

L'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche : Un problème central dans l'industrie de la chaussure

Fayez F. Boctor

et

Jacques Renaud

Août 2005

Document de travail DT-2005-JR-3

Centre de recherche sur les technologies de l'organisation réseau (CENTOR),

Université Laval, Québec, Canada

© *Centor*, 2005



L'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche : Un problème central dans l'industrie de la chaussure

Fayez F. Boctor et Jacques Renaud

Centre de recherche sur les technologies de l'organisation réseau (CENTOR)
Université Laval, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous discutons d'un nouveau problème d'ordonnancement qui n'a jamais été abordé dans la littérature scientifique. Il s'agit du problème d'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche. La particularité des machines multitâches est qu'elles effectuent plusieurs opérations simultanément et que la durée de ces tâches n'est pas forcément la même. Lorsque l'une de ces tâches se termine, et si l'on souhaite démarrer une autre à sa place, il est nécessaire d'arrêter l'exécution de toutes les tâches en cours afin d'effectuer la mise en route nécessaire pour la nouvelle tâche. L'exemple type des machines multitâches sont les machines d'injection des semelles en caoutchouc dans l'industrie de la chaussure, les machines à injection de produits en plastique et les machines-outils à plusieurs têtes de coupe utilisées particulièrement dans les ateliers flexibles.

Nous commençons par présenter le problème d'ordonnancement d'une machine multitâche et ses particularités, analyser les ressemblances et les différences entre notre problème et les autres problèmes d'ordonnancement. Par la suite, nous discutons des décisions à prendre dans ce contexte, exposons les différentes approches pour résoudre le problème, proposons une formulation mathématique pour modéliser un cas particulier du problème et développons une approche heuristique pour traiter le problème tel qu'il se trouve dans l'industrie.

L'approche proposée a été testée sur les données d'une année de production d'une entreprise réelle de fabrication de chaussures. Les résultats obtenus démontrent l'efficacité des procédures développées et la parfaite faisabilité des solutions proposées. Un logiciel mettant en œuvre l'approche proposée a été développé et implanté dans l'entreprise. Ce logiciel est actuellement utilisé par l'entreprise et satisfait à ses besoins.

1- L'ORDONNANCEMENT DES OPÉRATIONS SUR UNE MACHINE MULTITÂCHE

Il est de plus en plus fréquent d'utiliser des machines multitâches dans l'industrie. Par exemple, dans la fabrication des pièces en plastique, certaines machines possèdent plusieurs injecteurs, dans les ateliers d'usinage certaines machines-outils possèdent deux têtes de coupe capables d'effectuer deux opérations simultanément et, dans l'industrie de la chaussure, des machines à injection possèdent jusqu'à huit bras d'injection pour fabriquer les semelles en caoutchouc.

Les machines multitâches effectuent plusieurs tâches simultanément. Ces tâches peuvent avoir la même durée ou des durées différentes. Dans le cas où toutes les tâches à exécuter simultanément sont de même durée, le problème est semblable à celui de la machine monotâche. Le cas qui nous intéresse ici est celui où plusieurs des tâches à exécuter ont des durées différentes et l'exécution de chacune de ces tâches nécessite d'effectuer un réglage au préalable que nous appelons le réglage de produit. En plus, le passage d'une famille de produits à une autre nécessite un autre réglage commun à tous les produits (tâches) qui composent la famille. Ce réglage sera appelé réglage de famille.

Dans un contexte industriel, nous recevons des commandes où chaque commande a une date limite de livraison et comprend un ensemble de produits différents à livrer avec des quantités précises. Chaque produit se définit par un ensemble de caractéristiques telles que le modèle, les dimensions et les couleurs. La fabrication d'un produit nécessite l'exécution d'une opération sur la machine multitâche et chaque unité du produit doit subir cette opération. Pour planifier les opérations découlant des commandes reçues, nous devons constituer un ensemble de tâches à exécuter où chaque tâche consiste à effectuer une opération précise pour un lot d'un même produit. Les éléments d'un tel lot peuvent venir d'une même commande ou de plusieurs commandes différentes. Ainsi, les éléments d'un produit appartenant à une commande donnée peuvent se trouver dans une même tâche ou dans plusieurs tâches différentes. Définir ou constituer une tâche consiste donc à préciser le produit concerné, les commandes de provenance et la quantité venant de chacune de ces commandes.

Notre problème consiste donc à définir toutes les tâches à effectuer et à déterminer la date de début et de fin d'exécution de chacune de ces tâches de façon à minimiser la durée totale des opérations et, dans la limite du possible, en respectant les dates limites de livraison des commandes.

Après avoir introduit le problème dans sa généralité, nous poursuivons en présentant le contexte industriel de notre application (section 2). Dans la section 3, nous discutons des éléments de ressemblance et de différence entre ce problème et les problèmes classiques d'ordonnancement des opérations à une machine ou à plusieurs machines identiques. Dans la section 4, nous esquissons les approches possibles pour traiter le problème et, dans la section 5, nous présentons une formulation mathématique d'une version simplifiée du problème afin de

mettre en lumière la difficulté à formuler le problème dans son ensemble. Les sections 6 et 7 donnent les éléments de l'approche proposée pour résoudre ce problème industriel et la section 8 présente et analyse les résultats obtenus lors de l'application de cette approche dans une usine de fabrication de bottes d'hiver. Finalement, les données d'un cas type sont présentées dans l'annexe.

2- L'ENTREPRISE ET LE CONTEXTE INDUSTRIEL DE L'APPLICATION

L'approche proposée pour l'ordonnement des opérations d'une machine multitâche a été développée et mise en place dans l'usine d'un important fabricant de chaussures. Cette entreprise est l'une des plus grandes entreprises manufacturières de chaussures au Canada. Elle emploie actuellement plus de 360 employés et son chiffre d'affaires est supérieur à 10 millions de dollars annuellement. Reconnue internationalement, elle exporte une importante partie de sa production aux États-Unis où elle approvisionne plusieurs magasins à grande surface. Nous nous sommes concentrés sur l'optimisation de la production d'une gamme particulière de produits, les bottes d'hiver. Nous avons développé une approche d'ordonnement des opérations et un logiciel qui est présentement utilisé par l'entreprise pour planifier la production des bottes en fonction des dates de livraison promises et des différentes contraintes de la production.

Quel que soit le modèle fabriqué, chaque botte se décompose en trois parties : une coquille monobloc, une doublure et une hausse. La coquille est la partie qui soutient le pied. Elle est composée de deux parties, la semelle et le contour, qui peuvent être de couleurs différentes. Elle doit être robuste, imperméable et résistante aux torsions dues à la marche. La doublure qui assure le confort et la chaleur de la botte est faite de feutre de polyester et la hausse est confectionnée de nylon hydrofuge. De ces trois parties, seule la hausse n'est pas fabriquée par l'entreprise. Les feutres sont fabriqués à l'aide d'une machine de découpe à contrôle numérique qui optimise les patrons de coupe. Douze postes de travail sont ensuite disponibles pour effectuer les coutures nécessaires. Les coquilles sont fabriquées à l'aide de 4 machines à injection de caoutchouc ayant cinq ou huit bras sur lesquels peuvent être installés des moules de diverses grandeurs. Finalement, les trois composantes de la botte sont assemblées manuellement sur une ligne de montage disposant de 24 postes de travail.

Notons que l'entreprise dédie chacune des machines à injection à la fabrication d'un ensemble de modèles de bottes et que ces ensembles sont mutuellement exclusifs. Cela nous a

permis de traiter le problème d'ordonnancement de chacune des machines séparément. Les données relatives aux commandes dédiées à l'une de ces machines sont présentées en annexe. Notons aussi que la demande varie de façon significative d'une pointure à l'autre. La demande pour les petites et les grandes pointures est relativement faible comparativement aux pointures moyennes dont la demande peut être jusqu'à dix fois plus élevée. Comme il est impossible de remplir tous les bras de la machine uniquement avec des pointures à haut volume, le choix des pointures à fabriquer ensemble est primordial. Il en résulte que certains bras peuvent *tourner à vide*. La demande est également très variable en fonction de la combinaison de couleurs (semelle et contour), la combinaison la plus populaire étant le noir - noir. Encore une fois, la demande des coquilles noir - noir peut représenter dix fois la demande de coquilles noir - rouge ou encore mauve - mauve.

En conditions normales d'opération, la capacité de production de la machine de découpe du feutre est de 300 feutres à l'heure, la capacité d'assemblage des bottes peut atteindre 1000 paires à l'heure tandis que l'injection se fait à un taux d'environ 180 paires de coquilles à l'heure. Le quart de travail de jour est de 9 heures et l'entreprise peut utiliser jusqu'à trois quarts de travail en période de pointe. Les machines à injection constituent donc le goulot du système de production. Une bonne planification de l'utilisation de ces machines est donc nécessaire afin de minimiser le temps de travail (et, par conséquent, le coût) et de respecter les dates de livraison promises.

Les commandes des clients sont reçues à l'avance. Typiquement, en février et mars, près de 90 % des commandes sont reçues avec des dates de livraison qui se situent en septembre et octobre. Fin avril, l'ensemble du carnet de commandes est connu avec certitude. Chaque commande a une date de livraison, un modèle de botte, une combinaison de couleurs pour la coquille et des quantités à livrer de chacune des pointures. Les pointures des modèles pour enfants vont de 5P à 13P alors que les pointures pour adultes vont de 1G à 13G pour un total de 22 pointures différentes. L'entreprise offre 13 combinaisons de couleurs de coquilles. Les couleurs disponibles à la fois pour la semelle et le contour sont : *noir, gris, fushia, mauve, bleu marine, rouge, bleu et violet*. La combinaison la plus demandée est le *Noir-Noir*.

Chaque machine à injection possède plusieurs bras pivotant autour d'un axe central, chaque bras pouvant produire une pointure à la fois. Aussi, une pointure ne peut être produite que sur un seul bras à la fois car l'entreprise ne possède qu'un seul moule par pointure. Chaque changement

de moule sur un bras demande un réglage qui dure 30 minutes et le changement de couleur de la semelle ou du contour requiert un réglage de 45 minutes. Les différentes opérations de réglage ne peuvent être effectuées simultanément et les temps sont cumulatifs car il y a un seul régleur par machine. Notons qu'un changement de couleur affecte la couleur de tous les moules sur tous les bras de la machine. De plus, lors d'un changement de moule ou de couleur, la production de tous les bras de la machine est arrêtée, il s'agit d'une particularité importante et distinctive de cette machine multitâche. Le temps d'injection d'une coquille est le même quels que soient le modèle, la couleur ou la peinture. La machine possède deux points d'injection, un pour la semelle, l'autre pour le contour. Le passage d'une commande de couleur Semelle Rouge/Contour Noir à Semelle Noire/Contour Rouge demande donc un changement de couleur aux deux points d'injection pour un temps total de 90 minutes. La cadence de production, qui est indépendante du modèle, de la peinture ou de la couleur, est de 55 paires de coquilles à l'heure pour une machine à 8 bras et de 35 paires pour une machine à 5 bras. La *Figure 1* présente une vue schématique de l'une des machines à injection utilisée, on y distingue clairement les 8 bras et les 2 dispositifs d'injection.

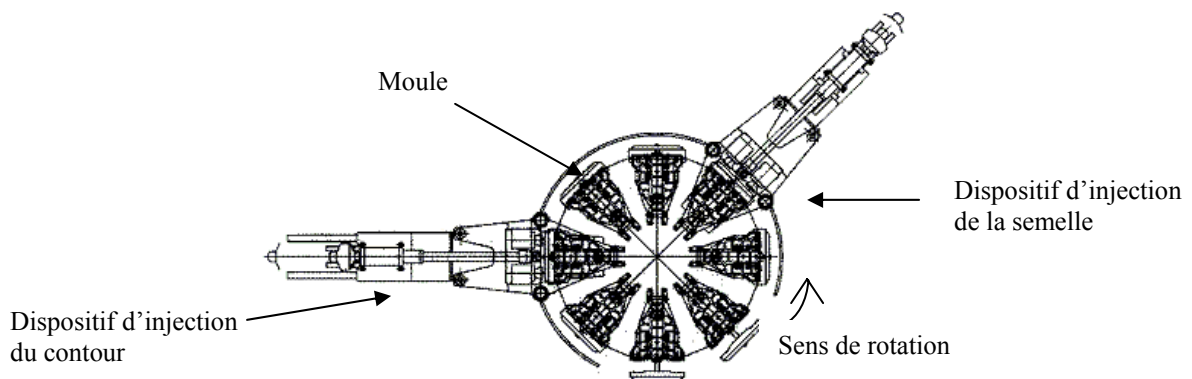


Figure 1. Vue schématique d'une machine à injection à 8 bras.

Le travail du planificateur consiste à définir un calendrier de production pour chacune des machines à injection afin de produire l'ensemble des commandes en respectant, autant que possible, les dates de livraison promises et l'ensemble des contraintes opérationnelles. Le calendrier de production doit mentionner quelles sont les couleurs, peintures et quantités qui seront fabriquées en tout temps, sur chaque bras de chaque machine, ainsi que les temps précis des divers changements de production et les temps de réglage associés. Le cas échéant, le calendrier indique à quel moment un quart de travail supplémentaire doit être ajouté et pour

combien de jours. L'entreprise où cette étude s'est déroulée définit l'objectif en matière de planification des opérations de la façon suivante : trouver un calendrier de production réalisable permettant de terminer la production de toutes les commandes le plus tôt possible tout en ajoutant le minimum de quarts de travail supplémentaires. Dans la suite, nous adoptons le même objectif que l'entreprise.

Enfin, notons qu'il existe très peu de recherches sur la planification de la production dans l'industrie de la chaussure. Des deux articles recensés, aucun n'aborde la planification de la production proprement dite. Hsing (1999) effectue une analyse économique du réseau logistique de l'industrie japonaise de la chaussure. Kim *et al.* (2002) proposent l'utilisation d'agents pour simuler le processus d'approvisionnement et de négociation dans l'industrie et donnent les résultats des simulations effectuées.

3- RESSEMBLANCES ET DIFFÉRENCES AVEC D'AUTRES PROBLÈMES D'ORDONNANCEMENT

Au meilleur de nos connaissances, il n'existe aucune publication qui porte sur l'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche. Cependant, si les tâches prédéfinies se divisent en groupes où chaque groupe comprend un nombre de tâches égal au nombre de bras et dont la durée est la même, alors le problème peut être transformé en un problème à une seule machine. Rappelons que dans notre cas nous devons constituer les tâches, que le nombre de tâches ayant les mêmes couleurs est souvent supérieur au nombre de bras, et que les tâches ayant les mêmes couleurs sont de durées différentes.

Aussi, si les temps de changement des moules et des couleurs étaient nuls et si aucune date de livraison était imposée, ce problème se réduirait alors à un problème d'ordonnancement de machines parallèles et indépendantes classique (voir Lawler *et al.* 1993 pour une classification des problèmes d'ordonnancement des opérations) qui est un problème NP-Dur (Lenstra et Rinnooy Kan, 1978; Garey et Johnson, 1979). Malheureusement, les temps de réglage pour les machines multitâches telles que la machine d'injection des coquilles de bottes sont non négligeables et dépendent de l'ordonnancement choisi. N'oublions pas que nous avons la possibilité de laisser un bras libre afin de conserver son réglage (moule) pour une tâche ultérieure. De plus, les bras ne peuvent pas être traités comme des machines parallèles car ils ne sont pas indépendants. En effet, les bras sont liés car effectuer le réglage de l'un d'entre eux

entraîne l'arrêt de tous les autres. Le problème d'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche peut donc être vu comme une généralisation du problème des machines parallèles où les machines ne sont pas indépendantes. Par conséquent le problème de la machine multitâche est, comme son cas particulier, NP-Dur.

Allahverdi *et al.* (1999) présentent une classification et une revue de 194 articles traitant des problèmes d'ordonnancement incorporant des temps de réglage mais aucun des articles inclus ne concerne des machines multitâches. Le réglage requis pour effectuer une tâche peut ne dépendre que de la nature et des conditions d'exécution de cette tâche, ce qui est appelé réglage indépendant de la séquence, ou dépendre à la fois de la tâche à exécuter et de la tâche qui précède immédiatement, ce qui est appelé réglage dépendant de la séquence. Aussi, il existe des réglages qui préparent pour la fabrication de toute une famille de produits, ce que l'on appelle réglage de famille, et des réglages qui sont propres à un seul produit, ce que l'on appelle réglage de produit. Dans le cas de la machine multitâche considérée ici, un réglage de produit sur un bras (changement de moule) est requis si le lot suivant sur le bras a une pointure différente. Ce réglage n'est pas nécessaire si l'on change la ou les couleurs mais pas la pointure; le réglage de produit dépend donc de la séquence. Le réglage de famille (changement de couleur de semelle et/ou de contour) dépend également de la séquence car changer la couleur à un injecteur nécessite moins de temps que changer la couleur des deux injecteurs.

Selon Allahverdi *et al.* (1999), seuls Bitran et Gilbert (1990) et Ghosh (1994) ont travaillé sur des problèmes impliquant des machines parallèles avec réglages de famille dépendant de la séquence mais, dans les deux cas, les machines sont indépendantes et les tâches déjà commencées ne peuvent pas être interrompues. Bitran et Gilbert (1990) ont travaillé sur un problème avec des réglages de deux ordres de grandeur afin de minimiser le coût total de réglage. Ghosh (1994) a étudié deux problèmes particuliers de minimisation du temps de traitement.

La littérature sur le problème classique d'ordonnancement des machines parallèles est très abondante et il ne serait pas pertinent ici d'en faire une revue exhaustive. Le lecteur intéressé pourra consulter les articles de Cheng et Sin (1990) et de Mokotoff (2001). Notons cependant quelques travaux fondamentaux dont l'algorithme du temps d'opération le plus long (Graham, 1969) et l'algorithme *MultiFit* de Coffman *et al.* (1978), qui malgré sa simplicité demeure toujours l'un des meilleurs algorithmes disponibles (voir à cet effet la récente étude empirique de

Mokotoff *et al.* 2001). Au niveau optimal, notons l'algorithme basé sur la génération d'inégalités valides de Mokotoff (2004) qui a permis de résoudre des problèmes ayant jusqu'à 100 machines et 1000 commandes.

Deux autres publications (Hall *et al.*, 2000; Brucker *et al.*, 2002) portent sur le problème des machines parallèles avec un serveur unique. Ce problème est une généralisation du problème des machines parallèles indépendantes où un réglage doit être effectué avant de charger une commande sur une machine. Ce réglage doit être réalisé par un serveur qui ne peut effectuer qu'un réglage à la fois. Il est donc probable qu'une ou plusieurs machines se retrouvent inactives et en attente de l'intervention du serveur. Ceci diffère de notre machine multitâche où le réglage d'un bras entraîne l'arrêt de tous les autres bras.

4- APPROCHES DE RÉOLUTION

Résoudre le problème d'ordonnancement des opérations d'une machine multitâche nécessite de déterminer la date de début de fabrication de chaque unité de chaque produit et de chaque commande. Ces dates doivent être choisies de façon à minimiser la durée globale des opérations en occasionnant le minimum de retard pour la livraison des commandes reçues. La durée globale des opérations inclut le temps de traitement de toutes les commandes et le temps des réglages nécessaires pour réaliser le calendrier de production choisi.

Définir le problème en exigeant de déterminer la date de début de la fabrication de chaque unité requise nous permet d'éviter de constituer au préalable les lots de produits et les tâches correspondantes. Cependant, cette définition rend la résolution du problème extrêmement difficile à cause du nombre de décision à prendre qui devient énorme. Dans la pratique, nous devons, d'une façon ou d'une autre, constituer des lots au préalable et déterminer leur date de début de fabrication par la suite.

Dans ce cas, les décisions à prendre consistent à : (1) constituer les lots de produits qui partageront le même réglage ainsi que les tâches correspondantes, (2) grouper les tâches ainsi constituées en blocs (groupes) de tâches qui partageront le même réglage de famille, (3) définir une séquence pour l'exécution des blocs constitués, et (4) déterminer la date de début d'exécution de chaque bloc et la date de début de chaque lot à l'intérieur de son bloc.

L'approche la plus simple pour résoudre le problème consiste à prendre ces 4 ensembles de décisions de façon séparée dans l'ordre de leur numéro. Dans ce cas, nous commençons par constituer des lots où chaque lot est composé d'un nombre à déterminer d'unités d'un même produit. Nous constituons ensuite des blocs où chaque bloc est composé d'un nombre de produits qui nécessitent le même réglage de famille. Par exemple, dans le cas de la machine à injection de coquilles de bottes, les tâches d'un même bloc doivent avoir à la fois la même couleur de semelle et la même couleur de contour. Par la suite, nous devons, en se basant par exemple sur les dates limites de livraison, définir la séquence d'exécution des blocs. Finalement, pour chacun des blocs, nous devons affecter les tâches aux bras de la machine multitâche et déterminer leurs dates d'exécution de façon à minimiser la durée globale d'exécution du bloc.

Une approche plus efficiente intégrera une procédure de révision des décisions prises. Par exemple, nous pouvons réviser la composition des lots après la constitution des blocs ou réviser la séquence des blocs en fonction des retards occasionnés par le calendrier obtenu.

5- UNE FORMULATION MATHÉMATIQUE

Une formulation mathématique qui modélise le problème d'ordonnancement de la machine multitâche dans sa généralité est bien complexe. Cependant, nous allons donner ici une formulation pour le cas où la composition des blocs est fixée au préalable et que la séquence d'exécution de ces blocs est prédéterminée. Dans ce modèle, chacune des tâches a un numéro qui désigne le type de réglage à faire avant le début de l'exécution de la tâche. Par exemple, dans le cas de la machine à injection de coquilles, le numéro de réglage indique le numéro (pointure) du moule à installer. Notons que fixer la composition des blocs et leur séquence d'exécution fixe automatiquement le temps de réglages de familles. Notons aussi que pour chaque bloc, toutes les opérations nécessitant le même réglage de produit seront groupées dans une seule tâche.

Pour notre formulation, nous utilisons la notation suivante :

Indices :

i indice du bras; $i = 1, \dots, N$

s indice du réglage (par exemple, la pointure du moule à installer); $s = 1, \dots, S$

b indice du bloc; $b = 1, \dots, B$

Paramètres :

- S_b ensemble de réglages requis pour les tâches du bloc b
- s_i numéro du réglage initial du bras i
- t_{sb} durée de la tâche s du bloc b (n'incluant pas le temps de réglage)
- t le temps d'un réglage produit

Variables de décision :

- x_{sbi} binaire qui prend la valeur 1 si la tâche s du bloc b est affectée au bras i
- y_{sbi} binaire qui prend la valeur 1 si la tâche s est la première du bloc b sur le bras i
- z_{sbi} binaire qui prend la valeur 1 si la tâche s est la dernière du bloc b sur le bras i
- w_{sbi} binaire qui prend la valeur 1 si la tâche s est à la fois la dernière du bloc $b-1$ et la première du bloc b sur le bras i
- u_{bi} binaire qui prend la valeur 1 si plus qu'une tâche du bloc b est affectée au bras i
- v_{bi} variable auxiliaire pour permettre de déterminer la valeur de u_{bi}
- L_{bi} durée totale des tâches appartenant au bloc b et affectées au bras i
- T_b durée globale du bloc b

Avant de présenter la formulation proposée, notons qu'il est généralement profitable de ne pas changer le réglage d'un bras pendant plusieurs blocs successifs. Pour éviter de changer le réglage d'un bras i entre le bloc $b-1$ et le bloc $b+1$, nous devons utiliser ce bras uniquement pour fabriquer le produit qui requiert ce même réglage durant le bloc b . Si ce produit n'est pas requis pour le bloc b et que nous voulons toujours conserver le réglage de i , nous devons alors garder ce bras libre et exécuter toutes les tâches du bloc b sur les autres bras. Dans la formulation qui suit, pour garder le bras i libre, nous lui affectons une tâche fictive qui utilise le même réglage mais d'une durée nulle. Cela explique que dans notre formulation nous permettons que x_{sbi} puisse prendre la valeur 1 pour des réglages s autres que ceux inclus dans l'ensemble S_b .

Avec la notation donnée ci haut, le problème d'ordonnancement des tâches sur une machine multitâche où les blocs sont constitués au préalable et où la séquence d'exécution est prédéterminée se modélise comme suit :

Minimiser : $\sum_{b=1}^B T_b$

- Sous :
- (1) $T_b \geq L_{bi}$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (2) $L_{1i} = \sum_{s \in S_1} t_{s1} x_{s1i} + t \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N x_{s1i} - t \sum_{i=1}^N y_{s_1 i}$; $i = 1, \dots, N$
 - (3) $L_{bi} = \sum_{s \in S_b} t_{sb} x_{sbi} + t \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N x_{sbi} - t \sum_{i=1}^N w_{sbi}$; $b = 2, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (4) $\sum_{i=1}^N x_{sbi} = 1$; $s \in S_b$, $b = 1, \dots, B$
 - (5) $y_{sbi} \leq x_{sbi}$; $s = 1, \dots, S$, $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (6) $z_{sbi} \leq x_{sbi}$; $s = 1, \dots, S$, $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (7) $\sum_{s=1}^S y_{sbi} = 1$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (8) $\sum_{s=1}^S z_{sbi} = 1$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (9) $w_{sbi} \leq z_{s, b-1, i}$; $s = 1, \dots, S$, $b = 2, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (10) $w_{sbi} \leq y_{sbi}$; $s = 1, \dots, S$, $b = 2, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (11) $\sum_{s=1}^S x_{sbi} \geq 1$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (12) $\sum_{s=1}^S x_{sbi} - v_{bi} = 1$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (13) $v_{bi} \leq Su_{bi}$; $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$
 - (14) $y_{sbi} + z_{sbi} \leq 2 - u_{bi}$; $s = 1, \dots, S$, $b = 1, \dots, B$, $i = 1, \dots, N$

L'objectif du modèle est de minimiser la durée globale de l'occupation de la machine (excluant le temps de réglages de familles qui ne dépend pas de nos décisions). La contrainte (1) détermine la durée d'occupation de la machine par le bloc b . La contrainte (2) sert à calculer la durée totale des tâches et des réglages de produits du bras i lors de l'exécution du premier bloc tandis que la contrainte (3) détermine cette même durée pour les autres blocs. La contrainte (4) assure que chaque tâche est affectée à un et un seul bras. Les contraintes (5) et (7) permettent d'identifier la première tâche du bloc b sur le bras i tandis que les contraintes (6) et (8) déterminent le numéro de la dernière tâche du bloc b sur le bras i . Les contraintes (9) et (10) permettent de donner à w_{sbi} la valeur 1 si, et seulement si, à la fois la dernière tâche du bloc $b-1$ et la première du bloc b sur le bras i requièrent le réglage s .

La contrainte (11) assure que, pour chaque bloc b , au moins une tâche (réelle ou fictive) est affectée au bras i . L'affectation d'une tâche fictive est nécessaire pour conserver le réglage d'un bras inactif pour le bloc suivant. Dans le cas où une seule tâche s (réelle ou fictive) est affectée au bras i durant l'exécution du bloc b , nous devons donner la valeur 1 à la fois à y_{sbi} et z_{sbi} indiquant que s est à la fois la première et la dernière tâche. Cependant nous devons empêcher cela si plusieurs tâches du même bloc sont affectées au bras i , ce qui est fait par les contraintes (12), (13) et (14).

Malheureusement, avec les moyens de calcul disponibles présentement, nous n'avons pas pu résoudre cette formulation pour des problèmes impliquant plus que 5 bras et 12 blocs. Cette formulation ne peut donc pas servir pour résoudre des problèmes de tailles industrielles. Il s'ensuit que tenter de formuler le problème sans que les blocs soient constitués au préalable donnera un modèle impossible à résoudre. Nous devons donc avoir recours à des approches heuristiques pour traiter les problèmes de grandes tailles. Dans la section suivante, nous exposons la méthode proposée pour ordonnancer les tâches d'un bloc et, dans la section 7, nous présentons l'approche de résolution du problème de la machine multitâche.

6- HEURISTIQUE POUR L'ORDONNANCEMENT DES TÂCHES D'UN BLOC

Un bloc est composé d'au plus S tâches où chacune des tâches nécessite un réglage différent et a une durée connue. Notre objectif est d'affecter chaque tâche à un et un seul bras en prenant en considération les réglages de départ des bras et de façon à minimiser la durée globale de l'occupation de la machine par le bloc. Nous voulons également que le réglage final des bras soit le plus adéquat possible pour l'exécution du bloc suivant. Pour cela, nous procédons en trois temps : (1) trouver une solution initiale, (2) améliorer la solution trouvée et (3) modifier la solution pour que les réglages finaux soient les plus adéquats possible pour le bloc suivant. Les détails de l'heuristique proposée sont donnés ci-après.

Solution initiale :

- 1- Affecter les tâches du bloc, dont le réglage requis correspond au réglage initial de l'un des bras, au bras correspondant,
- 2- Répéter jusqu'à ce que toutes les tâches soient affectées. Affecter la tâche non affectée ayant la plus grande durée au bras qui deviendra libre en premier,

- 3- Sauvegarder la solution obtenue en tant que la meilleure trouvée.

Solution améliorée :

- 1- Soit D la durée d'occupation de la machine correspondant à la solution initiale. Fixer la date cible $C = D$. Mettre $D^* = D$,
- 2- Mettre $C = C-1$ et annuler l'affectation de toutes les tâches,
- 3- Affecter les tâches du bloc, dont le réglage requis correspond au réglage initial de l'un des bras, au bras correspondant,
- 4- Répéter : affecter la tâche non affectée ayant la plus grande durée au premier bras pouvant la finir avant la date cible. Si aucun bras ne peut la finir avant la date cible, arrêter.
- 5- Si toutes les tâches sont affectées, remplacer la meilleure solution par celle ainsi obtenue. Mettre $D^* = C$ et retourner à 2.

Modification de la solution améliorée :

Pour chacun des bras auxquels sont affectées plus que deux tâches, si le réglage de sa dernière tâche n'est pas requis pour le bloc suivant et si le réglage de l'une de ces tâches, autres que la première, est requis pour le bloc suivant, alors déplacer cette tâche à la dernière position.

7- L'APPROCHE PROPOSÉE POUR L'APPLICATION INDUSTRIELLE

L'approche proposée est une approche heuristique composée de six principales étapes : (1) définition des tâches et composition des blocs, (2) définition de la séquence d'exécution des blocs et ordonnancement des tâches de chaque bloc, (3) modification de la séquence, (4) regroupement de blocs, (5) modification de la composition des blocs, et (6) ajout des quarts de travail nécessaires pour éliminer les retards. Les détails de notre approche suivent.

Définition des tâches et composition des blocs :

Toutes les commandes ayant la même date de livraison et requérant le même réglage de famille seront groupées dans un même bloc. Pour chaque bloc ainsi constitué, nous regroupons toutes les opérations nécessitant le même réglage de produit pour constituer une tâche distincte.

Par exemple, dans le cas de la machine à injection des coquilles, toutes les commandes ayant la même date de livraison et les mêmes couleurs (contour et semelle) feront partie d'un même

bloc. Pour chaque bloc, la fabrication de toutes les coquilles d'une même taille constitue une même tâche.

Définition de la séquence d'exécution des blocs et ordonnancement des tâches de chaque bloc :

La séquence d'exécution des blocs est définie selon l'ordre croissant des dates promises de livraison et, en cas d'égalité, nous exécutons en premier le bloc dont le temps de réglage de famille est le plus court. L'ordonnancement des tâches de chacun des blocs se fait à l'aide de la méthode présentée dans la section 6.

Par exemple, pour la machine à injection et dans le cas où deux blocs ont la même date promise de livraison, nous exécutons en premier le bloc dont la couleur de semelle ou celle du contour est la même que pour le bloc précédent.

Modification de la séquence :

Les étapes précédentes nous donnent un plan réalisable. L'objectif de cette étape est de réduire ses éventuels retards. Pour cela, nous examinons chaque bloc dont la date de fin dépasse la date promise de livraison et nous le déplaçons à une position plus avancée dans la séquence si et seulement si cela permet de réduire la somme de retard de tous les blocs. Cela peut aboutir à avancer l'exécution d'un ou de plusieurs blocs d'une ou de plusieurs positions dans la séquence.

Regroupement de blocs :

Cette étape consiste à examiner chaque bloc dans la séquence, en commençant par le dernier, et le regrouper avec le bloc qui requiert le même réglage de famille et occupe la position la plus proche mais qui le précède. Ce regroupement est fait si et seulement s'il permet de réduire la somme des retards du plan de production résultant.

Modification de la composition des blocs :

L'objectif de cette étape est de regrouper des paires de tâches qui requièrent les mêmes réglages (de famille et de produit), mais qui appartient à deux blocs différents, au sein du premier des deux blocs. Elle consiste donc à regrouper chaque tâche avec la tâche la plus proche ayant les mêmes réglages si et seulement si cela permet de réduire la somme des retards du plan de production résultant.

Ajout des quarts de travail permettant d'éliminer les retards :

Pour chaque bloc en retard rapport à sa date de livraison, en commençant par le premier parmi eux, nous déterminons la date et le nombre de quarts de travail supplémentaires à ajouter (au plus tard) pour éliminer son retard. Notons qu'éliminer le retard d'un bloc réduit le retard des blocs suivants. Nous devons donc mettre à jour notre plan de production et déterminer les blocs qui restent en retard au fur et à mesure.

8- RÉSULTATS OBTENUS

La méthode proposée a été appliquée pour établir le plan de production pour l'une des machines et pour l'année précédente. Le carnet de commandes de cette machine comprenait 60 commandes ayant 10 combinaisons de couleurs différentes et 11 dates de livraison. Le plan établi par l'entreprise a permis de réaliser les produits requis en 184 jours ouvrables avec un retard total de 44 jours et un retard maximal de 10 jours.

L'application de la méthode développée permet de réaliser ces mêmes quantités en 157 jours ouvrables sans aucun retard. Une part importante du gain vient de la réduction de réglages de familles. Le plan obtenu a été validé par le responsable de la planification et a été jugé cohérent et faisable.

Notons cependant que nous n'avons pas pu obtenir l'information relative au temps d'arrêt de la machine dû aux pannes ou l'absentéisme. L'entreprise ne conserve pas ce genre d'information. Cependant, on nous a indiqué que ces temps d'arrêt n'étaient pas significatifs.

RÉFÉRENCES

- Allahverdi, A., J. N. D. Gupta, & T. Aldowaisan (1999), A review of scheduling research involving setup considerations, *Omega*, **27**, 219-239.
- Bitran, G. R., & S. M. Gilbert (1990), Sequencing production on parallel machines with two magnitudes of sequence-dependent setup cost, *Journal of Manufacturing and Operations Management*, **3**, 4-52.
- Brucker, P., C. Dhaenens-Flipo, S. Knust, S. A. Kravchenko, & F. Werner (2002), Complexity results for parallel machine problems with a single server, *Journal of Scheduling*, **5**, 429-457.

- Cheng, T. C. E., & C. C. S. Sin (1990), A state-of-the-art review of parallel machine scheduling research, *European Journal of Operational Research*, **47**, 271-292.
- Coffman, E. G., M. R. Garey, & D. S. Johnson (1978), An application of bin-packing to multiprocessor scheduling, *SIAM Journal on Computing*, **7**, 1-17.
- Garey, M. R., & D. S. Johnson (1979), *Computers and intractability: A guide to the theory of NP Completeness*, Freeman, San Francisco.
- Ghosh, J. B. (1994), Batch scheduling to minimize total completion time, *Operations Research Letters*, **16**, 271-275.
- Graham, R. L. (1969), Bounds on the performance of scheduling algorithms, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17**, 263-269.
- Hall, N., C. Potts, & C. Sriskandarajah (2000), Parallel machine scheduling with a common server, *Discrete Applied Mathematics*, **102**, 223-243.
- Hsing, Y.-T. (1999), Trading companies in Taiwan's fashion shoe networks. *Journal of International Economics*, **48**, 101-120.
- Kim, T. W., C. S. Ko, & B. N. Kim (2002), An agent based framework for global purchasing and manufacturing in a shoe industry, *Computers and Industrial Engineering*, **42**, 495-506.
- Lawler, E. L., J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, & D. Shmoys (1993), Sequencing and scheduling: algorithms and complexity. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, **4**, 445-522.
- Lenstra, J. K., & A. H. G. Rinnooy Kan (1978), Complexity of scheduling under precedence constraints, *Operations Research*, **26**, 22-35.
- Mokotoff, E. (2001), Parallel machine scheduling problems: A survey, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **18**, 193-243.
- Mokotoff, E. (2004), An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem, *European Journal of Operational Research*, **152**, 758-769.
- Mokotoff, E., J. L. Jimeno, & A. I. Gutiérrez (2001), List scheduling algorithms to minimize the makespan on identical parallel machines, *Top*, **9**, 2, 243-269.

Annexe : Les commandes du modèle AX

| Commande | Client | Couleurs | Taille | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Date de commande | Date de Livraison | |
|----------|--------|----------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|------------------|-------------------|---------|
| | | | 5p | 6p | 7p | 8p | 9p | 10p | 11p | 12p | 13p | 1g | 2g | 3g | 4g | 5g | 6g | 7g | 8g | 9g | 10g | 11g | 12g | | | 13g |
| 1 | NO | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 36 | | 09-janv | 01-sept |
| 2 | WM | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 2106 | 2106 | 1404 | 1404 | 702 | 702 | | 09-janv | 01-sept |
| 3 | BL | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 92 | 92 | 92 | 92 | 92 | 92 | | 14-janv | 08-sept |
| 4 | BL | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 92 | 92 | 92 | 92 | 92 | 92 | | 15-janv | 15-sept |
| 5 | MI | N/N | | | | | | | | | | | | | | 592 | 592 | 592 | | | | | | | 21-janv | 15-sept |
| 6 | MI | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 500 | 500 | 200 | | | | | 21-janv | 15-sept |
| 7 | MI | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 500 | 500 | 200 | | | | | 21-janv | 01-oct |
| 8 | MI | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 500 | 500 | 200 | | | | | 21-janv | 08-oct |
| 9 | MI | N/N | | | | | | | | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | | | | | | | | | | 21-janv | 15-sept |
| 10 | MI | N/N | | | | | | | | 154 | 154 | 154 | 154 | 154 | 154 | | | | | | | | | | 21-janv | 15-oct |
| 11 | HA | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | 75 | 150 | 225 | 225 | 150 | 75 | | 26-janv | 15-sept |
| 12 | NO | N/N | | | | | | | | | | | | | | | | | 12 | 18 | 24 | 12 | 12 | | 03-févr | 01-sept |
| 13 | SA | N/N | 445 | 445 | 445 | 445 | 445 | 445 | | | | | | | | | | | | | | | | | 05-févr | 22-sept |
| 14 | RA | N/N | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | 06-févr | 01-oct |
| 15 | NO | N/N | | | | | 96 | 144 | 180 | 180 | 180 | | | | | | | | | | | | | | 09-févr | 01-sept |
| 16 | NO | N/N | | | | | | | | | | 144 | 144 | 120 | 120 | | | | | | | | | | 09-févr | 08-sept |
| 17 | NO | N/N | | | | | 60 | 108 | 144 | 144 | 144 | | | | | | | | | | | | | | 10-févr | 15-sept |
| 18 | NO | N/N | | | | | | | | | | 144 | 144 | 120 | 120 | | | | | | | | | | 10-févr | 22-sept |
| 19 | NO | N/N | | | | | 60 | 108 | 144 | 144 | 144 | | | | | | | | | | | | | | 18-févr | 01-oct |
| 20 | NO | N/N | | | | | | | | | | 144 | 144 | 120 | 120 | | | | | | | | | | 18-févr | 01-oct |
| 21 | NO | N/N | | | | | 48 | 84 | 96 | 96 | 96 | | | | | | | | | | | | | | 22-févr | 15-oct |
| 22 | NO | N/N | | | | | | | | | | 96 | 96 | 96 | 96 | | | | | | | | | | 22-févr | 22-oct |
| 23 | NO | N/N | | | | | 36 | 60 | 84 | 84 | 84 | | | | | | | | | | | | | | 03-mars | 01-nov |
| 24 | NO | N/N | | | | | | | | | | 84 | 84 | 84 | 84 | | | | | | | | | | 03-mars | 01-nov |
| 25 | NO | N/N | | | | | 36 | 60 | 84 | 84 | 84 | | | | | | | | | | | | | | 05-mars | 08-nov |
| 26 | NO | N/N | | | | | | | | | | 84 | 84 | 84 | 84 | | | | | | | | | | 12-mars | 15-nov |
| 27 | NO | N/N | | | | | | | | | | | | | | | 84 | 60 | 48 | | | | | | 12-mars | 01-sept |
| 28 | NO | N/N | | | | | | | | | | | | | | | 84 | 48 | 36 | | | | | | 14-mars | 15-sept |

