quantité d'eau restante dans le réservoir, y , en fonction du temps écoulé depuis le début de l'opération.



- Afin de modéliser la situation, Ashley a recours à la fonction valeur absolue puisque la vidange du réservoir sera faite à débit constant. Voici la représentation graphique de la fonction :



Parmi les graphiques suivants, lequel ressemble à celui qui représentera la fonction recherchée par Ashley? Explique ton choix en te référant au contexte du problème.



a.



b.



c.



d.

Explication de ton choix :

Quelles sont les informations supplémentaires qui seront requises pour résoudre le problème?

Phases d'investigation et d'explication

Puisque le logiciel choisi amène l'élève à observer le comportement de fonctions en temps réel et de façon dynamique de telle sorte qu'il voit ce qui se passe sur l'écran et peut immédiatement interroger le phénomène observé, nous avons décidé d'intégrer la phase d'explication à mesure que l'investigation progresse. L'élève devait donc faire plusieurs va-et-vient entre l'investigation et l'explication. Ainsi, la phase d'investigation permet à l'élève, à l'aide d'un logiciel dynamique Graphe Easy,

d'explorer le rôle de chaque paramètre, ce qui entraîne la possibilité d'entrer la règle d'une fonction et voir immédiatement sa représentation graphique sur l'écran de l'ordinateur. L'élève peut, par la suite, modifier les valeurs de chaque paramètre et observer leur effet sur la forme du graphique. Les investigations et explications du scénario 2 sont présentées au tableau 6. Le questionnement qui émerge lors de cette phase amène l'élève à expliquer la relation entre les paramètres.

Tableau 6. **Les quatre investigations et explications du scénario 2**

Dans Graphe Easy, la fonction valeur absolue est exprimée comme étant **abs**. Ainsi, pour entrer l'expression $-2|2(x-1)| + 3$ dans Graphe Easy, il faut écrire $-2\text{abs}(2(x-1))+3$.

La forme canonique de la fonction valeur absolue est

Investigation 1 : Compare les fonctions valeur absolue en ayant les paramètres a et b de même grandeur, en modifiant les signes. Par exemple, tu peux tracer les paires suivantes :

$$y = 2|x - 1| + 3 \text{ et } y = |2(x - 1)| + 3$$

$$y = -2|x - 1| + 3 \text{ et } y = |-2(x - 1)| + 3$$

$$y = 2|x - 1| + 3 \text{ et } y = |-2(x - 1)| + 3$$

$$y = -2|x - 1| + 3 \text{ et } y = |2(x - 1)| + 3$$

Tu peux prendre d'autres paires pour ton investigation.

Explication 1 : Quelle relation as-tu remarquée entre les paramètres a et b dans la fonction valeur absolue?

Indices : *À quelles conditions les paramètres a et b ont-ils le même effet sur le graphique de la fonction absolue? Pourquoi?*

À quelles conditions les paramètres a et b ont-ils un effet différent sur le graphique de la fonction absolue?

Investigation 2 : Détermine l'équation des deux droites qui forment le graphique de la fonction $y = -2|2(x - 1)| + 3$. Répète le processus avec d'autres fonctions valeur absolue.

Explication 2 : Quelle est la relation entre l'équation des droites qui forment la valeur absolue et ses paramètres?

Indice : La forme canonique d'une droite est $y = mx + b$.

À partir des paramètres, comment peut-on déterminer la pente (m) de la droite?

À partir des paramètres, comment peut-on déterminer l'ordonnée à l'origine (b) de la droite?

Investigation 3 : Détermine quels paramètres indiquent les coordonnées du sommet de la fonction valeur absolue.

Explication 3 : Quels paramètres indiquent les coordonnées du sommet de la fonction valeur absolue dans sa forme généralisée (canonique)?

Investigation 4 : Détermine la valeur de quatre paramètres de la fonction valeur absolue afin que celle-ci respecte les conditions suivantes :

Le sommet se retrouve dans le premier quadrant.

La fonction est décroissante à la gauche du sommet.

Explication 4 : Quels sont les signes des paramètres pour que le graphique de la fonction valeur absolue satisfasse aux conditions énumérées ci-dessus?

Résolution du problème

Afin que l'élève puisse trouver une fonction modélisant la situation de départ, nous avons dû apporter quelques précisions au problème (voir le tableau 7). Par la suite, l'élève devait répondre à une série de questions que nous avons formulées en nous basant sur le modèle de Karadag et McDougall (2009), avant de résoudre le problème, puis deux autres problèmes semblables. L'objectif de cette activité était de favoriser le transfert des apprentissages (voir le tableau 8).

Tableau 7. **Précisions apportées à la mise en situation**

Le réservoir contient actuellement 5 000 m³ d'eau et on veut enlever 80 % de cette quantité. Selon les experts consultés par Ashley, l'opération complète (c'est-à-dire d'enlever 80 % de l'eau pour ensuite remplir le réservoir à 5 000 m³ à nouveau) prendra 20 heures en tout. Ashley doit donc définir la fonction qui associera la quantité d'eau restante dans le réservoir, y (en milliers de m³), et le temps depuis le début de l'opération, x (en heures). Le débit de l'eau sera le même lorsque le réservoir se videra et lorsqu'il se remplira.

Tableau 8. **Document remis aux élèves pour la résolution du problème**

- Décris dans tes mots ce qu'Ashley doit faire pour résoudre son problème.
- Identifie les données que tu peux dégager suite à la lecture du problème. Certains paramètres sont-ils connus?
- Indique comment tu vas t'y prendre pour résoudre le problème.

Par exemple, tu peux répondre aux questions:

Y a-t-il des paramètres déjà connus? Comment vas-tu déterminer les autres paramètres?

- Applique ton plan décrit à la question 3 et présente le graphique (copier-coller de Graphe Easy) ainsi que les paramètres de l'équation qui était recherchée.

$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

- Indique les éléments qui te confirment que tu as la bonne solution.
- Ashley a contacté Justin, l'employé de la ville voisine qui occupe le même poste, afin d'avoir le rapport sur le même genre d'opération sur le réservoir d'eau. Dans le rapport de Justin, la fonction qui représente la quantité d'eau restante dans le réservoir, y (en milliers de m³), en fonction du temps depuis le début de l'opération, x (en heures), est:

En utilisant ce modèle, réponds aux questions suivantes:

- Quelle était la quantité d'eau initiale dans le réservoir?
- Quel pourcentage d'eau a été enlevé du réservoir?
- Combien de temps a duré l'opération?
- Quel réservoir avait le plus gros débit: celui de la ville d'Ashley ou celui de la ville de Justin? Explique.
- **Indique les paramètres de la fonction valeur absolue qui représente la situation suivante:**

Une plinthe électrique (voir l'image ci-dessous) démarre lorsque la température ambiante est de 17°C et fait augmenter celle-ci à un rythme de 0,75°C par heure. La plinthe fonctionne jusqu'à ce que la température ambiante soit de 20°C. Lorsque la plinthe électrique s'arrête, la température ambiante diminue au même rythme qu'elle a augmenté, jusqu'à ce qu'elle atteigne à nouveau 17°C. La fonction valeur absolue recherchée lie la température ambiante, y , en °C, au temps après le début du fonctionnement de la plinthe électrique, x , en heures.

$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

Objectif 2. La mise à l'essai des scénarios en salle de classe : le vécu des élèves

En relation avec le deuxième objectif de recherche, soit de mettre les scénarios en application dans une salle de classe en tenant compte de la façon dont les élèves perçoivent l'apport des TIC et la stratégie PIE, nous avons tenu un journal de chercheur ainsi que recueilli des données auprès des élèves à l'aide d'un questionnaire et d'entreviens semi-dirigés. Les questions posées aux élèves portaient sur les éléments clés de notre modèle, soit les TIC, la stratégie PIE et l'apprentissage du concept de fonction dans un contexte de résolution de problème. Suivant notre démarche méthodologique, une analyse inductive nous a permis de dégager différents thèmes présentés dans le tableau 9. Les thèmes sont regroupés selon chaque étape du scénario.

Tableau 9. Thèmes dégagés pour chaque étape du modèle

Élément du modèle	Thèmes dégagés	Propos d'un élève appuyant la perception
Mise en contexte	Sens, lien avec la vie de tous les jours	... a fait réaliser qu'il y a des fonctions dans la vie de tous les jours, et ça faisait plus de sens à interpréter les graphiques.
	Découvrir et apprendre par soi-même	Le contexte du problème nous permettait souvent de découvrir et d'apprendre par nous-mêmes les nouvelles fonctions, leurs paramètres et leurs graphiques.
Prédiction	Confusion au début, ne pas savoir ce qu'on va apprendre	... ça m'faisait « feeler » comme si je n'allais pas comprendre ce qu'on faisait. Ce n'était pas comme une bonne façon de commencer parce que... j'me sentais déjà comme si je ne comprenais pas, du début.
	Pouvoir faire une hypothèse et la vérifier par la suite. Possibilité d'apprentissage	Prédiction serait bon, tu pourrais faire une hypothèse, pis après ça voir si t'étais bon ou pas. Pis là, ça te ferait apprendre au moins.
Investigation – Explication avec le logiciel	Faire essai-erreur, apprendre rapidement. C'est amusant de manipuler chaque paramètre	Les ordinateurs m'ont donné la chance de vérifier mes hypothèses dans un instant. Ceci a fait que j'ai pu aller de l'avant beaucoup plus rapidement avec la découverte... Le fait que nous pouvions faire essai-erreur était amusant, car nous étions capables de manipuler chaque paramètre individuellement, donc nous étions capables d'assimiler les paramètres rapidement.
	Dessiner plusieurs graphiques en même temps. Comparer rapidement l'impact des paramètres	Le logiciel Graphe Easy m'a beaucoup aidé, car ça te permettait de dessiner plusieurs graphiques en même temps pour comparer tes données ou l'impact des paramètres sans prendre le temps nécessaire à tous les tracer à la main.
	Liens entre les graphiques et les paramètres	En jouant avec Graphe Easy, on apprenait comment les graphiques ressemblaient en jouant avec les différents paramètres.
	L'aspect visuel	Graphe Easy était bénéfique afin de voir les modifications des paramètres rapidement (paramètres a, b, c, d). Je suis une personne visuelle. Donc pouvoir visualiser les graphiques m'a aidée à comprendre. J'ai aimé le logiciel Graphe Easy : il m'a permis de bien visualiser les scénarios. Graphe Easy a été plus efficace comme outil d'étude que les hypothèses et les contextes de problème, car c'était très visuel. Il était plus facile de voir les paramètres des équations sur graphique que dans les problèmes écrits. Graphe Easy était excellent pour voir les fonctions et voir comment les paramètres ont affecté les graphiques.

Tableau 9. **Thèmes dégagés pour chaque étape du modèle** (suite)

Résolution de problème	Questionner : « comment » et « pourquoi ». Confirmer certaines choses, comprendre les graphiques	L'avantage est de pouvoir VOIR pourquoi les réponses sont telles ou telles. J'ai aimé Graphe Easy parce que ça me permettait de confirmer certaines choses et de comprendre les graphiques.
	Être critique face aux résultats d'investigation	... faire des fausses déterminations qui pourraient nous mélanger dans les fonctions, ou ne pas trouver les réponses du tout.
	Logiciel difficile à utiliser	Je n'ai pas du tout aimé l'utilisation des ordinateurs. À mon avis elle nuit à notre apprentissage. Par le temps qu'on comprend comment ceux-ci fonctionnent, le cours est déjà fini!!!
	L'ordinateur est stimulant, facile à utiliser	Ces programmes m'ont mis à l'aise, je me sens plus à l'aise lorsque j'ai un ordinateur dans mes mains. De plus, le programme Graphe Easy était facile à comprendre et à utiliser correctement.
	Apprendre à son rythme	J'ai aimé le fait que c'était sur un ordinateur et que j'apprenais à mon rythme.
	Comprendre le contexte	Ce que j'ai le plus aimé des scénarios était que je pouvais plus comprendre le contexte du problème de ce scénario.
	Plus motivant	C'est plus motivant d'avoir un but à tracer une fonction.
	Outil visuel pour voir le résultat final	Les avantages de l'utilisation des ordinateurs étaient que tu avais un outil visuel pour t'aider à voir ce que le résultat final allait ressembler.

Afin d'interpréter ces résultats, dans le but de triangulation, nous avons mis les thèmes dégagés en relation avec la littérature et les observations notées dans le journal du chercheur.

Mise en contexte

Dans un effort de reconnecter les mathématiques et la vie réelle, et pour rendre l'apprentissage des élèves plus signifiant, le renouveau pédagogique de deux dernières décennies au Nouveau-Brunswick et ailleurs prône l'utilisation de problèmes mis en contexte, ce qui engage l'élève dans une construction de la démarche de résolution (et de gestion!), accompagnée d'une communication et du raisonnement mathématique lui permettant de faire des liens entre différents domaines de mathématiques, entre les mathématiques et les autres disciplines et entre les mathématiques et la vie de tous les jours, selon les quatre principes didactiques du programme d'études (MENB, 2011). Ce processus amène un changement radical par rapport aux pratiques « traditionnelles » d'enseignement/apprentissage. Ce changement peut, à son tour, affecter les perceptions des élèves de ce qu'ils apprennent, comment et pourquoi, comme le soulignent DeCorte, Verschaffel et Greer (2000) : « Dans un environnement d'apprentissage novateur qui constitue une rupture radicale avec les pratiques de classe traditionnelles, ils peuvent développer des perceptions et des stratégies plus réalistes de la modélisation mathématique, et, donc, lier la résolution de problème contextualisé au monde réel » (traduction libre). Ainsi, les paroles des élèves nous semblent indiquer leur appréciation du fait que l'apprentissage de paramètres de chaque fonction soit mis dans un contexte de résolution de problème de vie réelle ce qui leur permet, en même temps, de mieux comprendre le pouvoir de modélisation mathématique.

Nos participants nous informent également que la contextualisation leur apporte du sens et de la pertinence du concept de fonction en les plaçant dans une situation de découverte et d'apprentissage par eux-mêmes, en leur donnant en même temps un sentiment d'avoir une plus grande autonomie. Dans un cas semblable de changement de pratiques d'enseignement des cours préparatoires en calcul différentiel et intégral en y incorporant les éléments de modélisation Gordon (2002) a noté une augmentation d'une attitude positive chez les étudiants du groupe expérimental face à une approche ouverte basée sur la découverte comparé à celle de leurs pairs suivant un cours 'traditionnel'. Également, ces étudiants semblent répondre plus positivement à cette nouvelle approche qui leur permet de voir l'utilité de mathématiques dans la vie réelle (Gordon, 2002).

Prédiction

Par rapport à la phase prédiction, les opinions des élèves semblent être plutôt mitigées. Comme première étape de la stratégie PIE qui engageait les élèves dans un processus d'exploration de paramètres de fonctions dans un contexte de résolution de problème, c'est la phase de prédication qui paraît les avoir déstabilisés le plus. Certains élèves semblent ne pas saisir le but de cette activité. De plus, certains élèves ne comprenaient pas comment ils pouvaient répondre aux questions sur une matière qui ne leur avait pas été enseignée. Ils disaient n'avoir aucune base et qu'ils devaient deviner les réponses, ce qui a semblé les rendre un peu confus. D'autres élèves semblaient être plus à l'aise, plus sûrs, en affirmant que cette étape leur a permis d'émettre les hypothèses.

Afin de rendre cette étape plus claire pour les élèves, les enseignants ont apporté quelques changements en cours de route, en introduisant des éléments d'un accompagnement plus serré et guidé, en donnant plus d'explications par rapport à la tâche et de façons de l'aborder. Toutefois, une certaine confusion chez certains élèves a semblé demeurer jusqu'à la fin du projet, ce que reflètent les données des entrevues. En réfléchissant sur ces résultats, nous notons ici la manifestation probable d'une rupture du contrat didactique. Dans la littérature, nous trouvons des explications de ce phénomène dans des contextes semblables de changements de pratique. Ainsi, une étude récente conduite par Araújo et Acyoli-Reiner (2013) a permis d'observer la réaction des élèves face à des problèmes algébriques qui comportaient des éléments peu présents dans les pratiques courantes, soit des problèmes à énoncés longs, avec des réponses en inadéquation avec la question, problèmes aux données insuffisantes, etc. Selon les auteurs, ce type de problème peut induire des réflexions métacognitives chez les élèves, un aspect indispensable pour espérer de contraindre l'échec en mathématiques, ce qui était aussi à l'origine de notre questionnement de départ (Araújo et Acyoli-Reiner, 2013). Toutefois, les auteurs rapportent que «que malgré la tentative du professeur de promouvoir des stratégies métacognitives, celles-ci sont apparues seulement de manière implicite chez certains élèves et une fois qu'il n'y avait plus de réel changement dans les règles du contrat», ce qui semble s'être également manifesté dans notre étude.

Investigation et explication

Dans les phases suivantes de l'approche PIE, soit l'investigation et l'explication qu'on analyse simultanément, un logiciel dynamique Graphe Easy a été intégré, ce qui ressort dans les verbatim de nos entrevues et dans les questionnaires des élèves, ainsi que dans notre journal de chercheur. Les résultats semblent indiquer que le travail des élèves leur paraît plus efficace grâce à la rapidité de manipulation avec les paramètres et les graphiques offerts par le logiciel, facilitant en même temps le processus de découverte. De plus, ces témoignages démontrent les perceptions d'une efficacité de TIC comme outil d'investigation dynamique et rapide. Également, nous retrouvons dans le discours de certains élèves des liens qu'ils faisaient entre la forme des graphiques et les paramètres.

L'aspect visuel qu'apporte l'investigation à l'aide d'un logiciel a été également perçu positivement par certains élèves, ce qui est en relation avec les propos de Karadag et McDougall (2009). Cet aspect semble avoir contribué à un questionnement plus profond de la part des élèves quant au « comment » et au « pourquoi » par rapport à ce qu'ils voient. Cela peut expliquer des observations faites lors de l'investigation. Par contre, certains élèves ont manifesté un esprit plus critique par rapport à l'utilisation de TIC, ce qui les a amenés à être vigilants quant à la validité de résultats obtenus.

Dans la partie investigation, certains élèves ne semblaient pas avoir établi de stratégie de vérification de leurs résultats et quelques-uns ont affirmé ne pas être en mesure de déterminer quelles observations devaient être rapportées.

Résolution de problème

Lors de la réalisation du premier scénario, nous avons rencontré quelques défis dans la présentation des tâches aux élèves. Dans la section portant sur la résolution du problème, plusieurs élèves ont eu de la difficulté à répondre aux questions écrites liées au modèle de Karadag et McDougall (2009). Par contre, lorsque les questions étaient posées à l'oral, la plupart de ces élèves répondaient correctement à la question et certains semblaient surpris d'apprendre que leur réponse était correcte, s'exclamant, par exemple, « c'est juste ça? » Effectivement, certains élèves ne savaient pas où trouver les documents pertinents ni par quelle tâche commencer. Notamment, un élève a mentionné qu'il « *était perdu dans les étapes du processus* ». Certains élèves déploraient notamment le fait que les questions du scénario étaient vagues, que ce n'était pas de cette façon qu'ils apprenaient, qu'ils ont besoin pour apprendre qu'un enseignant leur explique et qu'ils se sentaient évalués avant même d'avoir appris le concept dans la phase de prédiction. Lors de la réalisation des autres scénarios, les mêmes difficultés ont semblé apparaître, mais à un niveau moins élevé.

Par contre, les TIC semblent avoir rendu la tâche plus facile à d'autres élèves. Nous pourrions même inférer que l'utilisation de ces outils a eu un impact bénéfique sur la motivation de ces élèves en leur permettant d'apprendre à leur rythme. Ces élèves indiquent non seulement que l'utilisation de TIC a été bénéfique, mais elle semblait leur permettre de faire des liens entre la mise en contexte du problème lors de la réalisation des diverses étapes des scénarios, qui ont été construits selon notre modèle.

En somme, le projet semble avoir réussi, au moins en partie, à mettre l'accent sur l'aspect conceptuel du graphique allant ainsi au-delà d'une connaissance procédurale, ce qui était plutôt le cas de notre pratique traditionnelle. Différents passages dans le corpus de nos données semblent indiquer que la stratégie PIE et le logiciel Graphe Easy ont été perçus par certains élèves comme des éléments qui favorisent une meilleure compréhension de fonctions ce que les auteurs associent comme condition d'un apprentissage conceptuel Duval (1995). Il faudra toutefois conduire une étude évaluative pour infirmer ou confirmer cette perception des élèves.

Conclusion

Afin de changer notre pratique actuelle d'enseignement de paramètres de fonctions dans le cadre du cours optionnel de 12^e année dans une école secondaire du Nouveau-Brunswick, nous avons créé et mis à l'essai quatre scénarios d'enseignement-apprentissage, en recueillant et analysant les perceptions des élèves à l'aide d'un questionnaire et d'entrevues semi-dirigées.

Le contexte de la résolution de problèmes semble aussi avoir permis à certains élèves de créer des liens entre les divers registres présentés dans le cadre de référence (Bloch, 2002), c'est-à-dire entre les registres graphiques, numériques, algébriques, formels, géométriques et l'infini, tout en aidant l'élève à établir des liens entre ses connaissances algébriques et des applications dans la vie réelle.

De façon générale, les élèves semblent avoir apprécié l'utilisation de la technologie en mathématiques, notamment pour l'aspect visuel apporté par le logiciel Graphe Easy. Ils mettent cependant un bémol à l'approche employée. L'utilisation des technologies aurait, selon certains d'entre eux, aidé à améliorer leurs compétences dans certains domaines, dont celui des apprentissages autorégulés, ainsi que le suggèrent Depover, Karsenti et Komis (2008). Le logiciel semble être perçu par certains élèves comme une aide dans la résolution du problème, tout en étant utilisé à des stades dynamiques, tels que définis par Moreno-Armella, Hegedus et Kaput (2008).

Par ailleurs, nous notons que la stratégie PIE et l'utilisation d'un logiciel semblent avoir grandement complexifié le processus « habituel » de résolution de problèmes et ainsi perturbé certains élèves, ce qui pouvait affecter négativement leur sentiment de compétence (Leclerc, Larivée, Archambault et Janosz, 2010), comme le révèlent les données d'entrevues. Nous nous demandons si cette frustration est liée à la rupture du contrat didactique pour ces élèves, ce qui les a déstabilisés davantage, surtout au début du projet.

Ainsi, certains élèves ont exprimé leurs préoccupations par rapport à l'absence d'explications claires de la part de l'enseignant, de démonstrations d'exemples au tableau et d'exercices d'application leur permettant de se sentir bien préparés pour le test. Tout au long du projet, ces élèves ont fait part de leurs inquiétudes, exprimant parfois des sentiments de frustration et même d'anxiété. Bien que les recherches semblent avoir reconnu les bienfaits d'une pédagogie plus ouverte, centrée sur

l'élève aux prises avec une résolution de problèmes complexes, mal définis et contextualisés et pouvant être résolus par une multitude de solutions et de stratégies, la réalité de notre école qui cherche encore à définir les limites de cette ouverture à l'égard de la complexité de la vie réelle nous amène à nuancer nos interventions. Il semblerait que certains élèves ne soient pas disposés à apprendre selon des approches qui s'éloignent de l'enseignement « traditionnel ».

Du point de vue des recommandations pratiques, il serait important de développer davantage la culture à commençant aux niveaux scolaires inférieurs, même au primaire, comme l'ont proposé certains élèves, ce qui pourrait apporter des résultats bénéfiques dans ce sens, tout en rendant l'élève plus à l'aise devant ce type de tâches. De plus, il conviendrait de penser à une forme de validation des apprentissages différente, qui permettrait aux élèves de gérer le processus de résolution de problèmes en utilisant des outils appropriés d'auto-évaluation, entre autres le multimédia (vidéo). En ce qui a trait aux pistes de recherches futures, il serait intéressant d'implanter le modèle de Scharton (2004), c'est-à-dire un échange de stratégies en petits groupes, puis en groupe-classe, pour la phase d'investigation, puis de mesurer son impact sur les apprentissages des élèves. De plus, il nous apparaît important de mener d'autres recherches sur la façon d'introduire des résolutions de problèmes contextualisés comme soutien à la construction des connaissances, ainsi que sur les impacts que peuvent avoir celles-ci sur les apprentissages.

Références bibliographiques

- ARAÚJO, F et ACIOLY-REGNIER, M. (2013). Rupture du contrat didactique : utilisation des stratégies métacognitives dans la résolution de problèmes algébriques. Dans *Actes du congrès AREF 2013*. Récupéré du site <http://www.aref2013.univ-montp2.fr/cod6/?q=content/520-rupture-du-contrat-didactique-utilisation-des-strat%C3%A9gies-m%C3%A9tacognitives-dans-la>
- BLOCH, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, 58, 25-46.
- BLOOM, B. S., ENGELHART, M. D., FURST, E. J., HILL, W. H. et KRATHWOHL, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook I. Cognitive Domain*. New York : David McKay.
- BORG, W. et GALL, M. (1989). *Educational Research. An Introduction*. Michigan : Longman.
- BOYATZIS, R. (1998). *Thematic Analysis and Code Development. Transforming Qualitative Information*. Londres : Sage Publications.

- CANADA, D. et BLAIR, S. (2006). Intersections of a circle and a square: An investigation. *Mathematics Teacher* 100(5), 324-328.
- DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. et GREER, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. Dans *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for Living* (p. 66-73) Récupéré de <http://math.unipa.it/~grim/Jdecorte.PDF>
- DEPOVER, C., KARSENTI, T., et KOMIS, V. (2008). *Enseigner avec les technologies: favoriser les apprentissages, développer des compétences*. Québec: Presses de l'Université du Québec.
- DIAS, T. et DURAND-GUERRIER, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères – IREM*, 60, 61-78.
- DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Suisse: Peter Lang.
- FREIMAN, V., RICHARD, P. R. et JARVIS, D. H. (2012). *L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick (Secteur francophone)*. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque de L'Espace mathématique francophone (EMF2012)* (p. 1761-1780). Suisse: Université de Genève.
- GORDON, F. S. (2002). What students learn: Math modeling vs traditional precalculus. Dans *Electronic Proceedings of the ICTCM-15*. Récupéré de <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL15/S083/paper.pdf>
- GUNSTONE, R. et WHITE, R. (1992). *Probing Understanding*. Grande-Bretagne: Falmer Press.
- JIANG, Z., WHITE, A. et ROSENWASSER, A. (2011). Randomized Control Trials on the Dynamic Geometry Approach. *The Journal of Mathematics Education at Teachers College*, automne-hiver, 8-17.
- JOYCE, C. (2006). Predict, observe, explain. Dans *Assessment Ressource Banks*. Récupéré de <http://arb.nzcer.org.nz/strategies/poe.php>
- KARADAG, Z., et MCDUGALL, D. (2009). Dynamic worksheets. Visual learning with the guidance of Polya. *MSOR Connections*, 9(2), 13-16.
- KNUTH, E. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher*, 93(1), 48-53.
- KRAMARSKI, B. (2004). Making sense of graphs. Does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions? *Learning and Instruction*, 14, 593-619.
- LECLERC, M., LARIVÉE, S., ARCHAMBAULT, I. et JANOSZ, M. (2010). Le sentiment de compétence, modérateur du lien entre le QI et le rendement scolaire en mathématiques. *Revue canadienne de l'éducation*, 33(1), 31-56.

- LIM, K., KIM, O., CORDERO, F., BUENDÌA, G. et KASMER, L. (2007). Use of prediction in mathematics classroom. Dans T. Lamberg (dir.), *Proceedings of the Twenty-ninth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (p. 1239-1248). Stateline, NV: University of Nevada.
- LOISELLE, J. (2001). La recherche-développement et sa création : sa nature et ses caractéristiques. Dans M. Anadon et M. L'Hostie (dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*. Québec : Les Presses de l'Université Laval.
- MAVERS, D. (2009) Teaching and learning with a visualiser in the primary classroom. Modelling graph-making. *Learning, Media and Technology*, 34(1), 11-26.
- MENB (2003). *Le secondaire renouvelé... pour un monde nouveau – Document d'information à l'intention du personnel enseignant*. Fredericton : Gouvernement du Nouveau-Brunswick.
- MENB (2008). Programme d'études : Mathématiques 30411, version provisoire, mai 2008. Fredericton : Gouvernement du Nouveau-Brunswick
- MINH, T.-K. (2012). Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage : situations d'apprentissage et genèses instrumentales des élèves. Synthèse de la thèse, dirigée par J.-B. Lagrange et soutenue en 2011. Récupéré de <http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article125>
- MORENO-ARMELLA, L., HEGEDUS, S. J. et KAPUT, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics. Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2). 99-111.
- NCTM (2000). *Principles & Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- ORMROD, J. (2007). *Human Learning* (5^e éd.). États-Unis : Prentice Hall.
- POLYA, G. (1957). *How to Solve It* (2^e éd.). États-Unis : Princeton University Press.
- SABOYA, M et BEDNARZ, N. (2008). *Le travail sur les graphiques : un défi à relever dans l'enseignement des mathématiques*. Récupéré de http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip/imprimersans.php3?id_article=71&nom_site=MathVIP&url_site=http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip
- SCHARTON, S. (2004). « I did it my way. » Providing opportunities for students to create, explain, and analyze computation procedures. *Teaching Children Mathematics*, 10(5), 278-283.
- SINCLAIR, N., HEALY, L et REIS SALES, C. (2009). Time for telling stories: Narrative thinking with dynamic geometry. *ZDM*, 41, 441-452.
- SRI INTERNATIONAL (2007). *Comment les enseignants peuvent-ils exploiter l'attitude positive des élèves face aux TIC pour favoriser un meilleur apprentissage des mathématiques?* (Note de recherche 12).

- STAR, J. R. (2000). On the relationship between knowing and doing in procedural learning. Dans B. Fishman et S. O'Connor-Divelbiss (dir.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (p. 80-86). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.
- TOUMA, G. (2005). Un environnement informatisé d'expérimentation assistée par ordinateur intégrant les sciences et les mathématiques. *Skholê, hors-série* (2), 97-102.
- VILUS-BOAS, H. (2010). TIC et démarche d'investigation en mathématiques. *Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques*, 18. Récupéré de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article260>
- WILLIAMS, K. (2003). Writing about the problem-solving process to improve problem solving performance. *Mathematics Teacher*, 96(3), 185-187.
- YEO, B. J. W. et YEAP, B. H. (2009). Solving mathematical problems by investigation. Dans B. Kaur (dir.), *Mathematical Problem Solving. Yearbook 2009, Association of Mathematics Educators* (p. 117-135). Singapour : National Institute of Education.
- YERUSHALMY, M. et GILEAD, S. (1997). Solving equations in a technological environment. *Mathematics Teacher*, 90(2), 156-163.
- ZIMMERMAN, B., BONNER, S. et KOVACH, R. (2000). *Des apprenants autonomes*. Paris : De Boeck Université.