

Fascinantes et universelles, les mathématiques au quotidien

# Math 2000

ANNÉE MONDIALE DES MATHÉMATIQUES



CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

# Pour souligner l'Année mondiale des mathématiques

**C  
R  
M**

Nous sommes très fiers au Centre de recherches mathématiques d'avoir été le maître d'œuvre de cet encart qui souligne l'Année mondiale des mathématiques.

Ce recueil doit son existence au travail inspiré de Stéphane Durand. Vous y trouverez un panorama exceptionnel de cette discipline contemporaine, dont des collaborations de quelques-uns de nos plus grands experts. Vous en ressortirez convaincu que les mathématiques sont omniprésentes, et que leur grande aventure intellectuelle se porte mieux que jamais. Bonne lecture.

Jacques Hurtubise, directeur

Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal

## Bell supporte la *recherche*

Laboratoire  
universitaire  
Bell



### Qu'est-ce que le **rcm<sub>2</sub>**?

Le Réseau de calcul et de modélisation mathématique est un regroupement unique de 7 centres (CERCA, CIRANO, CRIM, CRM, CRT, GERAD, INRS-Télécommunications) qui, en collaboration avec des universités québécoises et une vingtaine de partenaires industriels, répondent aux besoins de l'industrie dans les domaines associés au calcul et à la modélisation mathématique.

Une quinzaine de champs d'intérêt sont à l'heure actuelle abordés au sein de trois thèmes majeurs : la gestion du risque, le traitement de l'information, traitement d'images et calcul parallèle, les transports et télécommunications.

Une entente entre le rcm<sub>2</sub> et Bell Canada a permis de mettre en place le Laboratoire Universitaire Bell (LUB) qui touche aux innovations dans le domaine de la recherche et de l'application du multimédia.

Grâce à des fonds du CRSNG, des projets de recherche soumis par les membres sont financés par le biais d'un concours annuel.

Adresse postale : rcm<sub>2</sub>, Université de Montréal, C.P. 6128,  
Succursale Centre-ville, Qc, H3C 3J7  
T (514) 343 7501 – F (514) 343 2254  
Courriel : rcm2@crm.umontreal.ca  
[www.crm.umontreal.ca/rcm2/](http://www.crm.umontreal.ca/rcm2/)

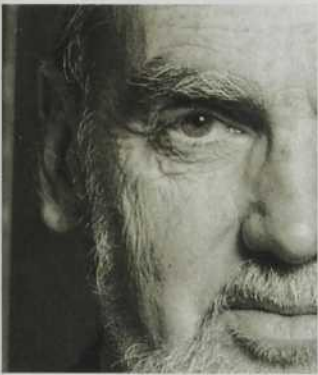


**rcm<sub>2</sub>**



# Sommaire

Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, mai 2000



**4** Avant-propos

**5 HISTOIRE**  
**350 ans de mathématiques au Québec**  
par Yves Gingras

**6 ENTREVUE**  
**Robert Langlands : un explorateur de l'abstrait**  
propos recueillis par Stéphane Durand



**8 NATURE**  
**Du léopard au tournesol**  
par Stéphane Durand

**10 SANTÉ**  
**Mathématiciens du cœur**  
par Félix Légaré

**11 ENCHÈRES**  
**Qui dit mieux ?**  
par Jacques Robert



**12 DESIGN**  
**Les maths en forme**  
par Michel Delfour

**14**  
**CRYPTOGRAPHIE**  
**Les nombres et leurs secrets**  
par Claude Crépeau

**15 BIOLOGIE**  
**La théorie des nœuds**  
par Christiane Rousseau

**16 INFORMATIQUE**  
**Ordinateurs du futur**  
par Charles Allain

**17 ÉCONOMIE**  
**La formule de Black et Scholes**  
par René Garcia



Illustration de la page couverture: Philippe Béha



Quel est le lien entre un escargot et le nombre  $(1+\sqrt{5})/2$  ?



Le nombre  $(1+\sqrt{5})/2$  est le nombre d'or qu'on retrouve un peu partout dans la nature. La spirale de la coquille du nautilus est une construction géométrique basée sur ce nombre. Même Stradivarius l'a utilisé pour construire ses fameux violons.

**18-19**  
**Les affiches gagnantes de l'Année mondiale des mathématiques**

**20 SANTÉ**  
**Les applications médicales des fractales**  
par Fahima Nekka

**21 MÉTÉOROLOGIE**  
**Les mathématiques du temps**  
par Michel Béland

**22 LE VIVANT**  
**Biomathématiques**  
par Jean-Marc Fleury

**23 INFORMATIQUE**  
**Des ordinateurs intelligents**  
par Yoshua Bengio

**24 TRANSPORTS**  
**Tous les chemins mènent aux... maths**  
par Patrice Marcotte et François Soumis

**26 GESTION**  
**Les mathématiques au service des affaires**  
par Maurice Boyer

**27 ENSEIGNEMENT**  
**Les maths : délices ou terreur ?**  
par Vincent Sicotte

**28 RECHERCHE**  
**Les grands courants de la recherche de pointe**  
par François Lalonde

**29 IMAGERIE**  
**La nouvelle imagerie médicale**  
par Jean-Marc Lina

**30 HISTOIRE**  
**Le théorème de Fermat**  
par Henri Darmon

**31 PHYSIQUE**  
**La fascinante efficacité des mathématiques**  
par Stéphane Durand

**32 INFOGRAPHIE**  
**Les maths derrière l'image**  
par Pierre Poulin



# An 2000

## Année mondiale des mathématiques Sous l'égide de l'Unesco

Étant donné l'importance de plus en plus grande des mathématiques dans tous les domaines scientifiques, le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal, en collaboration avec le magazine *Québec Science*, a voulu profiter de l'Année mondiale des mathématiques pour sensibiliser le public aux applications de plus en plus nombreuses de celles-ci dans la vie de tous les jours, ainsi qu'aux diverses facettes de la recherche mathématique au Québec.

Il est fascinant de découvrir que les mathématiques sont partout dans la nature : de la forme des coquilles d'escargot aux motifs du pelage des animaux (léopard, tigre, etc.), en passant par la forme des alvéoles d'abeilles et le nombre des pétales de fleurs. Cette affinité des mathématiques avec la nature est très certainement la raison de leur si extraordinaire efficacité en sciences et en technologie.

Certes, il est bien connu que les mathématiques sont essentielles dans certaines disciplines, notamment en physique, mais il est beaucoup moins connu qu'elles jouent un rôle de plus en plus important dans toutes sortes de nouveaux domaines : biologie et botanique, comme nous venons de le dire, mais aussi médecine, finance, droit, économie, linguistique, etc. Nous avons donc voulu faire découvrir ces nouvelles percées, en insistant particulièrement sur les domaines d'application moins connus et *a priori* surprenants. Nous décrirons par exemple :

- Comment les mathématiques expliquent que certains animaux sont tachetés tandis que d'autres sont rayés.

- Comment les mathématiques permettent de prévenir et contrôler les dérèglements cardiaques et les crises d'épilepsie.

- Comment l'analyse mathématique en imagerie médicale permet de caractériser les tumeurs cancéreuses.

- Comment la théorie mathématique des nœuds permet d'analyser le comportement des virus dans les cellules.

- Comment les mathématiques servent à gérer la circulation automobile.

- Comment les mathématiques permettent de faire la lecture automatique de codes postaux ou de chèques écrits à la main.

- Comment, dans certaines situations, les mathématiques sont en train de remplacer les avocats.

Etc.

Le langage mathématique permet aussi de faire des liens entre des phénomènes apparemment sans relation. Ainsi, on découvre aujourd'hui, grâce aux mathématiques, des liens entre la forme d'une fougère et les fluctuations de la bourse, ou encore entre la fréquence des éruptions volcaniques, la propagation des épidémies, l'évolution des populations animales et la fréquence des battements cardiaques, entre autres. Le langage mathématique permet donc de faire ressortir une unité dans le fonctionnement de la nature.

De plus, contrairement aux différentes langues, les mathématiques sont les mêmes

dans toutes les cultures. Et ce n'est pas une simple question d'influence réciproque. Souvent, par exemple, des mathématiciens de différentes cultures ont fait des découvertes similaires indépendamment les uns des autres.

Les mathématiques ne sont pas non plus qu'un simple outil, elles jouent souvent un rôle fondamental. En effet, elles peuvent conduire à des solutions que l'intuition ordinaire n'aurait pu imaginer ou, plus important encore, elles permettent de définir des concepts que le langage ordinaire ne permet pas. Ce dernier point peut sembler surprenant, mais cela est tout à fait commun en physique. En effet, pour comprendre l'infiniment petit et l'infiniment grand — deux domaines inaccessibles à nos sens —, le langage de la vie courante n'est plus adapté, car la logique en jeu n'est plus celle de la vie quotidienne. Il faut alors recourir à un autre langage, et celui des mathématiques est parfaitement adapté.

Finalement, contrairement à ce qu'on pense souvent, les mathématiques ne sont pas austères et arides. Elles peuvent être difficiles d'accès, certes, mais elles sont pleines de richesses et de surprises. En fait, ce qui motive les mathématiciens purs, c'est la beauté des structures qu'ils découvrent.

Voilà donc le défi de ce cahier, sensibiliser à l'omniprésence, l'universalité et l'extraordinaire efficacité du langage mathématique, en faisant découvrir le dynamisme et la diversité de la recherche mathématique au Québec.

Stéphane Durand  
Responsable du projet



Le dossier Math2000 est publié par le Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal  
C.P. 6128, Succ. Centre-ville  
Montréal (Québec) H3C 3J7  
Tél.: (514) 343-7501

Direction  
Stéphane Durand



Réalisation  
Québec Science  
3430, rue Saint-Denis, bureau 300  
Montréal (Québec) H2X 3L3  
Tél.: (514) 843-6888  
Télec.: (514) 843-4897  
courrier@quebecscience.qc.ca  
www.CyberSciences.com

Directeur général : Michel Gauquelin  
Direction de projet : Charles Allain  
Adjoint à la rédaction : Vincent Sicotte

Révision linguistique : Luc Asselin  
Direction artistique : François Émond

Diffusion et promotion : Hélène Côté

Illustration de la page couverture : Philippe Béha  
Photos/illustrations : Philippe Béha, Michel Larose, Pierre Saint-Jacques



# 350 ans de mathématiques

AU QUEBEC

Dans leurs aspects les plus élémentaires (arithmétique et géométrie), les mathématiques sont à la base de la mesure et des échanges. Aucune société ne peut vivre sans elles.

par Yves Gingras



## Une fonction essentiellement utilitaire

Le Québec ne fait pas exception. Dès les débuts de la Nouvelle-France, les relevés cartographiques exigeaient des connaissances géométriques. Alors que la colonie s'organise et qu'est créé le Collège des Jésuites en 1635, leur enseignement se met en place. C'est à Martin Boutet que revient l'honneur d'être le premier professeur de mathématiques : il enseigne « tout ce qu'il est nécessaire de savoir des mathématiques pour ce pays » et instruit « la plupart des capitaines qui conduisent des vaisseaux en ce pays ».

Le développement du commerce nécessite la connaissance de la règle de trois, du calcul des proportions et de l'intérêt (simple et composé). Ces méthodes seront présentées pour la première fois par un arpenteur, Jean-Antoine Bouthillier, qui publie en 1809 un *Traité d'arithmétique* à l'usage des écoles, qui sera réédité au moins jusqu'au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. On lui incorporera ultérieurement un *Traité d'algèbre* d'une dizaine de pages, publié en 1836 sous la plume d'un étudiant en droit, Jos Laurin. Les besoins des marchands et de la vie quotidienne ne demandaient pas de connaissances plus avancées à l'époque. Tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle et d'une bonne partie du XX<sup>e</sup> siècle, les mathématiques feront essentiellement partie de l'enseignement général.

La parution d'un *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* au XIX<sup>e</sup> siècle, attribué à l'abbé Langevin, professeur au Séminaire de Québec et qui deviendra le premier évêque de Rimouski, reflète probablement davantage l'intérêt personnel du professeur que le contenu réel du programme d'enseignement de l'époque. De même, la publication en 1866 par l'architecte Charles Baillargé d'un *Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique* de 900 pages, ne semble pas répondre davantage à une demande précise, bien qu'il soit dit à

l'usage des arpenteurs, architectes, ingénieurs et professeurs. Plus original, mais toujours à visée pratique, est son *Tableau stéréométrique* utilisé pour mesurer des volumes de forme complexe et qui obtiendra de nombreux prix et médailles dans plusieurs pays.

## L'essor de la recherche

En fait, ce n'est qu'à la fin de la Seconde Guerre mondiale que l'on assiste au développement de la recherche mathématique objective au sein des universités canadiennes et québécoises. La tenue en juin 1945 à Montréal du premier congrès canadien de mathématiques peut être vue comme l'acte de naissance de la discipline au Canada. Cet événement, auquel participèrent de grands mathématiciens comme John von Neumann, Garrett Birkhoff et Claude Chevalley, convaincra les mathématiciens canadiens de l'importance de se doter d'une voix collective. La Société mathématique du Canada qui se crée au même moment servira de porte-parole auprès des autorités afin de faire valoir l'importance des mathématiques pour la société.

Bien que les universités de Toronto — et dans une certaine mesure l'Université McGill — avaient mis en place les bases de la recherche en mathématiques avant les universités francophones, la croissance véritable de la recherche se fera au cours années 60 grâce surtout à l'impulsion de Maurice L'Abbé. Ce dernier, qui avait obtenu son doctorat à l'Université de Princeton, crée en 1962 à l'Université de Montréal le Séminaire de mathématiques supérieures, et en 1968 le Centre de recherche mathématiques (CRM). Grâce à ces initiatives, l'Université de Montréal prend le pas sur McGill et les autres universités québécoises en matière de recherche en mathématiques dès le début des

années 70.

Concentrés d'abord au sein des départements, les mathématiciens essaient, au cours des années 70, vers les départements d'informatique, à l'École des Hautes études commerciales et à l'École polytechnique de Montréal. Les développements fulgurants des capacités de calcul des ordinateurs multiplient les domaines d'application des mathématiques : à la physique viennent s'ajouter ceux de la biologie, du transport et des finances, sans parler des diverses sciences appliquées.

Aujourd'hui, les politiques de la recherche encouragent le regroupement des chercheurs. Les mathématiciens n'échappent pas à la tendance; à l'initiative du CRM, l'Institut des sciences mathématiques (ISM), qui regroupe les chercheurs des six principales universités québécoises (Concordia, Laval, McGill, Montréal, Sherbrooke et UQAM), est créé en 1991.

Depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale, les mathématiques ont trouvé au Québec comme ailleurs des conditions institutionnelles favorisant des recherches fondamentales de plus en plus abstraites. Ce sont ces travaux qui, en retour, rendent aujourd'hui possibles de nouvelles applications, tant il est vrai qu'il faut d'abord se détourner du réel pour mieux l'appréhender.

## Pour en savoir plus

Luc Chartrand, Raymond Duchesne, Yves Gingras, *Histoire des sciences au Québec*, Montréal, Boréal, 1987.  
Société mathématique du Canada, 1945-1995, Volume 1 : *Les mathématiques au Canada*, sous la direction de Peter Filmore, Ottawa, 1995.

## L'auteur

Membre du Centre interuniversitaire de recherche sur les sciences et la technologie (CIRST) et professeur d'histoire à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), Yves Gingras s'intéresse tout particulièrement à l'histoire et à la sociologie des sciences.

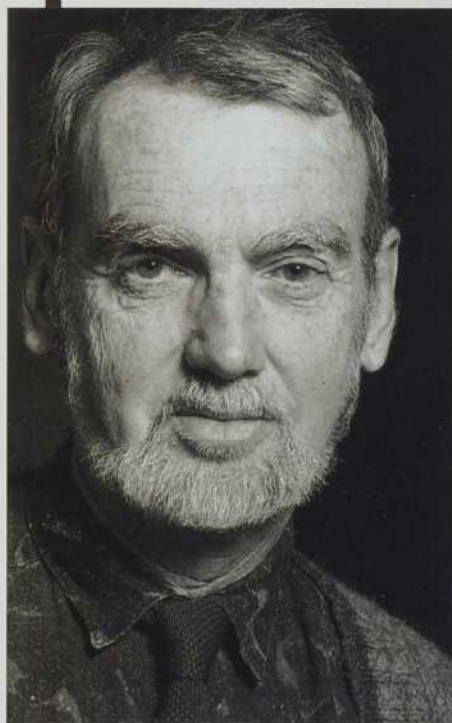


Robert Langlands

# Un explorateur de l'abstrait

**Robert Langlands est assurément l'un des grands mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle. Né en 1936 en Colombie-Britannique, il travaille aujourd'hui au très prestigieux Institute for Advanced Study à Princeton au New Jersey. Il visite régulièrement le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal. Ses travaux de recherche ont initié ce qu'on appelle maintenant « Le programme de Langlands ».**

propos recueillis  
par Stéphane Durand



**De quelle façon choisissez-vous vos sujets de recherche ?**

J'aime les grandes théories, surtout dans les mathématiques et les domaines voisins. Je me suis épris de quelques-unes mais sans vraiment comprendre leur portée lorsque j'étais encore étudiant. Depuis, je reviens continuellement à l'une ou l'autre en essayant de l'aborder à l'aide de petits calculs. Parfois, mais rarement, ces calculs ont mené à des idées nouvelles et utiles.

**Qu'est-ce qui vous fascine le plus dans les mathématiques : l'abstraction, les structures sous-jacentes, les résultats surprenants, la rigueur... ?**

Ce n'est pas la rigueur. La rigueur, c'est quelque chose qui s'impose. On fait des démonstrations rigoureuses parce que c'est nécessaire. Ce que j'aime, c'est le côté

romantique des mathématiques. Il y a des problèmes, même de grands problèmes, que personne ne sait aborder. On tente alors de trouver un sentier qui mène au sommet ou qui permet de s'en approcher.

Il y a une comparaison que j'aime bien. Parmi mes héros se trouve Cavalier de La Salle qui avait comme ambition de conquérir tout un continent. Il avait des plans d'exploration, mais personne ne l'a écouté. Il a quand même fait de grandes découvertes. J'aime avoir l'impression d'être devant un continent vierge. J'aime les problèmes dont la solution exige des théories inédites et insoupçonnées. En d'autres termes, j'aime les mathématiques qui font rêver. Mais faute de grande théorie, j'aime aussi au besoin simplement faire des calculs ou manipuler des formules.

**Croyez-vous que les mathématiques permettent d'aller au-delà de l'imagination ou de l'intuition ?**

Dans les mathématiques, on crée, au fur et à mesure qu'elles avancent, des notions nouvelles. Ces notions influencent notre façon de penser et font en sorte que notre imagination et notre intuition formées sont en état de capter bien des choses qui échappent à l'imagination et à l'intuition naïves.

**Comment avez-vous choisi une carrière en mathématiques ? Ce choix s'est-il imposé à vous très jeune ?**

Ce fut une surprise pour moi de faire des mathématiques ! Lorsque j'étais jeune, j'habitais un petit village et je travaillais avec mon père qui était menuisier-charpentier. J'ai essayé de faire ce métier, normalement j'aurais dû devenir moi aussi menuisier-charpentier, mais je n'étais pas doué ! Il fallait donc trouver autre chose. Et ce qui m'a amené aux mathématiques fut un pur hasard.

En fait, à l'école secondaire, j'étais un étudiant pas du tout sérieux; je voulais être rebelle et ne rien faire. Mais comme j'avais sauté une année, j'étais plus jeune que mes camarades et donc pas assez âgé pour décrocher ! Dans ma dernière année du secondaire, un de mes enseignants, M. Vogler, que je n'ai malheureusement pas réussi à retrouver lorsque bien plus tard j'ai voulu le remercier, a pris une heure de classe et le temps de tout le monde simplement pour me convaincre que je devrais continuer. Il me persuada.

Je suis alors allé à l'université, assez jeune en fait, mais sans savoir dans quelle branche me diriger. J'ai donc passé des tests d'aptitude. Après coup, le conseiller m'a dit que je semblais bon en mathématiques. Il m'a alors proposé de faire des études en actuariat, ce qui ne me semblait pas assez éclatant,

ou de devenir mathématicien, en mentionnant qu'il fallait alors faire un doctorat. Je suis resté abasourdi, car je ne savais pas ce qu'était un doctorat ! Mais j'étais trop gêné pour lui demander. La journée même, je suis allé voir quelqu'un d'autre pour lui demander la signification de ce mot. Il m'a expliqué, et je me suis dit : j'aurai donc un doctorat. Voilà comment s'est fait mon choix d'une carrière de mathématicien ! En fait, je crois qu'il s'agissait de la première occasion qu'on me présentait de devenir ou de faire quelque chose de sérieux. Je l'ai simplement saisie.

## Le programme de Langlands

Les travaux de Robert Langlands ont permis d'établir un lien extrêmement important et fructueux entre deux branches différentes des mathématiques : la théorie des nombres et certaines formes de symétrie. La théorie des nombres étudie les structures cachées dans le comportement des nombres entiers, tandis qu'une symétrie est une action qui laisse inchangée un objet. Par exemple, si l'on tourne un carré d'un quart de tour, on retrouve une figure identique. Cette idée apparemment très simple peut devenir extrêmement compliquée lorsqu'on l'applique à des objets mathématiques plus abstraits, et en particulier à des structures mathématiques de dimensions infinies. Le programme de Langlands, considéré aujourd'hui comme la clé de voûte de la théorie des nombres, a apporté une nouvelle lumière sur une foule d'anciens problèmes. Il est en particulier relié à la démonstration du célèbre théorème de Fermat.

**Souvent, on dit que les mathématiciens font leurs plus grandes découvertes très jeune. Était-ce vrai dans votre cas ?**

J'ai fait ma découverte la plus importante à l'âge de 31 ans. Mais j'ai commencé ma carrière un peu tard. Je regrette beaucoup n'avoir pas commencé à l'âge de 12 ans, ce qui dans un autre milieu aurait été possible. Ces quatre ou cinq années de plus m'auraient apporté beaucoup d'avantages par la suite. Mais peut-être aussi que ces

années d'adolescence « gaspillées » m'ont donné un goût pour la liberté et l'indépendance d'esprit qu'une formation plus suivie aurait détruit.

**En physique, la théorie de la relativité et la mécanique quantique nous ont appris à remettre en question des idées qui semblaient naturelles, et à ne plus nous fier à nos sens. Y a-t-il des exemples similaires en mathématiques ?**

Moi, je me fie toujours à mes sens, sauf qu'en vieillissant je suis devenu myope et un peu sourd, mais je crois comprendre ce que vous voulez dire. La relativité et la mécanique quantique ont bouleversé les idées des savants et ont même influencé la pensée du commun des mortels. En mathématiques, le théorème de Gödel énonçant qu'il y a des affirmations vraies mais indémonstrables a eu un effet semblable quoique moins percutant.

Un autre exemple est le suivant. Au VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C., à l'époque de Pythagore, la découverte de longueurs irrationnelles fut bouleversante. Les mathématiciens et philosophes de ce temps eurent apparemment beaucoup de mal à changer leurs idées et à construire une géométrie qui en tenait compte.

Une autre découverte bouleversante a été celle effectuée par Gauss, Lobatchevski et Bolyai, au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Ils ont prouvé l'existence de géométries pour lesquelles l'hypothèse d'Euclide, affirmant l'existence d'une unique ligne droite qui est parallèle à une autre et qui passe par un point donné, est fautive. On s'est méfié longtemps de cette découverte, mais les exemples de ces savants ont mené aux géométries de Riemann et enfin à la théorie de la relativité générale d'Einstein.

**Avez-vous des exemples de résultats surprenants qui défient votre intuition ou votre imagination ?**

Personnellement, je trouve que le théorème de Fermat, même démontré, défie mon intuition et mon imagination. (Voir l'article de Henri Darmon sur ce sujet en page 30.)

**Pourtant vous y avez contribué indirectement !**

Seulement indirectement, le mot est important. Le théorème de Fermat est une conséquence inattendue d'un autre

théorème (de Taniyama-Shimura-Weil). Ce dernier appartient à un cadre cohérent, auquel je crois parce qu'il correspond à un ordre que je suis habitué de voir dans la théorie des nombres, et qui constitue pour moi sa beauté. Par contre, selon mon intuition ou mon imagination, le théorème de Fermat aurait pu être faux sans que cet ordre n'ait été dérangé.

**Quelle est votre vision des mathématiques ?**

Que le mot mathématiques soit au pluriel en français exprime très bien que dans les mathématiques, comme dans la littérature ou dans la musique, il y en a pour satisfaire tous les goûts. Il y a :

1) Les mathématiques très actuelles, et même à mon goût un peu légères telle l'analyse combinatoire qui est souvent difficile et très importante pour les applications contemporaines, mais qui n'exigent ni culture mathématique profonde ni grande connaissance d'autres domaines de la science; elles exigent néanmoins une intelligence crue forte, et une partie de leur champ s'ajoutera sans doute au patrimoine mathématique pour l'enrichir.

2) La haute culture mathématique, enracinée dans le monde classique mais surtout dans les XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, et dont la démonstration du théorème de Fermat doit être la réussite la plus connue du grand public.

3) Les mathématiques liées aux sciences naturelles. Les plus importantes sont peut-être la géométrie, la mécanique des fluides, la théorie des probabilités avec ses liens à la mécanique statistique, et peut-être les mathématiques encore à établir et à développer de la renormalisation dans la théorie des particules et dans la mécanique statistique.

**En terminant, quels sont les problèmes importants actuels ?**

Si j'avais la force et le temps, et je n'ai ni l'un ni l'autre, il y a trois problèmes auxquels je voudrais apporter ma contribution : premièrement, la notion de fonctorialité qui est centrale au programme dit de Langlands, surtout en ce qui concerne ses applications aux grands problèmes de la théorie des nombres telles la conjecture d'Artin, la conjecture de Ramanujan et la conjecture de Hasse-Weil; deuxièmement, une théorie analytique de la renormalisation qui s'appliquerait d'abord à la mécanique statistique, mais qui serait assez profonde pour porter aussi sur la théorie quantique des champs à haute énergie (c'est-à-dire la physique des particules élémentaires); troisièmement, une compréhension mathématique de la turbulence. Mais, hélas, à mon âge, il ne s'agit là que de châteaux en Espagne ! ☐

# Les mathématiques dans la nature

## du léopard



**On connaît depuis longtemps l'importance des mathématiques dans certains domaines comme la physique, mais depuis peu on la découvre aussi en biologie et en botanique. Des phénomènes que l'on croyait dus au hasard ou à l'action des gènes se révèlent être la conséquence d'une dynamique mathématique. L'exemple peut-être le plus spectaculaire est celui du pelage des animaux.**

par Stéphane Durand

### Pourquoi le léopard est-il tacheté et le tigre rayé ?

**P**ourquoi le pelage est-il tacheté pour certains animaux et rayé pour d'autres ? Pourquoi les taches de la girafe sont-elles plus grosses et de forme différente de celles du léopard ?

Pourquoi certains animaux, comme la souris et l'éléphant, n'ont-ils pas de motifs ? Pourquoi y a-t-il des animaux à corps tacheté et à queue rayée mais jamais l'inverse, c'est-à-dire à corps rayé et à queue tachetée ?

Toutes ces questions ont aujourd'hui une réponse mathématique. Le modèle décrit la façon dont réagissent et se propagent sur la peau deux produits chimiques différents : un qui colore la peau et un qui ne la colore pas ; ou plus précisément, un qui stimule la production de mélanine (colorant la peau justement) et un qui inhibe cette production.

Ce qui est remarquable, c'est que l'équation montre que les différents motifs de pelage dépendent seulement de la grosseur

et de la forme de la région où ils se développent. Autrement dit, la même équation de base explique tous les motifs. Mais alors, pourquoi le tigre et le léopard ont-ils des motifs différents puisque leurs corps sont très similaires ? Parce que la formation des motifs ne se produirait pas au même moment durant la croissance de l'embryon. Dans le premier cas, l'embryon serait encore petit et, dans l'autre, il serait beaucoup plus gros.

Plus précisément, l'équation montre qu'il ne se forme pas de motif si l'embryon est très petit, qu'il se forme un motif rayé si l'embryon est un peu plus gros, un motif tacheté s'il est encore plus gros, et aucun motif s'il est trop gros. Voilà pourquoi la souris et l'éléphant n'auraient pas de motif.

De plus, à surfaces égales, la forme fait une différence. Ainsi, si on considère une certaine surface assez grosse pour permettre la formation de taches et qu'on lui donne une forme cylindrique et longue (comme une queue) sans changer son aire totale, alors les taches se transforment en rayures !

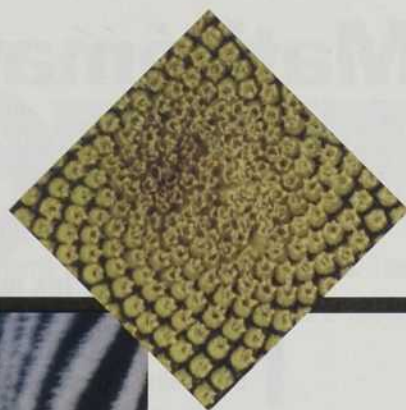


Ainsi, un unique système d'équation semble gouverner tous les motifs de pelage qu'on retrouve dans la nature. Le même genre d'équation permet aussi d'expliquer les motifs des ailes de papillon, ainsi que certains motifs colorés des poissons exotiques. Mentionnons toutefois que les processus de diffusion chimique dont nous venons de parler (appelés mécanismes de réaction-diffusion) n'ont pas encore été directement observés sur la peau des animaux, bien que certaines évidences indirectes semblent confirmer leur présence. Les substances chimiques en question se trouveraient en effet dans l'épiderme ou juste en dessous, et il est très difficile de les détecter expérimentalement. Pour l'instant donc, ce modèle reste un modèle, bien que de plus en plus de preuves indirectes semblent le confirmer. De toute façon, qu'un même modèle réussisse à expliquer presque toute la diversité et la richesse des motifs des animaux est sûrement le signe qu'il contient une bonne part de vérité.

### Le nombre de pétales des fleurs

Pourquoi le nombre de pétales des fleurs est-il souvent un des nombres suivants : 3, 5, 8, 13, 21, 34 ou 55 ? Par exemple, les lis

# au tournesol



ont 3 pétales, les boutons d'or en ont 5, les chicorées en ont 21, les marguerites ont souvent 34 ou 55 pétales, etc. Par ailleurs, lorsqu'on observe le cœur des tournesols on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens. Pourquoi le nombre de spirales est-il en général soit 21 et 34, soit 34 et 55, soit 55 et 89, ou soit 89 et 144 ? Même chose pour les pommes de pin : pourquoi ont-elles 8 spirales d'un côté et 13 de l'autre ? Et finalement, pourquoi le nombre de diagonales d'un ananas est-il aussi 8 dans une direction et 13 dans l'autre ?

Ces nombres sont-ils le fruit du hasard ? Non ! Ils font tous partie de la suite de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., où chaque nombre s'obtient à partir de la somme des deux précédents. Depuis longtemps on avait remarqué que ces nombres étaient importants dans la nature, mais c'est seulement depuis peu qu'on comprend pourquoi. C'est une question d'efficacité dans le processus de croissance des plantes. L'explication est néanmoins un peu compliquée et on ne la présentera pas ici. Contentons-nous de mentionner qu'elle est reliée à un autre nombre fameux, le nombre

d'or, lui-même intimement lié à la forme spirale de certains coquillages. Mentionnons aussi que, dans le cas du tournesol, de l'ananas et de la pomme de pin, la correspondance avec les nombres de Fibonacci est très exacte, tandis que dans le cas du nombre de pétales des fleurs, elle est plutôt vérifiée en moyenne; et dans certains cas le nombre est doublé, car les pétales sont disposés sur deux rangées.

L'ADN n'est donc pas tout ! Contrairement à ce qu'on a longtemps pensé, beaucoup de caractéristiques du monde vivant ne sont pas codées dans les gènes, mais résultent de processus mathématiques à l'œuvre durant la phase de croissance des organismes. Bref, les mathématiques sont partout autour de nous. ☒

## L'auteur

Stéphane Durand est physicien, chercheur au Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal et professeur de physique au cégep Édouard-Montpetit.

## Pour en savoir plus

[www.crm.umontreal.ca/math2000](http://www.crm.umontreal.ca/math2000),  
[www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html](http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html)

Murray, J. D., « Les taches du léopard », *Pour la Science*, mai 1988, p. 78.

Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1993, 767 pages.

Douady, S. et Y. Couder, « La physique des spirales végétales », *La Recherche*, janvier 1993, p. 26.

# Mathématiciens du COEUR

La santé par les mathématiques ? Des chercheurs démontrent que rien ne peut résister à une belle équation !

par Félix Légaré

Depuis une vingtaine d'années, Leon Glass, mathématicien au département de physiologie de l'Université McGill, s'emploie à jeter des ponts entre les hautes sphères des mathématiques du chaos et les réalités concrètes de la médecine. Grâce à sa maîtrise de la dynamique non linéaire (une branche des mathématiques utile notamment pour l'étude des phénomènes chaotiques), il vient peut-être de mettre à jour les mécanismes fondamentaux de dérèglements cardiaques comme l'arythmie.

Récemment, son équipe publiait les résultats d'une expérience durant laquelle on est parvenu, pour la première fois, à supprimer une arythmie cardiaque provoquée artificiellement dans les cellules d'un cœur de lapin. Avec la complicité de Kevin Hall, l'un de ses étudiants, et de Jacques Billette, du département de physiologie de l'Université de Montréal, il a réalisé cet exploit à l'aide d'un stimulateur cardiaque modifié qui pourrait éventuellement être commercialisé et sauver des vies.

L'équation maîtresse de ses travaux, qu'il est impossible de résumer ici, permet d'interpréter mathématiquement différents types d'arythmie. Dans un cœur, il y a une communication constante entre l'atrium (le haut du cœur) et les ventricules, explique Jacques Billette, le responsable du volet médical. Un conduit, situé entre les deux, produit un délai entre chaque impulsion électrique provoquant la contraction du cœur : c'est le rythme cardiaque. « Plus on les étudie avec précision, dit-il, et plus on s'aperçoit que ces échanges peuvent, dans des situations particulières, générer des types de signaux beaucoup plus complexes qu'on ne l'avait cru jusqu'à maintenant. »

Grâce à la dynamique non linéaire, on a pu concevoir un programme d'ordinateur qui interprète les signaux chaotiques provo-



Michel Larose

quant l'arythmie et qui renvoie au cœur un message qui le remet au pas. Le programme est inséré dans un micro-ordinateur couplé à un stimulateur cardiaque modifié qui, lui, se charge de détecter les impulsions et d'émettre les signaux correcteurs.

Cependant, précise Jacques Billette, cette expérience ne corrigeait qu'un type assez inoffensif d'arythmie. « Il fallait d'abord démontrer l'efficacité de notre hypothèse avec un modèle simple et facile à contrôler avant de s'attaquer à des désordres plus graves et plus complexes, comme la fibrillation, qui est encore assez mal comprise. »

Les défibrillateurs actuels peuvent sauver des vies, mais ils n'agissent qu'au moment où le danger menace et que le patient a perdu conscience (c'est ce qui s'est produit au gala des Gémeaux en 1997 lorsque le

réalisateur Richard Martin s'est effondré devant les spectateurs). L'équipe de Leon Glass croit qu'il sera possible d'interpréter certains signaux bien avant une défaillance. Un dispositif pourrait alors agir plus tôt et plus vite.

Cette découverte permettrait aussi de perfectionner les stimulateurs cardiaques actuels. Le problème de cet appareil, souligne Leon Glass, c'est que ses paramètres sont réglés au moment où on l'implante dans le corps d'une personne. Ils tiennent compte de l'état de santé du patient à ce moment-là. Si, avec le temps, son état se modifie, il faut tout recommencer. « Les algorithmes que nous avons mis au point peuvent s'adapter à un grand nombre de variables : on pourrait donc implanter une seule fois un stimulateur cardiaque qui s'ajusterait ensuite automatiquement aux changements du corps. »

Une fois les tests terminés, on pourra facilement glisser le nouveau programme sous le capot d'un stimulateur cardiaque puisqu'il convient à une technologie déjà existante. On envisage même de déborder le champ des désordres cardiaques : Leon Glass s'attaque déjà, en collaboration avec des chercheurs américains, à la conception de mécanismes de contrôle des crises d'épilepsie.

« En fait, on pourrait étendre les travaux à de nombreuses parties du corps, dont les tissus nerveux, conclut-il. Mais pour que les choses évoluent plus vite, il faudra faire plus de recherches et travailler de concert avec des équipes multidisciplinaires de mathématiciens et de médecins. » Une rencontre qui ne survient cependant que trop rarement, déplore-t-il. □

## Pour en savoir plus

Kevin Hall, David J. Christini, Maurice Tremblay, James J. Collins, Leon Glass, Jacques Billette, « Dynamic Control of Cardiac Alternans », *Physical Review Letters*, vol. 78, n° 23, 9 juin 1997.

# Qui dit mieux ?

**Une vente aux enchères semble être le genre d'activité entièrement soumise aux caprices des acheteurs et à la force de leurs désirs. On croirait que ces caractéristiques bien humaines échappent tout à fait à la rigueur mathématique d'une théorie.**

par Jacques Robert

**P**ourtant, la théorie des jeux permet de formaliser le mécanisme des enchères, et même de prendre l'intuition en défaut. Pour la plupart des gens, la vente aux enchères classique, dite à l'anglaise ou à la criée, évoque un groupe de personnes réunies devant un encanteur, offrant des prix de plus en plus élevés pour un bien qui sera vendu au dernier enchérisseur. Or il existe de nombreux autres types d'enchères. Interprété dans son sens large, le terme « enchère » désigne tout mécanisme structuré de concurrence visant à déterminer qui obtient l'article en jeu, et à quel prix.

Dans ce sens, une grande partie des transactions dans nos économies se fait par l'intermédiaire d'enchères : appels d'offres publics ou privés, adjudications des bons du trésor, vente de droits d'exploitation, produits agricoles, etc. Si l'on inclut les mécanismes d'enchères doubles (où les deux côtés du marché sont en concurrence), tous les marchés boursiers deviennent du coup désignés par ce terme. Vu l'importance du phénomène, les économistes ont cherché à développer une théorie mathématique des enchères.

## Maximiser le gain

Considérons un exemple concret : quelqu'un désire vendre un bien. Il peut organiser une enchère à la criée, classique, ou une enchère dite fermée au premier prix. Dans ce dernier cas, les participants soumettent un prix par écrit, et celui qui a soumis le prix le plus élevé l'emporte. De ces deux mécanismes d'enchères, lequel permettra au vendeur d'obtenir le prix le plus élevé ?

Essayons de répondre intuitivement à la question. Dans l'enchère à la criée, les participants sont forcés d'ouvrir leur jeu jusqu'à ce que les prix atteignent voire dépassent ce qu'ils sont prêts à payer. Dans l'enchère fermée, par contre, les participants soumettent



Peter Dean/Tony Stone

une seule mise, qui est en général inférieure à leur propre évaluation du bien, puisqu'ils veulent aussi maximiser leur profit. On pourrait croire que l'enchère à la criée donne lieu à des prix plus élevés, mais ce n'est pas nécessairement le cas, car le prix des enchères ne monte pas nécessairement jusqu'au maximum de ce que le gagnant est prêt à payer. Le prix est plutôt fonction de ce que le deuxième plus haut miseur est prêt à payer. Comme on voit, l'intuition seule ne permet pas de trancher. Une analyse formelle du problème est nécessaire.

## L'approche mathématique

La théorie des jeux permet d'étudier ce genre de problème. Développée dans les années 40 puis appliquée en économie et en politique dès les années 70, cette théorie formalise les interactions stratégiques entre agents rationnels. Une fois l'enchère décrite comme un jeu dans le cadre de cette théorie, l'analyse du comportement des participants à ce jeu devient possible. Le but est d'identifier ce qu'on appelle l'équilibre stratégique du jeu. Cet équilibre spécifie la stratégie optimale pour chaque joueur, compte tenu

des stratégies des autres joueurs.

Dans l'enchère à la criée, les stratégies optimales sont simples à identifier. Chaque participant a intérêt à demeurer dans la course tant que le prix reste sous la valeur qu'il attribue au bien. Dans l'enchère au premier prix, les stratégies sont plus complexes. En offrant un prix plus élevé, les participants augmentent leurs chances de gagner. Mais s'ils gagnent, leur gain est moindre, puisqu'ils payent davantage que ce qu'ils croient être un prix juste. Cet arbitrage est complexifié par le fait que chacun doit anticiper les stratégies des autres.

## Les travaux de Vickrey

On peut approcher ce genre de problème grâce aux travaux de l'économiste canadien William Vickrey, un spécialiste des finances publiques qui a beaucoup fait avancer la théorie des enchères. Dans le cas le plus simple, l'équilibre stratégique peut être obtenu en résolvant une équation. Le résultat est surprenant : les deux mécanismes d'enchères s'équivalent. La moyenne des prix gagnants est la même.

William Vickrey a reçu le prix Nobel d'économie en 1996 pour ses travaux sur la théorie des enchères. À la suite de ses travaux, d'autres chercheurs qui se sont penchés sur des cas plus complexes ont pu répondre à plusieurs questions importantes. Ces développements n'auraient pas été possibles sans les outils mathématiques de la théorie des jeux. M

## L'auteur

Jacques Robert est professeur au département de sciences économiques de l'Université de Montréal, et directeur de recherche au Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO).

## Pour en savoir plus

L'Équipe de recherche en enchères électroniques, sur le site :

[www.cirano.umontreal.ca](http://www.cirano.umontreal.ca)

# Les maths



enfo

L'aérodynamisme des voitures et des ailes d'avion, la courbure des barrages, le profil des tunnels de métro ou la forme des goulots de bouteille de bière sont des exemples courants où une forme doit être optimisée. Il existe d'autres exemples moins évidents, comme l'identification d'un objet et sa position par un robot, ou le meilleur emplacement des appareils de chauffage dans une pièce. La vision, ou le rapport entre les formes géométriques et leur interprétation par notre cerveau, est également liée à ce domaine. Pourquoi le nombre d'or donne-t-il des proportions si agréables à l'œil ? L'esthétique peut-elle être mathématisée ?

Voici quelques exemples concrets qui illustrent l'évolution de ce vaste domaine de recherche.

## La forme des colonnes

L'un des tout premiers problèmes d'optimisation de forme semble avoir été formulé par Lagrange en 1770, puis repris plus tard par T. Clausen, en 1849. Il s'agit de trouver la meilleure forme pour le profil d'une colonne afin d'éviter le flambage, c'est-à-dire sa rupture latérale sous l'effet de son poids ou de sa charge. Au cours de l'histoire, la plupart des colonnes étaient assez rectilignes, avec de légères différences dans le style des cannelures ou des chapiteaux, comme les colonnes doriques ou corinthiennes. La caryatide, une colonne en forme de statue féminine, fait exception. Présenterait-elle des avantages structurels par rapport aux diverses formes de colonnes utilisées au cours de l'histoire ?

Depuis Lagrange, plusieurs chercheurs ont suggéré des solutions, mais ce n'est que récemment que les mathématiciens Steven Cox et Michael Overton ont apporté une solution complète à ce problème d'optimi-

sation de forme conforté par d'élégantes simulations numériques. La caryatide n'est évidemment pas une forme optimale, comme on aurait pu s'en douter, car sa forme est davantage dictée par des critères



esthétiques. Par contre, les simulations numériques montrent que, pour un volume de matériau donné, une colonne ayant un ou plusieurs pincements présente une meilleure résistance au flambage que la colonne uniforme.

## L'aérodynamisme

Le design des voitures, des bateaux ou des avions est un exemple classique d'optimisation des formes. L'aérodynamisme d'un véhicule diminue la résistance de l'air, ce qui permet une augmentation de la vitesse ou une diminution de la consommation de carburant. Parmi les réussites dans ce domaine, on peut citer le design de l'aile des avions Airbus, qui a résulté en des diminutions importantes de la consommation de carburant. Toutefois, le problème se complique du fait que l'avion vole à des régimes variables, c'est-à-dire à des vitesses, des altitudes et des inclinaisons qui changent. Il faudrait idéalement une géométrie des ailes com-

plètement variable et rapidement ajustable pour que sa forme soit optimale durant tout le vol. Cela est bien entendu irréalisable sur les gros porteurs.

Mais lorsque l'application est importante, même les idées les plus folles sont considérées. Des études réalisées dans les souffleries du Centre Langley de la NASA montrent que l'on peut modifier l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion par des trous faits dans cette aile. Les travaux de Jameson à Princeton montrent que l'on peut obtenir le même effet en modifiant très légèrement la forme; ces petites variations produisent un grand changement dans l'écoulement d'air. Contrairement à ce que l'on croyait il y a 10 ans, il serait donc relativement facile d'optimiser la forme de l'aile d'avion, et ce, pour différents régimes. Néanmoins, comme c'est souvent le cas en mathématiques, cette application de la théorie est encore au stade expérimental. Elle pourrait cependant demain devenir une technologie rentable.

Toujours dans le domaine des transports, on peut également signaler les travaux portant sur la forme des bateaux, menés par le mathématicien français Jean-Paul Zolésio en collaboration avec un architecte naval de Cannes. Ces travaux ont mené à la conception de la coque et des voiles d'un des bateaux français participant à la coupe America. D'autres mathématiciens, comme Olivier Pironneau, se sont aussi intéressés à l'optimisation de la nage par la déformation du corps du nageur.

## Peut-on entendre la forme d'un tambour ?

Vers 1965, le regretté mathématicien Mark Kac pose cette question lors d'une conférence de la Mathematical Association of America. Il s'agissait alors d'identifier la forme de la membrane d'un tambour à



# performe

**Les problèmes de conception de forme ou de structure intéressent depuis longtemps les ingénieurs, les architectes et les artistes. Ils passionnent aussi les mathématiciens qui, grâce à la puissance des ordinateurs d'aujourd'hui, peuvent aller au-delà des études purement théoriques et révéler des designs nouveaux et inattendus.**

par Michel Delfour

partir de la connaissance du spectre du son qu'il émet. Le spectre est l'ensemble de toutes les fréquences de vibration de cette membrane.

Le problème était mal posé, mais il a tout de même mené à l'étude des objets isospectraux. Deux objets sont dits isospectraux si leurs spectres sont indiscernables. Ce problème peut avoir des applications dans la détection des sous-marins. Chaque type de sous-marin a une signature propre au sonar, qui dépend de sa forme. Si l'on trouvait une façon de changer cette signature, cela rendrait possible le camouflage.

## La plaque imaginaire de Cheng et Olhoff

La description d'un objet géométrique en vue de l'optimisation de ses propriétés pose des questions fondamentales assez délicates. Un des exemples qui a eu un grand impact sur la communauté scientifique est celui de la compliance d'une plaque circulaire. La compliance est une mesure du travail de déformation d'un objet. Elle donne une idée des contraintes internes qui peuvent causer des ruptures ou des modifications des propriétés mécaniques du matériau. Le problème est le suivant : comment peut-on optimiser la compliance d'un disque fait d'un volume de matériau donné par rapport à son épaisseur ?

À partir de simulations numériques, Cheng et Olhoff ont montré que la compliance était supérieure si l'on utilisait de petits raidisseurs plutôt qu'une plaque à l'épaisseur variable. La section de cette plaque optimale ressemble à un peigne avec des dents (les raidisseurs), de

plus en plus fines et de plus en plus nombreuses lorsqu'on se déplace du centre vers le bord. À la limite, on obtient une plaque imaginaire, faite d'un mélange de matériau et de vide.

L'ensemble des points qui forment la section de la plaque peut être assimilé à un ensemble flou, qui est une probabilité de présence des points. Cette notion mathématique plus générale remet en question la notion intuitive d'un objet géométrique. Ce phénomène, qu'Olhoff lui-même qualifiait de paradoxe, a été à l'origine d'un engouement chez les mathématiciens en ex-Union soviétique et aux États-Unis pour la théorie de l'homogénéisation, et pour la Gamma convergence en Italie.

Ces développements purement mathématiques ont été utilisés par l'ingénieur

Noboru Kikuchi dans le design des pièces d'automobile. À la surprise générale, ses calculs produisent des formes tout à fait réalistes, très proches de celles que les ingénieurs avaient élaborées au fil des ans.

## La perception des formes

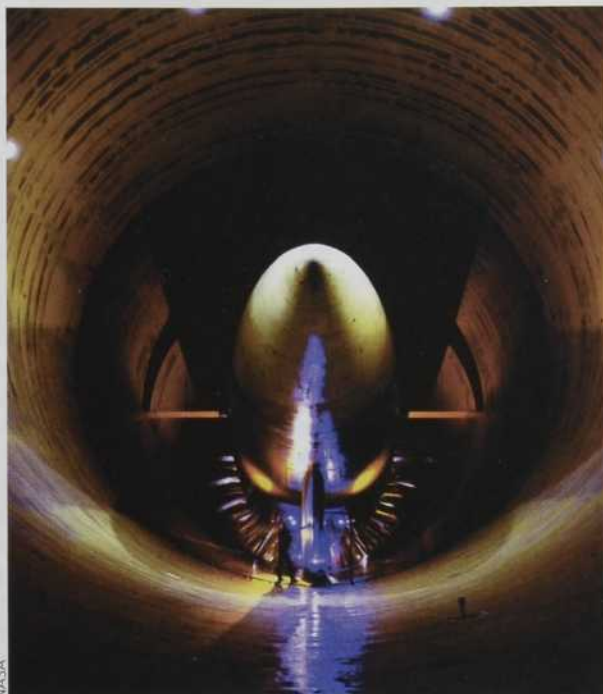
Identifier la forme d'un objet ou le sujet d'un dessin est une des fonctions de base de notre cerveau. Curieusement, cette capacité est hors de portée des plus puissants ordinateurs. Les images non paramétrisées ou non structurées échappent aux meilleurs algorithmes.

Comment l'œil et le cerveau analysent-ils les images ? Cette question relève d'abord de l'étude de la vision, de la perception et de l'interprétation des images, qui sont elles-mêmes des sujets complexes.

Mais une fois ces mécanismes bien compris, ils peuvent être chiffrés et traduits en algorithmes qui permettent non seulement de décrire et d'étudier ces phénomènes, mais aussi d'agir sur eux et de mettre la géométrie en action. Dans cette perspective, les mathématiques, par leur capacité de décrire l'immatériel, peuvent devenir la clef qui ouvre la porte de l'univers virtuel et du rêve sur commande. M

## L'auteur

Michel Delfour, professeur titulaire au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal, est membre du Centre de recherches mathématiques (CRM), de l'Ordre des Ingénieurs du Québec (OIQ), et de la Société Royale du Canada. Il a été le récipiendaire en 1995 du Prix Urgel-Archambault pour la physique, les mathématiques et le génie de l'Association canadienne-française pour l'avancement des sciences (ACFAS).



# Les nombres et leurs secrets

Aux siècles de Fermat, d'Euler et de Gauss, la théorie des nombres était vraiment la reine des mathématiques. Reconnue pour sa beauté et son élégance intrinsèque, elle a longtemps joui d'une réputation de théorie « pure », ayant peu d'applications pratiques.

par Claude Crépeau

**M**ais depuis un quart de siècle, elle est de plus en plus utilisée dans un domaine jusque-là inattendu : la cryptographie (la science du codage secret). La théorie des nombres prend tout à coup des airs mystérieux.

Depuis les travaux novateurs de Diffie et Hellman, puis ceux de Rivest, Shamir et Adleman, la sécurité d'une grande partie des informations confidentielles repose sur la difficulté légendaire de certains problèmes de la théorie des nombres. Les plus connus de ces problèmes sont la factorisation entière, l'extraction des racines discrètes et des logarithmes discrets.

Ces problèmes ont l'étonnante propriété d'être plus faciles à générer qu'à résoudre. Prenons un exemple, avec deux nombres : 3 251 et 5 939. Au bout d'une petite minute de calcul, on peut facilement trouver leur produit :  $3\,251 \times 5\,939 = 19\,307\,689$ . Par contre, résoudre le problème inverse (trouver deux nombres entiers tels que leur produit sera égal à 19 307 689, c'est ce qu'on appelle la factorisation) demande beaucoup, beaucoup plus de temps.

## La cryptographie

Le système RSA (conçu dans les années 70 par Rivest, Shamir et Adleman, trois chercheurs du MIT), repose essentiellement sur le même principe. Ce système, qui est le plus couramment utilisé pour le chiffrement d'informations que l'on veut garder secrètes, est d'autant plus difficile à percer que les nombres qu'il utilise ont de 200 à 300 chiffres. Les méthodes actuelles permettent de factoriser des nombres comptant au plus 155 chiffres. Les nombres de plus de 200 chiffres sont totalement hors de portée des méthodes de factorisation con-



Michel Larose

nues aujourd'hui. Il faudrait des millions d'années à tous les ordinateurs du monde pour accomplir cette tâche !

Comme l'enjeu est de taille — il en va de la sécurité des transactions bancaires et des diverses applications commerciales de la cryptographie — les cracks sont à l'œuvre, qu'ils soient chercheurs universitaires ou cyberfraudeurs. Dans ce domaine, en effet, tout progrès technologique ou théorique avantage autant les « bons » que les « méchants » ! D'ailleurs, la National Security Agency américaine emploierait à elle seule une véritable armée de mathématiciens. Par conséquent, de nouveaux records sont établis de temps en temps. Le dernier date du mois d'août 1999, c'est le nombre RSA-155. Sa factorisation a nécessité le travail de 300 ordinateurs personnels pendant une période de sept mois. Soit l'équivalent de 35 ans de calcul par une seule machine !

## De nouvelles méthodes

Les recherches sur la factorisation ont également favorisé l'émergence de méthodes radicalement nouvelles et tout à fait surprenantes. Il y a quelques années, l'Américain Peter Shor a développé une méthode très simple et très efficace pour factoriser les grands nombres ou résoudre les deux autres problèmes déjà cités. Alors, qu'attend-on pour l'utiliser ? C'est que cette méthode fonctionne sur un ordinateur qui n'existe pas encore ! Il s'agit bel et bien d'une idée révolutionnaire : dompter l'étrange nature de la mécanique quantique afin de la mettre au profit des services secrets. Des fonds considérables sont aujourd'hui consacrés à la mise au point de cet « ordinateur quantique », supermachine pleine de promesses, mais dont la réalisation est semée de difficultés techniques.

Si cette machine n'existe pas encore, la cryptographie de demain est pourtant née. On étudie déjà les problèmes difficiles qui résisteront à ce futur ordinateur quantique. L'enjeu est de découvrir un problème dont il est facile de générer des exemplaires, comme la factorisation, mais dont la résolution est la plus difficile possible. On pourrait alors générer une méthode secrète de chiffrement virtuellement impénétrable.

La théorie des nombres, considérée pendant des siècles comme une théorie pure, belle et élégante, mais sans véritables applications pratiques, est donc devenue essentielle pour les transactions financières les plus courantes, comme pour les opérations des services secrets partout dans le monde. ☐

## L'auteur

Claude Crépeau est professeur à l'École d'informatique de l'Université McGill.

## Pour en savoir plus

[www.cs.mcgill.ca/~crepeau/index.html](http://www.cs.mcgill.ca/~crepeau/index.html)

# La théorie des noeuds

**De tout temps, le scientifique a voulu traquer l'inconnu et révéler l'invisible. Pour ce faire, il a développé des outils de plus en plus puissants, notamment le microscope. Mais quelquefois, il faut plutôt des « lunettes mathématiques ».**

par Christiane Rousseau

Introduite au XIX<sup>e</sup> siècle, notamment par le mathématicien allemand C.F. Gauss, la théorie des nœuds a d'abord été utilisée pour modéliser des fils électriques enroulés. Ce n'est cependant que dans les années 30 que la théorie des nœuds se développe comme une théorie purement mathématique. Depuis quelques années, elle trouve des applications dans plusieurs domaines, notamment en biologie moléculaire.

## Dans la cellule

Support du code génétique, l'ADN peut atteindre une longueur de un mètre dans un noyau de cellule d'à peine quelques micromètres. La fameuse double hélice est donc étroitement enroulée dans la cellule. Lorsqu'un certain nombre de processus biologiques agissent sur une classe d'enzymes appelés topoisomérases, l'enzyme coupe les brins d'ADN, leur fait subir un certain nombre de croisements et les recolte. C'est le cas lors de la réplication de la cellule, la séparation des brins ne pouvant être faite sans couper plusieurs fois l'un ou les deux brins d'ADN.

Or chaque topoisomérase a une action qui lui est propre. Devant un paquet de molécules nouées et entrelacées — le résultat de l'action des topoisomérases —, comment le biologiste peut-il faire pour déterminer l'action de chaque topoisomérase ? Il doit mettre des « lunettes mathématiques ».

Pour identifier un nœud, on le compare aux nœuds simples qui sont dans les tables de nœuds. Cependant, l'observation d'une molécule au microscope électronique ne permet pas de déterminer quels brins passent au-dessus et quels brins passent en dessous (voir la figure). En outre, un même nœud peut se présenter de plusieurs façons différentes. Comment identifier les nœuds observés ? Ensuite, à partir de la connaissance du type

de molécules nouées ou entrelacées obtenues dans l'expérience, comment peut-on caractériser l'action de l'enzyme ?

Ensemble, spécialistes de la biologie moléculaire et théoriciens des nœuds travaillent à répondre à ces questions. Dans un cas particulier — l'enzyme Tn3 Resolvase —, l'action de l'enzyme a été caractérisée par le mathématicien de Witt Sumners. Les résultats font appel à des techniques mathématiques très sophistiquées. En particulier, le théorème de Sumners a aussi permis de prévoir la présence de molécules nouées à la manière du nœud  $6^2$ , qui apparaîtraient après quatre actions successives de l'enzyme. À la suite de cette prévision, on a effectivement observé ces molécules ainsi nouées.

Mais comment décider si le nœud que l'on a sous les yeux est bel et bien le nœud  $6^2$  des tables de nœuds ? Il existe des tables de nœuds construites selon le nombre minimum de croisements des nœuds. Peu importe les déformations que l'on fait subir au nœud, il n'est pas possible de diminuer ce nombre de croisements : c'est une des caractéristiques du nœud. Par exemple, dans la table des nœuds, il y a trois nœuds premiers à six croisements : le nœud  $6^2$  est le deuxième de cette série.

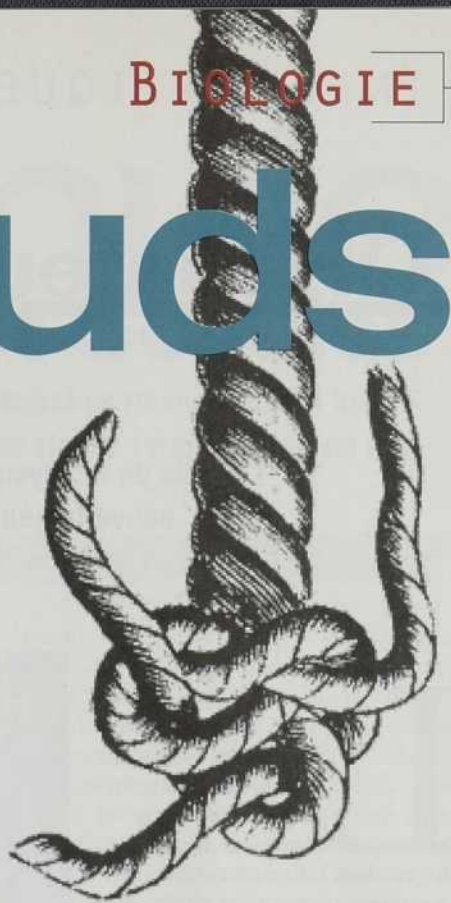


Un brin d'ADN noué à la manière du nœud  $6^2$  (le deuxième nœud à six croisements).

Mais la table de nœuds n'est pas une panacée : il existe en effet 12 965 nœuds premiers de 13 croisements ou moins ! Et un nœud à 13 croisements est un nœud simple pour qui observe la complexité de la nature. Rajoutons quelques croisements et on excède la puissance des ordinateurs.

## La théorie évolue

Les questions de classification des nœuds sont donc loin d'être résolues dans le cas général. Cela a forcé les théoriciens des



nœuds à chercher des méthodes de plus en plus puissantes pour déterminer l'équivalence de deux nœuds. L'une des méthodes consiste à introduire des invariants, pour les caractériser. Un invariant que nous avons déjà rencontré est le nombre minimum de croisements d'un nœud. Mais cet invariant ne détermine pas un nœud de façon unique. En effet, si le nombre minimum de croisements de deux nœuds est le même, cela ne veut pas dire que les nœuds sont équivalents. Des informations plus fines sont nécessaires.

Une des percées majeures des dernières années a été l'œuvre de Vaughan Jones, un mathématicien travaillant en mécanique statistique. Il a découvert, par une méthode tout à fait détournée, un nouvel invariant des nœuds. Cet invariant, appelé polynôme de Jones, était le plus puissant des invariants connus jusqu'alors. Les travaux de Jones, qui lui ont valu en 1990 la médaille Fields, la plus haute distinction en mathématiques, ont par la suite ouvert tout un nouveau champ de recherche aux théoriciens des nœuds.

## L'auteur

Christiane Rousseau est professeure au département de mathématiques et de statistique et membre du Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal. Elle se spécialise en théorie des systèmes dynamiques, c'est-à-dire les systèmes qui évoluent dans le temps

## Pour en savoir plus

[www.cs.ubc.ca/spider/scharein/](http://www.cs.ubc.ca/spider/scharein/)  
[www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf](http://www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf)

# Ordinateurs du futur

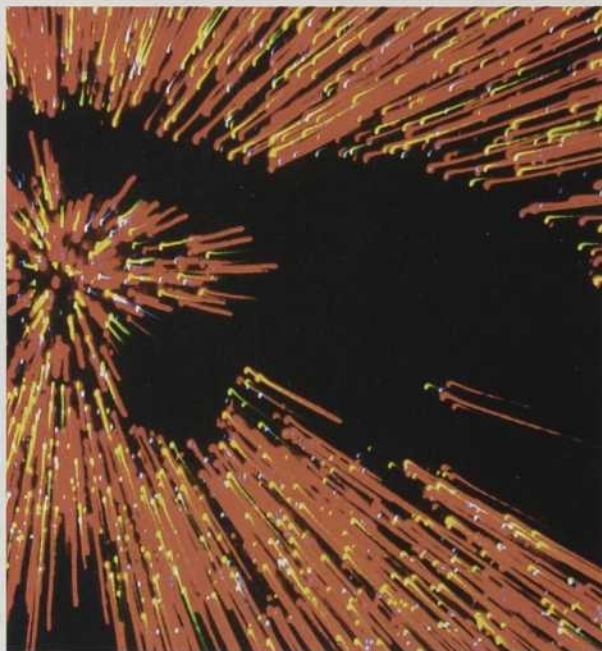
Les lois de la physique quantique pourraient conduire à la fabrication d'une nouvelle génération d'ordinateurs absolument révolutionnaire.

par Charles Allain

**L**a mécanique quantique, qui régit le mouvement des corps dans les domaines atomique, moléculaire et corpusculaire, est une théorie dont la logique est tellement contraire à l'intuition naïve qu'il faut absolument avoir recours aux mathématiques pour bien la saisir. La capacité des mathématiques à transcender nos sens prend ainsi toute sa signification dans l'étude du monde microscopique (voir le texte de Stéphane Durand en page 31). Malgré son côté « ésotérique », la mécanique quantique possède depuis longtemps des applications technologiques en électronique (le transistor et le laser, par exemple). D'autres applications se profilent à l'horizon. En effet, les chercheurs étudient actuellement deux avenues possibles : la cryptographie quantique, qui permettrait d'envoyer des messages secrets impossibles à déchiffrer, et les ordinateurs quantiques, qui constitueraient une nouvelle génération révolutionnaire d'ordinateurs.

## Cryptographie quantique

« Les possibilités offertes en cryptographie par la mécanique quantique tiennent aux propriétés particulières de l'information quantique par rapport à l'information classique traditionnelle », précise Gilles Brassard, professeur au département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal. En effet, l'information quantique ne peut être mesurée avec précision. Il est par exemple impossible de mesurer certaines caractéristiques des particules de matière ou de lumière. Par conséquent, on ne peut reproduire ou cloner ces particules puisqu'on ne connaît pas avec précision toutes leurs caractéristiques. De



plus, dès que l'on essaie de mesurer effectivement l'information quantique, on la perturbe, donc on n'obtient qu'une information incomplète qui ne nous renseigne pas avec précision. Ces propriétés, qui peuvent sembler négatives au premier coup d'œil, peuvent toutefois être mises à profit.

« Intuitivement, la mécanique quantique peut sembler contraire à la logique, mais une fois comprise, elle devient assez simple et même naturelle », ajoute Gilles Brassard. En cryptographie quantique, il a été prouvé expérimentalement que l'on pouvait créer un système dont la sécurité serait absolue, indépendamment de la puissance de calcul et de la technologie utilisée par l'espion éventuel. Comment est-ce possible ?

Imaginons que A envoie à B un message quantique. Si l'espion C essaie d'intercepter la communication, il se trouve à perturber *ipso facto* le contenu du message. A et B, en vérifiant si le message reçu correspond au message émis, se rendront compte immé-

diatement de la tentative d'interception, puisque le message envoyé n'est plus le même. Et l'espion, s'il a réussi à intercepter le message, n'a toutefois pas réussi à le comprendre, puisque l'information mesurable sur un système quantique est forcément incomplète.

A envoie donc à B une séquence aléatoire quantique de 0 et de 1 qui ne veut rien dire. Si cette séquence est interceptée, A et B s'en rendront immédiatement compte puisqu'elle sera modifiée. Par contre, si elle ne l'est pas, elle leur procure une suite de bits commune qui sera alors complètement secrète. Si cette suite est aussi longue que le message à chiffrer, elle permet de mettre en action un système de codage classique absolument inattaquable.

« Cette hyper-sécurité n'est pas nécessaire actuellement pour protéger les informations qui circulent sur le Web », ajoute Gilles Brassard. « La cryptographie traditionnelle est basée sur la croyance qu'il n'existe pas d'algorithmes assez performants pour percer le système RSA (inventé en 1977 et utilisé en ce moment à grande échelle, en particulier par les systèmes PGP; voir l'article de C. Crépeau en page 14). Pourtant, l'expérience nous prouve que de nombreux systèmes que l'on croyait invulnérables lors de leur invention ont tous été percés. Il est donc concevable que l'on assiste au bris du système RSA un jour. Néanmoins, l'infrastructure en place ne favorise pas actuellement l'implantation de la cryptographie quantique sur une échelle commerciale, car cela coûterait trop cher. On peut toutefois imaginer que certains pays ont peut-être déjà commencé à se servir de la cryptographie quantique pour protéger leurs secrets les plus vitaux. »

# La formule de Black et Scholes

**On s'en doute, mathématiques et marchés financiers font bon ménage. Mais qui aurait cru qu'une simple formule allait un jour révolutionner la bourse ?**

par René Garcia

$$C = SN(d) - Le^{-rt}N(d - \sigma\sqrt{t})$$



Bourse de Montréal

récent conclu entre les bourses canadiennes.

Le CBOE battait récemment son propre record, avec plus de 26 millions de contrats d'option sur les actions en circulation. Les contrats d'option offrent un outil utile à la fois pour l'assurance (parce qu'ils fixent le prix futur d'un titre), et pour la spéculation. Rares sont les gestionnaires de portefeuilles institutionnels qui n'utilisent pas les titres dérivés dans leurs stratégies financières. En outre, la formule de Black et Scholes peut servir à déterminer le pourcentage d'options à ajouter à un portefeuille d'actions pour protéger sa valeur. En somme, un quart de siècle après son « invention », la formule de Black et Scholes a durablement influencé le paysage boursier. En 1997, Black et Scholes ont d'ailleurs vu leurs travaux récompensés par le prix Nobel d'économie.

## La formule évolue

Bien qu'elle ait joué un rôle central, la formule de Black et Scholes n'est cependant pas parfaite. Dans certains cas, elle conduit à des erreurs d'évaluation considérables. Les opérateurs boursiers ont réagi en ajustant la formule selon leur expérience des marchés. Les scientifiques, quant à eux, ont tenté de généraliser la formule pour qu'elle puisse mieux s'adapter à la réalité qu'elle décrit. Certains tentent même d'utiliser des algorithmes d'apprentissage, appelés réseaux de neurones, permettant à un ordinateur de déduire par lui-même une formule plus appropriée. Dans ce cas, les performances seraient supérieures à la formule originale. Il va sans dire que les opérateurs boursiers se montrent intéressés !

## L'auteur

René Garcia est professeur agrégé en sciences économiques à l'Université de Montréal et directeur de recherche au Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO).

## Pour en savoir plus

Le Chicago Board Options Exchange : [www.cboe.com](http://www.cboe.com)

## L'ordinateur quantique

Une des propriétés les plus prometteuses de l'information quantique est qu'elle peut être simultanément en plusieurs états différents. C'est ce qu'on appelle le principe de superposition. Sous certaines conditions, un électron, par exemple, peut être simultanément sur deux orbites différentes du même atome. On dit alors de cet électron qu'il est dans un état superposé : à la fois ici et là-bas. Toutefois, l'électron ne peut pas être détecté sur les deux orbites en même temps; dès qu'il est détecté à un endroit plutôt qu'à un autre, l'information cesse d'être quantique et devient « classique ».

Ce phénomène de superposition pourrait avoir des conséquences révolutionnaires dans la conception des futurs ordinateurs. Un ordinateur quantique tirerait justement parti de ce principe quantique. En utilisant des particules dans des superpositions de plusieurs états en même temps, un tel ordinateur pourrait parvenir à trouver la réponse à certains problèmes extrêmement complexes en accélérant de beaucoup le temps nécessaire à leur solution. C'est ce qu'on appelle le parallélisme quantique. En fait, l'accélération pourrait être d'autant plus grande que le problème est difficile : la factorisation de très grands nombres apparaît d'ailleurs comme l'exemple le plus spectaculaire, étant donné ses répercussions en cryptographie classique.

En théorie, un ordinateur quantique pourrait donc effectuer  $2^{1000}$  calculs en parallèle, ce qu'un ordinateur classique de la taille de l'Univers ne pourrait même pas faire. Un ordinateur quantique de taille modeste, n'ayant à sa disposition qu'un millier de bits quantiques, pourrait s'attaquer avec succès aux systèmes de cryptographie présentement les plus utilisés comme si ce n'était qu'un codage de boy-scout.

Pour l'instant, pareil ordinateur n'existe qu'en version jouet, c'est-à-dire qu'il ne peut traiter que quelques bits d'information. Gilles Brassard espère toutefois que la mise au point d'un véritable ordinateur quantique est imaginable : « Mais si l'on découvre un jour que l'ordinateur quantique n'est pas faisable, cela nous aura tout de même permis d'apprendre de nouvelles lois de la physique. Et cette connaissance n'aurait pas été possible sans l'apport des mathématiques. »

## Pour en savoir plus

[www.qubit.org/](http://www.qubit.org/)  
<http://p23.lanl.gov/Quantum/quantum.html>

Les contrats d'option entre deux parties sont vieux comme le monde. Cependant, la création de marchés d'échange spécifiquement organisés sur ces titres, appelés plus généralement produits dérivés, est relativement récente. Elle a coïncidé avec les travaux de Fisher Black et Myron Scholes. En 1973, ces deux économistes avaient obtenu une formule mathématique permettant de calculer la valeur d'un contrat d'option. Ce contrat donne le droit d'acheter une action à un prix et à une date future fixés par le contrat. C'était une simple formule, dont ils n'imaginaient pas les conséquences...

En donnant aux investisseurs un prix de référence qui facilitait les échanges à grande échelle, la formule de Black et Scholes a suscité une véritable explosion des marchés de produits dérivés. Pour la première fois, une formule mathématique chiffrait la valeur du contrat d'option, donnant une base de négociation acceptée par les deux parties. Dès 1973, le Chicago Board Options Exchange (CBOE) a été créé, suivi par plusieurs bourses d'échange de produits dérivés à travers le monde. Au Canada, les titres dérivés s'échangent tous aujourd'hui à la Bourse de Montréal grâce à un accord

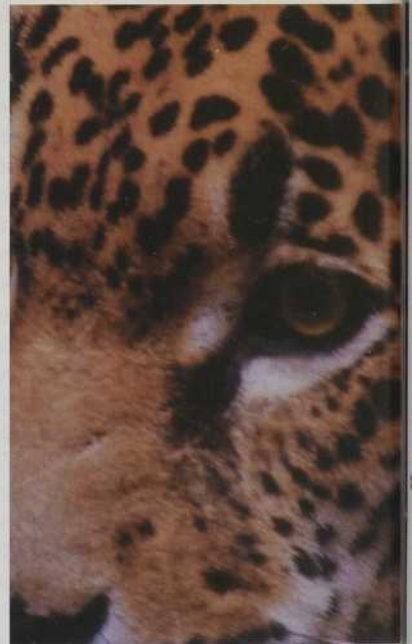
# Un concours d'affiches



Pourquoi les graines du tournesol forment-elles 21 courbes dans un sens et 34 dans l'autre ?



Pourquoi les boutons d'or ont-ils 5 pétales ? Pourquoi les ananas ont-ils 8 diagonales dans une direction et 13 dans l'autre ? Pourquoi les marguerites ont-elles souvent 34, 55 ou 89 pétales ? Tous ces nombres font partie de la suite de Fibonacci (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...) reliée au nombre d'or, et où chacun s'obtient par la somme des deux précédents. On a découvert depuis pourquoi ces nombres sont importants dans la nature.



Quel est le lien entre les noeuds de marin et l'action d'un virus ?



Les virus s'attaquent aux longues molécules d'ADN au cœur des cellules en les nouant de diverses façons. La théorie mathématique des noeuds permet d'identifier la signature des différents types de virus pour nous aider à les combattre.



**D**ans le cadre de l'Année mondiale des mathématiques, la Société mathématique européenne a organisé un concours d'affiches dont le but était de transmettre un message mathématique de façon visuellement attrayante. Ces affiches étaient destinées à être placées dans les métros des grandes villes. C'est Stéphane Durand, un chercheur du Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, qui s'est mérité le premier prix avec une série de sept affiches dont nous reproduisons ici les six premières, la septième étant présentée sur le site [www.crm.umontreal.ca/math2000](http://www.crm.umontreal.ca/math2000). Le site comprend également des textes explicatifs pour chacune des affiches de la série. Les trois premières ont été adaptées et placées dans les wagons du métro de Montréal au mois de janvier 2000. Elles devraient être aussi utilisées dans d'autres pays.

Pourquoi le léopard est-il tacheté et le tigre rayé ?



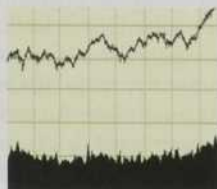
Pourquoi le pelage de certains animaux est-il tacheté tandis qu'il est rayé pour d'autres ? Pourquoi les taches de la girafe sont-elles beaucoup plus grosses que celles du léopard ? Pourquoi y a-t-il des animaux à corps tacheté et queue rayée mais pas l'inverse ? Toutes ces questions ont aujourd'hui une réponse mathématique.

Quel est le lien entre un escargot et le nombre  $(1+\sqrt{5})/2$  ?



Le nombre  $(1+\sqrt{5})/2$  est le nombre d'or qu'on retrouve un peu partout dans la nature. La spirale de la coquille du nautilus est une construction géométrique basée sur ce nombre. Même Stradivarius l'a utilisé pour construire ses fameux violons.

Quel est le lien entre une fougère et les fluctuations de la bourse ?



La géométrie fractale est basée sur la reproduction d'un même motif à des échelles de plus en plus petites (regardez bien la fougère). Une telle structure auto-similaire se retrouve un peu partout. Elle décrit la forme des choux-fleurs, des nuages, des poumons, des côtes marines, la distribution des galaxies à travers le cosmos, et même la façon dont fluctuent les marchés boursiers.

Quel est le lien entre un flocon de neige et une crise cardiaque ?



La formation des flocons de neige, les fluctuations de certaines populations animales, la fréquence des éruptions volcaniques, la propagation des épidémies, les variations du climat, les irrégularités des battements cardiaques; tous ces phénomènes sont reliés à la théorie du chaos, une théorie qui cherche l'ordre dans le désordre – et le désordre dans l'ordre.

# Les applications médicales des fractales

Qu'ont en commun la répartition des galaxies, la forme des nuages et des fougères, et la structure des vaisseaux sanguins du corps humain ? Ils peuvent tous être décrits et étudiés par un outil mathématique fascinant : les fractales.

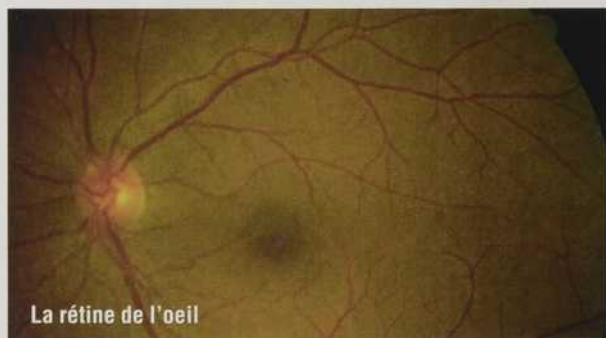
par Fahima Nekka

**F**ormalisée vers le milieu des années 70 par Benoit Mandelbrot, la géométrie fractale sert à décrire les objets très irréguliers de la nature, dont les formes laissent néanmoins apparaître des motifs similaires à des échelles d'observation de plus en plus fines (éponge, flocon de neige, etc.; voir la fougère page 18). Il existe de nombreux objets de la nature, de tailles physiques très différentes, qui peuvent être décrits par les fractales. Cette géométrie a donc rapidement mené à des applications dans plusieurs domaines, aussi divers que la géologie et la cosmologie. Elle a également des applications plus pratiques, notamment dans le domaine biomédical où, en moins d'une décennie, elle s'est implantée comme outil de diagnostic.

## La détection du cancer du sein

Les concepts de la géométrie fractale commencent à être utilisés en anatomie microscopique. Récemment, une méthode de détection du cancer du sein fondée sur les propriétés des structures fractales a été proposée. Le diagnostic d'un tel cancer est souvent basé sur des évaluations morphologiques par le pathologiste des propriétés physiques des cellules, telles que la taille, la forme, la régularité et l'apparence de la chromatine. Cette substance, présente sous forme de granules dans le noyau de la cellule, est formée d'ADN et de protéines. Pour établir son diagnostic, le pathologiste doit, entre autres, évaluer dans les cellules prélevées sur un tissu suspect, la présence de vides dans la chromatine, son apparence (est-elle fine ou grossière ?) et son aspect (est-elle regroupée ou éparse ?). Or la part de subjectivité de ces critères rend difficile un diagnostic certain.

Andrew Einstein et ses collaborateurs ont développé une méthode de diagnostic plus objective, qui exploite les propriétés fractales de ces aspects morphologiques des cellules



La rétine de l'oeil

du sein. L'irrégularité du noyau, qui est observée de manière subjective par le pathologiste, a pu être quantifiée à l'aide de deux dimensions fractales. D'autre part, les cellules se distinguent entre autres par l'existence de vides dans la chromatine. L'irrégularité et la taille de ces vides est un signe de malignité du cancer. Il existe un paramètre fractal, la lacunarité, qui décrit la distribution des vides dans une structure.

Armé de ces paramètres objectifs, l'équipe d'Einstein a réalisé une étude sur un groupe de 41 femmes. Le diagnostic basé sur l'approche fractale s'est avéré correct dans 95 % des cas.

## En pharmacologie

La géométrie fractale a été introduite en technologie pharmaceutique, particulièrement grâce au professeur R. Tawachi de la faculté de pharmacie de l'Université de Montréal. Il a été parmi les premiers à l'utiliser pour étudier certains problèmes pharmaceutiques liés à la sélection des produits de base et à l'évaluation de la performance des procédés impliqués dans leur fabrication.

Les opérations des procédés de synthèse impliquées dans la production des poudres pharmaceutiques (telles que la cristallisation, la granulation, le tamisage et le séchage) peuvent influencer la forme et la surface des cristaux de la poudre. Ces changements morphologiques peuvent à leur tour affecter les propriétés physico-chimiques et mécaniques du produit final (telles que la dissolution, la réactivité chimique et le tassement). La caractérisation physique des

poudres pharmaceutiques est donc une étape importante dans les procédés qui précèdent la mise en forme d'un médicament. L'approche fractale a contribué à établir le lien entre les irrégularités de surface des cristaux et la qualité du médicament.

## Les maladies de l'œil

Les pathologies de l'œil engendrent des changements morphologiques de la structure vasculaire : le réseau des vaisseaux sanguins qui le parcourent se transforme. Les schémas de classification actuels se basent sur ces changements structuraux comme critères de détection et d'aide au diagnostic. L'évaluation de ces changements fait évidemment appel au jugement du pathologiste. Dans le cas des rétinopathies diabétiques (une affection de la rétine chez les diabétiques), l'analyse fractale a pu être utilisée avec succès. Elle a été employée comme moyen objectif de classification des changements morphologiques induits par la maladie, donnant ainsi au praticien un outil de diagnostic plus précis.

La géométrie fractale est utilisée avec succès dans le domaine biomédical. Elle procure au pathologiste des outils mathématiques pour quantifier ce qui jusque-là était difficilement mesurable. Au-delà du rôle descriptif et quantitatif de ces outils, leur capacité d'établir le lien entre la structure et la fonction d'un objet, et d'élucider les mécanismes impliqués, suscite un grand espoir. □

## L'auteur

Fahima Nekka est chercheure à la faculté de pharmacie de l'Université de Montréal.

## Pour en savoir plus

[www.syntim.inria.fr/fractales/fractales-eng.html](http://www.syntim.inria.fr/fractales/fractales-eng.html)  
[www.math.fau.edu/voss/links.htm](http://www.math.fau.edu/voss/links.htm)

# Les mathématiques du temps

L'un des objectifs de la météorologie est de prédire de la façon la plus précise possible le temps qu'il fera à plus ou moins long terme. Les mathématiques ont servi à développer des solutions tout à fait uniques pour tenter d'y parvenir.

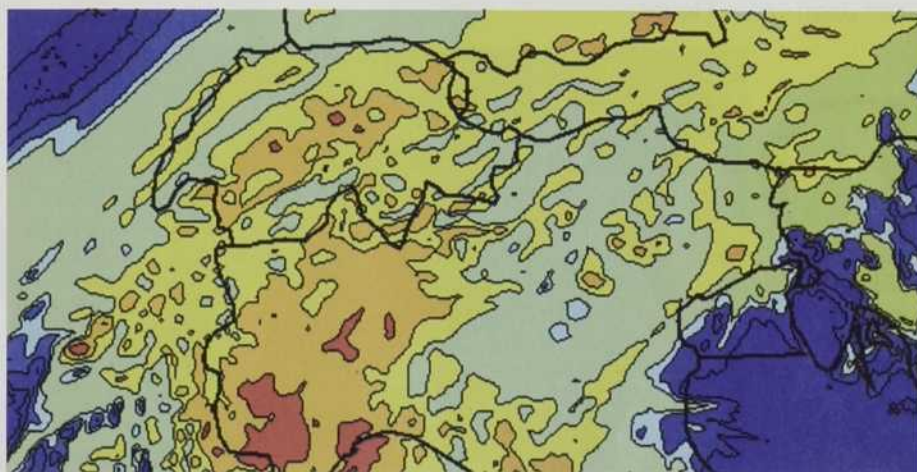
par Michel Béland

L'origine du nom de la météorologie vient de la Grèce antique. Le mot *meteor* signifiait des particules en suspension dans l'atmosphère; la météorologie s'est donc donné l'objectif d'étudier ces mêmes particules. À l'origine purement descriptive, la météorologie est rapidement devenue un lieu d'application de la physique, de la chimie et des mathématiques.

En fait, à cause de la visibilité et de l'importance des phénomènes qu'elle décrit, elle en vint rapidement à susciter l'intérêt des plus grands scientifiques. Le premier mathématicien célèbre à s'intéresser à ce problème fut von Neumann dans les années 50. On lui doit la première formulation des équations météorologiques pouvant être intégrées aux superordinateurs de l'époque. Depuis lors, les techniques n'ont cessé de se développer et de se raffiner, en particulier grâce aux contributions du mathématicien québécois André Robert, des universités Laval et McGill.

De plus, aux techniques de prévision proprement dites, il faut ajouter celles que nécessitent les études de turbulence atmosphérique (un problème non encore résolu), et le problème associé de sa prévisibilité. En effet, même les formes les plus simplifiées des équations météorologiques peuvent mener à des formes chaotiques de l'écoulement; ce phénomène fut pressenti par des mathématiciens comme Poincaré et Kolmogorov (1954). La démonstration de ce que l'on appelle maintenant l'effet papillon fut le fruit du travail du grand météorologue Edward Lorenz, au MIT dans les années 70. Cela signifie que la plus petite erreur d'observation ou de modélisation peut dans certaines conditions s'amplifier exponentiellement et rendre toute prévision impossible après un certain temps, ce qui est caractéristique d'un écoulement chaotique.

Au fur et à mesure que se sont raffinés les modèles de prévision, on s'est rendu compte



## La physique de l'air

Parmi les lois physiques qui décrivent l'écoulement et la composition atmosphérique autour du globe, on retrouve la seconde loi de Newton. Appliquée à un gaz, elle est formulée sous la forme des équations de Navier-Stokes. Or, ce système d'équations, auquel se rajoutent une équation pour la thermodynamique et une équation pour la conservation de la masse, ne possède pas de solution analytique (sauf pour des situations banales). Comme l'un des buts que poursuivent les météorologues est de prédire le temps à plus ou moins longue échéance, il a fallu développer des solutions tout à fait uniques pour tenter d'y parvenir.

de l'importance cruciale de la spécification de l'état initial dans les trois dimensions de l'atmosphère. En effet, à chaque instant, des milliers, sinon des millions d'observations provenant de partout dans le monde (bateaux, avions, radiosondages, plateformes dérivantes à la surface des océans, stations de surface, etc.) et de l'espace (satellites sondant le rayonnement émis par l'atmosphère dans une gamme étendue de longueurs d'onde) sont colligées et analysées afin d'obtenir la description la plus exacte possible de l'état de l'atmosphère à un instant

donné. Ces observations doivent ensuite être reportées sur la grille de solution des modèles.

Des mathématiciens de premier plan, comme Lyons, se sont penchés sur ce problème, et on a vu récemment naître des nouvelles techniques très sophistiquées. Ces techniques permettent de tenir compte de la structure de l'écoulement atmosphérique duquel sont issues les observations et, plus encore, de l'évolution récente dans le temps de ce même écoulement. Cela permet de diminuer considérablement l'erreur d'estimation de l'état initial de l'atmosphère, et donc d'augmenter la durée de validité de la prévision subséquente.

La complexité des équations, et surtout la taille du problème (des millions de degrés de liberté), nécessitent l'utilisation des plus puissants ordinateurs sur le marché, bien que, encore aujourd'hui, la précision des prévisions est encore limitée par la puissance insuffisante des machines. Ici au Québec, nous avons la chance d'avoir l'une des meilleures équipes de chercheurs au monde dans ce domaine. À partir du Centre météorologique canadien situé à Dorval, en banlieue de Montréal, l'équipe travaille avec des ordinateurs extrêmement puissants, soit

*suite à la page 34*

# Biomathématiques

L'histoire de la vie revue et corrigée par les mathématiques. David Sankoff fait partie des scientifiques en train de réécrire l'histoire de la vie, depuis l'apparition de la cellule originelle jusqu'à l'avènement de l'homme.

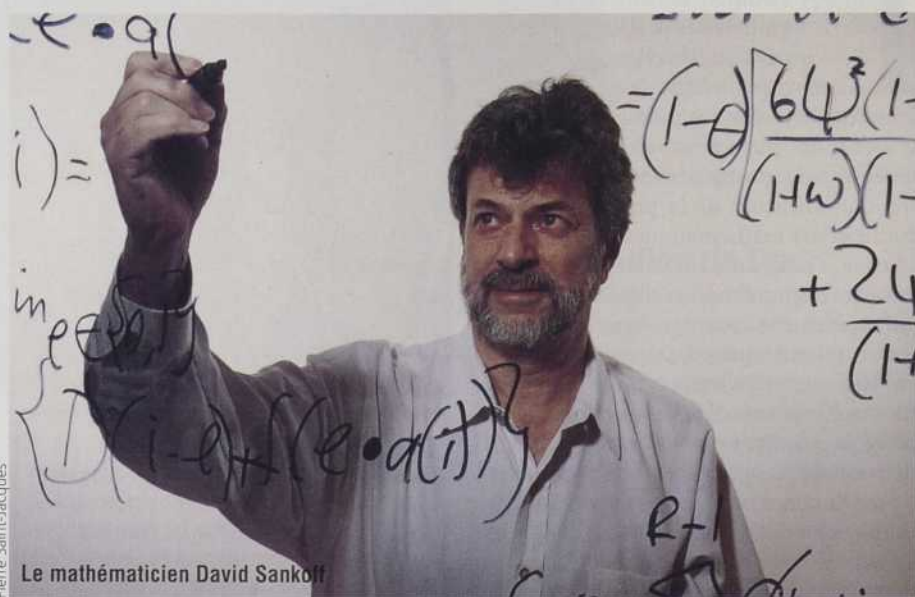
par Jean-Marc Fleury

Dans sa maison d'Ottawa ou au Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, où il dirige les projets de recherche de plusieurs étudiants, David Sankoff « voit » dans les chromosomes les degrés de parenté entre les espèces vivantes. « Je cherche à construire quelque chose de cohérent en termes mathématiques qui permette de mieux comprendre un processus biologique. J'aime comprendre comment l'évolution fonctionne. »

Sans l'apport de mathématiciens et d'informaticiens comme David Sankoff, les grands projets de séquençage de génomes se termineraient en autant de gargantuesques indigestions de données. À lui seul, le livre du génome humain comprend plus de deux milliards de mots de trois caractères écrits à partir d'un alphabet de seulement quatre lettres : A, C, G et T. Ces lettres représentent les quatre molécules qui, enchaînées l'une à la suite de l'autre, constituent les chromosomes.

Aujourd'hui, il existe des séquenceurs capables de lire automatiquement les suites de A, C, G et T. Chaque jour, des scientifiques transmettent à des centres génomiques des séquences interminables du genre

GAATTCGGGTTCAATCTCGTAGAACTTGCCTTGGTGGACAGTGGGACG  
T A C A A C A C C T G C C G G T T T T C A T  
TAAGCAGCTGGGCATACCGGTTCTTTTC  
CTTCTCCCTTCCCATGTACCCACTGC  
CATGGGACCTGGTCGCATTGCCGT  
TGCCATGTTGGACATATTGACCTGATCCT  
GTTTGGCATCCTCGAAGACG  
GCCAACAGACGGGAATACCTGCCCGCCC  
CTTGGCGTCGTTTTACGTAAGT  
TGGTCGTCCTTGTATTGGGCAGGCATCC  
CTCGTGGCTTGGACTGCTCG.....



(une minuscule partie d'un gène de la mouche du vinaigre).

Au rythme actuel, les ingénieurs moléculaires connaîtront dans deux à trois ans la séquence des six milliards de A, C, G et T des chromosomes humains. En même temps, ils auront recueilli les séquences génomiques de plusieurs espèces de bactéries, de plantes et d'animaux. Mais sans nouveaux outils mathématiques, cette énorme soupe à l'alphabet n'aura pas de sens. La traduction de ces assommantes séquences en une connaissance des génomes sera autant une prouesse mathématique que biologique.

Pour compliquer la tâche, on a constaté que la séquence d'un gène est découpée en sections dispersées à travers un chromosome, séparées par de très longues séquences sans aucune signification apparente. De plus, certaines séquences indicatrices de maladies génétiques graves consistent en d'interminables répétitions des trois mêmes

lettres. Dans d'autres cas, la séquence défectueuse d'une maladie prend des dizaines de formes différentes.

Or, les détectives génomiques ne se satisfont pas de connaître les génomes des êtres vivants, ils cherchent aussi à déterminer leur filiation et leur succession dans le temps. Cette généalogie du vivant s'appelle phylogénie. Le déchiffrement moléculaire des génomes est en train de la réécrire. C'est, entre autres, en phylogénie que David Sankoff a apporté, et continue d'apporter, ce qu'il appelle humblement « une contribution ».

## Pour mieux comprendre les changements

En effet, les êtres vivants partagent de nombreux gènes. D'une espèce à l'autre et à travers le temps, les gènes se modifient et se réarrangent. Parfois, un nouveau gène se crée à partir d'une lecture dans le sens

suite à la page 34

# Des ordinateurs intelligents

**Des ordinateurs capables de lire, de reconnaître, voire d'apprendre... Sommes-nous en pleine science-fiction ? Non, plutôt au coeur des recherches de pointe en intelligence artificielle. Et ces recherches sortent peu à peu des universités, car elles connaissent d'importantes applications industrielles.**

par Yoshua Bengio

**A**pprendre et s'adapter sont des activités relativement aisées pour nous, êtres humains. Il serait très utile aux ordinateurs de pouvoir faire de même dans le cas de certains problèmes complexes. Une des branches de la recherche en intelligence artificielle vise précisément à leur donner la capacité d'apprendre. Pour ce faire, des algorithmes d'apprentissage sont développés, qui sont essentiellement des recettes suivies par l'ordinateur. En général, on tente d'enseigner à la machine comment apprendre à partir d'exemples.

## Reconnaissance des formes

Au début des années 90, le groupe de recherche de AT&T sur la reconnaissance des formes et les algorithmes d'apprentissage a mis au point un système servant à la reconnaissance automatique des montants, écrits à la main, sur les chèques. L'ordinateur doit indiquer le montant qu'il reconnaît ou signaler son incapacité à le faire, auquel cas un être humain doit intervenir pour traiter le chèque. Plusieurs millions de chèques déposés dans les guichets automatiques sont ainsi traités à chaque mois par ce système.

L'algorithme d'apprentissage qui est utilisé dans ce cas provient de la recherche sur les réseaux de neurones artificiels. Cette recherche se base sur des principes de traitement de l'information inspirés du fonctionnement des neurones dans le cerveau. Ces algorithmes « apprennent » à partir d'exemples. Dans le cas cité, l'ordinateur apprend grâce à des images numérisées des montants écrits à la main. On soumet plusieurs centaines de milliers de chèques différents à l'ordinateur, en même temps que le montant qu'il devrait y reconnaître. Une fois que le système a été entraîné avec ces exemples, pour lesquels il connaît « la bonne réponse », on peut utiliser le système pour



Michel Larose

classifier de nouvelles images, pour lesquelles il ignore « la bonne réponse ».

Pourquoi utilise-t-on des algorithmes d'apprentissage ? C'est que, dans plusieurs cas, on ne comprend pas suffisamment un problème pour pouvoir écrire directement un programme qui résoudreait ledit problème. Par exemple, comme on sait très bien calculer la trajectoire d'un projectile, on peut facilement créer un programme qui effectuera ce calcul. Par contre, on ignore comment les êtres humains font pour reconnaître l'écriture. Et pourtant, on l'a vu, les algorithmes d'apprentissage permettent bel et bien à un ordinateur de le faire.

## Les ordinateurs généralisent

Un des avantages des algorithmes d'apprentissage est leur capacité de généralisation. Ils peuvent utiliser ce qu'ils « savent » pour reconnaître ce qu'ils n'ont jamais vu. Cette caractéristique est importante, puisqu'elle permet à l'ordinateur de distinguer un « a » manuscrit, même s'il est légèrement différent de celui qu'il connaît. Cependant, les mécanismes de la générali-

sation sont difficiles à appliquer, car ils sont mal connus. En plus, parmi les différentes façons de généraliser, il est impossible de dire à l'avance laquelle est la meilleure.

Les principes mathématiques qui permettent à l'ordinateur de généraliser ont commencé à être étudiés dans les années 60, mais la recherche ne s'est vraiment développée que depuis environ 15 ans.

Les principes utilisés sont les mêmes que ceux guidant l'évolution de la science. Lorsqu'un scientifique élabore une théorie, il cherche à obtenir un outil qui lui permettra, à partir des résultats déjà obtenus, de généraliser à de nouvelles situations. Si plusieurs théories différentes semblent en accord avec les données, il choisira en général la plus simple. D'autre part, plus les résultats expérimentaux sont nombreux et précis, plus la théorie qu'il peut en tirer sera sophistiquée. Aussi, les théories scientifiques se complexifient au fur et à mesure que se réalisent de nouvelles expériences dont elles doivent tenir compte. On retrouve ces deux principes dans l'analyse des algorithmes d'apprentissage. Pour ces al-

*suite à la page 34*



# Tous les mènent aux .

**Congestion routière et horaires de transport aérien sont parmi les problèmes auxquels peuvent s'attaquer avec succès les mathématiques. Grâce à des modèles et à des simulations efficaces, les gestionnaires sont en mesure de régler des casse-tête extrêmement complexes.**

par Patrice Marcotte et François Soumis

## L'heure de pointe

**L**a solution aux problèmes de congestion routière ne passe pas toujours par la construction de nouveaux ponts ou de nouvelles routes, comme cela se faisait dans un passé récent. La tendance actuelle est plutôt à une meilleure utilisation des infrastructures existantes.

Cela peut prendre diverses formes : diffusion d'information en temps réel par le biais de récepteurs situés dans les véhicules ou de panneaux à messages variables, tarification des axes routiers congestionnés, incitation au covoiturage, etc. Afin d'évaluer l'effet de ces politiques, il est important de bien comprendre les mécanismes de répartition du trafic sur le réseau, afin d'éviter certains effets pervers. En effet, ajouter des routes conduit quelquefois à augmenter la congestion ! (Voir encadré.)

Des modèles mathématiques, basés sur des principes de comportement des usagers, permettent de prédire le flux de véhicules sur les artères d'un réseau routier urbain. On distingue plusieurs types de modèles, suivant que l'on traite des réseaux de très grande taille (modèles macroscopiques) ou que l'on souhaite une représentation extrêmement fine des mouvements individuels de chaque véhicule (modèles microscopiques). Dans le premier cas, on traitera le flux de véhicules comme un fluide, alors que dans le second cas, on utilisera des techniques de simulation.

Plusieurs chercheurs, regroupés au Centre de recherche sur les transports ainsi qu'au Laboratoire sur les systèmes intelligents de transport de l'Université de Montréal, tentent d'approfondir notre compréhension des phénomènes de congestion. Ils cherchent également à améliorer les performances des réseaux de transport publics ou privés. Plusieurs de ces efforts ont



débouché sur la conception de logiciels interactifs tels que EMME/2 (INRO Consultants) pour la planification du transport urbain ou HASTUS (GIRO INC.) pour la conception des horaires de chauffeurs d'autobus, qui sont commercialisés dans plus de 100 villes dans le monde. Ces logiciels font appel à des techniques de pointe de la recherche opérationnelle, une science qui traite des problèmes d'optimisation de très grande taille en intégrant les techniques d'analyse mathématique et l'informatique.

## Les horaires des travailleurs aériens

Construire les horaires d'équipages dans les grandes compagnies aériennes est un des plus grands casse-tête posé à l'intelli-

gence. Il faut affecter des milliers de pilotes et d'agents de bord à des dizaines de milliers de vols chaque mois. Le problème est complexe, car les avions opèrent 24 heures par jour, 7 jours par semaine sur de vastes territoires chevauchant plusieurs fuseaux horaires. Les équipages, qui ne travaillent pas 24 heures par jour, doivent être remplacés et dormir en route. Les horaires doivent respecter les règles fort complexes de la convention collective sur les temps de travail et de repos chaque jour, chaque semaine et chaque mois. Par exemple, le temps de travail maximum permis durant une journée dépend du travail effectué les jours précédents, de la récupération réalisée au cours des nuits et du décalage horaire.

Le défi de pareilles problématiques est le

# Chemins

## UX math

nombre incroyable de solutions à considérer pour trouver la meilleure. Un pilote travaille 20 jours par mois et fait en moyenne 5 vols par jour en court courrier, soit environ 100 vols par mois. À chaque escale, un pilote doit être affecté à un vol; mais lequel choisir parmi la dizaine de disponibles? Cela donne  $10^{100}$  (c'est-à-dire, 1 suivi de 100 zéros) horaires de travail possibles durant le mois pour un pilote. Le nombre de solutions à considérer pour l'ensemble du personnel est donc  $10^{500\,000}$ ; il faut choisir un horaire pour 5 000 pilotes et agents de bord avec  $10^{100}$  choix pour chaque personne. Il n'est donc pas possible, même avec les ordinateurs les plus puissants, d'évaluer toutes ces solutions dans un temps raisonnable. Il faudrait des millions de millions de siècles.

Les mathématiques permettent de trouver une solution optimale. Elles offrent des méthodes minimisant une fonction en présence de contraintes partant d'une solution initiale et l'améliorant itérativement tant qu'une solution optimale n'est pas atteinte. Ces méthodes de base ne sont pas directement applicables au problème d'horaire d'équipages, qui est trop grand. Il faut des milliers de contraintes et variables pour chacune des milliers de personnes afin de décrire les chemins possibles au sein du réseau ainsi que les règles de la convention collective.

L'utilisation de l'optimisation mathématique pour ce problème a été rendue possible en utilisant des méthodes d'ajout de contraintes et de variables durant la résolution. Ainsi, nous commençons par résoudre un problème réduit ne contenant que les contraintes et variables principales. Nous ajoutons ensuite les variables permettant d'améliorer la solution et les contraintes qui ne sont pas respectées. Les variables à ajouter sont identifiées en résolvant des sous-problèmes trouvant si possible un meilleur horaire pour certains des employés. Ces sous-problèmes consistent à trouver un chemin de coût minimum dans le réseau des vols en respectant les contraintes de la convention collective. De cette façon, on atteint la solution optimale après quelques centaines d'itérations sans nécessiter la construction de tous les horaires.

Cette méthode de résolution a permis

d'obtenir des solutions réduisant de 5 % à 10 % les coûts de personnel. Ceci représente une économie pouvant dépasser 100 millions de dollars annuellement dans une grande compagnie aérienne.

De plus, nous intégrons dans la fonction à optimiser les préférences des employés en termes de jours de congé, heures de travail, destinations, etc. Cela permet d'augmenter la qualité de vie du personnel, en plus de réduire les coûts.

Cette approche intégrée dans un logiciel avec des bases de données et des interfaces graphiques est maintenant employée dans de nombreuses compagnies aériennes: Air Canada, Air Transat, Canadian Regional, Delta, TWA, Northwest, AWA, U.P.S., FEDEX, Swissair, Sabena, Air France, etc. Ce développement et cette commercialisation ont donné lieu à la créa-

tion de la compagnie AD OPT Technologies Inc. qui emploie maintenant une centaine de scientifiques dont la majorité ont des maîtrises ou des doctorats en informatique, ou en mathématiques appliquées. Cette entreprise qui poursuit sa croissance embauche plusieurs dizaines de nouveaux scientifiques chaque année. M

### Les auteurs

Patrice Marcotte est professeur titulaire au département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal. François Soumis est professeur titulaire au département de mathématiques et de génie industriel de l'École polytechnique de Montréal.

### Pour en savoir plus

[www.ad-opt.com](http://www.ad-opt.com)  
[www.crt.umontreal.ca/GERAD/](http://www.crt.umontreal.ca/GERAD/)  
[www.giro.ca](http://www.giro.ca)  
[www.inro.ca](http://www.inro.ca)  
[www.crt.umontreal.ca/CRT/](http://www.crt.umontreal.ca/CRT/)

### Une situation paradoxale

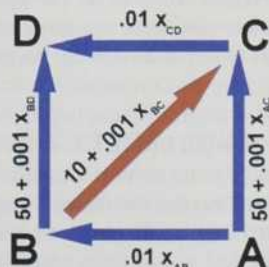
En situation de congestion, le temps de parcours  $T(x)$  d'un lien est une fonction croissante du nombre de véhicules  $x$  qui le parcourent. Par essais et erreurs, les usagers du réseau tentent de minimiser leur temps de parcours propre. Une situation stable, appelée affectation d'équilibre, sera atteinte lorsque aucun usager n'aura intérêt à modifier son trajet. Autrement dit, tous les chemins utilisés seront de durée égale et cette durée sera inférieure à celles des chemins non utilisés.

Le réseau formé des arcs bleus ci-contre est celui d'une municipalité M très affectée par la congestion. À côté de chaque lien du réseau sont indiquées les fonctions de congestion correspondantes. Ainsi, si 2 000 automobilistes empruntent le lien BD, leur temps de transport individuel sera égal à  $50 + 2\,000/1\,000 = 52$  minutes. Supposons que 6 000 véhicules doivent se rendre de A à D tous les matins. En tenant compte de la symétrie des données, ils se répartiront de façon égale sur les chemins ABD et ACD, et leur temps de transport commun sera égal à 83 minutes.

Cette situation intolérable est dénoncée par un candidat à la mairie de la municipalité, qui se fait élire en promettant la construction d'une autoroute reliant les sommets B et C du réseau. Une fois l'autoroute terminée, un nouvel équilibre est atteint, où 2 000 automobilistes empruntent maintenant chacun des 3 chemins disponibles (ABD, ACD et ABCD). Quelle n'est pas leur surprise, ainsi que celle du maire, de constater que leur temps de transport, loin d'avoir diminué, est passé de 83 à 92 minutes!

Une solution à ce problème serait de fermer l'autoroute. Il est cependant plus rentable d'imposer un péage sur le lien diagonal BC, ce qui permettra de simultanément réduire la congestion de tous les usagers, ainsi que de renflouer les coffres de la municipalité.

Patrice Marcotte



# Les mathématiques au service des affaires



Michel Larose

**L'efficacité et la rentabilité d'une entreprise, ou la performance d'une organisation, résultent souvent de la bonne coordination des efforts et des activités, et de la motivation de chacun des partenaires à maximiser la valeur de l'organisation.**

par Marcel Boyer

facilité au fur et à mesure que les dirigeants et partenaires de consortium seront plus compétents et qu'ils s'appuieront sur des systèmes d'information de gestion ou des systèmes de traitement de l'information plus performants. Ce sont là deux développements majeurs de la présente « révolution des technologies de l'information » qui vont permettre aux économistes mathématiciens de remplacer les avocats et relationnistes dans la négociation du partage des coûts.

La réalisation d'un projet peut dépendre de la valeur qu'y attachent les différents partenaires éventuellement appelés à le financer. Lorsque la valeur du projet est une information privée pour un partenaire donné, ce dernier peut vouloir biaiser en sa faveur, à la hausse ou à la baisse, la véritable valeur du projet, en particulier si la règle du partage des coûts fait intervenir cette valeur. Afin d'éviter ce genre de situation, la règle de partage des coûts doit être conçue de manière à ce que chaque partenaire ait intérêt à révéler la véritable valeur qu'il attache au projet. Pour un ensemble important de problèmes concrets, il existe une règle de partage efficace (tout projet rentable est réalisé), équilibrée (le total des contributions exigées est égal au total des coûts) et incitative (les partenaires révèlent leur information privée).

De manière générale, ces règles veulent que chaque partenaire verse pour le financement de l'infrastructure commune un montant égal à l'économie des coûts que lui procure sa participation, moins un pourcentage de l'économie globale de coût que permet le regroupement des partenaires. Ces règles dissocient donc la valeur du projet pour un partenaire donné de la part des coûts que ce partenaire devra assumer.

## La règle de Shapley-Shubik

Considérons par exemple une règle particulièrement intéressante, celle de Shapley-Shubik. Supposons qu'on ordonne les  $N$  partenaires d'une certaine façon et qu'on fasse payer au premier le coût entier de ses besoins

en supposant qu'il est seul, et au deuxième le coût additionnel (incrémentiel) imposé par ses besoins, en supposant que seuls ces deux partenaires participent au consortium. Et ainsi de suite, s'il y a plus de deux partenaires. On répartirait alors le coût total de tous les besoins. Une telle répartition est dite répartition selon les coûts incrémentiels. Elle correspond à un ordonnancement donné des partenaires.

Certains usagers pourraient évidemment se plaindre de l'ordre choisi; par exemple, le premier usager serait appelé à supporter des coûts importants liés au démarrage du projet, alors que le dernier ne se verrait imputer que des coûts minimes correspondant au simple coût marginal de ses besoins. Le mathématicien Lloyd Shapley a trouvé une réponse élégante à ce problème. Elle consiste à considérer tous les ordres possibles entre les usagers et à prendre comme répartition finale des coûts la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentiels. Les usagers sont ainsi tous traités de façon symétrique.

L'économiste Martin Shubik a montré toute la portée de cette idée dans plusieurs cas de partage des coûts. Sa méthode a prouvé qu'elle pouvait traduire en termes mathématiques diverses demandes exprimées par les partenaires. On assiste donc ici à une utilisation particulièrement ingénieuse des mathématiques, puisque la formule Shapley-Shubik permet de prévoir la contribution des partenaires, sans pour autant devoir recourir aux offices d'avocats et de relationnistes spécialistes des négociations parfois longues et coûteuses. □

## L'auteur

Docteur en économie de la Graduate School of Industrial Administration de l'Université Carnegie-Mellon (1973), Marcel Boyer est président-directeur général du Centre Interuniversitaire de Recherche en Analyse des Organisations (CIRANO). Il s'intéresse particulièrement aux rapports entre technologie et concurrence, entre organisations et concurrence stratégique, ainsi qu'à l'économie de l'information et de l'incertain.

**L**a façon dont sont partagés les coûts des infrastructures communes influe beaucoup sur ces mécanismes de motivation et de coordination. S'il est facile d'énoncer ce défi organisationnel, sa concrétisation dans l'organisation l'est beaucoup moins.

C'est ici qu'entrent en jeu les mathématiques, car elles sont très utiles à l'analyse des règles de partage des coûts communs. Elles servent, en fait, à traduire dans un langage rigoureux et programmable les contraintes institutionnelles et les objectifs que doit satisfaire la règle de partage recherchée.

## Compétitivité et performance

Les règles efficaces de partage des coûts communs sont liées aux structures d'information (comportement des partenaires) et à la structure de l'organisation, en particulier au cadre incitatif dans lequel évoluent les partenaires du projet. Ces règles de partage des coûts communs et des bénéfices de la coopération sont des facteurs importants de compétitivité et de performance. Bien que leur analyse scientifique explicite soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire.

On peut raisonnablement anticiper que les règles explicites de partage fondées sur une meilleure compréhension des enjeux organisationnels deviendront des facteurs stratégiques de plus en plus importants pour la compétitivité et la performance. Ces règles, leurs fondements et leurs propriétés seront mieux comprises et leur implantation sera

délices ou

# terreur ?

**Certains élèves brillent en français, d'autres récitent leur géographie avec une facilité déconcertante. Mais qui a jamais parlé d'une bosse du français ou de la géographie ? La prétendue « bosse des maths », si souvent invoquée pour répartir les élèves selon leurs aptitudes mathématiques, ne serait-elle qu'un mythe ? Mais dans ce cas comment expliquer, chez certains, un blocage — si ce n'est une terreur — devant les mathématiques ? Un bon enseignement peut-il changer la mauvaise réputation des maths ?**

par Vincent Sicotte

On doit montrer aux élèves que les mathématiques sont une construction humaine », explique Richard Pallascio, professeur de maths à l'UQAM. On ne doit pas faire apprendre les maths par cœur, poursuit-il, car cet apprentissage en fait un objet étranger à soi. L'élève devrait idéalement suivre le même chemin qui a mené au développement des mathématiques. « Il faut ancrer les maths dans la réalité, montrer qu'elles servent à quelque chose dans la vie de tous les jours », ajoute-t-il.

## La résolution de problème

Vers 1980, l'approche didactique conventionnelle, héritée du cours classique, a fait place à l'apprentissage par résolution de problème. « L'ordre habituel de l'enseignement — d'abord la notion, ensuite son application —, a simplement été inversé », explique Richard Pallascio. Il s'agit de mettre tout d'abord les élèves en situation, pour qu'ils trouvent eux-mêmes les outils mathématiques les plus appropriés au problème. Au lieu de faire apprendre de mémoire les tables de multiplication, on posera par exemple la question suivante : un groupe de 120 élèves doit se rendre à une journée de ski. Combien d'autobus seront nécessaires, sachant qu'un autobus contient 48 places ?

Dès septembre 2000, on poussera cette démarche encore plus loin pour les premières années du primaire. Conséquence directe des derniers États généraux sur l'éducation, ce programme préliminaire s'appuie sur la résolution de problème encore plus large (des « situations »), en faisant appel à des compétences transversales, pas nécessairement mathématiques. « L'esprit cri-



Normand Blouin/Agence Stock

tique et la créativité sont encore plus sollicités », précise Richard Pallascio.

Mais peut-on « vendre » toutes les maths grâce à des applications ? « Je l'imagine mal », répond Bernard Hodgson, professeur de mathématiques à l'Université Laval. « Certains domaines des maths ont une beauté en soi et peuvent exercer une fascination en tant qu'abstraction pure. »

## La technologie

L'autre changement important pour l'apprentissage des maths concerne l'utilisation croissante d'ordinateurs et de calculatrices en tous genres. « Ces outils permettent une relation plus concrète avec les maths », dit Bernard Hodgson. Visualiser une fonction sur un écran ou manipuler des symboles permettrait, selon lui, le développement d'une sorte d'intuition géométrique.

Mais la calculatrice ne nuit-elle pas aux capacités mentales ? « La technologie n'est pas une panacée », s'empresse-t-il d'ajouter. Les élèves doivent développer selon lui une « intuition numérique », qui est essentielle

dans la vie quotidienne. Il faut savoir, par exemple, calculer des ordres de grandeur, puis utiliser la calculatrice pour obtenir les résultats exacts. Il s'agit donc d'atteindre un certain équilibre dans l'utilisation de la technologie. Est-ce possible ? « Je le crois. Depuis 25 ans d'utilisation de la calculatrice à l'école, on a appris quand il faut la mettre de côté », conclut-il.

Somme toute, l'enseignement des maths au Québec serait sur la bonne voie. En avril 1997, une évaluation pancanadienne des acquis en mathématiques a eu lieu auprès des élèves<sup>1</sup>. Deux groupes d'élèves de 13 et 16 ans ont été évalués pour leur connaissance des contenus mathématiques et leur aptitude à la résolution de problème. Résultat : au Canada, ce sont les élèves québécois qui réussissent le mieux en mathématiques. Cette étude, ajoutée à une enquête internationale récente sur les mathématiques et les sciences (pour les élèves de 13 ans), démontre que les jeunes Québécois se comparent avantageusement au reste du Canada, et au monde entier, quant à leur maîtrise des mathématiques.

## Les maths et la langue

En général, la 16<sup>e</sup> année marque la fin de l'école obligatoire. Ceux qui continuent au cégep le font par choix. Que vaut l'enseignement des maths à ce niveau ? « Le niveau des étudiants, lorsqu'ils sortent des cégeps, est malheureusement insuffisant », dit Christiane Rousseau, professeure de mathématiques à l'Université de Montréal. L'obsession du taux de réussite aurait fait perdre de vue le niveau global des étudiants, qui, selon elle, a baissé depuis l'ouverture des cégeps. D'ailleurs, l'Université de Montréal a dû

<sup>1</sup>Programme d'indicateurs du rendement scolaire du conseil des ministres de l'Éducation.

suite à la page 34

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

# Les grands courants de la recherche de pointe en mathématiques



Plus active que jamais, la recherche actuelle en mathématiques s'intéresse à plusieurs grands problèmes qui passionnent les mathématiciens depuis des siècles et qui sont loin d'être complètement résolus.

par François Lalonde

## Des solutions aux multiples retombées

**P**renons le cas du problème de la classification des équations polynomiales et de leurs solutions. Les équations polynomiales sont des équations où n'apparaissent pas de calcul différentiel, mais uniquement des sommes et des produits de variables — les inconnues — et de paramètres — des quantités connues. La fameuse règle de trois en est l'exemple le plus répandu. Ces équations sont constamment utilisées en économie et en recherche opérationnelle lorsque l'on est en présence d'un grand nombre de contraintes et que l'on essaie de résoudre plusieurs problèmes en même temps. Cette question, qui remonte au XVII<sup>e</sup> siècle quand Descartes en a clairement établi le contexte, constitue encore, trois siècles plus tard, un des grands défis de la recherche. C'est l'objet de toute une branche des mathématiques, la géométrie algébrique. Mais pourquoi vouloir résoudre le problème de la classification ? C'est que si l'on trouve des solutions générales qui peuvent s'appliquer à une multitude de problèmes, on pourra y recourir avec succès dans la conception de plusieurs logiciels d'optimisation.

Un autre exemple, où la difficulté est encore plus grande, nous est fourni par les équations différentielles (ou « équations aux dérivées partielles ») à une ou plusieurs variables, dont les solutions ont un comportement qui nous est encore très largement inconnu. Nous n'en connaissons pour ainsi dire que la pointe de l'iceberg. Presque toute la physique théorique s'exprime à l'aide d'équations différentielles, de l'infiniment petit (équation de Schrödinger en mécanique quantique) à l'infiniment grand (équation d'Einstein en relativité générale). Mais la physique n'est pas une exception :

tous les phénomènes qui suivent une loi générale et rationnelle mettant en relation de façon quantifiable les principaux paramètres de leur comportement peuvent être décrits à l'aide d'équations différentielles. On peut sans aucun doute considérer l'étude des équations différentielles comme l'une des plus grandes entreprises intellectuelles de l'humanité. Les théories du chaos (dynamique déterministe et pourtant imprévisible à long terme) et des fractales, ainsi que des questions passionnantes comme celle de la stabilité du système solaire, y sont directement reliées.

Lorsqu'on cherche à formuler ou solutionner les lois fondamentales d'un phénomène (comme par exemple les équations d'Einstein en relativité générale, qui gouvernent le mouvement des planètes), il faut avoir à l'esprit que la dynamique générale d'un objet est conditionnée à la fois par des propriétés locales de l'espace (comme la densité d'énergie présente) et par la forme générale de l'espace. La première question est l'objet de la géométrie différentielle, la seconde celle de la topologie, deux des branches qui ont le plus marqué l'évolution des idées scientifiques au XX<sup>e</sup> siècle parce qu'elles nous ont appris à « mathématiser » les problèmes subtils du comportement qualitatif des phénomènes. Une des questions qui intéressent actuellement les mathématiciens est le rapport entre la topologie générale d'un espace (de dimension arbitraire) et la dynamique qualitative des phénomènes qui peuvent y prendre place.

## Les nombres : un champ passionnant de recherche

La théorie des nombres — que l'on étudie selon la somme (addition) et le produit (multiplication) — est un domaine en plein développement. Les nombres entiers naturels, 0, 1, 2, 3..., constituent l'ensemble

infini le plus simple que l'on puisse imaginer : il est engendré par l'addition successive d'une unité. L'addition est donc présente dans sa définition même. Et pourtant, si on lui ajoute simplement la multiplication, il forme déjà un système mathématique assez complexe pour poser des difficultés qui défient l'imagination. C'est le cas par exemple de la répartition des nombres premiers — c'est-à-dire les nombres entiers qui ne sont divisibles que par l'unité et par eux-mêmes : si on associe à chaque nombre entier naturel « n » le nombre total de nombres premiers qui sont compris entre « 1 » et « n », on obtient ainsi une fonction qui croît avec « n », dont on aimerait connaître précisément le type de croissance (à défaut d'en obtenir une expression exacte, ce qui n'est pas possible). La solution de ce problème — en apparence aussi simple que le fameux « dernier théorème de Fermat » (voir article en page 30) — n'est toujours pas connue, mais on a trouvé qu'elle est reliée à des questions passionnantes en physique quantique ! Les découvertes récentes montrent que la théorie des nombres entretient des rapports plus profonds qu'on ne le croyait avec les autres branches des mathématiques. Elle joue également un rôle clé en cryptographie, indispensable à la transmission confidentielle des données.

Mais il y a une autre raison, plus pratique, qui explique pourquoi les mathématiques ont pris une si grande place aujourd'hui. Avec le développement de l'informatique, on a les moyens de modéliser une gamme impressionnante de phénomènes réels, du moins tous ceux dont on connaît les lois fondamentales. On peut ainsi suivre sur ordinateur l'évolution du phénomène tel que modélisé mathématiquement, et en changer les paramètres à volonté. Dans certains cas, par exemple quand il s'agit de rechercher la forme opti-

# La nouvelle imagerie médicale

Fermez les yeux et ouvrez-les progressivement. Cette expérience illustre l'essentiel d'une théorie élaborée au cours des 15 dernières années : la théorie des ondelettes.

par Jean-Marc Lina

**A**vec ses ramifications multiples (et anciennes) en physique quantique et en analyse harmonique, cette théorie émergea dans le contexte du traitement du signal, d'abord en sismologie, puis, d'une façon encore plus déterminante, en imagerie. L'expérience que vous venez de faire est une « opération de filtrage » que les mathématiciens préféreront appeler « convolution ».

En ouvrant lentement les yeux, nous exerçons un filtrage variable qui, à partir du noir total permet de voir progressivement la page, les lignes, les mots, les lettres, la ponctuation, la texture du papier, etc. Ce filtrage, qui varie avec l'échelle des objets, a permis d'ajouter progressivement des détails qui ont augmenté la quantité d'informations relativement à ce document. D'ailleurs, on peut se demander si l'information sur la trame du papier était nécessaire pour comprendre le sens du texte. Derrière ces simples observations se cachent des questions plus fondamentales qui ont alimenté (et continuent d'alimenter) la recherche en imagerie mathématique. La théorie des ondelettes est devenue le cadre de certains problèmes, en mathématiques pures ou appliquées, qui reposent sur la décomposition « en détails » des objets étudiés. C'est en effet en additionnant les détails acquis à des échelles de plus en plus fines que nous vous invitons à regarder cette page dont l'information principale repose, d'ailleurs, sur un nombre limité de détails, excluant, par exemple, la trame du papier.

Les ondelettes sont des fonctions mathématiques. Elles furent découvertes dans le but d'analyser des signaux composés de fluctuations très localisées dans un signal lisse et régulier. Jusqu'au milieu des années 80, les outils habituels du traitement du signal reposaient essentiellement sur l'analyse de Fourier et les fonctions trigonométriques



parfaitement adaptées au traitement des signaux stationnaires, dont les caractéristiques persistent dans le temps ou dans l'espace comme, par exemple, une note de musique ou une onde radio. L'analyse de Fourier ne pouvait pas répondre efficacement à l'étude de fluctuations isolées.

La théorie des ondelettes allait contourner cette difficulté : les ondelettes sont aux variations locales ce que la fonction sinus est aux oscillations périodiques. Ce nouveau type d'analyse, proposé par Alex Grossman et Jean Morlet en 1981 pour l'analyse de signaux sismiques, fut baptisé « ondelette » par Y. Meyer qui en fit un des chapitres les plus passionnants de l'analyse harmonique. Les ondelettes allaient rapidement rejoindre certaines techniques utilisées dans la représentation des images grâce aux travaux d'Ingrid Daubechies et de Stéphane Mallat. Sous l'impulsion d'une technologie où l'imagerie numérique prend une place de plus en plus grande, les problèmes de codage (pour la transmission), de compression (pour l'archivage), d'estimation (pour la restauration d'images floues ou entachées de

bruit) et de détection (pour extraire l'information en vue d'une décision) étaient autant de domaines où les ondelettes furent rapidement mises à contribution. D'ailleurs, durant votre prochaine séance de navigation sur le Web, observez les images qui apparaîtront en « couches » successives, à des résolutions de plus en plus fines : les mathématiques des ondelettes sont derrière cette technique de transmission !

## Cancer

L'analyse par ondelettes pourrait avoir des applications particulièrement importantes en imagerie médicale. Par exemple, les mammographies (radiographie du sein) font partie des outils de diagnostic importants, voire indispensables, pour la détection précoce du cancer du sein.

L'expertise du radiologue consiste à assimiler une multitude d'informations provenant du dossier médical ou ayant été lues sur film. L'ensemble de ces informations est complexe et pas entièrement quantifiable.

Par contre, les radiographies numériques acquises directement sur ordinateur offrent aujourd'hui des possibilités de « seconde lecture » jusqu'ici impensables. Loin de se substituer à l'expertise du médecin, les outils d'analyse mathématique en imagerie visent à apporter des informations sur des propriétés difficilement mesurables à l'œil nu. C'est dans cette perspective que les ondelettes, véritables « microscopes mathématiques », se présentent aujourd'hui comme une des composantes mathématiques parmi les plus intéressantes pour mettre au point des techniques fiables d'aide au diagnostic. □

## L'auteur

Jean-Marc Lina est chercheur au Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal.

## Pour en savoir plus

[www.crm.umontreal.ca/~physnum](http://www.crm.umontreal.ca/~physnum)

# théorème de Fermat

Un des plus fameux problèmes des mathématiques, vieux de plus de trois siècles, a été élucidé en 1993.

par Henri Darmon

**L**e 23 juin 1993, à l'Institut Isaac Newton à Cambridge, Andrew Wiles achève le dernier de ses trois exposés sur les « Courbes elliptiques, formes modulaires et représentations Galoisiennes ». Sujet passionnant... pour les initiés. Mais curieusement, la salle est bondée. Les journalistes des plus grands quotidiens britanniques ont tous été conviés en hâte. Il règne une atmosphère d'attente presque fiévreuse.

De sa belle écriture soignée, Andrew Wiles inscrit alors au tableau noir :

Corollaire :

$$\text{si } u^n + v^n = w^n \text{ et } n > 3 \\ \text{alors } uvw = 0$$

Un tonnerre d'applaudissements éclate dans la salle pour saluer ce moment historique. Le professeur de l'Université Princeton vient de résoudre un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques : le théorème de Fermat est enfin prouvé !

## L'origine du théorème

Ce problème était apparu en 1637 sous la plume de Pierre de Fermat, juriste toulousain et mathématicien amateur. Presque à lui seul, Fermat a ressuscité la théorie des nombres, qui avait été délaissée depuis l'Antiquité. Durant la lecture d'une traduction latine de l'*Arithmetica* du grec Diophante, Fermat tombe sur une étude des solutions de l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$ . Plus précisément, les solutions en entiers positifs. Les nombres 3, 4 et 5, par exemple, en constituent une solution :  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Y en a-t-il d'autres ? Selon Diophante, il existe une infinité de solutions : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), etc.

Mais si l'on change l'exposant de l'équation, la situation devient très différente. Fermat démontre en effet que l'équation  $x^4 + y^4 = z^4$  ne possède aucune solution. Il n'existe aucun ensemble de trois nombres entiers, plus grands que zéro, satisfaisant à cette équation; essayez-le, vous verrez ! Peut-être enhardi par ce succès, Fermat affirme qu'il en va de même pour l'équation  $x^n + y^n = z^n$ , dès que l'exposant  $n$  est plus grand que 2. Affirmation très forte... qui exige une preuve ! Fermat a-t-il réussi à prouver ce théorème ? On l'ignore, car il ne publie rien. Dès lors, et pendant plus de 350 ans, les



plus grands mathématiciens s'acharneront à établir, de façon formelle, la preuve du théorème de Fermat.

L'Académie des sciences de Paris, puis la fondation Wolfskehl, en 1908, offrent des récompenses pour la démonstration de ce théorème, conférant au problème un prestige considérable.

Aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, les cas des exposants  $n = 3, 5$  et  $7$  sont résolus. En 1857, un mathématicien allemand, Kummer, fait franchir un pas décisif au problème en démontrant le théorème de Fermat pour tout exposant plus petit que 100. Pour ce faire, il utilise les nombres complexes. Ces entités mathématiques, qui utilisent le nombre imaginaire  $\sqrt{-1}$ , ont été développées pour l'étude de certains problèmes très particuliers (essayez d'extraire la racine carrée de  $-1$  à la calculatrice).

De plus, en étudiant le théorème, Kummer met en évidence des nombres dits cyclotomiques qui apparaissent lorsqu'on décompose en facteurs la partie gauche de l'équation ( $x^n + y^n$ ). Il se lance alors dans une étude approfondie de ces nombres qui dépasse bientôt largement le cadre du théorème de Fermat.

Quarante ans plus tôt, Évariste Galois, un jeune Français mort en duel à 21 ans, avait développé la notion de groupe, dans un mémoire rédigé la nuit précédant son duel. On appelle groupe l'ensemble des opérations que l'on peut faire sur un objet sans que sa forme soit affectée. Par exemple, les rotations de 90 degrés pour un carré. Or il s'avère que les nombres cyclotomiques de Kummer constituent un groupe particulièrement simple, qu'on appelle groupe abélien.

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, la théorie des groupes abéliens est développée par divers mathématiciens. Leurs travaux culminent dans les années 50, avec la formulation définitive de la théorie du corps de classe, qui est un puissant outil de classification. Dans la seconde moitié du siècle, les idées de Weil, Shimura et Langlands permettent une vaste généralisation

de cette théorie du corps de classe aux groupes non abéliens, plus difficiles à traiter. De plus, en travaillant sur l'idée de Langlands, certains en viennent à s'intéresser à la conjecture de Shimura-Taniyama. (Une conjecture est un énoncé vraisemblable qu'on n'arrive pas à démontrer.)

Ces développements semblent bien éloignés du théorème de Fermat. Pourtant, ils s'inscrivent tous dans le même grand mouvement d'idées dont l'origine se trouve dans ce petit problème isolé du XVII<sup>e</sup> siècle. Les nombreux rejets du théorème — nombres cyclotomiques, groupes abéliens, conjecture, etc. — ont peu à peu perdu les traits de famille, gagnant en autonomie et reléguant Fermat aux oubliettes de l'histoire. Et pourtant...

## Retour aux sources

En 1985, coup de théâtre : Frey présente un argument convaincant selon lequel le théorème de Fermat serait un cas particulier de la conjecture de Shimura-Taniyama. Ainsi, après un détour de plus de trois siècles, la théorie des nombres est revenue à une de ses sources originales d'inspiration, armée d'outils modernes. Mais la conjecture de Shimura-Taniyama semble rester indémontrable... jusqu'à la conférence d'Andrew Wiles, le 23 juin 1993.

À l'Institut Isaac Newton, le tonnerre d'applaudissements s'apaise. Les pessimistes s'inquiètent de la solidité des démonstrations. Les autres rêvent aux découvertes qu'engendrera cette percée. Mais l'allégresse du moment ne concerne ni le passé, ni l'avenir, mais bien le triomphe de Wiles, en ce 23 juin. Cette démonstration représente le couronnement de la théorie des nombres du XX<sup>e</sup> siècle, un témoignage de la grandeur et de l'unité des mathématiques. ☒

## L'auteur

Henri Darmon est professeur au département de mathématiques de l'Université McGill.

Pour en savoir plus  
www.math.mcgill.ca/darmon

# La fascinante efficacité des mathématiques

Certaines caractéristiques fondamentales de la matière ne peuvent être décrites en mots ordinaires, mais seulement par des formules mathématiques.

par Stéphane Durand

**L**es mathématiques deviennent importantes dans nombre de disciplines et leur domaine d'application s'étend de jour en jour. C'est toutefois en physique que leur succès est le plus spectaculaire. En fait, ce succès est tel, et le rôle des mathématiques en physique est tellement fondamental, que cela conduit naturellement à s'interroger sur le sens du langage mathématique. Cette efficacité à décrire le réel repose sur plusieurs aspects.

Tout d'abord, contrairement aux autres disciplines où les mathématiques ne sont souvent qu'un outil, en physique, elles sont beaucoup plus : elles en sont l'essence. Sans elles, il n'y aurait pas de physique moderne. Par exemple, pour comprendre l'infiniment petit et l'infiniment grand — des domaines inaccessibles à nos sens et même dans certains cas à notre imagination — le langage de la vie courante n'est plus adapté, car la logique en cause n'est plus celle du quotidien. Les phénomènes défient notre intuition. Cela est particulièrement vrai dans le monde atomique. Certaines caractéristiques fondamentales de la matière ne peuvent être décrites en mots ordinaires, mais seulement mathématiquement. Cela peut sembler surprenant, mais comme notre vocabulaire et notre intuition se sont développés à partir de nos sens, ils ne sont donc pas nécessairement adaptés pour appréhender des domaines où nos sens n'ont pas accès. Pour les comprendre, il faut donc recourir à un autre langage, et celui des mathématiques est (apparemment miraculeusement) parfaitement adapté. En fait, il est fascinant de constater la capacité des mathématiques à prolonger nos sens et notre imagination. On pourrait même dire qu'elles sont une sorte de sixième sens.

De plus, ce lien entre mathématiques et réalité n'est pas vague et approximatif ; il est extraordinairement précis. Prenons les deux grandes théories physiques fondamentales que sont la relativité générale d'Einstein (qui décrit la force de la gravité, la structure de l'espace-temps et l'expansion de l'Univers) et la théorie quantique (qui décrit la constitution de la matière et l'action des forces

électrique, magnétique et nucléaire). Dans les deux cas, l'accord entre la théorie et les observations expérimentales peut aller jusqu'à une précision de 1 partie dans 10 milliards. Une telle précision correspond à mesurer la distance Montréal-Paris à un cheveu près !

Il y a aussi le pouvoir de prédiction des mathématiques. En effet, beaucoup de grandes découvertes en physique ont été prédites mathématiquement avant d'être observées expérimentalement : tel a été le cas de l'existence de certaines planètes, des ondes radio, de l'expansion de l'Univers, du Big Bang, de l'existence de l'antimatière, etc. Ainsi, l'expansion de l'Univers a été prédite mathématiquement 10 ans avant que les télescopes ne deviennent assez puissants pour permettre de l'observer. Les premières ondes radio ont été créées en laboratoire 20 ans après que les équations de Maxwell eurent prédit leur existence.

Dans certains cas même, les mathématiques prédisaient l'existence de nouveaux phénomènes inconnus tellement déroutants que les physiciens n'en croyaient pas leurs équations, même si elles avaient raison ! Par exemple, les idées de trou noir, d'antimatière et d'expansion de l'Univers sont toutes issues de prédictions mathématiques qui ont été rejetées sur le coup par leur propre auteur (qui les trouvait farfelues ou absurdes) avant d'être confirmées expérimentalement. Paul Dirac, le découvreur « involontaire » de l'antimatière a même dit après coup : « Mon équation a été plus intelligente que moi. » Bref, il est souvent sorti des équations plus que ce que les physiciens pensaient y avoir mis.

Les mathématiques révèlent aussi une unité cachée dans le fonctionnement de la nature. En fait, la plupart des grandes révolutions en physique reposent sur la découverte d'un lien profond, non directement perceptible par nos sens, entre des phénomènes apparemment indépendants. Par exemple, Newton a montré que les phénomènes célestes et les phénomènes terrestres étaient gouvernés par les mêmes lois (la même équation gouverne la forme des galaxies spirales et le mouvement d'un patineur artistique). Maxwell a montré que l'électricité, le magnétisme et la lumière étaient trois facettes d'un même

phénomène (en effet, le lien entre un choc électrique, le fonctionnement d'une boussole et un rayon de soleil n'est pas du tout évident). Einstein a montré que l'espace et le temps étaient intimement liés (l'espace peut se transformer en temps et vice-versa) et que la matière et l'énergie l'étaient aussi (la lumière peut se transformer en matière et vice-versa). Finalement, la théorie quantique a révélé que les ondes et les particules étaient deux aspects d'une même réalité.

Autre mystère. Les mathématiciens ont souvent conçu, pour le simple plaisir, des théories mathématiques qu'ils considéraient comme « pures », c'est-à-dire sans aucun lien avec le monde physique. Pourtant, quelques décennies plus tard, ces mathématiques se révélaient être exactement celles dont les physiciens avaient besoin pour décrire la nature. Par exemple, les mathématiques dont Einstein avait besoin pour décrire la structure du cosmos et l'expansion de l'Univers avaient précisément été développées 90 ans auparavant par plusieurs mathématiciens, et ce, pour une raison intrinsèque aux mathématiques et non pas dans le but de décrire le cosmos. Il en est de même pour la théorie quantique.

Comment expliquer pareilles anticipations involontaires de la part des mathématiciens ? Et pourquoi constate-t-on pareille adéquation entre les mathématiques et la réalité ? Cela conduit naturellement à s'interroger sur la nature de ce langage. Les mathématiques sont-elles une création de l'esprit humain (une invention), ou au contraire existent-elles « quelque part » ? Les mathématiciens ne feraient alors que les découvrir. Étant donné le lien profond qui unit mathématiques et physique, il est tentant de pencher vers la deuxième hypothèse. Mais, bien sûr, personne ne connaît vraiment la réponse. Nous laissons le lecteur méditer sur ce sujet. ☐

## L'auteur

Stéphane Durand (voir page 9)

## Pour en savoir plus

« Les équations n'ont pas de préjugé » et « L'efficacité déraisonnable des mathématiques », par Stéphane Durand, dans *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui*, Modulo Éditeur, mai 2000.

# Les mathématiques derrière l'image

**En un quart de siècle, l'infographie est passée d'un petit nombre d'applications amusantes aux coûts excessifs, à un phénomène omniprésent dans notre quotidien. Cependant, derrière les personnages de jeux vidéo ou les dinosaures de *Jurassic Park*, se cache toute une panoplie de concepts mathématiques.**

par Pierre Poulin

L'étude de ces concepts, dans le but d'élaborer des univers virtuels, peut même nous permettre de mieux comprendre la réalité — la vraie. L'infographie fut d'abord confinée à des domaines très spécifiques comme les simulateurs de vol. Mais les chercheurs ont rapidement perçu le vaste potentiel de cet outil. Aujourd'hui, grâce à la démocratisation de l'informatique et à l'augmentation phénoménale de la puissance des ordinateurs, l'infographie a peu à peu pénétré plusieurs sphères de l'activité humaine. Elle apparaît désormais en informatique, grâce aux interfaces usagers (icônes, fenêtres, etc.), en médecine et en science, où les données et les modèles sont plus faciles à comprendre lorsqu'ils sont visualisés sous forme d'images. L'infographie est aussi couramment mise à contribution dans les jeux par ordinateur, ainsi que pour les effets spéciaux au cinéma et dans les publicités télévisées, où la réalité se marie à la fiction au gré de l'imagination des auteurs.

L'infographie représente beaucoup plus qu'une simple extension informatique du pinceau du peintre. L'artiste manipule des points, des courbes et des surfaces pour créer des objets synthétiques. Il leur assigne des couleurs, des textures et des réflectivités. Il dispose des sources de lumière, oriente la caméra virtuelle et clic ! voilà une image. Chaque objet peut ensuite être déplacé et déformé temporellement pour créer une séquence animée.

Pour l'artiste, l'adepte de jeux ou le cinéophile, tout semble magique. Les outils disparaissent sous la complexité visuelle des scènes, la fluidité des mouvements et la réalité des émotions des personnages. Mais modéliser un univers synthétique requiert une représentation mathématique de chacun de ses éléments. Ces outils informatiques reposent en effet sur un large éventail de concepts mathématiques.

Ainsi, la caméra se transforme en un



1995-2000 Taarna Studios Inc.

espace projectif à quatre dimensions; les objets sont formés de polygones ou de surfaces polynomiales; les échanges de lumière entre surfaces sont résolus à partir de systèmes d'équations intégrales simultanées; les mouvements des objets et des personnages résultent de solutions d'équations partielles différentielles, et ainsi de suite.

Souvent, pour rendre les mouvements plus réalistes, l'informaticien doit décomposer les objets apparemment complexes en éléments simples, plus facilement manipulables. Ainsi, une fonction fractale donne naissance à une montagne, une vague déferle selon le roulement de centaines de cercles, une robe ondule sous l'action d'un ensemble de masses-ressorts, un banc de poissons devient un ensemble de particules réagissant à des comportements simples, etc. La manipulation de ces modèles plutôt que de chaque élément individuel permet une interaction plus réaliste avec le reste de l'univers virtuel.

À chaque instant, un artiste doit pouvoir tout contrôler en modifiant n'importe quel point de sa scène ou couleur de son image. Cependant, plus l'infographie lui évite de spécifier chaque petit détail, plus l'artiste est libre de créer son univers à un niveau plus abstrait, et plus les modèles mathématiques sous-jacents deviennent prépondérants et intrigants. Par conséquent, le chercheur est forcé de questionner sa conception de la réalité et des modèles qui pourraient la reproduire. Ce questionnement peut mener loin : en voulant reproduire les phénomènes physiques, le chercheur doit les étudier pour tenter d'en dégager les lois et les principes. Ainsi, par un détour parfois surprenant, la recherche d'un réalisme dans les univers virtuels nous aide souvent à mieux comprendre notre propre monde. □

## L'auteur

Pierre Poulin est professeur au département d'informatique et recherche opérationnelle (IRO) de l'Université de Montréal.

CLASSE  
LABORATOIRE  
INDUSTRIE  
CYBERSPACE

# CLiC

Des symposiums sur les nouveaux espaces de communication de la science et de la technologie

# La chasse aux molécules

LA SCIENCE POUR TOUS.

# PASSEPORTS INDUSTRIES

# Jeux de vélos

# La science se livre

# Quinzaine DES SCIENCES

# Innovateurs à l'école

# DES OUTILS POUR L'INNOVATION

# SAPRISTI!

MA CARRIÈRE

Avec un réseau composé de 700 organismes relais et bénévoles, la Société pour la promotion de la science et de la technologie poursuit sa mission, une mission axée sur la promotion des carrières, le transport du savoir mais aussi du savoir faire et de l'énergie de nos bénévoles issus des communautés scientifiques et industrielles.



Société pour la promotion de la science et de la technologie

417, rue Saint-Pierre  
Bureau 808  
Montréal (Québec)  
H2Y 2M4

Tél.: (514) 873-1544  
1 800 465-4668  
Fax: (514) 873-9257  
spst@spst.org  
<http://www.spst.org>



## SUITES DES ARTICLES

### Les mathématiques du temps

(suite de la page 21)

des NEC SX-4 et 5, comptant bientôt 128 processeurs, capables de faire 256 milliards d'opérations par seconde ! En moyenne, cette puissance double tous les deux ou trois ans. Et malgré tout, il faut encore 40 minutes pour réaliser une prévision de 48 heures sur une maille de 16 kilomètres sur l'Amérique du Nord. D'ici 10 ans, on vise à pouvoir faire des prévisions globales sur des mailles de 5 kilomètres. Cela donne une idée de l'ampleur et de la complexité de la tâche.

Les mathématiciens doivent donc être en mesure de concevoir et de développer des algorithmes de plus en plus efficaces pour solutionner les équations météorologiques. Les chercheurs du Centre météorologique canadien ont été responsables d'environ 50 % de l'accélération des calculs pour une prévision, soit une contribution presque aussi importante que celle apportée par l'augmentation de puissance des ordinateurs eux-mêmes. Comme quoi cela paie d'investir dans la matière grise !

#### L'auteur

Michel Bêland dirige la direction générale des sciences de l'atmosphère et du climat au Service météorologique du Canada à Dorval.

### Biomathématiques

(suite de la page 22)

inverse de la séquence originelle. Dans d'autres cas, le nouveau gène résulte de la répétition légèrement modifiée d'une séquence.

« Quand on regarde deux espèces apparentées, dit Sankoff, on observe une redistribution des gènes. Il s'accumule des réarrangements, comme si on en brassait l'ordre. Quelles sont les opérations mathématiques qui nous aident à comprendre ces réarrangements ? C'est très compliqué, ajoute-t-il immédiatement. Par exemple, si on veut comparer seulement trois génomes pour trouver l'ancêtre, ça devient un problème exponentiel. En fait, quelqu'un a déjà prouvé qu'il n'y avait pas de méthode efficace (algorithme) lorsqu'on voulait comparer trois génomes. »

Il n'y avait rien là pour décourager David Sankoff, au contraire. « J'ai beaucoup aimé ces questions, dit-il. C'est moi qui ai relancé ce domaine. Avec mon équipe, en particulier mon étudiant Mathieu Blanchette, j'ai transformé la question en problème similaire à celui du commis voyageur. » (Il

s'agit de trouver le plus court chemin permettant à un commis voyageur de visiter ses clients situés dans plusieurs villes. La branche des mathématiques qui étudie ce genre de problème s'appelle la théorie des graphes.)

« Nous avons appliqué mes méthodes à l'étude des mitochondries des animaux, qui ne contiennent que 37 gènes. Plus récemment, on est passé aux mitochondries des protistes, des bactéries qui comptent de 30 à 100 gènes. Ensuite, nous allons attaquer les chloroplastes des plantes et des algues », poursuit David Sankoff.

Il y a 17 ans, il a publié un livre sur ses solutions aux problèmes de comparaison de gènes. Il a fallu de sept à huit années pour écouler les deux à trois mille exemplaires. « Soudainement, c'est devenu un *hit*. J'ai même dû le photocopier », dit-il. Le livre vient d'ailleurs d'être réimprimé.

Une ardeur et une impatience peu communes à résoudre des problèmes animent David Sankoff. « Je me fiche des institutions et traditions mathématiques, et des différentes disciplines, ira-t-il jusqu'à dire. J'ai toujours été intéressé par les problèmes. Et on peut faire beaucoup de choses avec les mathématiques. »

Pour preuve, il utilise ses outils mathématiques en linguistique. Il a déjà eu le plaisir de lire la thèse d'une étudiante qui avait appliqué ses techniques d'analyse du génome à l'étude des thèmes musicaux récurrents dans des berceuses de Mozart.

« Le domaine est devenu très concurrentiel, dit David Sankoff. Il y a des informaticiens très forts. Mais il y en a peu qui ont autant de facilité à voir la problématique qui émerge de la biologie moléculaire. Je vois un problème. Je saute dedans. Après, les autres continuent », dit le mathématicien qui se défend d'être un pionnier.

#### Pour en savoir plus

Le site Internet de David Sankoff se trouve à l'adresse :

[www.crm.umontreal.ca/cgi/qui?/sankoff](http://www.crm.umontreal.ca/cgi/qui?/sankoff).

Le livre par lequel David Sankoff a relancé les mathématiques de l'étude des séquences s'intitule *The Theory and Practice of Sequence Comparison*. Il a été réimprimé l'an dernier par CSLI Publications et Cambridge University Press.

Enfin, un article récent de David Sankoff, écrit en collaboration avec Mathieu Blanchette, est accessible intégralement sur le site du *Journal of Computational Biology* (numéro d'octobre 1999) à

[www.catchword.com/titles/10665277.htm](http://www.catchword.com/titles/10665277.htm)

ou

[www.liebertpub.com/cmb/default.htm](http://www.liebertpub.com/cmb/default.htm)

### Des ordinateurs intelligents

(suite de la page 23)

algorithmes, la « théorie » est une formule mathématique qui associe par exemple une lettre à une image. Au fur et à mesure que les exemples d'apprentissage s'accumulent, la formule est corrigée, c'est-à-dire améliorée, pour donner de meilleures réponses. Cela tout en gardant, parmi les formules, la plus simple de toutes.

Outre la reconnaissance des formes, les algorithmes d'apprentissage ont des applications dans plusieurs autres domaines, comme la prise de décision en finance, la découverte de nouveaux médicaments et la compression de données. En particulier, l'extraction d'informations (*data-mining*) des bases de données informatiques des entreprises est un domaine très actif actuellement. Ces algorithmes peuvent mettre en évidence des régularités dans les processus industriels ou dans les comportements des clients. Les compagnies qui tirent avantage de ces nouvelles technologies peuvent détecter des fraudeurs, mieux cibler leur clientèle, automatiser certains processus ou prendre de meilleures décisions.

#### L'auteur

Yoshua Bengio est professeur agrégé au département d'informatique et recherche opérationnelle (IRO) à l'Université de Montréal.

#### Pour en savoir plus

[www.iro.umontreal.ca/~lisa](http://www.iro.umontreal.ca/~lisa)

### Les maths : délices ou terreur

(suite de la page 27)

ajouter un cours de maths intermédiaire pour mieux accueillir les étudiants.

Elle relie cette baisse du niveau mathématique à la détérioration générale du français. « La pensée en maths est liée à la langue », dit-elle. Elle déplore qu'on n'enseigne plus à manipuler des structures, qu'elles soient linguistiques ou mathématiques. Bernard Hodgson, qui enseigne à de futurs professeurs, pose un diagnostic similaire. « Sans crier au scandale, il est vrai que l'usage de la langue est problématique », dit-il. Une partie des difficultés des étudiants, en mathématiques, viendrait justement de leur compréhension imparfaite des questions. « L'usage de la langue est fondamental en mathématiques. Pour les futurs professeurs bien sûr, mais également pour les simples bacheliers en maths. »

#### Les intervenants

Richard Pallascio est professeur au département de mathématiques de l'UQAM et chercheur au

Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE). En plus d'enseigner les maths et la didactique des maths aux futurs maîtres, il fait de la recherche sur la pensée réflexive en maths, qui vise à développer, chez les élèves, la pensée critique, la capacité de questionnement et d'argumentation.

Bernard Hodgson est professeur au département de mathématiques et de statistique à l'Université Laval. Il s'intéresse en particulier à la logique mathématique, qui a des applications notamment en informatique théorique. Il forme également des futurs enseignants du primaire et du secondaire.

Christiane Rousseau (voir page 15)


#### Pour en savoir plus

[www.meq.gouv.qc.ca/sanction/pirs/Rappqc.pdf](http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/pirs/Rappqc.pdf)

## Les grands courants de la recherche de pointe

(suite de la page 28)

male d'une aile d'avion ou d'une turbine, il faut simuler un phénomène hydrodynamique (le mouvement de fluides ou de gaz) dont les équations sont extrêmement compliquées. Même avec des ordinateurs d'une très grande puissance, la résolution de certains problèmes de ce genre pourrait prendre... des siècles ! Il faut simuler un phénomène hydrodynamique (le mouvement de fluides ou de gaz) dont les équations sont extrêmement compliquées. La théorie mathématique qui entre alors en jeu est l'optimisation combinatoire. Dans tous ces cas, la rapidité des ordinateurs est loin d'être

suffisante et, pour obtenir des résultats fiables et significatifs, il faut de puissantes théories mathématiques qui sont à l'œuvre dans la conception des logiciels de simulation, d'optimisation, ou d'imagerie. 

#### L'auteur

Directeur de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) qui regroupe les quatre universités montréalaises ainsi que celle de Sherbrooke et l'Université Laval, François Lalonde est professeur titulaire à l'Université du Québec à Montréal (UQAM). Il dirige également le Centre interuniversitaire de recherches en géométrie différentielle et en topologie.

#### PARTENAIRES

Alcan Aluminium Ltée  
Banque Nationale du Canada  
Banque Royale du Canada  
Bell Canada  
Développement des ressources humaines Canada [DRHC]  
Fédération des caisses populaires Desjardins de Montréal et de l'Ouest-du-Québec  
Hydro-Québec  
Imasco  
Industrie Canada  
Raymond Chabot Grant Thornton  
Télélobe Canada inc.  
Ville de Montréal

École des Hautes Études Commerciales (HEC)  
École Polytechnique de Montréal  
Université Concordia  
Université de Montréal  
Université du Québec à Montréal  
Université Laval  
Université McGill

Ministère de l'Éducation [MEQ]  
Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie [MRST]



## CIRANO

Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

*Les activités de recherche du CIRANO portent sur l'analyse des organisations et des comportements stratégiques. Elles sont définies en consultation avec les organisations-membres afin de maximiser les retombées concrètes des recherches de pointe. La variété et la qualité des échanges entre le monde de la recherche et celui de la pratique constituent une préoccupation constante du CIRANO.*

*À titre d'exemple, les projets du CIRANO portent sur des sujets aussi variés que les enchères et le commerce électroniques, la finance mathématique (titres dérivés, réseaux de neurones, économétrie), les modèles et méthodes de répartition de l'actif, le partage des coûts communs, l'économie expérimentale et la gestion intégrée des risques.*

Consultez notre programmation de recherche détaillée sur notre site Internet :

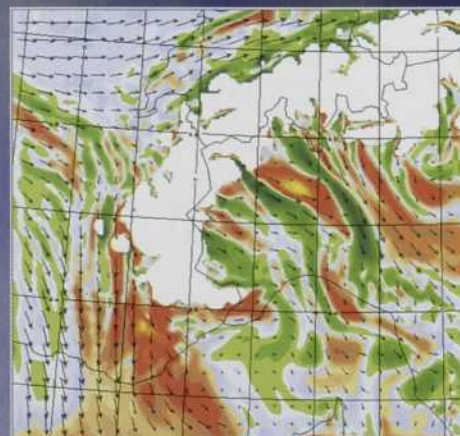
[www.cirano.umontreal.ca](http://www.cirano.umontreal.ca)



ENVIRONNEMENT CANADA  
SERVICE MÉTÉOROLOGIQUE DU CANADA  
Direction des sciences de l'atmosphère et du climat

Qu'il s'agisse de l'échelle urbaine ou planétaire, que ce soit de quelques heures à quelques siècles, la prévision et la modélisation numériques météorologiques et océaniques sont considérées parmi les problèmes environnementaux les plus importants à l'heure actuelle.

Le Service météorologique du Canada a contribué de façon significative dans le passé à ce défi de taille et a pour mission, en ce début de siècle, de continuer à promouvoir un programme dynamique de recherche et développement multidisciplinaire (physiciens, mathématiciens, météorologues, chimistes, informaticiens, etc.) afin d'assurer une contribution internationale et nationale à la fine pointe de la prévision et de la modélisation météorologique et environnementale.



Filaments dans un écoulement bloqué par les Alpes (croissant blanc)

# Année mathématique mondiale

# Pourquoi....

...les graines de *tournesol* forment-elles  
**21** courbes dans un sens et **34** dans l'autre ?

[www.crm.umontreal.ca/math2000](http://www.crm.umontreal.ca/math2000)

Photo : Yves Coudier

**C R M**  
CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

**U M**  
Université de Montréal

**Québec**   
Ministère de la Culture  
et des Communications

**Québec**   
Ministère de la  
Recherche, de la Science  
et de la Technologie

  
Société  
mathématique  
du Canada

Rectorat  
Département de mathématiques et de statistique  
Département d'informatique et de recherche opérationnelle  
Faculté des arts et des sciences  
Faculté de pharmacie

**Québec**  
**Science**

 Conseil national  
de recherches Canada **National Research  
Council Canada**

 ENVIRONNEMENT CANADA  
SERVICE MÉTÉOROLOGIQUE DU CANADA  
Direction des sciences de l'atmosphère et du climat

  
**CIRANO**  
Centre inter-universitaire en analyse des organisations

Laboratoire  
universitaire  
Bell  


**rcm<sub>2</sub>**  
Réseau de calcul  
et de modélisation  
mathématique

  
**mitacs**  
mathématiques des technologies  
de l'information et des systèmes complexes

  
**IFM2**  
Institut de Finance  
Mathématique de Montréal

  
**MERCK FROSST**  
Découvrir toujours plus.  
Vivre toujours mieux.

**UQAM**  
Département de mathématiques

  
**UNIVERSITÉ  
LAVAL**  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
ET DE STATISTIQUES

  
**McGill**  
Department of Mathematics and Statistics

  
**ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE  
MONTREAL**  
Le génie  
sans frontières

Collège Jean-de-Brébeuf  
**Brébeuf**  
[www.brebeuf.qc.ca](http://www.brebeuf.qc.ca)

**GERAD**  
Groupe d'études et de recherche  
en analyse des décisions

**cerca** CENTRE DE RECHERCHE  
EN CALCUL APPLIQUÉ



**INRO**

**LGS** 

  
Centre de  
recherche sur  
les transports  
(C.R.T.)