Groupe de Recherche en Économie et Développement International

Cahier de recherche / Working Paper
05-10

Décomposition par firme et par attribut de la productivité : Le cas de l'indice agrégé de Malmquist

Stéphane Mussard

Nicolas Peypoch

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Décomposition par firme et par attribut de la productivité : le cas de l'indice agrégé de Malmquist

Stéphane Mussard[†], Nicolas Peypoch[‡]

[†] *GREDI, Département d'économique, Université de Sherbrooke, Québec, Canada. LAMETA, Université de Montpellier I, UFR Sciences Economiques, Avenue de la Mer - Site Richter - CS 79606, F-34960 Montpellier Cedex 2, France. E-mail : s-mussard@lameta.univ-montp1.fr*

[‡] *GEREM, Département des Sciences Economiques, Université de Perpignan, 52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan Cedex, France.*

Résumé

Le but de cet article est de démontrer que l'indice de Malmquist agrégé satisfait la propriété de multi-décomposabilité. Cette dernière permet de combiner la décomposition par firme et la décomposition par attribut qui est caractérisée par le progrès technique et la variation d'efficacité.

Mots-clés : Agrégation, Indice de Malmquist, Multi-décomposition.

Classification JEL : D21, D24.

1 Introduction

Introduit par Caves *et alli* (1982), l'indice de productivité de Malmquist, basé sur la fonction de distance de Shephard (1970), est utilisé dans de nombreux domaines[1]. Färe *et alli* (1994) ont décomposé cet indicateur en deux éléments : le changement d'efficacité et le progrès technique (changement technique). Récemment, Färe et Zelenyuk (2003) ont introduit des conditions nécessaires et suffisantes afin d'agréger les fonctions distance. Zelenyuk (2004) proposa ensuite une version agrégée de l'indice de productivité de Malmquist pour un groupe de firmes.

Traditionnellement, la décomposition des indices de productivité permet de mesurer la contribution de chaque attribut (changement d'efficacité et changement technique) à la mesure de productivité totale. Mussard et Peypoch (2005) ont introduit la technique de multi-décomposition de la productivité, autrement dit, la décomposition simultanée par attribut et par firme, permettant la mesure des couples "attribut/firme" qui procure l'indice de productivité total. Dans cet article, nous proposons la multi-décomposition de l'indice de productivité agrégé de Malmquist.

2 L'indice de productivité agrégé de Malmquist

La technologie de production décrit comment les inputs $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ peuvent être transformés en outputs $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p_+$. Supposons que la technologie, relative à la période t, soit caractérisée par l'ensemble des outputs suivant :

$$P_t(x) = \left\{ y : y \in \mathbb{R}^p_+ \text{ est productible à partir de } x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}. \tag{1}$$

[1]cf. par exemple l'application de Färe *et alli* (1989) .

Tout au long de notre exposé, nous supposons que la technologie satisfait les axiomes usuels de la théorie de production[2] et nous utilisons la fonction distance orientée en output de Shephard (1970) $D_t : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+^1 \cup \{\infty\}$ définie par :

$$D_t(x, y) = \inf \left\{ \theta : \frac{y}{\theta} \in P_t(x) \right\}. \tag{2}$$

D'après Färe et Zelenyuk (2003) et Zelenyuk (2004), l'indice de productivité agrégé de Malmquist (AM), pour un groupe de firmes $k = 1, \ldots, K$ est :

$$AM = \left[\frac{\sum_{k=1}^K D_t^k(x_{t+1}^k, y_{t+1}^k)^{-1}.S_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K D_t^k(x_t^k, y_t^k)^{-1}.S_t^k} . \frac{\sum_{k=1}^K D_{t+1}^k(x_{t+1}^k, y_{t+1}^k)^{-1}.S_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K D_{t+1}^k(x_t^k, y_t^k)^{-1}.S_t^k} \right]^{1/2}, \tag{3}$$

où $S_t^k = \frac{py_t^k}{p\sum_{k=1}^k y_t^k}$, et où $p = (p_1, \ldots, p_p) \in \mathbb{R}^p$ représente les prix des outputs que nous supposons identiques pour chaque firme.

3 La Multi-Décomposition

Auvray et Trannoy (1992), Chantreuil et Trannoy (1999) et Shorrocks (1999) ont introduit une nouvelle approche permettant de décomposer les mesures d'inégalité et de pauvreté par la valeur de Shapley (1953). En effet, lorsque ces mesures sont représentées par plusieurs variables, la décomposition par la valeur Shapley permet d'estimer la contribution de toutes ces variables. La procédure de Shapley consiste à mesurer une statistique, par exemple $AM(.)$, en considérant qu'une ou plusieurs variables qui la représente ont été éliminées. La différence entre la mesure globale $AM(.)$ et la mesure $AM(.)$ lorsqu'une de ses variables k la caractérisant a été éliminée, nous procure un impact marginal associé à la variable k. On peut ensuite mesurer d'autres impacts marginaux relatifs à k en considérant que $AM(.)$ est dès lors mesurée par un ensemble tronqué de variables auquel on va retirer k. Par différence, on obtient alors un nouvel impact marginal associé à k. En faisant la moyenne arithmétique de ces impacts, on obtient la contribution (absolue) de la variable k à la mesure $AM(.)$.

[2]cf. Färe *et alli* (1985) et Färe et Primont (1995) pour davantage de détails.

Soit un groupe $\mathbb{G}$ de K firmes : $\mathbb{G} = \{1, \ldots, k, \ldots, K\}$. Considérons que cet ensemble obéit au processus d'élimination de Shapley. Lorsqu'une ou plusieurs firmes sont éliminées, l'ensemble $\mathbb{G}$ donne l'ensemble tronqué $\mathcal{G}$, où $\bar{g}$ est le nombre de firmes restant après le processus d'élimination. Soit $F(\mathcal{G})$ la fonction définie par $F : \{\mathcal{G} | \mathcal{G} \subset \mathbb{G}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui procure la valeur de l'indice de productivité $AM(.)$ lorsqu'une ou plusieurs firmes sont éliminées[3], et où $F(\{\emptyset\}) = 0$.

Supposons une seconde partition que nous nommons la partition des attributs $\mathbb{A}$ avec M éléments : $\mathbb{A} = \{1, \ldots, m, \ldots, M\}$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des attributs lorsque le processus d'élimination des attributs est envisagé, et où $\bar{a}$ est le cardinal de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire le nombre d'attributs restants). Soit $\psi(\mathcal{A})$ la fonction définie par $\psi : \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \subset \mathbb{A}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnant la valeur de valeur de l'indice de productivité $AM(.)$ lorsqu'un ou plusieurs attributs ont été éliminés[4], et où $\psi(\{\emptyset\}) = 0$.

La première phase de la multi-décomposition consiste à mesurer la contribution des k firmes (C^k) à l'indice de productivité total $AM(.)$. D'après l'algorithme de Shapley, cette contribution peut s'écrire de la manière suivante :

$$C^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F) = \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G} \subseteq \mathbb{G} \backslash \{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \Delta_k F(\mathcal{G}), \tag{4}$$

où

$$\Delta_k F(\mathcal{G}) = F(\mathcal{G} \cup \{k\}) - F(\mathcal{G}), \tag{5}$$

est un quelconque impact marginal de k lorsque ce dernier a été éliminé. Est-il possible de définir la forme fonctionnelle $F(\mathcal{G})$? Si la réponse est positive, il serait alors possible de mesurer la contribution d'une firme au montant global de la productivité. Rappelons-nous que $F(\mathcal{G})$ représente l'indice $AM(.)$. Récrivons-le en faisant apparaître les K firmes et en posant $\mathcal{G} = \mathbb{G} \backslash \{k\}$. Alors[5] :

[3]Si aucune n'est éliminée, alors F donne la mesure $AM(.)$.
[4]Si aucun attribut n'est éliminé, ψ procure la valeur globale de $AM(.)$.
[5]Par la suite, nous adoptons les notations suivantes : $\mathcal{D}_t^k(z_t^k) = D_t^k(x_t^k, y_t^k)^{-1}.S_t^k$.

$$AM = F(\mathcal{G} \cup \{k\}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)} . \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} \right]^{1/2}, \tag{6}$$

où $\mathcal{D}_t^k(.)$ est la fonction distance en output de la firme k. Cette expression, la somme des distances, permet de supprimer une ou plusieurs firmes conformément au processus de Shapley[6]. Étant donné que $\bar{g}$ est le nombre de firmes restant après la processus d'élimination, nous avons :

$$F(\mathcal{G}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)} . \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} \right]^{1/2}, \forall \mathcal{G} \subset \mathbb{G}. \tag{7}$$

Par conséquent, l'indice de productivité est décomposable par firme, permettant la mesure des contributions de chaque firme au montant global de $AM(.)$:

$$AM = \sum_{k=1}^{K} C^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F). \tag{8}$$

Dans une seconde phase, nous pourrions mesurer la contribution de chaque attribut au montant global de la productivité. Cependant, afin de lier la décomposition par groupe et la décomposition par attribut, nous mesurons la contribution de chaque attribut aux contributions de chacune des k firmes : $C_m^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi)$. Ceci correspond à une décomposition de Shapley en multi-niveaux, c'est-à-dire, la décomposition de Owen (1977) :

$$C_m^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi) = \sum_{\bar{a}=0}^{M-1} \sum_{\mathcal{A} \subseteq \mathbb{A} \setminus \{m\}} \frac{(M-1-\bar{a})!\bar{a}!}{M!} \Delta_m \psi(\mathcal{A}), \tag{9}$$

où

$$\Delta_m \psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A} \cup \{m\}) - \psi(\mathcal{A}), \tag{10}$$

est un quelconque impact marginal de l'attribut m tel que :

[6]En prenant la distance de la somme, la démonstration est aussi valable.

$$C^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F) = \sum_{m=1}^{M} C^k_m(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi), \tag{11}$$

et

$$AM = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} C^k_m(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi). \tag{12}$$

Récrivons l'indice agrégé de Malmquist de la manière suivante :

$$AM = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_{t+1}(z^k_{t+1})}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_t(z^k_t)} \left[\frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_t(z^k_t)}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_{t+1}(z^k_t)} . \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_t(z^k_{t+1})}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}^k_{t+1}(z^k_{t+1})}\right]^{1/2} \tag{13}$$

Le premier terme représente le changement d'efficacité (EC) et le second le changement technique (TC).

Comme $M = 2$, il est possible de récrire l'ensemble $\mathbb{A}$ avec les deux attributs : $\mathbb{A} = \{ec, tc\}$. La contribution du changement d'efficacité de la firme k est donc :

$$C^k_{ec}(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi) = \frac{1}{2}[\psi(\mathcal{A} \cup \{ec\}) - \psi(\mathcal{A}) + \psi(\{ec\}) - \psi(\{\emptyset\})] \tag{14}$$

ou bien, dans une forme réduite :

$$C^k_{ec}(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi) = \frac{1}{2}[\psi(ec, tc) - \psi(tc) + \psi(ec)]. \tag{15}$$

La contribution du progrès technique à la contribution de la firme k

$$C^k_{tc}(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi) = \frac{1}{2}[\psi(\mathcal{A} \cup \{tc\}) - \psi(\mathcal{A}) + \psi(\{tc\}) - \psi(\{\emptyset\})] \tag{16}$$

est définie par :

$$C^k_{tc}(\mathbb{G}, \mathbb{A}; F; \psi) = \frac{1}{2}[\psi(ec, tc) - \psi(ec) + \psi(tc)]. \tag{17}$$

En ajouant (15) et (17), nous obtenons $\psi(ec, tc)$. La détermination de $\psi(ec, tc)$ est évidente puisqu'aucun attribut a été éliminé. En effet, rappelons-nous que $\psi(\mathcal{A})$ représente la contribution de la firme k à $AM(.)$, c'est-à-dire C^k, lorsqu'un ou plusieurs attributs ont été éliminés. Si aucun n'est éliminé, alors $\psi(\mathcal{A}) = \psi(ec, tc) = C^k$. Le problème concerne donc la détermination des formes fonctionnelles $\psi(ec)$ et $\psi(tc)$. En effet, est-il possible de concevoir $\psi(.)$ lorsque le changement technique ou le changement d'efficacité est éliminé ?

Caractérisation de $\psi(tc)$. Si la contribution de la k-ième firme C^k dépend seulement de tc, l'attribut caractérisant le changement d'efficacité est neutre. Par ailleurs, étant donné que $\psi(tc)$ est une forme particulière de C^k, qui dépend lui-même de $F(\mathcal{G})$, alors $\psi(tc)$ peut être représentée par une forme fonctionnelle si la contribution de la firme k sans changement d'efficacité possède une forme fonctionnelle. En effet, $F(\mathcal{G})$ peut être écrite avec changement d'efficacité et changement technique : $F(\mathcal{G}) = EC.TC$, où

$$EC := \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}, \tag{18}$$

et

$$TC := \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} . \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)} \right]^{1/2}. \tag{19}$$

Comment pouvons-nous mesurer $F(\mathcal{G})$ si certains attributs ont été éliminés ? Lorsque ec est supprimé, il peut être considéré comme neutre. On peut donc raisonnablement supposer que $EC = 1$:

$$EC = 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_t^k(z_t^k) = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k), \tag{20}$$

nous obtenons alors :

$$F(\mathcal{G}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{K} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} \right]^{1/2}. \tag{21}$$

Par conséquent, lorsque le changement d'efficacité a été supprimé, la contribution de la firme k à l'indice $AM(.)$ s'écrit :

$$C^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}\backslash\{ec\}; F) = \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G}\subseteq\mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \Delta_k F(\mathcal{G}), \tag{22}$$

où

$$\Delta_k F(\mathcal{G}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k) + \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k) + \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)}\right]^{1/2} - \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)}\right]^{1/2}. \tag{23}$$

On obtient donc la forme fonctionnelle de $\psi(tc)$:

$$\begin{aligned}\psi(tc) = &\sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G}\subseteq\mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k) + \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k) + \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)}\right]^{1/2} \\ &- \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G}\subseteq\mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)}\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{24}$$

Il s'agit de la contribution de la k-ième firme au montant de la productivité lorsque le changement d'efficacité a été éliminé.

Caractérisation de $\psi(ec)$. Si la contribution de la k-ième firme C^k dépend seulement de ec, l'attribut caractérisant le progrès technique est neutre. Nous pouvons donc supposer que $TC = 1$:

$$TC = 1 = \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} . \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}\right]^{1/2}, \tag{25}$$

ce qui engendre différentes possibilités. D'une part :

$$\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k) = \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k) \text{ et } \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k) = \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k). \tag{26}$$

Ceci implique que $F(\mathcal{G}) = 1$. Or $TC = 1$ implique à son tour $EC = 1$. Ce résultat n'est pas intéressant dans la mesure où il ne caractérise en aucun cas un changement d'efficacité ou de productivité entre les périodes t et $t+1$.

D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k) = \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k) \text{ and } \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k) = \sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k). \tag{27}$$

Quatre formes fonctionnelles équivalentes peuvent alors être mises en évidence pour représenter $F(\mathcal{G})$:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_t^k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}. \tag{28}$$

Finalement, si toutes les distances sont égales, nous obtenons toutes les combinaisons qui donnent $\psi(ec, tc) = 1$; en d'autres termes, la contribution de la k-ième firme à l'indice de productivité $AM(.)$ est égale à 1. En considérant que

$$F(\mathcal{G}) = \frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}, \tag{29}$$

la contribution de la k-ième firme à $AM(.)$ lorsque le progrès technique est éliminé est alors :

$$C^k(\mathbb{G}, \mathbb{A}\backslash\{tc\}; F) = \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \Delta_k F(\mathcal{G}), \tag{30}$$

où

$$\Delta_k F(\mathcal{G}) = \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k) + \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k) + \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}\right] - \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^k(z_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_t^k(z_t^k)}\right]. \tag{31}$$

Par conséquent, la forme fonctionnelle de $\psi(ec)$ est obtenue :

$$\psi(ec) = \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G}\subseteq\mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^{k}(z_{t+1}^{k}) + \mathcal{D}_{t+1}^{k}(z_{t+1}^{k})}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t}^{k}(z_{t}^{k}) + \mathcal{D}_{t}^{k}(z_{t}^{k})} \right] - \sum_{\bar{g}=0}^{K-1} \sum_{\mathcal{G}\subseteq\mathbb{G}\backslash\{k\}} \frac{(K-1-\bar{g})!\bar{g}!}{K!} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t+1}^{k}(z_{t+1}^{k})}{\sum_{k=1}^{\bar{g}} \mathcal{D}_{t}^{k}(z_{t}^{k})} \right], \tag{32}$$

il s'agit de la contribution de la k-ième firme à l'indice de productivité lorsque le progrès technique est éliminé.

En définitive, $\psi(ec,tc)$, $\psi(ec)$ et $\psi(tc)$ sont déterminées. Il est donc possible de décomposer l'indice de productivité agrégé de Malmquist à la fois par firme et par attribut. Le tableau de contingence ci-dessous résume les différentes contributions qu'il est possible d'obtenir en utilisant la valeur Shapley comme outil de décomposition.

Attributs $\rightarrow$ Firmes $\downarrow$	Variation d'efficacité	Progrès technique	Total
Firme 1	C_{ec}^{1}	C_{tc}^{1}	(.)%
Firme 2	C_{ec}^{2}	C_{tc}^{2}	(.)%
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Firme $K-1$	C_{ec}^{K-1}	C_{tc}^{K-1}	(.)%
Firme K	C_{ec}^{K}	C_{tc}^{K}	(.)%
Total	(.)%	(.)%	100%

TAB. 1 – Structure de la décomposition par firme et par attribut

4 Conclusion

Nous mettons au jour la loi bidimensionnelle de décomposition, ou multi-décomposition, de l'indice de Malmquist agrégé en combinant la décomposition par firme et la décomposition par attribut.

Le croisement des différentes contributions donne des indications sur les déterminants de l'indice. On peut donc déterminer avec exactitude la part de responsabilité imputable conjointement aux changements (efficacité ou progrès technique) et au rôle tenu par chaque firme.

Remerciements

Nous tenons à remercier Walter Briec pour ses précieux commentaires. Toute erreur relève de l'entière responsabilité des auteurs.

Références

Auvray, C., Trannoy, A., 1992. Décomposition par source de l'inégalité des revenus à l'aide de la Valeur Shapley. Journées de Microéconomie Appliquée. Sfax, Tunisie.

Caves, D., Christensen, L., Diewert, W.E., 1982. The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity. Econometrica 50, 1393 − 1414.

Chantreuil, F., Trannoy, A., 1999. Inequality Decomposition Values : The Trade-off Between Marginality and Consistency. DP 9924 THEMA.

Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., 1985. The Measurement of Efficiency of Production. Klüwer Academic Publisher, Boston.

Färe, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., Roos, P., 1989. Productivity developments in swedish hospitals : a Malmquist output index approach. In : A. Charnes, V.W. Cooper, A. Lewin and L. Seiford (Eds.), Data Envelopment Analysis : theory, methodology and applications. Boston, Kluwer Academic Publishers.

Färe, R., Grosskopf, S., Norris, M., Zhang, Z., 1994. Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Changes in Industrial Country. American Economic Review 84, 66 − 83.

Färe, R., Primont, D., 1995. Multi-Output Production and Duality : Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Färe, R., Zelenyuk, V., 2003. On aggregate Farrell effficiencies. European Journal of Operational Research 146, 615 − 620.

Mussard, S., Peypoch, N., 2005. On Multi-Decomposition of the Aggregate Luenberger Productivity Index. Forthcoming in Applied Economics Letters.

Owen G., 1977. Values of Games with Priori Unions. In : Heim R. and Moesclin O. (Eds.), Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Springer-Verlag, New York.

Shephard, R.W., 1970. Theory of Cost and Production Function. Princeton University Press, Princeton NJ.

Shapley L., 1953. A value for n-person games, in : H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds. Contributions to the Theory of Games Vol. 2, Princeton University Press.

Shorrocks, A.F., 1999. Decomposition Procedures for Distributional Analysis : A Unified Framework Based on the Shapley Value. Mimeo, University of Essex.

Zelenyuk, V., 2004. Aggregation of Malmquist Productivity Index. Working paper.