Courbes Circulaires et Spirales

SUR LE TRACÉ DES ROUTES

ET

DES CHEMINS DE FER

ALTHÉOD TREMBLAY
PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE LAVAL
QUEBEC

CB

Courbes Circulaires et Spirales

SUR LE TRACÉ DES ROUTES

ET

DES CHEMINS DE FER

Par (Donald Chênier)

ALTHÉOD TREMBLAY

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES

UNIVERSITE LAVAL

QUEBEC

Courbes Circulaires et Spirales

SUR LE TRACÉ DES ROUTES

ET

DES CHEMINS DE FER

I

COURBES CIRCULAIRES

(1) Les courbes sur les routes et les chemins de fer sont appelées courbes de 1° 2°...n° et voici l'explication de ce que cela veut dire:

Ces courbes sont des arcs de cercle.

Une courbe de 1°, c'est un arc de cercle dans lequel une corde de 100 pieds, c'est-à-dire de la longueur d'une chaîne d'ingénieur, sous-tend un angle au centre de 1°. Une courbe de 2°, est un arc de cercle dans lequel une corde de 100 pieds sous-tend un angle au centre de 2°. En général, une courbe de n° est un arc de cercle dans lequel une corde de 100 pieds sous-tend un angle au centre de n°.

Nous pouvons à l'aide des radians, calculer sans table les rayons de ces courbes.

Soit une courbe de 1° :

Appelons R, le rayon que l'on cherche; la considération des radians nous donne:

$$\frac{100'}{R} \times 57.3 = 1^\circ$$

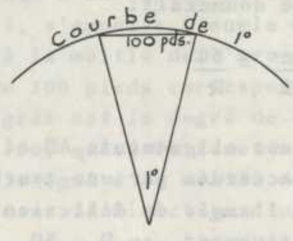
$$R = 5730 \text{ pieds}$$

Si c'est une courbe de 2° :

$$\frac{100' \times 57.3}{R} = 2^\circ$$

$$R = \frac{5730}{2} = 2865 \text{ pds.}$$

Nous admettons ici que la corde et l'arc sont de même longueur. Ce qui n'est vrai qu'approximativement. Plus la courbe, est accentuée plus la différence entre la corde et l'arc est grande. Sur une courbe de 10°, par exemple, la corde de 100 pieds correspond à un arc de 100.12705 pieds de longueur. Sur une courbe de 20° la corde de 100 pieds donne 100.5095 pieds pour la longueur de l'arc.



Pour une courbe de n°, nous aurons:

$$\frac{100}{R} \times 57.30 = n^\circ \text{ et } R = \frac{5730}{n}$$

De là, la règle suivante:

"Pour trouver le rayon d'une courbe, connaissant le degré, il faut diviser 5730 par le nombre donnant le degré de la courbe".

$$R = \frac{5730}{n}$$

La formule suivante est plus exacte: Pour une courbe de n° nous avons rigoureusement:

$$\frac{50}{R} = \sin.\ \frac{n^\circ}{2}$$

$$R = \frac{50}{\sin.\ \frac{n^\circ}{2}}$$

Pour une courbe de 10°, la première formule donne:

$$R = \frac{5730}{10} = 573 \text{ pieds}$$

La formule exacte donnerait:

$$R = \frac{50}{\sin. 5^\circ} = 573.69 \text{ pieds}$$

Réciproquement:

Si l'on connaît le rayon, on aura le degré en divisant 5730 par le rayon.

$$n° = \frac{5730}{R}$$

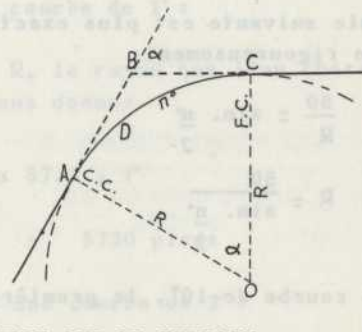
La formule exacte donnerait:

$$\sin. \frac{n°}{2} = \frac{50}{R}$$

(2) Lorsque l'on a deux alignements AB et BC, faisant un angle de déflexion α, raccordés par une courbe de n°; l'angle au centre 0 est égal à l'angle de déflexion α, le rayon est égal à $\frac{5730}{n°}$ approximativement, ou $R = \frac{50}{\sin. \frac{n°}{2}}$

Les distances AB et BC s'appellent les sous-tangentes, (subtangents). Elles sont égales à R $tg. \frac{\alpha}{2}$.

La longueur de la courbe ADC sera: $\frac{\alpha}{n°} \times 100$, puisqu'une partie de l'angle α, comprenant n°, correspond à une longueur de l'arc égale à 100 pieds. Le point de contact A est le commencement de la courbe et se désigne par C.C; le point de contact C est la fin de la courbe et se désigne par F.C.



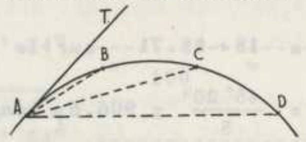
(3) <u>TRACÉ D'UNE COURBE SUR LE TERRAIN.</u>

Supposons deux alignements AB et BC faisant un angle de déflexion de 45° 20'. Les stations 9, 10, 11 etc. sont placées à tous les 100 pieds.

Pour tracer la courbe sur le terrain, on remarque qu'en un point quelconque de la courbe, si l'on met l'instrument à 0 sur la tangente, on aura l'angle qu'une corde de 100 pieds fait avec cette tangente en tournant un angle égal à la moitié du dégré de la courbe.

En effet, nous avons vu en géométrie que l'angle entre une tangente à un cercle et une corde passant par le point de contact, s'appelle l'angle du segment, et que cet angle est égal à la moitié de l'arc sous-tendu par la corde; or, une corde de 100 pieds correspond toujours à un arc dont la mesure en dégrés est le degré de la courbe. Donc, si le vernier est à zéro, quand la lunette est sur la tangente, en tournant un angle égal à la moitié du degré de la courbe, la lunette pointe dans la direction d'une corde de 100 pieds de cette courbe.

On peut voir de plus que la longueur de l'arc de la courbe sera proportionnelle à l'angle entre la tangente et la corde passant par l'extrémité de cet arc.

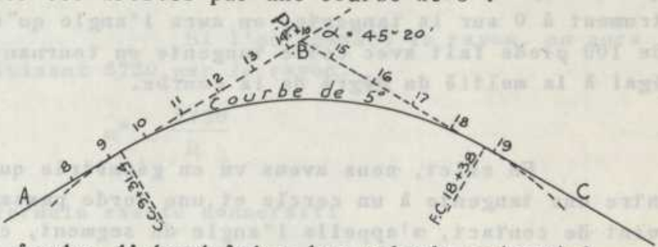


Soit ABCD la courbe et AT, la tangente au point A. Supposons les arcs AB, BC, CD égaux. L'angle de déflexion TAB est mesuré par la moitié de l'arc AB. De même:

$$BAC = \frac{\text{Arc } BC}{2} \text{ et } CAD = \frac{\text{Arc } CD}{2}$$

La déflexion totale TAD est donc trois fois la déflexion de la première corde AB.
Le rapport entre deux angles de déflexion est le même que le rapport entre les longueurs des deux arcs correspondants. Cela posé, si l'on place l'instrument à 0 degré sur la tangente au C.C. soit à la station 9 + 31.4, il nous faudra une corde de 68.6 pieds pour placer la station 10. L'angle de déflexion à tourner est proportionnel à la longueur de la corde; On suppose la corde et l'arc de même longueur.

Le sommet de l'angle est à la station 14 + 10 au point B que l'on désigne par P.I. point d'intersection. On veut raccorder ces droites par une courbe de 5°.



Il faudra d'abord faire les calculs suivants:

$R = \frac{5730}{5} = 1146'$ ou $R = \frac{50}{\sin. 2° 30'} = 1146.28$ pieds

Sous-tg. = 1146.28 x tg. 22° 40' = 478.71 pieds

Sommet	=	14 + 10.00	
Sous-tg.	=	4 + 78.71	
C.C.	=	9 + 31.29	
F.C.	=	18 + 88.71	sur le chaînage prélimi-/naire
L.	=	$\frac{45° 20'}{5}$ = 906.6 p.	longueur de la courbe (*)
C.C.	=	9+31.3	
L.	=	9+06.6	
F.C.	=	18+37.9,	ce qui est le nouveau chaînage, au lieu de 18 + 88.71.

Le commencement de la courbe est marqué C.C., son chaînage est 9 + 31.3; la fin de la courbe est marquée F.C., ce point sur le chaînage préliminaire est à la station 18 + 88.71, le chaînage en passant par la courbe donne pour ce point la station 18 + 37.9.

(*) Nous admettons dans ce calcul que la corde et l'arc sont tous les deux sensiblement de 100 pieds de longueur. Il est intéressant de calculer la différence qui existe entre une corde de 100 pieds et la longueur exacte de l'arc correspondant à une courbe de 5°. Il faut calculer la longueur d'un arc de 5° sur une circonférence d'un rayon de 1146.28 pds. Nous aurons:

$$\frac{\ell}{1146.28} \times 57.29577 = 5° \qquad \ell = \frac{5 \times 1146.28}{57.29577} = 100.03$$

Il n'y a que 3 centièmes de pieds de différence. Chaque 5° de déflexion donne une longueur de 100.03 pds. et la longueur totale exacte de la courbe serait:

$$\frac{45° 1/3}{5} \times 100.03 = 906.93 \text{ pieds.}$$

Pour une corde de 100', on tourne 2°30', pour une corde de 68.6', il faut faire la proportion.

$$\frac{x}{2°30'} = \frac{68.6}{100°}$$

$$x = 1°42'54''$$

cela fait, on prépare le tableau suivant:

	Déflexions	Cordes	Stations
C.C.	00° 00' 00"	000.0 Pds.	9 + 31.4
	1° 42' 54"	pour 68.6 "	10 + 00
	2° 30'	" 100. "	
	4° 12' 54"		11 + 00
	2° 30'	" 100 "	
	6° 42' 54"		12 + 00
	2° 30	" 100 "	
	9° 12' 54"		13 + 00
	2° 30	" 100 "	
	11° 42' 54"		14 + 00
	2° 30	" 100 "	
	14° 12' 54"		15 + 00
	2° 30'	" 100 "	
	16° 42' 54"		16 + 00
	2° 30	" 100 "	
	19° 12' 54"		17 + 00
	2° 30	" 100 Pds.	
	21° 42' 54"		18 + 00
	57' 06"	pour 37.9 "	
	22° 40'		18 + 37.9 F.C.

Ce calcul permet de vérifier le chaînage de la station à F.C. que l'on connaît d'avance.

L'instrument est placé, comme nous l'avons dit au C.C., chaînage 9 + 31.4. Le chaîneur d'arrière tient la chaîne à 0 à cette station. Le chaîneur d'avant se prépare à poser la station 10 en prenant sur la chaîne la longueur de 68.6' pieds, et il pose son piquet à cette distance du C.C. dans l'alignement qui lui est donné par l'opérateur de l'instrument qui a tourné la première déflexion indiquée par le tableau ci-dessus - 1°42'54". Les chaîneurs avancent pour poser la station suivante 11. Le chaîneur d'arrière tient le 0 de la chaîne à la station 10 et le chaîneur d'avant place le piquet à la station 11, à 100 pieds de la station 10, dans l'alignement qui lui est donné à l'instrument, dont le vernier doit indiquer la deuxième déflexion 4°12'54" et ainsi de suite.

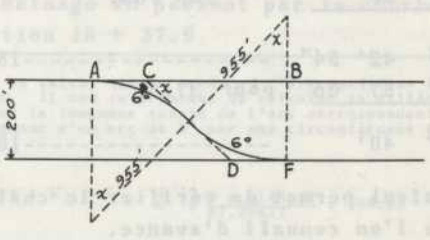
S'il arrive qu'un obstacle empêche de voir de l'instrument aux chaîneurs, on place l'instrument à la dernière station qu'on a pû localiser et l'on recommence les déflexions en plaçant la lunette à 0 sur la tangente en ce point.

Il semble superflu de dire que l'on déterminera la F.C. 18 + 37.9, en plaçant une dernière corde de 37.9 pieds à partir de la station 18.

L'exactitude du travail sera vérifiée par la dernière déflexion, qui doit passer par la station F.C. et la longueur de 37.9 pieds, qui doit exister entre la station 18 et la F.C. qui est déjà localisée. .

(4) <u>DEUX ALIGNEMENTS SONT PARALLÈLES ET DISTANTS DE 200 PIEDS.</u>

Les raccorder par deux courbes de 6° et de sens contraires. Calculer l'angle, x , que la tangente commune CD fait avec l'alignement CB et calculer aussi la distance AB.



Le rayon d'une courbe de 6° est:

$$R = \frac{5730}{6} = 955 \text{ pieds ou } \frac{50}{\sin.30} = 955.49 \text{ Pieds}$$

$$CD = 2 \times 955.49 \text{ tg. } x/2 = 200 \text{ Coséc.} x$$

$$1910.98 \text{ tg. } \frac{x}{2} = 200 \text{ Coséc.} x = \frac{200}{\text{Sin.} x}$$

$$191.098 \text{ tg. } \frac{x}{2} = \frac{20}{2 \sin. \frac{x}{2} \text{ Cos. } \frac{x}{2}} = \frac{10}{\text{Sin. } \frac{x}{2} \text{ Cos. } \frac{x}{2}}$$

$$191.098 \text{ Sin.}^2 \frac{x}{2} = 10$$

$$\text{Sin. } \frac{x}{2} = \frac{10}{191.098}$$

$$\frac{x}{2} = 13°13' \ 25.7''$$

$$x = 26°26'51.4''$$

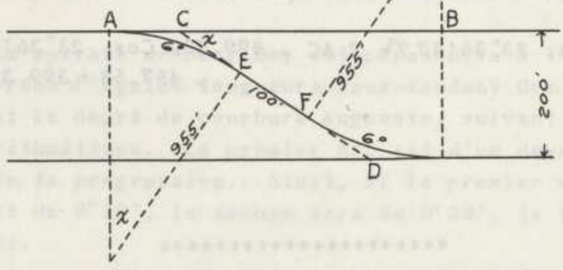
$$CD = 200 \text{ Coséc. } 26°26' \ 51.4'' = 449.055 \text{ pieds}$$

$$AB = AC + CD \times \text{Cos. } 26°26'51.4'' + DF = CD(1+\text{Cos. } 26°26'51.4'')$$

$$AB = 851.094 \text{ pieds}$$

---

(5) Même problème, en supposant une tangente de 100 pieds entre les deux courbes de 6°



$$2 \times 955.49 \text{ tg. } \frac{\chi}{2} + 100 = \text{Coséc.}\chi$$

$$955.49 \text{ tg. } \frac{\chi}{2} + 50 = 100 \text{ Coséc.}\chi$$

$$191.098 \text{ tg. } \frac{\chi}{2} + 10 = \frac{20}{2 \text{ Sin. } \frac{\chi}{2} \text{ Cos. } \frac{\chi}{2}} = \frac{10}{\text{Sin. } \frac{\chi}{2} \text{ Cos. } \frac{\chi}{2}}$$

$$191.098 \frac{\text{Sin.}\frac{\chi}{2}}{\text{Cos. } \frac{\chi}{2}} + 10 = \frac{10}{\text{Sin. } \frac{\chi}{2} \text{ Cos. } \frac{\chi}{2}}$$

$$191.098 \text{ Sin.}^2 \frac{\chi}{2} + 10 \text{ Sin. } \frac{\chi}{2} \text{ Cos. } \frac{\chi}{2} = 10$$

$$191.098 \ (1 - \text{Cos. } \chi) + 20 \text{ Sin } \frac{\chi}{2} \text{ Cos. } \frac{\chi}{2} = 20$$

$$191.098 \ (1 - \text{Cos. } \chi) \ \ 10 \text{ Sin.}\chi = 20$$

$$191.098 - 191.098 \text{ Cos.}\chi + 10 \text{ Sin.}\chi = 20$$

$10 \text{ Sin.}\chi + 171.098 = 191.098 \text{ Cos.}\chi$. équation facile à résoudre, (Voir 156, p. 130-"Cours de mathématiques appliquées").

On obtient: $\chi = 23°36'32.9''$

On trouve facilement AC et CB.

$$AC = 955.49 \text{ tg. } \frac{23°36'32.9''}{2} = 199.691 \text{ pieds}$$

$$CD = 2 \times 199.691 + 100 = 499.382 \text{ pieds}$$

<u>Vérification</u>: $499.382 \times \sin. 23°36'32.9'' = 200$

$$AB = CD \text{ Cos. } 23°36'32.9'' + 2\,AC = 499.382 \text{ Cos. } 23°36'32.9'' + 399.382 = 457.58 + 399.382 = 856.962$$

++++++++++++++++++++++

II

SPIRALES, OU COURBES DE TRANSITION

(6) Dans les premiers temps de la construction des chemins de fer on faisait le raccordement des lignes droites à l'aide de courbes circulaires. Les petites vitesses dont on se contentait alors ne causaient pas d'inconvénients aux trains qui passaient brusquement, sans transition, d'un mouvement en ligne droite à un mouvement circulaire. Mais la vitesse des trains ayant considérablement augmentée on s'est vu dans l'obligation d'introduire ce que l'on appelle une courbe de transition entre la tangente et l'arc de cercle. Cette courbe, de rayon de courbure variable, sert à deux fins. Premièrement, elle diminue considérablement la déviation latérale imprimée à un train par la force centrifuge, au point de tangence, quand il quitte la ligne droite pour s'engager dans une courbe. Deuxièmement - On sait que le rail extérieur dans une courbe est d'autant plus surélevé que la courbure est plus prononcée; la courbe de transition permet de passer graduellement d'une surélévation nulle à la surélévation que l'arc de cercle demande, pour contre-balancer la force centrifuge.

(7) La courbe de transition de Searles, que l'on emploie dans le tracé des chemins de fer et des routes, ressemble à une parabole cubique dont la courbure, très faible au point de contact de la tangente, augmente rapidement jusqu'à la courbure de l'arc de cercle qu'elle raccorde à la tangente.

La spirale de Searles, est construite à l'aide d'une série de cordes d'égales longueurs sous-tendant des arcs de cercles dont le degré de courbure augmente, suivant une progression arithmétique. Le premier arc est d'un degré égal à la raison de la progression. Ainsi, si le premier degré de courbure est de 0°10', le second sera de 0°20', le troisième de 0°30' etc.

La spirale (nous emploierons dorénavant le mot spirale pour désigner la spirale de Searles) commence sur la tangente au commencement de la première corde. Nous désignerons ce point par les lettres C.S. ou simplement S. L'extrémité de la spirale coïncidera avec le commencement de la courbe circulaire et sera désigné par C.C. La fin de la courbe coïncidera avec la fin de la deuxième spirale et sera désignée par les lettres F.C. et l'origine de la seconde spirale sera sur la tangente et sera désignée par les lettres F.S.

(8) Nous aurons à déterminer les coordonnées des extrémités des cordes de la courbe de transition. Le point C.S. sera l'origine et nous prendrons pour axe des y la tangente en ce point, c'est-à-dire l'alignement que nous voulons raccorder et pour axe des x une perpendiculaire à l'axe des y. Le point C.S. est le point 0.0. Les coordonnées des extrémités de chaque corde seront x et y. L'ordonnée de l'extrémité d'une corde à la tangente sera x et la distance depuis le C.S. jusqu'au pied de l'ordonnée sera y.

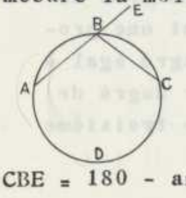
Supposons que nous tracions une courbe de transition avec des cordes de 100 pieds et que le premier arc soit de 0°10'. Alors l'angle au centre de ce premier arc sera aussi de 0°10'. L'angle au centre du deuxième arc sera de 0°20'. Les autres angles au centre successifs seront 0°30', 0°40', etc.

(9) <u>CALCUL DES ANGLES QUE LES CORDES FONT AVEC L'AXE DES Y.</u>

Représentons les arcs de cercle composant la spirale par c', c", c‴, etc.

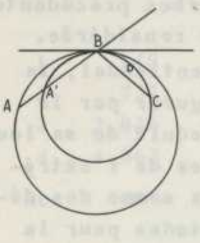
L'angle que la premiere corde fait avec l'axe des y est $\frac{c'}{2}$.

On sait qu'un angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.



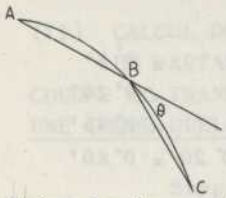
L'angle ABC = l'arc $\frac{ADC}{2}$ L'angle de déflexion CBE sera mesuré par la demi-somme des arcs AB et BC car on a

$$CBE = 180 - \text{angle } ABC = \frac{\text{circ.} - \text{arc } ADC}{2} = \frac{\text{arc } AB + \text{arc } BC}{2}$$



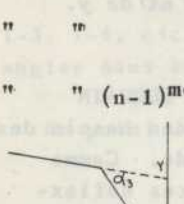
Si l'on a deux circonférences tangentes intérieurement au point B. En menant la tangente commune au point B on voit que l'arc A B a la même mesure en degrés que l'arc A'B puisque les moitiés de ces arcs mesurent le même angle formé par la corde et la tangente. Le supplément de l'angle A'BC ou de son égal ABC sera mesuré par la demi-somme $\frac{\text{arc A'B} + \text{arc BDC}}{2}$ ou $\frac{\text{arc AB} + \text{arc BDC}}{2}$.

Dans une spirale, deux éléments successifs sont formés de deux circonférences tangentes intérieurement. L'angle de déflexion, θ des deux cordes, sera donc mesuré par la demi-somme des arcs $\frac{\text{arc AB} + \text{arc BC}}{2}$



Si les arcs composant la spirale sont désignés par c' c" c‴ ....C^n. Les angles de déflexion entre les cordes seront:

					Déflexions
Entre la tangente et la lère corde					$\alpha_1 = \frac{c'}{2}$
"	" lère.	et	$2^{me.}$	corde	$\alpha_2 = \frac{c' + c''}{2}$
"	" $2^{me.}$	"	$3^{me.}$	"	$\alpha_3 = \frac{c'' + c'''}{2}$
"	"				
"	" $(n-1)^{me.}$	"	$n^{me.}$	"	$\alpha_n = \frac{c^{n-1} + c^n}{2}$



Les angles que les cordes successives feront avec l'axe des y seront:

		Angles avec l'axe des y
Ière corde---------------------	$\alpha_1 = \frac{c'}{2}$	$= \frac{c'}{2}$
2me. "	$\beta = \frac{c' \ c''}{2} + \frac{c'}{2}$	$= c' + \frac{c''}{2}$
3me. "	$\gamma = \frac{c'' + c'''}{2} + c' + \frac{c''}{2}$	$= c' + c'' + \frac{c'''}{2}$
$n^{me.}$ "		$= c' \ c'' \ c'' \ldots c^{n-1} + \frac{c^n}{2}$

On voit que l'angle qu'une corde fait avec l'axe des y est égal à la somme des angles au centre des courbes précédentes plus la moitié de l'angle au centre de la courbe considérée. Si nous prenons l'axe des y pour méridien conventionnel, la "latitude" d'une corde sera le produit de sa longueur par le cosinus de son azimut et son "départ" sera le produit de sa longueur par le sinus de son azimut. Les coordonnées de l'extrémité d'une corde quelconque seront données par la somme des départs pour la valeur de x et la somme des latitudes pour la valeur de y.

Les angles que les cordes successives font avec l'axe des y sont:

Ière corde	$\frac{1}{2}$ x	10'	-		= 0° 5'
2me.	"	0° 10'	+	0° 10'	= 0° 20'
3me.	"	0° 10'	+	0° 20' + 15'	= 0° 45'
4me.	"	0° 10'	+	0° 20' + 0° 30' + 0° 20'	= 0° 80'

On a calculé et mis en tableau les éléments d'une spirale à cordes de 100 pieds. Les cordes sont numérotées depuis 1 jusqu'à 20, et le tableau donne la courbure de chaque élément de transition, l'angle de la spirale en chaque point, les inclinaisons de chaque corde sur l'axe des y, les départs, les latitudes et les valeurs de x et de y. (Voir tableau à la fin).

(10) POUR TRACER LA COURBE DE TRANSITION SUR LE TERRAIN L'INSTRUMENT ÉTANT AU POINT C.S., nous aurons besoin des angles de déflexion des extrémités de chaque corde. Comme nous connaissons les coordonnées de ces points, ces déflexions que l'on désigne par la lettre i seront données par la formule

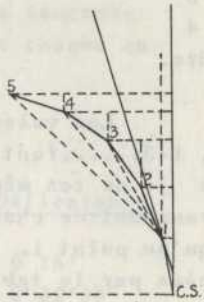
$$tg.\ i = \frac{x}{y}$$

Ayant calculé les valeurs de i nous pourrons tracer la spirale comme nous l'avons fait pour un arc de cercle au No. 3.

Le tableau suivant indique la disposition des calculs:

Points	x	y	Tan. i = $\frac{x}{y}$	i
1	.145	100.000	.00145	0° 05'00"
2	.727	199.998	.00364	12'30"
3	2.036	299.989	.00679	23'20"
4	4.363	399.962	.01091	37'30"
&c.				&c.

Nous avons alors toutes les informations nécessaires au tracé de la spirale entière si tous les points sont visibles de l'instrument.



(11) CALCUL DES ANGLES DE DÉFLEXIONS EN PARTANT DE LA TANGENTE À LA COURBE DE TRANSITION A L'EXTRÉMITÉ D'UNE CORDE QUELCONQUE.

Supposons l'instrument au point 1, extrémité de la première corde. Faisons passer par le point 1 une parallèle à l'axe des y. Il nous faut trouver les déflexions des cordes 1-2, 1-3, 1-4, etc. avec la tangente commune aux deux arcs de cercle se raccordant au point.1.

On trouvera d'abord les angles que les cordes 1-2, 1-3, 1-4, etc. font avec l'axe des y. En appelant a_1, ces angles nous aurons:

Au point 2 $\text{tg. } a_1 = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{.582}{99.998} = 0.00582$

$a_1 = 0°20'$

Au point 3 $\text{tg. } a_1 = \dfrac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = \dfrac{1.891}{199.989} = 0.00945$

$a_1 = 0°32'30"$

Au point 4 $\text{tg } a_1 = \dfrac{x_4 - x_1}{y_4 - y_1} = \dfrac{4.218}{299.963} = 0.01406$

$a_1 = 0°48'20"$

etc. etc. etc.

On appelle angle de la spirale (spiral angle) en un point quelconque 0.1.2... . l'angle que la tangente en ce point fait avec la tangente au C.S. c'est-à-dire avec l'axe des y. Cet angle est égal à la somme des angles au centre de tous les éléments jusqu'au point considéré. On désigne l'angle de la spirale par S. Le tableau suivant donne les valeurs de l'angle S.

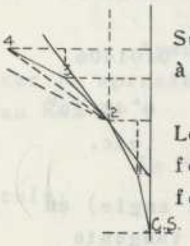
Points	Angle sous-tendu par chaque corde	Angles S.
C.S.	0° 0'	0 00'
1	0° 10'	0 10'
2	0° 20'	0 30'
3	0° 30'	1 00'
4	0° 40'	1 40'
Etc.		Etc.

Les valeurs de a_1 étant les angles que les cordes 1-2, 1-3,.....font avec l'axe des y. On obtiendra les angles j de ces mêmes cordes avec la tangente au point 1 en retranchant de chaque valeur de a_1, l'angle de la spirale jusqu'au point 1. Les valeurs des déflexions j seront données par le tableau suivant:

L'instrument étant au point 1 (S = 10')

Points	Angles a		Angles S	Déflexions J
2	20'00"	-	10'	10'
3	32'30"	-	10'	22'30"
4	48'20"	-	10'	38'20"
Etc.				Etc.

Le vernier doit être mis à zéro sur la tangente auxiliaire au point 1 où l'instrument est en station. La déflexion en arrière pour la corde 1 C.S. sera évidemment 0° 05'. Nous avons alors le tableau complet de toutes les déflexions dans le cas où l'instrument est en station au point 1 à l'extrémité de la première corde.



Supposons maintenant, l'instrument au point 2 à l'extrémité de la deuxième corde.

Les angles a_2 que les cordes 2-3, 2-4, etc. font avec l'axe des y seront données par les formules.

Points

$3 \quad tg.\ a_2 = \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = \dfrac{1.309}{99.991} = 0.01309$

$a_2 = 0°45'$

$4 \quad tg.\ a_2 = \dfrac{x_4 - x_2}{y_4 - y_2} = \dfrac{3.636}{199.970} = 0.01818$

$a_2 = 1°02'30''$

etc. etc. etc. etc. etc.

et comme l'angle S de la spirale au point 2 est 0°30', on obtiendra les déflexions J, partant de la tangente auxiliaire au point 2, en retranchant 30' de chaque angle a_2.

Instrument au point 2

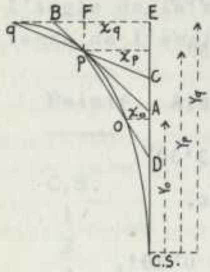
Points	Angles a_2		Angles S	Déflexions J
3	0°45'	-	30'	0°15'
4	1°02'30"	-	30'	0°32'30"
etc.	etc.	-	30'	etc.

Le vernier sera à 0 sur la tangente auxiliaire au point 2, où l'instrument est en station.

L'angle de déflexion arrière pour la corde 2-1 est évidemment la moitié du degré de l'arc 1-2 soit 10' et la déflexion de la corde 2-C.S. sera la différence entre la valeur de l'angle S de la spirale au point 2, et la déflexion i pour le point 2, 30'-12'30" = 17' 30". On pourra faire ainsi un tableau complet des déflexions pour toutes les cordes de la courbe de transition, l'instrument étant à zéro sur la tangente auxiliaire au point 2.

On voit comment on peut former un tableau des déflexions de toutes les cordes d'une spirale, l'instrument étant à l'extrémité d'une corde. On se rappellera que l'on obtient la déflexion d'un point quelconque en arrière de l'instrument en faisant la différence entre l'angle de la spirale au point où est l'instrument et l'angle de la spirale au point visé et retranchant ensuite la déflexion avant, que l'on utiliserait au point visé pour localiser le point où est l'instrument.

On peut aussi calculer les déflexions à l'aide des formules générales suivantes:



Supposons l'instrument au point p, le vernier étant à 0°00' sur la tangente AB en ce point. Et soient q et 0 deux points quelconques l'un en avant et l'autre en arrière de l'instrument. Nous cherchons les angles de déflexions BpQ et Apo. Menons pF parallèle à DE. Nous aurons

Bpq = Fpq - FpB

FpB = EAp = angle de la spirale Sp au point p.

Fpq = ECq = angle que la corde qp fait avec l'axe des y. L'angle de déflexion Bpq, pour un point q en avant de l'instrument, sera donné par la formule.

$$Bpq = \text{arctg.} \frac{x_q - x_p}{Y_q - Y_p} - S_p$$

De même on aura

ApO = EAp - EDp

L'angle de déflexion ApO pour un point O en arrière de l'instrument sera:

$$ApO = Sp - \text{arctg.} \frac{x_p - x_o}{Y_p - Y_o}$$

(12)
<u>CORDES DE LONGUEURS QUELCONQUES</u>.

Nous avons supposé, jusqu'ici, que la spirale était construite avec des cordes de cent pieds, mais il est évident que de telles cordes donneraient des spirales beaucoup trop longues. Pour une courbe de 3° seulement il faudrait une courbe de transition composée de 17 éléments, ce qui demanderait une spirale de 1700 pieds de longueur.

Nous devons par conséquent employer des cordes beaucoup plus petites. Mais il ne sera pas nécessaire de refaire nos calculs pour les adapter à des cordes moindres que cent pieds de longueur. En diminuant la longueur des cordes nous ne faisons que construire la spirale sur une plus petite échelle. Les valeurs de x, y, et les rayons correspondant aux mêmes arcs seront proportionnels à la longueur des cordes employées. Les angles au centre des éléments, les angles de déflexions, les angles de la spirale, les angles des cordes entre-elles et avec l'axe des y ne seront pas changés. Il n'y a que le degré des courbes composant les éléments qui ne correspondront plus au degré de l'élément de même rang à corde de 100 pieds. Ceci se comprend facilement puisque nous avons le même angle au centre avec une corde et un rayon différents. La nouvelle courbure d'un élément sera l'angle au centre correspondant à une corde de 100 pieds dans l'élément considéré. Les degrés des arcs des courbes circulaires sont inversement proportionnels (non pas exactement mais approximativement) aux longueurs des cordes.

Soit c la longueur des cordes employées nous aurons:

$$\frac{x_c}{x_{100}} = \frac{c}{100} \text{ ou } x_c = \frac{c}{100} x_{100}$$

$$\frac{y_c}{y_{100}} = \frac{c}{100} \text{ ou } y_c = \frac{c}{100} y_{100}$$

$$\frac{Rc}{R_{100}} = \frac{c}{100} \text{ ou } Rc = \frac{c}{100} R_{100}$$

Soit Dc le degré de la courbe correspondant au rayon Rc et D_{100} le degré de la courbe correspondant au rayon R_{100}
On aura:

$$Rc = \frac{100}{2 \sin.\frac{1}{2}Dc} \quad \text{et } R_{100} = \frac{100}{2 \sin.\ \frac{1}{2}D_{100}}$$

D'où l'on tire:

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}Dc = \frac{100}{2Rc} = \frac{100.100}{2\ c\ R_{100}} = \frac{100.100.2 \sin.\ \frac{1}{2}D_{100}}{2\ \ c.\ 100}$$

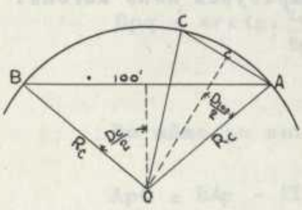
$$\sin.\ \tfrac{1}{2}Dc = \frac{100}{c} \ \sin.\ \tfrac{1}{2}\ D_{100}$$

Dans cette formule Dc est le degré de courbure correspondant à une spirale dont les cordes égales sont de longueurs c, et D_{100} est le degré de courbure de l'arc correspondant dans la spirale dont les cordes égales sont de longueur 100'.

Si par exemple nous prenons une longueur de corde de dix pieds, les valeurs de x et de y seront 10/100 des valeurs calculées pour des cordes de 100 pieds. Le degré de la courbe correspondant à chaque corde sera 10 fois plus grand (approximativement) que celui de la courbe correspondante ayant une corde de 100 pieds. Pour avoir le degré de courbure exacte il faut employer la formule du No. 12, $\sin\frac{1}{2}\,Dc = 100\sin\frac{1}{2}D_{100}$

Des Tables ont été calculées qui servent dans la pratique à obtenir sans calcul tous les éléments nécessaires au tracé des arcs de cercle et des courbes de transition sur le terrain. (*)

On peut démontrer autrement que la courbure d'un élément de spirale est inversement proportionnelle (approximativement) aux longueurs des cordes.



Soit AB une corde de 100 pieds et Ac une corde de longueur c sur un arc de cercle ACB dont le degré de courbure est le même depuis A jusqu'à B. Soit O le centre du cercle et R_c le rayon. L'angle au centre BOA sera égal au degré de courbure Dc puisque la corde a 100 pieds. L'angle au centre COA sera égal à D_{100}, degré de courbure que l'on trouve dans la table pour l'élément de spirale considéré. On aura donc:

$$R \sin.\frac{Dc}{2} = 50$$

$$R \sin.\frac{D_{100}}{2} = \frac{c}{2}$$

En divisant membre à membre on obtient:

$$\sin.\frac{Dc}{2} = \frac{100}{c}\sin.\frac{D_{100}}{2}$$

(*) -The Railroad Spiral by W.H. Searles, C.E. John Wiley & Sons, N.Y. Renouf Publishing Co., qui est la formule que nous avons déjà trouvée. Les arcs étant petits on pourra prendre la longueur de l'arc pour le sinus. Et l'on obtiendra la valeur approximative

$$\frac{Dc}{2} = \frac{100}{c} \times \frac{D_{100}}{2}$$

ou ce qui est la même chose

$$Dc = \frac{100}{c} D_{100}$$

(13) RECHERCHE DE LA LONGUEUR C D'UNE CORDE JOIGNANT LE POINT S A L'EXTRÉMITÉ L D'UN ARC QUELCONQUE D'UNE COURBE DE TRANSITION.

Soit x et y les coordonnées du point L et i l'angle que la corde S L fait avec l'axe des y.

Nous aurons:

$$C = \frac{y}{\text{Cos. } i} \quad \text{ou} \quad C = \frac{x}{\text{sin. } i}$$

EXEMPLE: Sur une spirale à corde de 30 pieds quelle est la longueur de la corde joignant le point S à l'extrémité de la 10ième corde? Il faut calculer les coordonnées x et y du point L.

La courbe de transition est composée de 10 arcs de cercle sous-tendus par des cordes de 30 pieds. Les coordonnées du point L sont:

$$x = 55.89462 \times \frac{3}{10} = 16.7684$$

$$y = 997.3236 \times \frac{3}{10} = 299.1971$$

On trouvera $\text{tg. } i = \frac{16.7684}{299.1971}$, $i = 3°12'28"$

La longueur de la corde SL sera:

$$c = \frac{x}{\text{sin. } i} = \frac{16.7684}{0.0558} = 299.67 \text{ pieds.}$$

On peut aussi obtenir cette longueur par la formule:

$$SL = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16.7684^2 + 299.197^2} = 299.67 \text{ pieds.}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, des tables calculées d'avance pour toutes sortes de spirales abrégent beaucoup le travail dans la pratique.

(14) RECHERCHE DE LA LONGUEUR DES TANGENTES S. E. ET L. E. DEPUIS LES POINTS S ET L. JUSQU'A LEUR RENCONTRE EN E.

Connaissant les coordonnées x et y du point L et l'angle S_L de la spirale. SL. Nous aurons:

$$LE = x \text{ cosec. } S_L$$

$$SE = y - x \cot. \ S_L$$

EXEMPLE: Une spirale est composée de neuf cordes égales de 40 pieds. Trouver la longueur des tangentes L E et S E?

On trouve dans les tables de Searles:

Table III Log. x = 1.219075

Table IV $S = 7°30'$, Log. sin. $S = \bar{1}.115698$

Log. L E 2.103377

L E = 126.87

Log. x = 1.219075

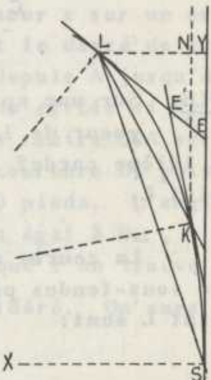
$S = 7°30'$, Log. cot. $S = 0.880571$

Log. Y E = 2.099646

Y E = 125.79

y = 359.352

S E = y - Y E = 233.562



(15) On appelle "GRANDE CORDE" la droite joignant deux points non consécutifs de la spirale.

RECHERCHE DE LA LONGUEUR D'UNE "GRANDE CORDE" JOIGNANT UN POINT QUELCONQUE K A UN AUTRE POINT QUELCONQUE L D'UNE SPIRALE.

On trouve les valeurs de x et de y, coordonnées de

L, et de x'y' coordonnées de K. La longueur de la corde est donnée par:

$$c = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Si l'on se sert des tables on peut employer la formule:

$$c = \frac{y - y'}{\text{Cos. } a}$$

dans laquelle a est l'angle que la grande corde fait avec l'axe des y.

EXEMPLE: Quelle est la longueur de la grande corde, joignant les points 12 et 20 d'une spirale, dont la longueur de corde est 18 pieds.

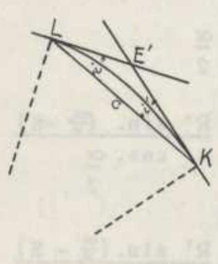
Sur une spirale à corde de 100 pieds, la valeur de y pour le point 20 est 1924.867 (voir la table) et la valeur de y' pour le point 12 est 1193.5938. Une proportion nous donne, pour ces valeurs quand les cordes sont de 18 pds. y = 346.476 et y' = 214.848

L'angle a, que la grande corde fait avec l'axe des y est donné par la somme de l'angle de la spirale au point 12 et de la déflexion au point 12 pour fixer le point 20.

$$a = 13^\circ + 10^\circ 07'23'' = 23^\circ 07'23''$$

$$c = \frac{346.476 - 214.848}{\text{Cos. } 23^\circ 07'23''} = 143.13 \text{pieds}$$

(16) TROUVER LA LONGUEUR DES TANGENTES PARTANT DES POINTS L et K JUSQU'À LEUR INTERSECTION AU POINT E'.



Soit S et S' les angles de la spirale aux points L et K. L'angle de déflexion des tangentes au point E' sera S-S'. On trouvera la longueur c de la grande corde LK (problème précédent). Dans le triangle L E' K, i sera l'angle E' LK, et i' sera l'angle L K E' et nous aurons:

$$LE' = \frac{C \text{ Sin. } i'}{\text{sin. } (S-S')} \quad KE' = \frac{C \text{ sin. } i}{\text{sin. } (S-S')}$$

EXEMPLE: Quelle est la longueur des tangentes aux points 12 et 20 dans une spirale à cordes égales de 18 pieds?

Nous avons trouvé pour c dans le problème précédent:

$$c = 143.13$$

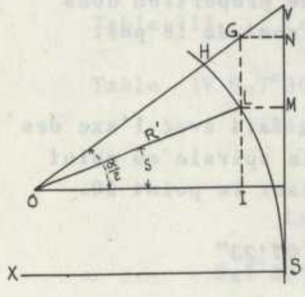
et nous avons

$$i' = 10°07'23''$$
$$i = 11°52'37''$$
$$S = 35°$$
$$S' = 13°$$

$$L\,E' = \frac{143.13 \sin.10°07'23''}{\sin.(35° - 13°)} = 67.15,\ KE' = \frac{143.13 \sin.\ 11°52'37''}{\sin.(35° - 13°)}$$

$$= 78.635 \text{ pieds.}$$

(17) TROUVER LA LONGUEUR V S DE LA TANGENTE PRINCIPALE depuis le sommet de l'angle entre les deux droites raccordées (P.I.) et le commencement de la spirale S.



S L est la spirale et L H la moitié de la courbe circulaire dont le centre est O. Menons G L I parallèle à la tangente V S et abaissons les perpendiculaires G N, L M, et O I sur V S, joignons O L. O V est la bissectrice de l'angle au (P.I.).

L'angle I O L = S

I O V = la moitié de la déflexion α des deux alignements raccordés. O L = le rayon de l'arc circulaire R'. S M = y et L M = x.

Nous aurons:

$$S\,V = S\,M + N\,V + M\,N$$
$$S\,M = y$$
$$N\,V = G\,N \quad \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = x \ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$M\,N = G\,L = \frac{O\,L \sin L\,O\,G}{\sin O\,G\,I} = \frac{R' \sin.\ (\frac{\alpha}{2} - S)}{\cos.\ \frac{\alpha}{2}}$$

$$V\,S = y + x\text{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{R' \sin.(\frac{\alpha}{2} - S)}{\cos.\ \frac{\alpha}{2}}$$

<u>EXEMPLE</u>:- L'angle α entre deux alignements raccordés par une courbe de 7°20' est 42°. La spirale est formée de 9 cordes de 23 pieds. Trouver la longueur de la tangente principale.

Nous allons résoudre cet exemple sans employer les tables de Searles pour récapituler ce que nous avons vu jusqu'à présent.

Les 9 arcs de cercle formant une courbe de transition à cordes de 100 pieds sont des courbes de 10', 20', 30', 40' 50', 1°, 1°10', 1°20' et 1°30'.

La spirale que nous calculons a des cordes de 23 pieds. Pour calculer la courbure Dc du premier arc nous avons la formule approximative:

$$Dc = \frac{10'.100}{23} = 43'28.7''$$

Si nous employons la formule exacte nous aurons:

$$\text{Sin.}\ \frac{Dc}{2} = \frac{100}{23}\ \text{Sin.}\ \frac{0°10'}{2}\ ,\quad \frac{Dc}{2} = 21'14''\quad Dc = 43'28''$$

Les courbures des 9 arcs de cercle composant la spirale seront donc comme suit:

Points	Degré
1	43' 30"
	43 30
2	1 27' 00"
	43 30
3	2 10' 30"
	43 30
4	2 54' 00"
	43 30
5	3 37' 30"
	43 30
6	4 21' 00"
	43 30
7	5 04' 30"
	43 30
8	5 48' 00"
	43 30
9	6 31' 30"

Il faut calculer les valeurs de x et de y correspondantes au point C.C.

Cordes	Angle avec l'axe des y,a,	Departs 23 sin.a	x	Latitudes 23 cos.a	y
1	0° 05'	0.0334		23.000	
2	0° 20'	0.1338		22.999	
3	0° 45'	0.3011		22.998	
4	1° 20'	0.5352		22.994	
5	2° 05'	0.8361		22.985	
6	3° 00'	1.2037		22.968	
7	4° 05'	1.6377		22.941	
8	5° 20'	2.1378		22.900	
9	6° 45'	2.7033	9.5221	22.840	206.625

L'angle S de la spirale pour 9 cordes:

$$S = 10' + 20' + 30' + 40' + 50' + 60' + 70' + 80' + 90' = 450'$$

$$S = 7^\circ\ 30'$$

Le rayon R' d'une courbe de 7°20' est:

$$R' = \frac{50}{\sin 3^\circ 40'} = 781.83 \text{ pieds.}$$

Nous connaissons maintenant tous les éléments qui entrent dans la formule:

$$T = y + x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{R' \sin.\ (\frac{\alpha}{2} - S)}{\cos.\frac{\alpha}{2}}$$

$$T = 206.625 + 9.5221 \operatorname{tg}.21^\circ + \frac{781.83 \sin 13^\circ 30'}{\operatorname{Cos}.21^\circ}$$

$$T = 206.625 + 3.6555 + 195.50 = 405.7805$$

$$T = 405.7805 \text{ pieds}$$

En employant les tables de Searles le travail est beaucoup simplifié et l'on trouve:

$$T = 405.784 \text{ pieds}$$

(18) TROUVER LA LONGUEUR VH (Fig. du No. 17 Page 23) partie de la bisectrice comprise entre l'apex V et le point H sur la courbe (EXTERNAL SECANT).

$$VH = VG + GO - OH$$

$$VG = \frac{x}{\cos.\frac{\alpha}{2}} \qquad GO = \frac{R'\cos S}{\cos.\frac{\alpha}{2}}$$

$$VH = \frac{x + R'\cos. S}{\cos.\frac{\alpha}{2}} - R'$$

Dans l'exemple numérique précédent nous avons:

$$VH = \frac{9.5221 + 781.83 \cos 7°30'}{\cos. 21°} - 781.83$$

$$VH = 58.66 \text{ pieds}$$

(19) La dernière corde d'une spirale doit sous-tendre un arc de cercle dont la courbure est moindre que celle de la courbe raccordée. Mais la corde suivante (en supposant que l'on continue la spirale plus loin) doit correspondre à un degré de courbure égal à l'arc de cercle raccordé, ou lui étant peu différent.

EXEMPLE:- S'il s'agit de raccorder une courbe de 10°, la spirale pourra être composée de 5 cordes de 10 pieds. (le degré de la courbe correspondante à la 6ème.corde étant 10° 00' 45"). Ou bien l'on emploiera 15 cordes de 26 pieds de longueur chacune (le degré de la courbe sur la 16ème corde étant de 10°16'09"). La longueur de la spirale serait de 50 pieds dans le premier cas et 390 pieds dans l'autre. Entre ces deux limites les tables de Searles fournissent 15 autres spirales de longueurs intermédiaires chacune pouvant s'adapter à une courbe de 10°.

Nous pouvons donc, pour choisir la spirale qui convient, imposer une autre condition à remplir. Nous pouvons fixer la longueur de la spirale. On choisit alors les deux facteurs nc (n est le nombre de cordes et c la longueur de chaque corde) de manière que le produit nc égale la longueur choisie aussi près que possible en même temps que le degré de la $(n+1)^{me.}$ courbe diffère peu de la courbe raccordée. Ainsi si nous désirons une spirale de 130 pieds de longueur pour raccorder une courbe de 10° nous pouvons choisir entre:

n = 8 c = 15 Ds = 10° 00'45" nc = 120 pds.
ou
n = 9 c = 16 Ds = 10° 25'51" nc = 144 "

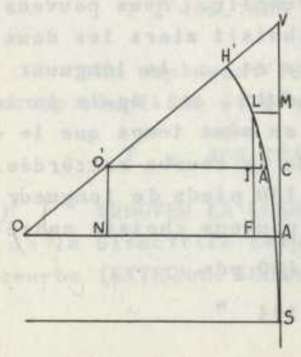
Ds représente la courbure correspondante à la $(n+1)^{me.}$ corde.

Quand il est possible de le faire, des cordes de 30 pieds de longueur donneront la meilleure spirale. Une spirale à cordes de 30 pieds a pour longueur environ 770 fois la surélévation du rail extérieur pour une vitesse de 35 milles à l'heure.

La valeur de S, angle de la spirale, dépend seulement du nombre de cordes et est indépendante de la longueur de ces cordes. Cet angle S est toujours donné par la même série 10' 20' 30'.... Pour des cordes de 100 pieds ces angles correspondent à des courbes de même degré 10', 20', 30'..... Pour une autre longueur de corde les angles aux centres restent les mêmes mais la courbure varie suivant la formule que nous avons vue au No. 12 . Si l'on se sert des tables, l'angle S que l'on choisit à volonté fixe le nombre de cordes n. Nous devons ensuite, encore à l'aide des tables, choisir la longueur de corde c qui donnera pour Ds, en regard de n la valeur dont nous avons besoin. Ainsi supposons S = 9°10' on trouvera dans une table n = 10 et dans une autre table c = 18 ou 19 pieds. Avec 18 pieds Ds= 10°11'54" et avec 19 pieds Ds= 9°39'35". Ces valeurs conviennent toutes deux à une courbe de 10° . La longueur de la spirale étant égale à nc , sera de 180 pieds, si on choisit la première, et 190 pieds si c'est la seconde que l'on emploie.

(20) CALCUL DE L'OFFSET p.

On appelle "offset" ou "shift" le déplacement que l'on fait subir à une courbe circulaire pour l'éloigner de ses deux tangentes afin de pouvoir placer la spirale en partie sur la courbe et en partie sur la tangente.



Soit SL la spirale suivie d'une courbe circulaire. Si on prolonge l'arc de cercle H'L il ne tombera pas sur la droite CM mais sera tangent à une parallèle à CM au point A'. Le rayon O'A' étant perpendiculaire à la tangente. La distance entre les deux tangentes est LM-IA' = x - R' (1 - cos S). En appelant p la distance entre les deux tangentes on a donc

$$p = x - R' (1 - \cos S)$$

Si on appelle q la distance SC. on a

$$SC = SM - LI = q = y - R' \sin S.$$

Ces calculs nous donnent un nouveau moyen d'obtenir la tangente principale SV.

$$SV = q + (R' + p) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Pour le shift de la courbe du No.17 on obtiendra.

$$p = 9.522 - 78186 (1 - \cos. 7°30')$$

$$p = 2.8 \text{ pieds}$$

On aura aussi

$$q = y - R' \sin. S = 206.627 - 102.03 = 104.6 \text{ pieds}$$

On peut aussi vérifier la longueur de la tangente principale que nous connaissons déjà

$$SV = q + (R' + p) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$p = 2.8 \ , \ q = 104.6 \ , \ R' = 781.86 \ , \ \frac{\alpha}{2} = 21°00'$$

$$SV = 104.6 + (781.86 + 2.8) \operatorname{tg}. 21°00' = 405.83 \text{ pieds}$$

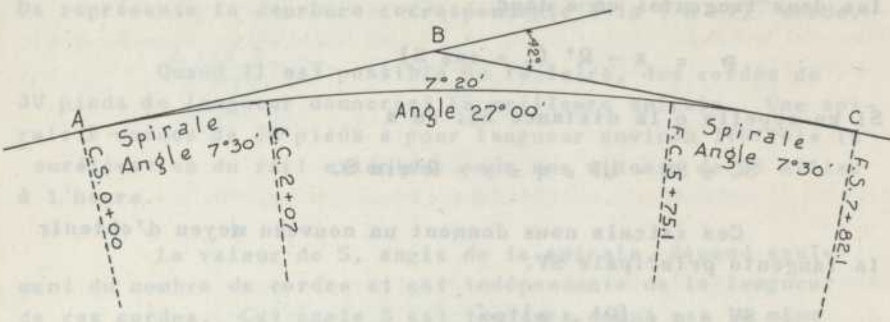
Nous avions trouvé 405.79 pieds.

---

(21) TRACÉ D'UNE COURBE AVEC SPIRALES SUR LE TERRAIN

Reprenons la courbe du No. 17

Angle de déflexion	α	=	42°
Degré de la courbe circulaire			7°20'
Spirale de 9 cordes de 23 pieds		=	207 pieds
Angle de la spirale	S	=	7°30'



C.S. Commencement de la spirale

C.C. Commencement de la courbe circulaire

F.C. Fin de la courbe circulaire

F.S. Fin de la spirale

On calculera la sous-tangente en employant la formule au No.17

Sous-tangente $= y + x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + R' \sin\left(\frac{\alpha}{2} - S\right)$

$y = 206.625, \ x = 9.522$

$R' = \dfrac{5730}{7°20'}$ **ou** $\dfrac{50}{\sin 3°40} = 781.86$ **pieds.**

$S = 7°30' \ , \quad \dfrac{\alpha}{2} = 21°$

$$\text{Sous-tg.} = 206.625 + 9.522 \text{ tg. } 21° + \frac{781.86 \sin (21° - 7°30')}{\cos 21°}$$

$$\text{Sous-tg.} = 206.625 + 3.655 + 195.51 = 405.79 \text{ pieds.}$$

Au point B on plantera un piquet marqué P.I. (Point d'intersection).

On placera un piquet aux points A et C à la distance 405.79 du point B. On plantera une latte marquée C.S. = 0 + 00 au point A

et une latte marquée F.S. au point C avec la longueur de la courbe qui sera le chaînage au point C.
On obtiendra la longueur de la courbe comme suit:

Longueur des 2 spirales = 2 x 207 = 414 pds.

Longueur de la courbe circulaire $\frac{27}{7°20'}$ x 100 = 368.1

Longueur totale 368.1 + 414 = 782.1 pds.

La latte au point C doit être marquée F.S. = 7 + 82.1

On tracera ensuite la courbe en mettant l'instrument au C.S.
Tableau des déflexions; l'instrument étant au point A=C.S.=0+00

Déflexions	Cordes	Stations
0° 00' 0"	0	0 C.S.
0° 05'	23	0 + 23
0°12' 30"	23	0 + 46
0°23' 20"	23	0 + 69
0°37' 30"	23	0 + 92
0°55'	23	1 + 15
1°15' 50"	23	1 + 38
1°40'	23	1 + 61
2°07' 30"	23	1 + 84
2°38' 19"	23	2 + 07C.C.

On peut maintenant transporter l'instrument au F.S. et opérer de la même manière en sens inverse pour les 9 cordes de la spirale jusqu'au F.C. On tracera ensuite la courbe circulaire.

Ou bien on transportera l'instrument au C.C. et on mettra le vernier à O. sur la tangente en ce point. Pour mettre l'instrument à O sur la tangente au C.C. On vise le point C.S. et on tourne un angle égal à l'angle de la spirale 7°30′ moins le dernier angle de déflexion, 2°38'19': 7°30' - 2°38'19=4°51'41"
L'instrument étant à O sur la tangente au C.C., on tracera ensuite la partie circulaire de la courbe entre le C.C. et le F.C. (voir No. 3).

Déflexions	Cordes	Stations
0° 00' 00"	0	2 + 07 C.C.
3° 40'	100	
3° 40'		3 + 07
3° 40'	100	
7° 20'		4 + 07
3° 40'	100	
11° 00'		5 + 07

Comme la courbe circulaire a une longueur:

$$\frac{27}{7°\,20'} = 368.1 \text{ pieds}$$

Il reste une corde de 68.1 pieds à partir de la station 5 + 07 pour arriver au F.C.

La déflexion pour une corde de 68.1 est

$$\frac{3°\,40' \times 68.1}{100} = 2°\,30'$$

Déflexions	Cordes	Stations
11° 00'		5 + 07
2° 30'	68.1	
13° 30'		5 + 75.1 F.C.

On marquera le F.C. avec un piquet et une latte marquée F.C. = 5 + 75.1 .

On transportera l'instrument au F.C. en le mettant à 0 sur la tangente en ce point. Pour le mettre à 0 il faut pointer le C.C. et tourner l'angle de déflexion 13°30' qui a servi pour fixer le F.C. L'instrument étant au F.C. on placera les 9 cordes de 23 pieds de la spirale à l'aide du tableau des déflexions suivantes. Le travail étant fait en sens inverse on calculera les déflexions comme suit: Pour obtenir la déflexion du point 5, par exemple, on retranchera l'angle de la spirale au point F.C. de l'angle que la corde 9-5 fait avec l'axe des y.

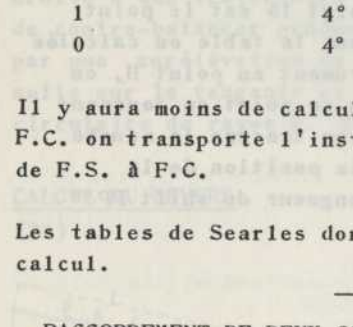
Points	Déflexions	Cordes	Stations
9	0° 00' 00"	0	5 + 75.1 F.C.
8	0° 45'	23	5 + 98.1
7	1° 27' 30"	23	6 + 21.1
6	2° 06' 40"	23	6 + 44.1
5	2° 42' 30"	23	6 + 67.1
4	3° 15' 00"	23	6 + 90.1
3	3° 44' 10"	23	7 + 13.1
2	4° 10' 01"	23	7 + 36.1
1	4° 32' 31"	23	7 + 59.1
0	4° 51' 41"	23	7 + 82.1 F.S.

Il y aura moins de calculs à faire si, après avoir localiser le F.C. on transporte l'instrument au F.S. pour tracer la spirale de F.S. à F.C.

Les tables de Searles donnent toutes ces déflexions sans aucun calcul.

RACCORDEMENT DE DEUX COURBES DE RAYONS DIFFÉRENTS A L'AIDE D'UNE SPIRALE (" COMPOUND CURVE ")

(22) On peut employer une spirale pour le raccordement de deux branches de courbes (compound curve) tout aussi bien que pour le raccordement d'une tangente avec une courbe circulaire.



Soit une courbe de 6° suivie d'une courbe de 10°40'. Il faut déplacer la courbe de plus petit rayon d'une quantité PP' que l'on appelle le "Shift" ou l'"offset", afin de pouvoir loger la spirale en prenant généralement la moitié de sa longueur sur l'une des courbes et l'autre moitié sur l'autre courbe. On peut choisir à volonter la longueur des cordes de la spirale. Prenons des cordes de 25 pieds. Sur une telle spirale le 9me. élément a une courbure de $\frac{100}{25} \times 1°30' = 6°$ et le 16me. élément une courbure de $\frac{100}{25} \times 2°40' = 10°40'$. Pour passer de la courbure de 6° à la courbure de 10°40' il faut donc employer les six éléments de la spirale compris entre le point 2 et le point 15. La longueur de la spirale sera (15-9)25= 150 pieds. Au point 9, la table donne 7°30' pour l'angle de la spirale et 20° au point 15. La différence est 12°30'.

On divisera cet angle total de la partie employée de la spirale en deux parties proportionnelles aux degrés des courbes. Les 12°30' divisés proportionnellement à 6° et 10°40' donnent 4°30' et 8°00'. Un arc de 4°30' sur une courbe de 6° a 75 pieds de longueur. De même un arc de 8° sur une courbe de 10°40' a aussi pour longueur 75 pieds. On mesurera 75 pieds de p en F pour localiser le point 9 de la spirale en F. On mettra l'instrument en station au point 9, le vernier à 0 sur la tangente en ce point et on calculera, ou on prendra dans les tables, les déflexions permettant de localiser les points 10, 11, 12, 13, 14, et 15. Le point 15 est le point H. La déflexion de la corde FH prise dans la table ou calculée donne 5°45'48". On transportera l'instrument au point H, on mettra le vernier à 0 sur la tangente en ce point en tournant sur la corde HF un angle de 6°44'11" et on tracera la courbe circulaire de 10°40' . On trouvera que la position de la courbe de 10°40' a été déplacée de la longueur du shift PP'= 1.02 pieds.

-III-

(Les ouvrages suivants ont été consultés pour la préparation de) la IIIe partie de cette étude).

---

(1) - Théorie des arcs de transition par Léon Gauthier, I.C.; bulletin des extraits de Revues Routière., No. 36 mai 1940.

(2) - Railroad curves and Earthwork by C.Frank Allen.; McGraw Hill Book Co. Inc., New-York.

(3) - Transition Curves for Highways by Joseph Barnett. For sale by the "Superintendant of Documents, Washington D.C."

(4) - Canadian Pacific Railway. Tables for spiral Curves., J.G. Sullivan.

****

III

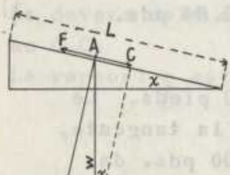
COURBE DE TRANSITION PARFAITE, PARABOLE ET SPIRALE CUBIQUES

(23)

L'objet de la courbe de transition, ou spirale, est double: 1°. elle permet de passer graduellement d'une trajectoire en ligne droite à une trajectoire circulaire de rayon R. 2°. Elle permet de contre-balancer graduellement l'effet de la force centrifuge par une surélévation de la courbe extérieure qui doit être nulle sur la tangente et atteindre son maximum sur la courbe circulaire de rayon R. Cette surélévation s'appelle le devers.

CALCUL DU DEVERS.

(24)



Soit, L, la largeur de la chaussée et x l'angle d'élévation d'une section transversale du chemin. Soit A le centre de gravité du véhicule, W sa pesanteur et R le rayon de la courbe. La force centrifuge F est donnée par la formule

$$F = \frac{m\,v^2}{R}$$

m est la masse, v la vitesse. La masse $m = \frac{W}{g}$

et la force F devient $F = \frac{W\,v^2}{g\,R}$

où g est la constante de l'accélération due à la pesanteur 32.16 pieds par seconde, par seconde.

La pesanteur au point A peut-être décomposée en deux forces; l'une AB normale au chemin, qui est équilibrée par la résistance du pavage et l'autre AC parallèle à la section transversale du chemin.

$$AC = W \sin. x$$

Cette dernière doit contre-balancer la force centrifuge F. Nous avons donc l'équation

$$W \sin.x = \frac{Wv^2}{gR}$$

$$\sin.x = \frac{v^2}{gR}$$

L'angle x étant toujours petit, on prendra la valeur de l'arc pour le sinus et le devers D sera donné par la formule:

$$D = L\sin.x = Lx = \frac{Lv^2}{gR} \quad (*)$$

EXEMPLE: Largeur de la chaussée 20 pieds, vitesse 60 milles à l'heure, courbe de 1°.

$$D = \frac{20 \times 60^2 \times 5280^2}{60^2 \times 60^2 \times 32.16 \times 5730} = 0.84 \text{ pds.}$$

Supposons la courbe spiralisée avec 3 cordes de 50 pieds. Le devers de la courbe extérieure commencera à O sur la tangente, au point CS. A 50 pieds il sera de 0.28 pd.; à 100 pds. de 0.56 pd.; et au C.C. sur la courbe circulaire il sera de 0.84 pd.; et conservera cette valeur sur toute la longueur de la courbe circulaire pour reprendre ensuite les mêmes valeurs en sens inverse, sur l'autre spirale.

Si v est exprimée en milles à l'heure, L et R étant en pieds la formule peut s'écrire

$$e = \frac{0.0668\ L\ v^2}{R}$$

(25)

NOTATIONS C.S.: commencement de la spirale

C.C.: commencement de la courbe circulaire

P. : un point quelconque sur la spirale

(*) Dans la pratique la pente du devers ne doit pas être supérieure à 0.1. Sur les routes on tient compte aussi de la force de friction des pneus sur le pavage, ce qui permet de diminuer le devers nécessaire pour équilibrer la force centrifuge. Voir à ce sujet "Transition Curves for Highways, by Joseph Barnett", Superintendent of Documents, Washington D.C.

R.: rayon de courbure au point P
Rc: rayon de courbure de la courbe circulaire.
ℓ : longueur de la spirale depuis C.S. jusqu'à P.
ℓ_c : longueur totale de la spirale
La tangente au C.S. est l'axe des y
La normale au C.S. est l'axe des x
S : l'angle de la spirale au point P. C'est l'angle entre les deux tangentes et aussi entre les deux normales.
Sc: l'angle total de la spirale.
D : degré de courbure en un point quelconque P
Dc: degré de courbure de la courbe circulaire.
e_c : surélévation de la courbe circulaire extérieure.
e : surélévation au point P.

(26)
TRANSITION PARFAITE

Le devers doit croître uniformément depuis O au C.S. jusqu'à e_c au C.C.
Le rapport $\frac{e}{\ell}$ est constant pour un point quelconque P de la spirale.

$$\frac{e}{\ell} = \frac{e_c}{\ell c}$$

Si on remplace e par sa valeur $\frac{0.0668\ L\ v^2}{R}$ nous aurons:

$$\frac{e}{\ell} = \frac{0.0668\ L\ V^2}{R\ell} = \text{ une constante}$$

Le facteur $0.0668\ LV^2$ est constant; on a donc $R\ell = A$, une constante aussi et

$$R\ell = Rc\ell c \qquad R = \frac{Rc\ell c}{\ell} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{Rc} = \frac{\ell c}{\ell}$$

Les degrés de courbure Dc et D sont inversement proportionnels aux rayons Rc et R. On a donc

$$\frac{Dc}{D} = \frac{R}{Rc} = \frac{\ell c}{\ell}$$

Soit $d\ell$ un élément infiniment petit de la spirale au point P on aura:

$$R\,dS = d\ell$$

$$dS = \frac{d\ell}{R}$$

$$dS = \frac{\ell d\ell}{Rc\ell c}$$

d'où

$$S = \frac{\ell^2}{2Rc\ell c} \text{ ou } \ell = \sqrt{2Rc\ell cS}$$

ℓ et R sont des longueurs et l'angle S est obtenu en radians. Dans la spirale du No. (17) nous avons $\ell c = 207$ et Rc = 781.86. L'angle de la spirale au C.C. sera

$$S = \frac{207^2}{2 \times 781.86 \times 207} = 0.13237 \text{ radian}$$

$$S = 7°35'$$

La spirale de Searles donne pour cet angle 7°30'.

La courbe que donne l'équation $S = \frac{\ell^2}{2Rc\ell c}$ est la courbe de transition parfaite, mais elle n'est pas avantageuse à employer pour la tracer sur le terrain. Les deux variables sont l'angle de la spirale S et la longueur ℓ, de la courbe depuis le C.S. jusqu'à un point quelconque P.

De la relation

$$R\ell = Rc\ell c$$

On tire la conclusion que si $\ell = \ell c$, R = Rc et si $\ell \to 0$ $R \to \infty$ et c'est bien ce qu'il nous faut.

(27) COORDONNÉES RECTANGULAIRES x et y

Cherchons maintenant les équations des coordonnées rectangulaires x et y On a

$$dx = d\ell.\sin.S$$

Le développement de sin. S par la formule de Maclaurin est

$$\sin.\ S = S - \frac{S^3}{\lfloor 3} + \frac{S^5}{\lfloor 5} - \ldots.$$

On tire de l'équation
$$S = \frac{\ell^2}{2Rc\ell c}$$

$$dS = \frac{\ell\, d\ell}{Rc\ell c}$$

$$d\ell = \frac{Rc\ell c\, dS}{\ell}$$

On a aussi
$$\ell = \sqrt{2Rc\ell c.S}$$

$$d\ell = \frac{Rc\ell c\ dS}{\sqrt{2Rc\ell c.S}}$$

$$d\ell = \frac{\sqrt{Rc\ell c}}{\sqrt{2}\ \sqrt{S}}\, dS \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2Rc\ell c}}{2\ \sqrt{S}}\, dS$$

et
$$dx = d\ell \sin.\ S = \frac{\sqrt{2Rc\ell c}}{2\sqrt{S}} \left(S - \frac{S^3}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{S^{5}}{\underline{\lfloor 5}} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) dS$$

ou
$$dx = \frac{\sqrt{2\ Rc\ell c}}{2} \left(S^{\frac{1}{2}} - \frac{S^{5/2}}{\underline{\lfloor 3}} + \frac{S^{9/2}}{\underline{\lfloor 5}} - \ldots\ldots\ldots\right) dS$$

En intégrant
$$x = \sqrt{2Rc\ell c} \left(\frac{S^{3/2}}{3} - \frac{S^{7/2}}{7\underline{\lfloor 3}} + \frac{S^{11/2}}{11\underline{\lfloor 5}} \cdots\cdots\right)$$

multipliant et divisant par $\sqrt{S} = \dfrac{\ell}{\sqrt{2Rc\ell c}}$

$$x = \ell\left(\frac{S}{3} - \frac{S^3}{7\,\underline{\lfloor 3}} + \frac{S^5}{11\,\underline{\lfloor 5}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Remplaçant S par sa valeur en fonction de ℓ

$$S = \frac{\ell^2}{2Rc\ell c}$$

on obtient pour valeur de x la série très convergente

$$x = \frac{\ell^3}{6Rc\ell c} - \frac{\ell^7}{42(2Rc\ell c)^3} + \frac{\ell^{11}}{1320(2Rc\ell c)^5}$$

En partant maintenant de la relation

$$dy = d\,\ell.\cos.S$$

et employant le développement de cos.S par la formule de Maclaurin

$$\cos.\,S = 1 - \frac{S^2}{\underline{|2}} + \frac{S^4}{\underline{|4}} - \cdots$$

on obtient pour y

$$dy = d\ell\left(1 - \frac{S^2}{\underline{|2}} \quad \frac{S^4}{\underline{|4}} - \ldots \quad\right)$$

$$dy = \frac{\sqrt{2Rc\ell c}}{2\sqrt{S}}\left(1 - \frac{S^2}{\underline{|2}} + \frac{S^4}{\underline{|4}} \ldots\right)dS$$

$$dy = \frac{\sqrt{2Rc\ell c}}{2}\left(S^{-\frac{1}{2}} - \frac{S^{3/2}}{\underline{|2}} + \frac{S^{7/2}}{\underline{|4}} \ldots\right)dS.$$

$$y = \sqrt{2Rc\ell c}\left(S^{\frac{1}{2}} - \frac{S^{5/2}}{5\underline{|2}} + \frac{S^{9/2}}{9\underline{|4}} - \ldots\quad\right)$$

Multipliant par $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}} = 1$

$$y = \ell\left(1 - \frac{S^2}{5\underline{|2}} + \frac{S^4}{9\underline{|4}} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Remplaçant S par $\frac{\ell^2}{2\ Rc\ell c}$

$$y = \ell - \frac{\ell^5}{10(2\ Rc\ell c)^2} + \frac{\ell^9}{216\ (2Rc\ell c)^4} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(28)

PARABOLE CUBIQUE

Nous avons $dx = d\ell \sin.\ S,\ dy = d\ell \cos.\ S.$

Comme l'angle S est toujours très petit on peut remplacer le sinus par l'arc et le cosinus par 1.

$$dx = S d\ell \qquad dy = d\ell$$

$$dx = \frac{\ell^2}{2Rc\ell c}\, d\ell \qquad y = \ell$$

En intégrant

$$x = \frac{\ell^3}{6Rc\ell c} = \frac{y^3}{6\ Rc\ell c}$$

C'est l'équation d'une parabole cubique. Appliquons cette équation au tracé d'une courbe de transition avec les données du problème No. 17.

$Dc = 7°20$
$Rc = 781.86$
ℓc = 4 cordes de 50 pieds = 200 pieds

Le chaînage étant 0+00 au C.S. on localisera 4 points sur la courbe 0+50, 1+00, 1+50, 2+00.
Calcul des ordonnées x.

ℓ	y	x
0+00	0	0
0+50	0+50	0.133
1+00	1+00	1.066
1+50	1+50	3.591
2+00	2+00	8.528

Ces calculs de x ne sont qu'approximatifs, vu que nous avons remplacé cos. S par 1. On peut remplacer sans erreur appréciable, sin. S par S, car la série qui donne le développement de sin. S en fonction de S converge très rapidement. On a par la formule de Maclaurin:

$$\sin.S = \left(S - \frac{S^3}{\lfloor 3} + \frac{S^5}{\lfloor 5} \dots \right)$$

On voit par les tables que pour un arc de 5° nous aurons

$$\text{arc } 5° = 0.0872665$$

$$\sin.5° = \underline{0.0871557}$$

$$0.0001108$$

La différence est négligeable dans la pratique. Il n'en est pas de même lorsqu'on remplace cos. S par 1. Car la formule de Maclaurin donne

$$\cos. S = 1 - \frac{S^2}{\lfloor 2} + \frac{S^4}{\lfloor 4} - \frac{S^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

Les tables donnent pour un arc de 5°

cos. approximatif de 5° = 1.

$$\text{par la table on a } \cos.5^\circ = \frac{0.9961947}{0.0038053}$$

C'est une erreur appréciable sur des travaux de précision. Si l'on ajoutait le 2ième terme de la série $\frac{S^2}{\lfloor 2}$ la nouvelle valeur du cosinus serait:

$$\text{cos. approximatif } 5^\circ = 1 - \frac{0.0872^2}{\lfloor 2} = 0.9961981$$

$$\text{cos. } 5^\circ \text{ avec 7 décimales} = \frac{0.9961947}{0.0000034}$$

La différence est alors négligeable au point de vue pratique

--SPIRALE CUBIQUE--

(29)
Reprenons la relation $dx = \dfrac{\ell^2 d\ell}{2Rc\ell c}.$

Au lieu de remplacer ℓ par y qui provient de l'hypothèse cos.S = 1, si nous intégrons en gardant ℓ nous obtenons

$$x = \frac{\ell^3}{6Rc\ell c}$$

x varie alors suivant le cube de la distance mesurée sur la courbe, et les calculs sont plus exacts. On obtient les mêmes valeurs pour x mais les longueurs sont mesurées sur l'arc de parabole, au lieu d'être mesurées sur l'axe des y.

ℓ	x
0+00	0
0+50	0.133
1+00	1.066
1+50	3.591
2+00	8.528

Nous appellerons cette dernière courbe "spirale cubique", nom qui lui est donné par C. Frank Allen dans "Railroad Curves and Earthwork".

Nous avons étudié quatre courbes de transition différentes:

1° - Celle de Searles qui est composée d'une suite d'arcs de cercles dont la courbure varie suivant une progression arithmétique depuis la tangente jusqu'à l'arc de cercle central.

2° - La courbe idéale de transition dont les coordonnées x et y sont données en fonction de "ℓ" par les équations

$$x = \frac{\ell^3}{6Rc\ell c} - \frac{\ell^7}{42(2Rc\ell c)^3} + \frac{\ell^{11}}{1320(2Rc\ell c)^5} - \dots$$

$$y = \ell - \frac{\ell^5}{10(2Rc\ell c)^2} + \frac{\ell^9}{216(2Rc\ell c)^4} - \dots$$

3° - La "parabole cubique" dont l'équation est

$$x = \frac{y^3}{6\ Rc\ell c}$$

4° - La courbe dite "spirale cubique" dont l'équation est

$$x = \frac{\ell^3}{6\ Rc\ell c}$$

Les trois dernières courbes sont théoriquement préférables à la spirale de Searles. Elles ont cependant l'inconvénient de demander des calculs laborieux et l'exposé de leur théorie demande l'application des principes, très élémentaires il est vrai, du calcul différentiel et intégral. Mais comme dans la pratique on doit faire usage des tables pour obtenir les coordonnées dont on a besoin, on peut employer n'importe laquelle des quatre courbes étudiées sans aucun calcul sur le terrain. On peut se permettre en classe de faire tous les calculs nécessaires au tracé d'une courbe de transition, mais, comme le dit l'ingénieur de la Voirie, Léon Gauthier dans une étude, très bien faite, publiée dans le No. 36, mai 1940, du "Bulletin des extraits de Revues Routières":

"Il faut songer un peu au malheureux ingénieur qui "
"doit calculer une série de coordonnées sur le ter- "
"rain, soit en hiver à 20° sous zéro, soit en été, à "
"travers une nuée de maringouins. L'emploi de tables"
"s'impose où il faut simplifier les calculs en négli-"
"geant certains termes des séries."

MÉTHODE EMPLOYÉE SUR LE CHEMIN DE FER DU PACIFIQUE CANADIEN

(30)

Sur le chemin de fer du Pacifique Canadien les ingénieurs emploient la méthode suivante pour le tracé des spirales.

I.- La spirale a deux fois la longueur de la partie de la courbe circulaire qu'elle remplace.

2.- L'angle total de la spirale est égal à l'angle au centre de la partie de la courbe circulaire qu'elle remplace.

3.- L'angle de déflexion du commencement de la spirale C.S. à un point p quelconque de celle-ci est proportionnel au carré de la distance depuis le C.S. jusqu'au point p mesurée sur la spirale.

4.- L'ordonnée depuis la tangente jusqu'à un point p sur la spirale est proportionnelle au cube de la distance du point p au C.S. mesurée sur la tangente (approximativement).

5.- La longueur de la spirale sera 100 pieds multipliés par le degré de la courbe circulaire spiralisée. On n'emploiera pas de spirales plus grandes que 400 pieds et plus petite que 100 pieds. Quand la distance, en ligne droite, entre deux courbes sera trop petite pour permettre l'usage d'une spirale de 400 pieds, on pourra employer des spirales de 200 et de 100 pieds.

6.- La courbure d'une spirale de 400 pieds augmente au taux de 1° par 100 pieds pour les courbes circulaires de 4° et moins. Pour les courbes au-dessus de 4° la courbure augmente de $\dfrac{1° \times \text{degré de courbure}}{4}$ degrés par 100 pieds.

La courbure d'une spirale de 200 pieds augmente au taux de 1° par 50 pieds pour les courbes circulaires de 4° ou moins. Pour les courbes au-dessus de 4° la courbure augmente de $\dfrac{1° \times \text{degré de courbure}}{4}$ degrés par 50 pieds.

La courbure d'une spirale de 100 pieds augmente au taux de 1° par 25 pieds. Pour les courbes circulaires de 4° (degré de courbure minimum). Pour les courbes au-dessus de 4 , la courbure augmente de $\dfrac{1° \times \text{degré de courbure}}{4}$ par 25 pieds.

Quand la courbure d'une spirale dépasse 5°, elle doit être localisée avec des cordes de 50pieds.

Des tables complètes sont fournies aux ingénieurs leur permettant d'obtenir avec un minimum de calcul, tous les éléments dont ils ont besoin. Sous-tangente, sécante extérieure, angles de déflexions, ordonnées (shift) etc.

EXEMPLE: Supposons que l'on raccorde deux alignements faisant un angle de déflexion de 52°48' avec une courbe de 4° spiralisée. La longueur de la spirale sera 400 pieds. Une moitié est prise sur la courbe circulaire et par conséquent l'angle total de la spirale sera 8° . L'angle au centre de la partie circulaire sera 36°48'. On calculera la sous-tangente c'est-à-dire la distance entre le C.S. et le P.I. On obtient cette longueur en la calculant ou en prenant dans les tables la sous-tangente d'une courbe de 1° pour une déflexion de 52°48' que l'on divisera par 4. On additionnera la moitié de la spirale et on ajoutera une correction que l'on trouvera dans une table spéciale.

Nous obtiendrons:

$$\text{Sous-tg.} = \frac{2844.2}{4} + \frac{400}{2} + 2.2 = 913.3 \text{ pieds.}$$

On localisera le C.S. en mesurant 913.3 pieds du P.I. supposons le C.S. à la station 125 + 23.

Les points principaux de la courbe seront aux chainages suivants:

C.S. ------------------------------------	125+23
Spirale ----------------------------------	4+00
C.C. ------------------------------------	129+23
Longueur de la courbe circulaire:	
$\frac{36.8}{4}$ x 100 = 920 pieds..................	9+20
F.C. ------------------------------------	138+43
Longueur de la spirale-------------------	4+00
F.S. ------------------------------------	142+43

On se sert ensuite des tables pour localiser la courbe totale entre le C.S. et le F.S. à l'aide des angles de déflexions. La méthode est la même que celle que nous avons décrite pour la spirale de Searles au No. 21.

&&&&&&&&&

EXTRAIT DE LA TABLE I de SEARLES

Point $n.$	Degree of curve $D_s.$	Spiral angle $s.$	Inclination of chord to axis of Y	Latitude of each chord. $100 \times \cos$ Incl.	Sum of the latitudes, $y.$
0	0° 00'	0° 00'	0° 00'		
1	10'	10'	05'	99.99989423	99.99989423
2	20'	30'	20'	99.99830769	199.99820192
3	30'	1°	45'	99.99143275	299 98963467
4	40'	1° 40'	1° 20'	99.97292412	399.96255879
5	50'	2° 30'	2° 05'	99.93390007	499 89645886
6	1°	3° 30'	3°	99.8629535	599.7591123
7	1° 10'	4° 40'	4° 05'	99.7461539	699.5055662
8	1° 20'	6°	5° 20'	99.5670790	799.0726452
9	1° 30'	7° 30'	6° 45'	99.3068457	898.3794909
10	1° 40'	9° 10'	8° 20'	98.944164	997.3236549
11	1° 50'	11°	10° 05'	98.455415	1095.779070
12	2°	13°	12°	97.814760	1193 593830
13	2° 10'	15° 10'	14° 05'	96.994284	1290.588114
14	2° 20'	17° 30'	16° 20'	95.964184	1386.552298
15	2° 30'	20°	18° 45'	94.693014	1481.245312
16	2° 40'	22° 40'	21° 20'	93.147975	1574.393287
17	2° 50'	25° 30'	24° 05'	91.295292	1665.688579
18	3°	28° 30'	27°	89.100650	1754.789229
19	3° 10'	31° 40'	30° 05'	86.529730	1841.318959
20	3° 20'	35°	33° 20'	83.548780	1924.867739

R_s	Point $n.$	$\operatorname{Log} \frac{x}{y} =$ $\log \tan i.$	Deflection angle, $i.$
34377.5	1	7.1626964	0° 05' 00."00
17188.8	2	7.5606380	0° 12' 30."00
11459.2	3	7.8317091	0° 23' 20."00
8594.42	4	8.0377730	0° 37' 29."99
6875.55	5	8.2041217	0° 54' 59."97
5729.65	6	8.3436473	1° 15' 49."90
4911.15	7	8.4638309	1° 39' 59."75
4297.28	8	8.5694047	2° 07' 29."45
3819.83	9	8.6635555	2° 38' 18."90
3437.87	10	8.7485340	3° 12' 27."95

EXTRAIT DE LA TABLE I de SEARLES

Departure of each chord, 100 × sin Incl.	Sum of the departures, x.	Logarithm, $\log y$.	Logarithm, $\log x$.	Point n.
				0
.1454441	.1454441	1.9999995	9.1626960	1
.5817731	.7272172	2.3010261	9.8616641	2
1.3089593	2.0361765	2.4771063	0.3088154	3
2.3268960	4.3630725	2.6020194	0.6397924	4
3.6353009	7.9983734	2.6988800	0.9030017	5
5.233596	13.231969	2.7779771	1.1216244	6
7.120730	20.352699	2.8447911	1.3086220	7
9.294991	29.647690	2.9025862	1.4719909	8
11.75374	41.40143	2.9534598	1.6170153	9
14.49319	55.89462	2.9988361	1.7473701	10
17.50803	73.40265	3.0397231	1.8657117	11
20.79117	94.19382	3.0768567	1.9740224	12
24.33329	118.52711	3.1107877	2.0738177	13
28.12251	146.64962	3.1419362	2.1662811	14
32.14395	178.79357	3.1706269	2.2523519	15
36.37932	215.17289	3.1971131	2.3327875	16
40.80649	255.97938	3.2215938	2.4082049	17
45.39905	301.37843	3.2442250	2.4791121	18
50.12591	351.50434	3.2651291	2.5459307	19
54.95090	406.45524	3.2844009	2.6090128	20

Point n.	$\log \frac{x}{y} =$ $\log \tan i$.	Deflection angle, i.	R_s	
11	8.8259886	3° 49′ 56.″39	3125.36	
12	8.8971657	4° 30′ 43.″95	2864.93	
13	8.9630300	5° 14′ 50.″28	2644.58	
14	9.0243449	6° 02′ 14.″93	2455.70	
15	9.0817250	6° 52′ 57.″31	2292.01	
16	9.1356744	7° 46′ 56.″71	2148.79	
17	9.1866111	8° 44′ 12.″26	2022.41	
18	9.2348871	9° 44′ 42.″92	1910.08	
19	9.2808016	10° 48′ 27.″44	1809.57	
20	9.3246119	11° 55′ 24.″34	1719.12	

EXTRAIT DE LA TABLE II de SEARLES

Inst. at 1. $s = 0° 10'$.			Inst. at 2. $s = 0° 30'$.		
No. of Point.	Deflection from aux. tan.	Diff. of Deflection.	No. of Point.	Deflection from aux. tan.	Diff. of Deflection.
0	05		0	17' 30"	
1	00	05'	1	10	7' 30"
2	10	10	2	00	10
3	22 30"	12 30"	3	15	15
4	38 20	15 50	4	32 30	17 30
5	57 30	19 10	5	53 20	20 50
6	1° 20 00	22 30	6	1° 17 30	24 10
7	1 45 50	25 50	7	1 45 00	27 30
8	2 15 00	29 10	8	2 15 50	30 50
9	2 47 29	32 29	9	2 49 59	34 09
10	3 23 18	35 49	10	3 27 29	37 30
11	4 02 27	39 09	11	4 08 18	40 49
12	4 44 55	42 28	12	4 52 26	44 08
13	5 30 42	45 47	13	5 39 54	47 28
14	6 19 47	49 05	14	6 30 40	50 46
15	7 12 11	52 24	15	7 24 44	54 04
16	8 07 51	55 40	16	8 22 06	57 22
17	9 06 49	58 58	17	9 22 45	60 39
18	10 09 01	62 12	18	10 26 39	63 54
19	11 14 28	65 27	19	11 33 49	67 10
20	12 23 08	68 40	20	12 44 12	70 23

(La table complète donne les déflexions pour toutes les positions de l'instrument aux points 1. 2...... jusqu'à 20.)

EXTRAIT DE LA TABLE III de SEARLES

c. CHORD-LENGTH = 11.					
n.	nc.	D_s.	y.	x.	Log x.
1	11	1° 30' 55"	11.000	0.0160	8.204089
2	22	3 01 50	22.000	.0800	8.903057
3	33	4 32 48	32.999	.2240	9.350208
4	44	6 03 48	43.996	.4799	9 681185
5	55	7 34 52	54.989	.8798	9.944394
6	66	9 06 01	65.974	1.456	0.163017
7	77	10 37 16	76.946	2.239	0.350015
8	88	12 08 37	87.898	3.261	0.513384
9	99	13 40 06	98.822	4.554	0.658408
10	110	15 11 44	109.706	6.148	0.788763
11	121	16 43 31	120.536	8.074	0.907104
12	132	18 15 29	131.295	10.361	1.015415
13	143	19 47 39	141.965	13.038	1.115210
14	154	21 20 01	152.521	16.131	1.207674
15	165	22 52 38	162.937	19.667	1.293745
16	176	24 25 29	173.183	23.669	1.374180
17	187	25 58 36	183.226	28.158	1.449598
18	198	27 32 01	193.027	33.152	1.520505
19	209	29 05 45	202.545	38.665	1.587323
20	220	30 39 48	211.735	44.710	1.650405
		32 14 11			

(La table complète contient toutes les longueurs de cordes depuis 10 pieds jusqu'à 50 pieds.)

Des ateliers de TREMBLAY & DION Inc., Québec